CAPÍTULO 7 - AULA 1

TENSÕES CISALHANTES

4 de novembro de 2026

Objetivos do capítulo

- Neste capítulo, desenvolveremos um método para determinar a tensão de cisalhamento em uma viga.

Cisalhamento em elementos retos

- De modo geral, uma viga está sujeita tanto a um esforço cortante interno quanto a um momento fletor. O esforço cortante V resulta de uma distribuição de tensões de cisalhamento transversais que atuam na seção transversal da viga (Fig. 7–1). Devido à propriedade de complementaridade do cisalhamento, essa tensão também gera tensões de cisalhamento longitudinais correspondentes, que atuam ao longo do comprimento da viga.

Cisalhamento em elementos retos

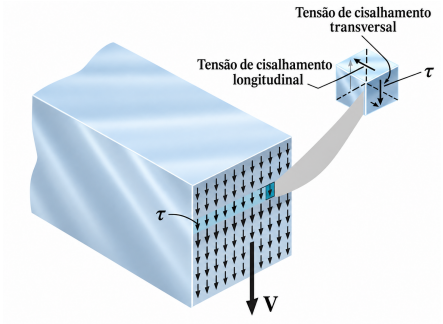


Figura: Fig. 7-1.

Cisalhamento em elementos retos

- Para ilustrar o efeito da tensão de cisalhamento longitudinal, considere a viga composta por três tábuas, mostrada na Fig. 7–2(a). Se as superfícies superior e inferior de cada tábua forem lisas e as tábuas não estiverem unidas entre si, a aplicação da carga **P** fará com que deslizem umas em relação às outras quando a viga sofrer deflexão.

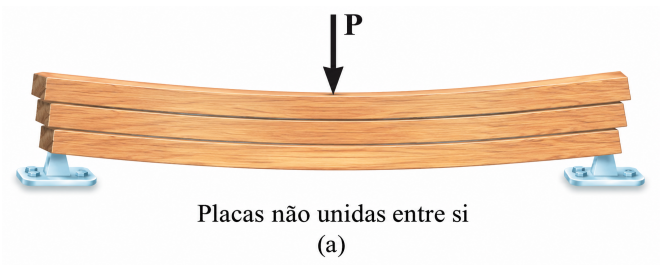


Figura: Fig. 7–2(a).

Cisalhamento em elementos retos

- Contudo, se as tábuas estiverem unidas, a tensão de cisalhamento longitudinal que atua entre elas impedirá o deslizamento relativo; consequentemente, a viga passará a atuar conforme ilustrado na Fig. 7–2(b).

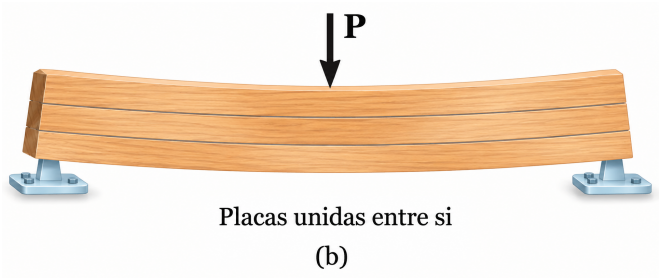


Figura: Fig. 7–2(b).

Cisalhamento em elementos retos

- Como resultado da tensão de cisalhamento, ocorrerão deformações de cisalhamento que tenderão a distorcer a seção transversal de forma bastante complexa. Por exemplo, considere a barra curta apresentada na Fig. 7–3(a), feita de um material altamente deformável e marcada com linhas horizontais e verticais.

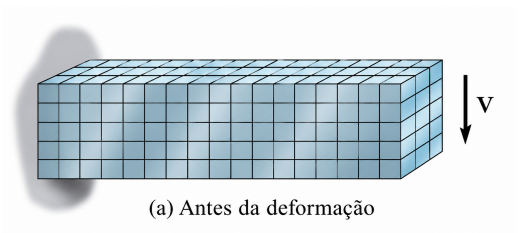
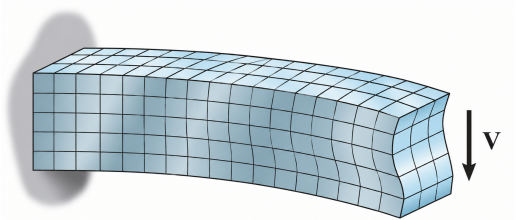


Figura: Fig. 7–3(a).

