CAPÍTULO 9 - AULA 1

DEFLEXÃO DE VIGAS E EIXOS

17 de novembro de 2026

OBSERVAÇÃO

- O conteúdo deste capítulo corresponde ao Capítulo 12 do livro-texto.

Objetivo do capítulo

- Neste capítulo discutiremos vários métodos para determinar a deflexão e a inclinação de vigas e eixos.
- Métodos analíticos incluem métodos da integração, o método da superposição e a utilização de funções de descontinuidade.

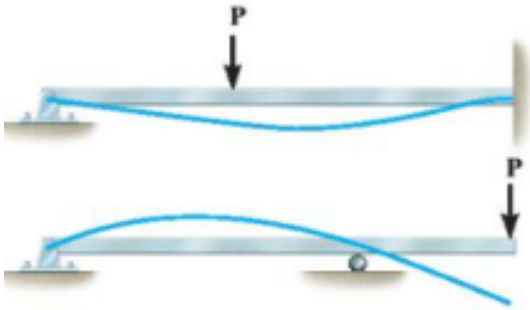


FIGURA 12.1

Por que calcular deflexões?

- Além da **resistência** (tensões admissíveis), a viga deve atender a critérios de **rigidez**: limitar flechas excessivas evita fissuras em acabamentos, vibrações incômodas e mau funcionamento de equipamentos.
- As deflexões também são necessárias para resolver problemas **estaticamente indeterminados** e na análise de **flambagem** e **vibrações**.
- Em projeto, usa-se um limite do tipo

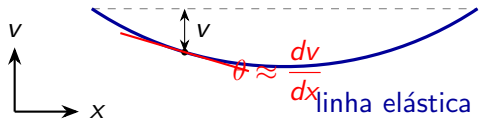
$$|v_{\max}| \leq \frac{L}{n} \qquad \text{(por exemplo, } n = 360 \text{ ou } n = 250\text{)}.$$

(textvalores ilustrativos, consultar a norma aplicável)

Ideia central

A **linha elástica** é a curva em que se transforma o eixo longitudinal da viga (inicialmente reto) após o carregamento.

Linha elástica: definições e convenção de sinais

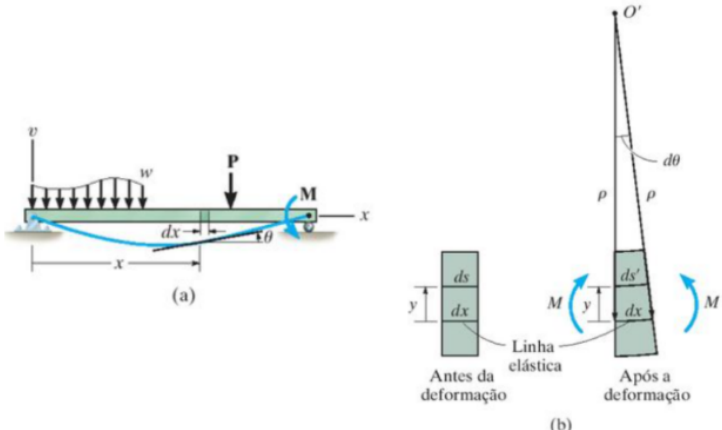


- x: positivo à direita (ao longo da viga).
- v: **deflexão** (deslocamento transversal do eixo), positiva **para cima**.
- θ: **inclinação** da tangente à linha elástica, positiva no sentido anti-horário.
- Para pequenas inclinações:

$$\tan\theta \approx \theta \approx \frac{dv}{dx}.$$

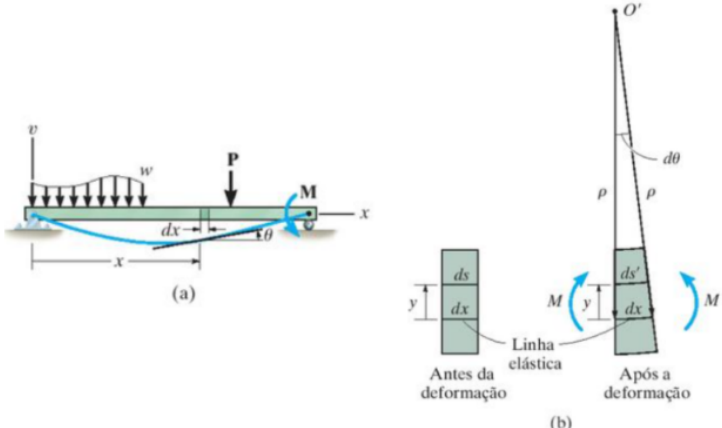
Relação momento fletor-curvatura

- Antes de podermos obter a inclinação e a deflexão em qualquer ponto da linha elástica, é necessário primeiro relacionar o momento fletor interno ao raio de curvatura ρ da curva elástica.