Cisalhamento em elementos retos

- Quando a força de cisalhamento **V** é aplicada, ela tende a deformar essas linhas, resultando no padrão ilustrado na Fig. 7–3(b). Essa distribuição não uniforme da deformação por cisalhamento fará com que a seção transversal sofra empenamento; consequentemente, quando uma viga é submetida tanto à flexão quanto ao cisalhamento, a seção transversal não permanece plana — ao contrário do que se pressupõe no desenvolvimento da fórmula de flexão.



(b) Após a deformação

Figura: Fig. 7–3(b).

A fórmula da tensão cisalhante

- Como a distribuição das deformações por cisalhamento não é facilmente definida, diferentemente dos casos de carregamento axial, torção e flexão, a distribuição das tensões de cisalhamento será determinada indiretamente.

A fórmula da tensão cisalhante

- Para isso, será considerado o equilíbrio das forças horizontais em uma porção de um elemento retirado da viga, conforme ilustrado na Fig. 7–4(a). O diagrama de corpo livre do elemento completo é apresentado na Fig. 7–4(b).

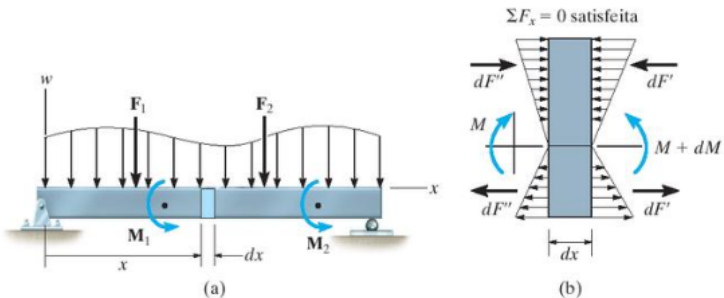
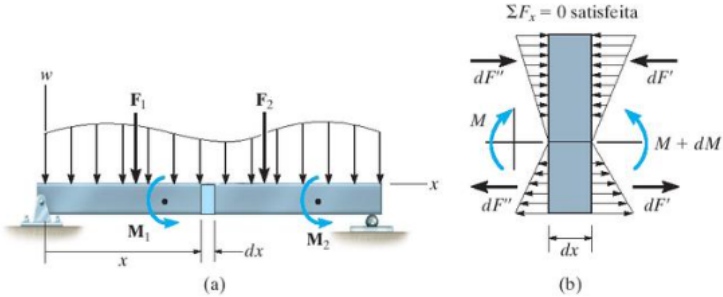


Figura: Fig. 7–4(a) e Fig. 7–4(b).

A fórmula da tensão cisalhante

- A distribuição das tensões normais que atuam sobre o elemento é causada pelos momentos fletores M e $M + dM$.
- Os efeitos das forças cortantes V e $V + dV$, bem como da carga distribuída $w(x)$, são desconsiderados nesta análise, uma vez que são verticais e, portanto, não contribuem para o somatório das forças na direção horizontal.



A fórmula da tensão cisalhante

- Observa-se que a condição de equilíbrio horizontal $\sum F_x = 0$ é satisfeita, pois a distribuição de tensões em cada face lateral do elemento produz apenas um momento, resultando em uma força resultante nula.

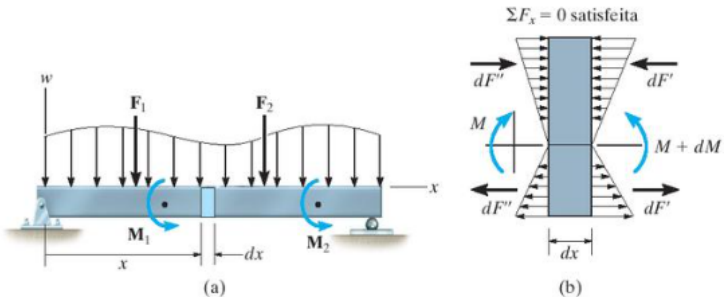


Figura: Fig. 7–4(a) e Fig. 7–4(b).

A fórmula da tensão cisalhante

- Agora, vamos considerar a parte superior sombreada do elemento, que foi seccionada a uma distância y' do eixo neutro (Fig. 7–4(c)). É nesse plano seccionado que desejamos determinar a tensão de cisalhamento. Esse segmento superior possui largura t na seção, e cada um dos dois lados da seção transversal apresenta área A'.

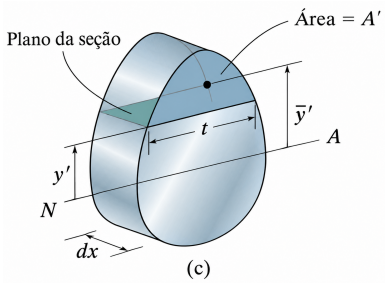


Figura: Fig. 7–4(c).

A fórmula da tensão cisalhante

- O diagrama de corpo livre do segmento é apresentado na Fig. 7–4(d).

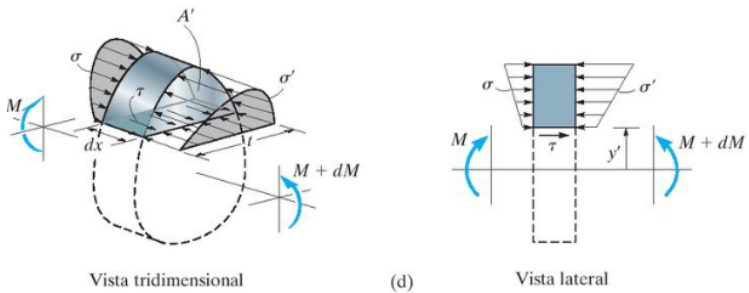


Figura: Fig. 7–4(d).

A fórmula da tensão cisalhante

- Os momentos resultantes em cada face do elemento diferem de dM, de modo que a condição de equilíbrio horizontal, $\sum F_x = 0$ não será satisfeita a menos que uma tensão de cisalhamento longitudinal τ atue sobre a face inferior seccionada do elemento.

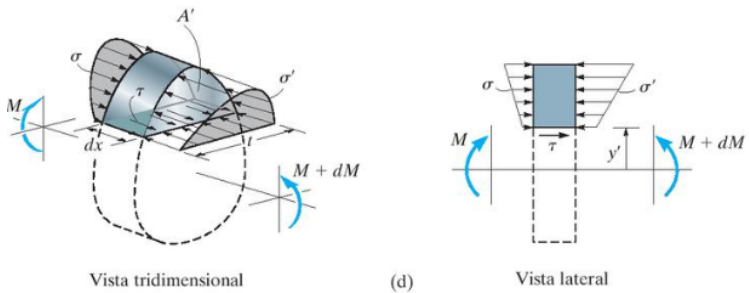


Figura: Fig. 7–4(d).

A fórmula da tensão cisalhante

- Para simplificar a análise, será considerado que essa tensão de cisalhamento é constante ao longo da largura t da face inferior.

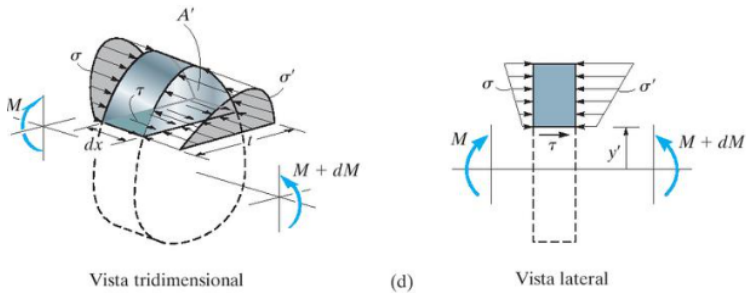


Figura: Fig. 7–4(d).

A fórmula da tensão cisalhante

- Para determinar a força horizontal produzida pelos momentos fletores, será admitido que o efeito do empenamento causado pelo cisalhamento é pequeno e, portanto, pode ser geralmente desprezado.