Relação momento fletor-curvatura

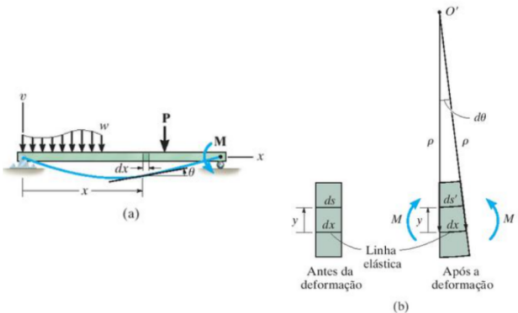
- Para fazer isso, vamos considerar a viga da Figura 12.5 e retirar um pequeno elemento localizado a uma distância x da extremidade esquerda e tendo um comprimento não deformado dx.



Relação momento fletor-curvatura

- A coordenada y "localizada" é medida a partir da linha elástica (eixo neutro) até a fibra na viga que tem comprimento original $ds = dx$ e um comprimento deformado ds', ou seja:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y}$$



Relação momento fletor-curvatura

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y}$$

- Como a lei de Hooke se aplica,

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

tem-se

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Relação momento fletor-curvatura

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

- ρ: raio de curvatura em um ponto sobre a linha elástica ($1/\rho$ refere-se à curvatura).
- M: momento fletor interno na viga no ponto.
- E: módulo de elasticidade.
- I: momento de inércia da viga calculado em torno do eixo neutro.

Relação momento fletor-curvatura

- O sinal de ρ depende da direção do momento. Quando o momento M é *positivo*, ρ estende-se *acima* da viga, e quando M é *negativo*, ρ estende-se *abaixo* da viga.

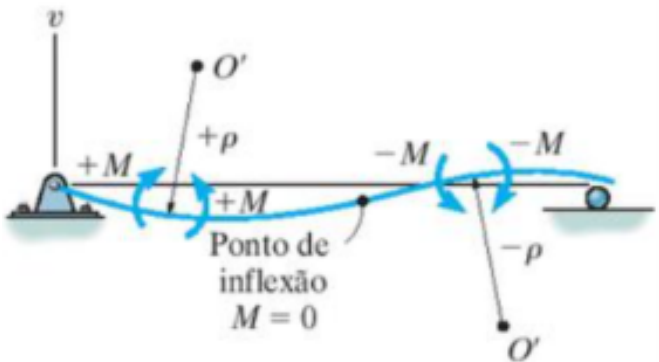


FIGURA 12.6

Inclinação e deslocamento por integração

- Curvatura de uma curva $v(x)$ (vide livros de cálculo):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + (dv/dx)^2\right]^{3/2}}$$

- Para **pequenas inclinações**, $(dv/dx)^2 \ll 1$, e então $1/\rho \approx d^2v/dx^2$:

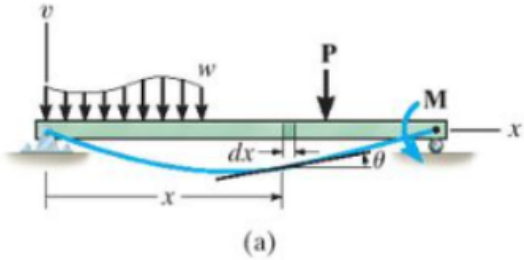


Figura: Fig 12.6

Inclinação e deslocamento por integração

- Da teoria da flexão:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

- Curvatura de uma curva $v(x)$ (vide livros de cálculo):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + (dv/dx)^2\right]^{3/2}}$$

- Para **pequenas inclinações**, $(dv/dx)^2 \ll 1$, e então $1/\rho \approx d^2v/dx^2$:

Equação diferencial da linha elástica

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

Hipóteses: material linear elástico; pequenas deflexões; deformação por cisalhamento desprezada; EI conhecida em cada trecho.