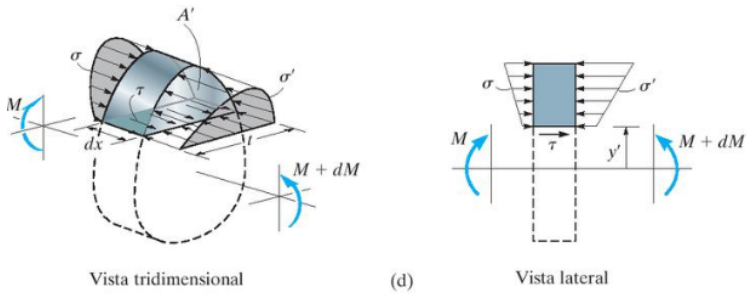


Figura: Fig. 7–4(d).

A fórmula da tensão cisalhante

- Portanto, usando a fórmula de flexão, temos

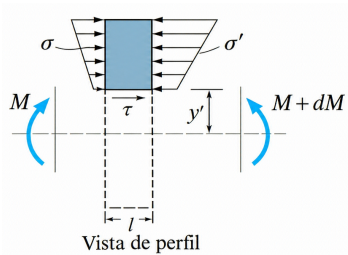


Figura: Fig. 7-4(d).

$$+ \leftarrow \sum F_x = 0;$$

$$\int_{A'} \sigma' \, dA' - \int_{A'} \sigma \, dA' - \tau(t \, dx) = 0$$

$$\int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I} \right) y \, dA' - \int_{A'} \frac{M}{I} y \, dA' - \\ - \tau(t \, dx) = 0$$

A fórmula da tensão cisalhante

- Isolando τ, obtemos

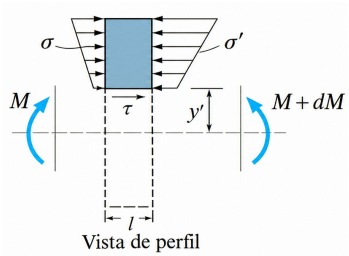


Figura: Fig. 7-4(d).

$$\left(\frac{dM}{I}\right)\int_{A'} y dA' = \tau(t\,dx)$$

$$\tau = \frac{1}{It}\left(\frac{dM}{dx}\right)\int_{A'} y\,dA'$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad \text{e} \quad Q = \int_{A'} y\,dA' = \bar{y}'A'$$

V é o esforço cortante e

Q é o momento de primeira ordem ou momento estático

A fórmula da tensão cisalhante

- O resultado final é denominado fórmula do cisalhamento, dada por:

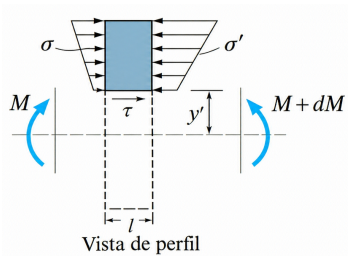


Figura: Fig. 7-4(d).

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

A fórmula da tensão cisalhante

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

- τ Tensão de cisalhamento no elemento, no ponto localizado a uma distância y' do eixo neutro. Essa tensão é considerada constante e, portanto, representa o valor médio ao longo da largura t do elemento.
- V Força cortante, determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio.
- I Momento de inércia da área total da seção transversal, calculado em relação ao eixo neutro.

A fórmula da tensão cisalhante

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

- t Largura da seção transversal do elemento, medida no ponto em que se deseja determinar a tensão de cisalhamento τ.
- Q Momento estático da área, definido por

$$Q = \bar{y}' A'$$

em que A' é a área da parte superior (ou inferior) da seção transversal do elemento, situada acima (ou abaixo) do plano de corte onde τ é determinada, e $\bar{y}'$ é a distância do eixo neutro ao centroide da área A'.

A fórmula da tensão cisalhante

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$$

- Embora, durante a dedução, tenha sido considerada apenas a tensão de cisalhamento atuante no plano longitudinal da viga, a fórmula também se aplica à determinação da tensão de cisalhamento transversal na seção transversal da viga, uma vez que essas tensões são complementares e possuem a mesma magnitude.

Determinação de Q

- **Definição do momento estático** Q
  Entre todas as variáveis presentes na fórmula do cisalhamento, Q geralmente é a mais difícil de definir corretamente. É importante lembrar que essa grandeza representa o momento estático da área da seção transversal situada acima ou abaixo do ponto em que se deseja determinar a tensão de cisalhamento.

- **Significado físico da área** A'
  É essa área A' que fica "presa" ao restante da viga pela tensão de cisalhamento longitudinal durante a flexão da viga, conforme ilustrado na Figura 7–4(d).

Determinação de Q

- **Determinação de Q no ponto P**
  Os exemplos apresentados na Figura 7–6 ajudam a esclarecer esse conceito. Nessa figura, deseja-se determinar a tensão no ponto P; portanto, A' corresponde à região sombreada em tom escuro. O valor de Q para cada caso é indicado abaixo de cada figura.

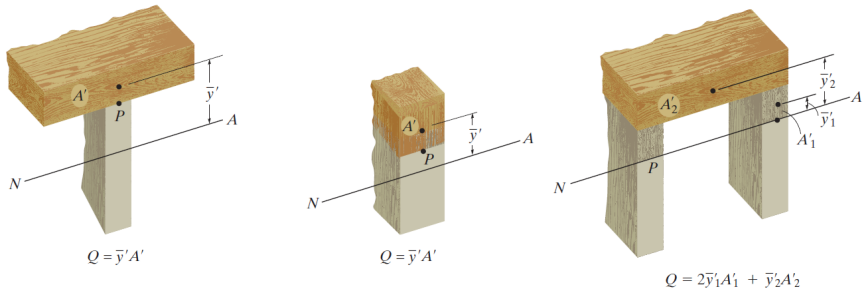


Figura: Fig. 7–6.

Determinação de Q

- **Uso da área acima ou abaixo do ponto P**
  Esses mesmos resultados para Q também podem ser obtidos considerando A' como a região sombreada em tom claro, situada abaixo do ponto P. Nesse caso, porém, $\bar{y}'$ assume um valor negativo quando uma parte da área A' está localizada abaixo do eixo neutro.

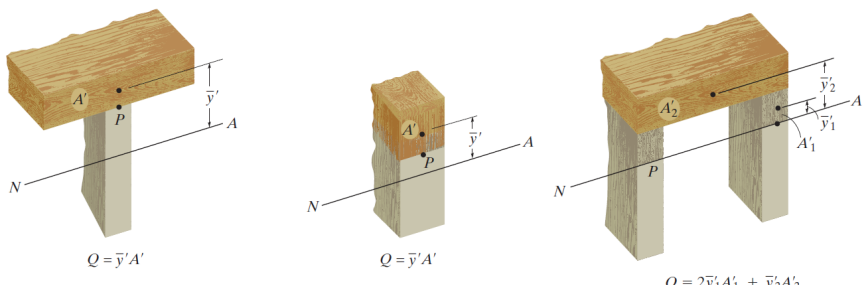


Figura: Fig. 7–6.

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- Uma das principais hipóteses adotadas na dedução da fórmula do cisalhamento é que a tensão de cisalhamento está distribuída uniformemente ao longo da largura t da seção transversal. Em outras palavras, calcula-se a tensão de cisalhamento média ao longo dessa largura.

- Podemos avaliar a precisão dessa hipótese comparando os resultados obtidos com uma análise matemática mais exata, baseada na teoria da elasticidade.

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- Por exemplo, se a seção transversal da viga for retangular, a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo do eixo neutro varia, na realidade, conforme mostrado na Figura 7–7.

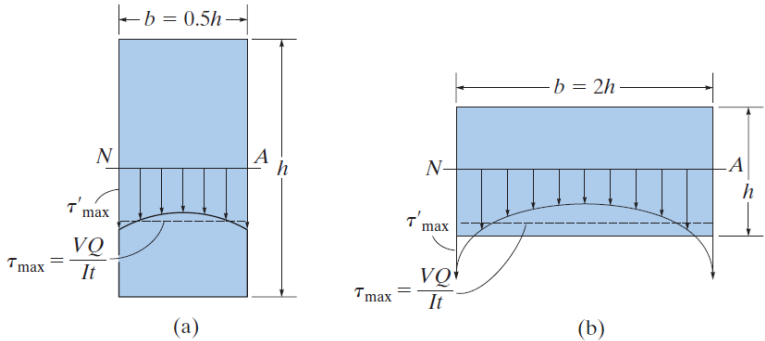


Figura: Fig. 7–7(a) e Fig. 7–7(b).