Equações relacionadas (EI constante)

Com $w(x)$ positivo para cima, $V = dM/dx$ e $w = dV/dx$:

$$\theta \approx \frac{dv}{dx}$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = M(x)$$

$$EI\,\frac{d^3v}{dx^3} = V(x)$$

$$EI\,\frac{d^4v}{dx^4} = w(x)$$

- Partindo de $w(x)$ são necessárias **4 integrações**; partindo de $M(x)$, apenas **2**.
- Cada integração introduz uma constante, determinada pelas condições de contorno e de continuidade.

Condições de contorno e de continuidade

Situação	**Condições**
Pino ou rolete	$v = 0$
Engaste	$v = 0$ e $\theta = 0$
Extremidade livre	$M = 0$ e $V = 0$ $\quad (v'' = 0,\ v''' = 0)$
Rótula interna	$M = 0$ $\quad (\theta$ pode ser descontínua$)$
Junção de dois trechos de integração	$v_1 = v_2$ e $\theta_1 = \theta_2$ (continuidade)

Contagem de constantes

Se $M(x)$ exige k trechos de integração, surgem $2k$ constantes, e são necessárias $2k$ condições: as de contorno nos apoios e as de continuidade nas junções.

Exemplo 1 – Viga em balanço com carga na extremidade

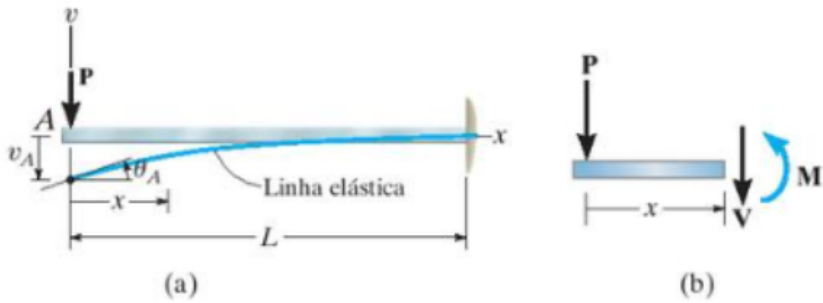


Figura: Exemplo 1

- Origem do eixo x: extremo livre.
- Equação de momento fletor:

$$M(x) = -Px$$

Exemplo 1 – Viga em balanço com carga na extremidade

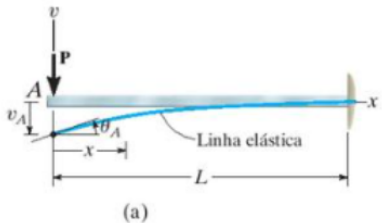


Figura: Exemplo 1

- Inclinação e linha elástica:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EIv(x) = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

Exemplo 1 – Viga em balanço com carga na extremidade

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EIv(x) = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2$$

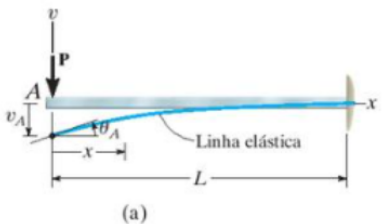


Figura: Exemplo 1

- Condições de contorno: no engaste (x=L):
  - $\theta = 0 \rightarrow C_1 = \frac{PL^2}{2}$
  - $v = 0 \rightarrow C_2 = \frac{PL^3}{3}$

Exemplo 1 – Viga em balanço com carga na extremidade

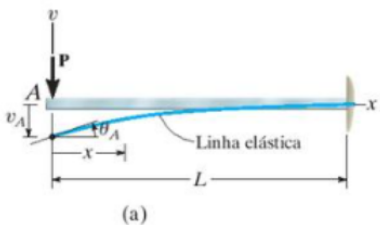


Figura: Exemplo 1

$$\frac{dv}{dx} = \theta = -\frac{P}{2EI}\left(L^2 - x^2\right)$$

$$v(x) = -\frac{P}{6EI}\left(-x^3 + 3L^2x - 2L^3\right)$$

A inclinação e deslocamento máximos ocorrem em A($x = 0$), para os quais:

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$v_A = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