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- O valor máximo da tensão de cisalhamento, τ'_{max}, ocorre nas laterais da seção transversal, e sua magnitude depende da razão entre a largura e a altura da seção, isto é, b/h.

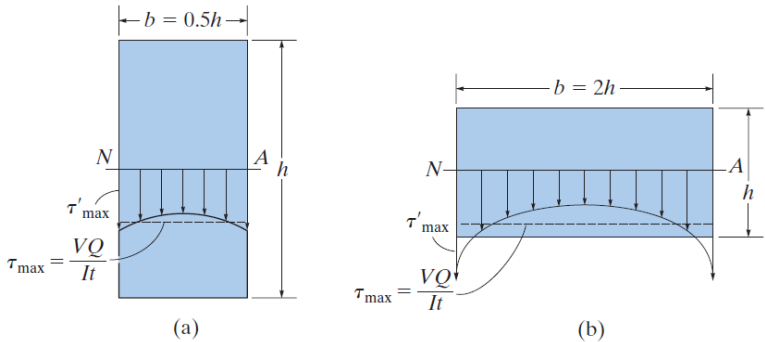


Figura: Fig. 7–7(a) e Fig. 7–7(b).

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- Para seções nas quais $b/h = 0{,}5$, a tensão de cisalhamento máxima, τ'_{max}, é apenas cerca de 3% maior do que a tensão de cisalhamento calculada pela fórmula do cisalhamento, conforme ilustrado na Figura 7–7(a).

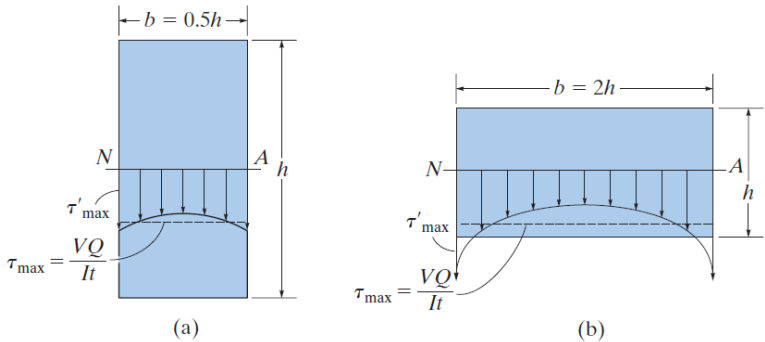


Figura: Fig. 7–7(a) e Fig. 7–7(b).

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- Entretanto, para seções transversais achatadas, por exemplo, quando $b/h = 2$, a tensão de cisalhamento máxima, $\tau'_{\max}$, é aproximadamente 40% maior do que $\tau_{\max}$, conforme ilustrado na Figura 7–7(b).

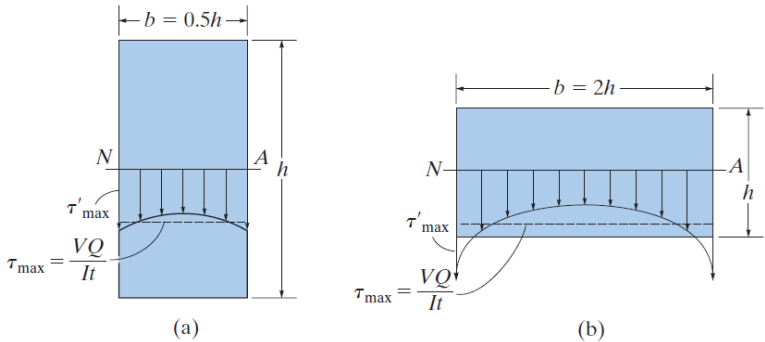


Figura: Fig. 7–7(a) e Fig. 7–7(b).