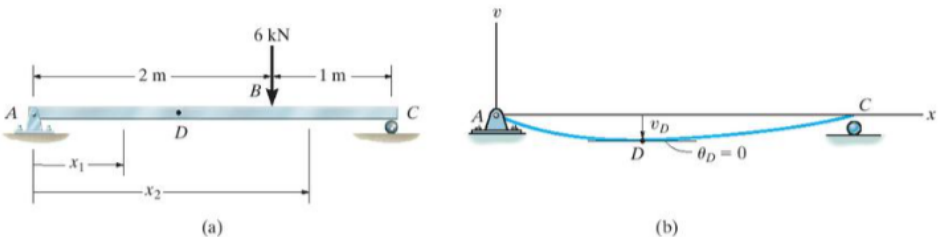


Figura: Exemplo 2

A viga sofre deflexão como mostrado na Figura (b). Duas coordenadas devem ser usadas, uma vez que a função do momento mudará em B. Aqui consideraremos x_1 e x_2 como tendo a mesma origem em A.

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

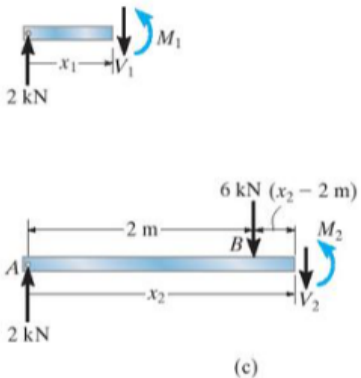


Figura: Exemplo 2

- Equações de momentos fletores:

$$M_1(x) = 2x_1$$

$$M_2(x) = 2x_2 - 6(x_2 - 2) = 4(3 - x_2)$$

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

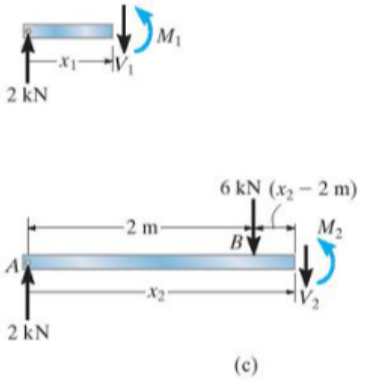


Figura: Exemplo 2

- Inclinação e linha elástica:

$$M_1(x) = 2x_1 \rightarrow 0 \leq x_1 \leq 2m$$

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = 2x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = x_1^2 + C_1$$

$$Eiv_1 = \frac{x_1^3}{3} + C_1x_1 + c_2$$

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

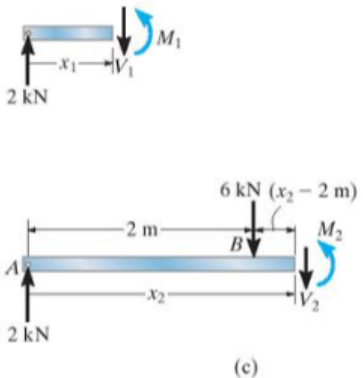


Figura: Exemplo 2

- Inclinação e linha elástica:

$$M_2(x) = 4(3 - x_2) \rightarrow 2m \leq x_2 \leq 3m$$

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = 4(3 - x_2)$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = 4\left(3x_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + C_3$$

$$Eiv_1 = 4\left(\frac{3}{2}x_2^2 - \frac{x_2^3}{6}\right) + C_3x_2 + C_4$$

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

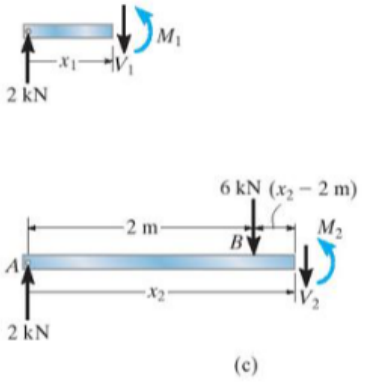


Figura: Exemplo 2

As quatro constantes de integração são calculadas usando as duas condições de contorno:

- $x_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0$
- $x_2 = 3\text{m} \rightarrow v_2 = 0$

Além disso, duas condições de continuidade devem ser aplicadas em B, ou seja:

- $\dfrac{dv_1}{dx_1} = \dfrac{dv_2}{dx_2} =$ em $x_1 = x_2 = 2\text{m}$
- $v_1 = v_2$ em $x_1 = x_2 = 2\text{m}$

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

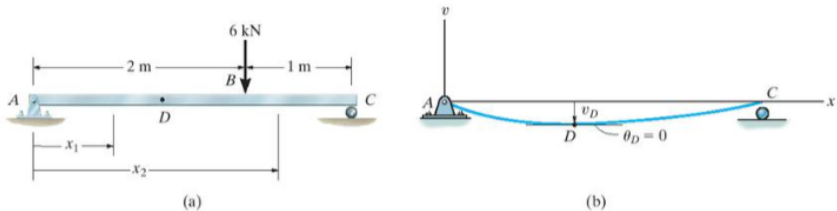


Figura: Exemplo 2

Resolvendo o sistema de equações, temos:

$$C_1 = -\frac{8}{3} \qquad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{44}{3} \qquad C_4 = 8$$

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

Equações das inclinações e linha elástica:

- $0 \leq x_1 \leq 2\text{m}$:

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = x_1^2 - \frac{8}{3}$$

$$EIv_1 = \frac{x_1^3}{3} - \frac{8}{3}x_1$$

- $2\text{m} \leq x_2 \leq 3\text{m}$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = 12x_2 - 2x_2^2 - \frac{44}{3}$$

$$EIv_2 = 6x_2^2 - \frac{2}{3}x_2^3 - \frac{44}{3}x_2 + 8$$

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga concentrada (EI constante)

Pela inspeção da curva elástica, observa-se que a deflexão máxima ocorre no ponto D, localizado no trecho AB. Nesse ponto, a inclinação da curva elástica é nula:

$$\theta_D = \frac{dv}{dx} = 0 \rightarrow x_1^2 - \frac{8}{3} = 0 \rightarrow \boxed{x_1 = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1{,}633}$$

Substituindo o valor de x_1 na Eq. (6), obtém-se:

$$\boxed{v_{\max} = -\frac{2{,}90\ \text{kN} \cdot \text{m}^3}{EI}}$$

O sinal negativo indica que a deflexão máxima ocorre no sentido descendente (para baixo).

Exemplo 3 – Viga biapoiada com balanço (EI constante)

Determine o deslocamento da seção C (EI constante).

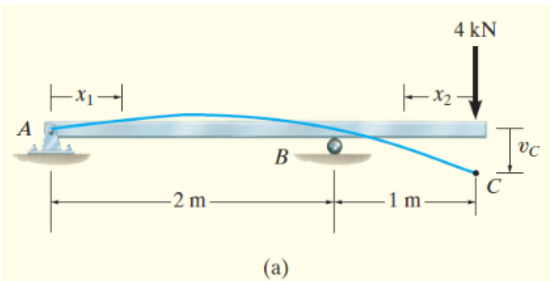
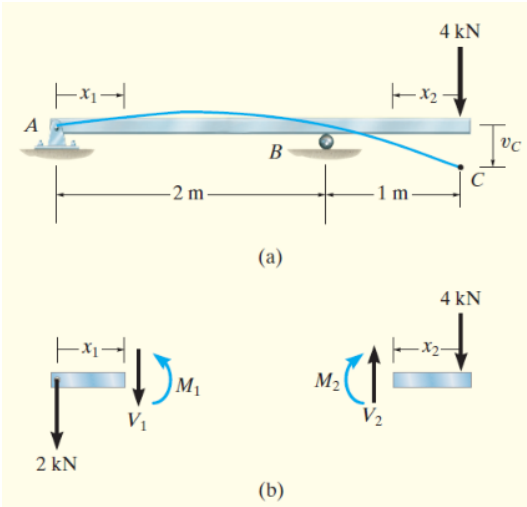


Figura: Exemplo 3

Exemplo 3 – Viga biapoiada com balanço (EI constante)

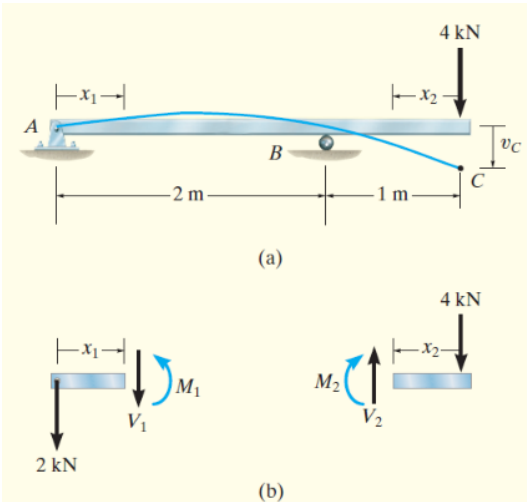


A viga se deforma assumindo a configuração apresentada na Figura. Devido ao carregamento aplicado, serão consideradas duas coordenadas x, definidas nos seguintes intervalos:

$0 \leq x_1 \leq 2\,\text{m}$ e $0 \leq x_2 \leq 1\,\text{m}$

A coordenada x_2 é orientada para a esquerda, a partir do ponto C, pois essa escolha facilita a formulação do momento fletor interno.