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- O erro torna-se ainda maior à medida que a seção transversal se torna mais achatada, ou seja, à medida que a razão b/h aumenta.

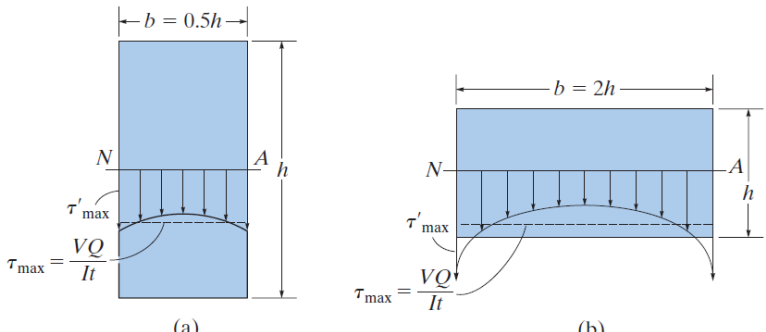


Figura: Fig. 7–7(a) e Fig. 7–7(b).

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- Erros dessa magnitude são certamente inaceitáveis quando se pretende utilizar a fórmula do cisalhamento para determinar a tensão de cisalhamento na mesa do perfil de abas largas, conforme ilustrado na Figura 7–8.

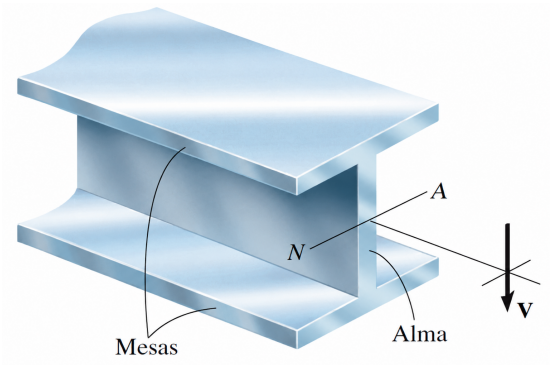


Figura: Fig. 7–8.

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- Também é importante observar que a fórmula do cisalhamento não fornece resultados precisos quando utilizada para determinar a tensão de cisalhamento na junção entre a mesa e a alma dessa viga, uma vez que esse ponto apresenta uma mudança brusca na geometria da seção transversal e, portanto, ocorre uma concentração de tensões.

- Felizmente, o(a)s engenheiro(a)s precisam utilizar a fórmula do cisalhamento apenas para calcular a tensão de cisalhamento média máxima em uma viga. **No caso de um perfil de abas largas, essa tensão ocorre no eixo neutro, onde a razão entre a largura e a altura da alma, b/h, é muito pequena**. Portanto, o resultado calculado é muito próximo da tensão de cisalhamento máxima real, conforme explicado anteriormente.

Limitações para o uso da fórmula da tensão cisalhante

- Para resumir os pontos apresentados anteriormente, a fórmula do cisalhamento não fornece resultados precisos quando aplicada a elementos com seções transversais curtas ou achatadas, nem em pontos onde ocorre uma mudança brusca na geometria da seção transversal, como mostrado na Fig. 7-9. Veja detalhes no livro-texto sobre este tipo de seção

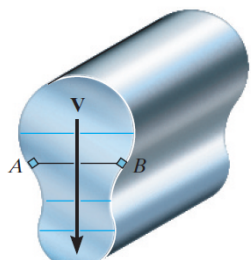


Figura: Fig. 7–9.

Exemplo 7.1

A viga mostrada na Fig. 7–10(a) é constituída por duas tábuas. Determine a tensão de cisalhamento máxima na cola, necessária para manter as tábuas unidas ao longo da superfície de contato entre elas.