Exemplo 3 – Viga biapoiada com balanço (EI constante)



- Funções de momento
  Utilizando os diagramas de corpo livre apresentados na Figura, obtêm-se as seguintes expressões para o momento fletor:

$$\boxed{M_1 = -2x_1} \qquad \boxed{M_2 = -4x_2}$$

Exemplo 3 – Viga biapoiada com balanço (EI constante)

Inclinação e Curva Elástica

Trecho 1: $0 \leq x_1 \leq 2\,\text{m}$
Equação diferencial da linha elástica:

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -2x_1$$

Integrando uma vez (inclinação):

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = -x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

Integrando novamente (curva elástica):

$$EIv_1 = -\frac{1}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

Trecho 2: $0 \leq x_2 \leq 1\,\text{m}$ Equação diferencial da linha elástica:

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = -4x_2$$

Integrando uma vez (inclinação):

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = -2x_2^2 + C_3 \qquad (3)$$

Integrando novamente (curva elástica):

$$EIv_2 = -\frac{2}{3}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \qquad (4)$$

Exemplo 3 – Viga biapoiada com balanço (EI constante)

Condições de contorno

Como $v_1 = 0$ em $x_1 = 0$:

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

Como $v_1 = 0$ em $x_1 = 2\,\text{m}$:

$$0 = -\frac{1}{3}(2)^3 + 2C_1 + C_2$$

Como $v_2 = 0$ em $x_2 = 1\,\text{m}$:

$$0 = -\frac{2}{3}(1)^3 + C_3 + C_4$$

Condição de continuidade da inclinação

No ponto de ligação entre os dois trechos, a inclinação deve ser contínua. Como as coordenadas x_1 e x_2 possuem sentidos opostos:

$$\left.\frac{dv_1}{dx_1}\right|_{x_1=2} = -\left.\frac{dv_2}{dx_2}\right|_{x_2=1} \rightarrow \; -(2)^2 + C_1 = -\left[-2(1)^2 + C_3\right]$$

Resolvendo o sistema de equações, obtêm-se:

$$C_1 = \frac{4}{3} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{14}{3} \qquad C_4 = -4$$

Equação da curva elástica no trecho 2

Substituindo os valores de C_3 e C_4 na equação da curva elástica, obtém-se:

$$EIv_2 = -\frac{2}{3}x_2^3 + \frac{14}{3}x_2 - 4$$

Determinação do deslocamento no ponto C

O deslocamento no ponto C é determinado fazendo $x_2 = 0$:

$$v_C = -\frac{4\ \text{kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$$

$$\boxed{v_C = -\frac{4\ \text{kN} \cdot \text{m}^3}{EI}}$$

O sinal negativo indica que o deslocamento ocorre para baixo.

Exemplo 2 – Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída

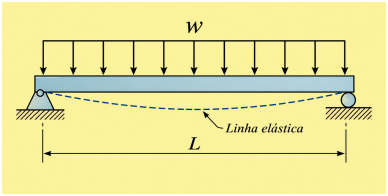


Figura: Exemplo 2

Momento: $M(x) = \dfrac{wL}{2}x - \dfrac{w}{2}x^2$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = \tfrac{wL}{4}x^2 - \tfrac{w}{6}x^3 + C_1$$
$$EI\,v = \tfrac{wL}{12}x^3 - \tfrac{w}{24}x^4 + C_1 x + C_2$$

Contorno: $v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$;
$v(L) = 0 \Rightarrow C_1 = -\dfrac{wL^3}{24}$.

Resultado

$$v(x) = -\frac{w\,x}{24EI}\left(L^3 - 2Lx^2 + x^3\right)$$

$$\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI}, \quad \theta_B = +\frac{wL^3}{24EI}, \quad v_{\max} = v\left(\tfrac{L}{2}\right) = -\frac{5wL^4}{384EI}$$