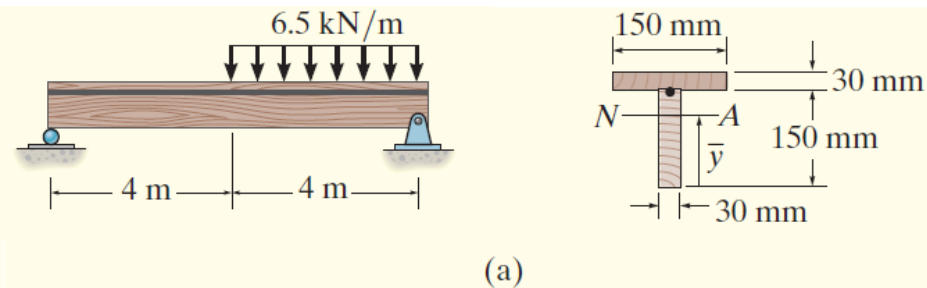


Figura: Fig. 7–10(a) - Exemplo 7.1.

Exemplo 7.1

As reações de apoio e o diagrama de esforço cortante da viga são apresentados na Figura 7–10(b). Observa-se que o esforço cortante máximo na viga é de 19,5 kN.

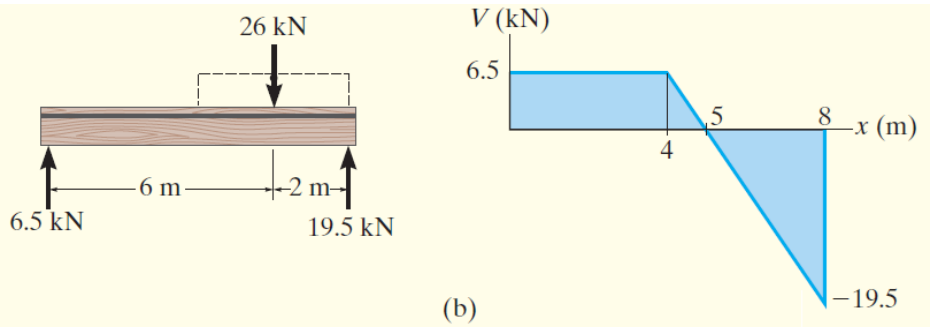
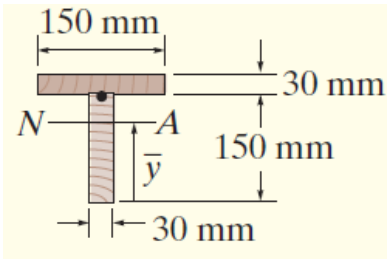


Figura: Fig. 7–10(b) - Exemplo 7.1.

Exemplo 7.1

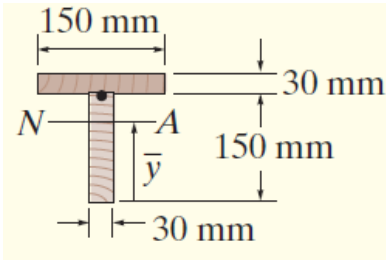
O centroide e, consequentemente, o eixo neutro serão determinados em relação ao eixo de referência localizado na base da seção transversal, conforme ilustrado na Figura 7–10(a).



$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} A}{\sum A} = \frac{(75\,\text{mm})(150\,\text{mm})(30\,\text{mm}) + (165\,\text{mm})(30\,\text{mm})(150\,\text{mm})}{(150\,\text{mm})(30\,\text{mm}) + (30\,\text{mm})(150\,\text{mm})} = 120\,\text{mm}$$

Exemplo 7.1

Momento de inércia em relação ao eixo neutro:



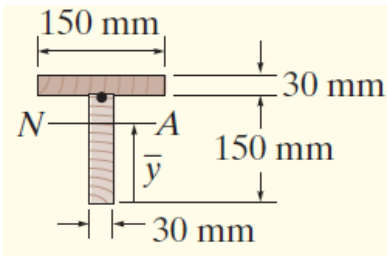
$$I = \left[\frac{1}{12}(30\,\text{mm})(150\,\text{mm})^3 + (150\,\text{mm})(30\,\text{mm})(120\,\text{mm} - 75\,\text{mm})\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(150\,\text{mm})(30\,\text{mm})^3 + (30\,\text{mm})(150\,\text{mm})(165\,\text{mm} - 120\,\text{mm})\right]$$

$$I = 27{,}0 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

Exemplo 7.1

A tábua superior (mesa) é mantida unida à tábua inferior (alma) pela cola, aplicada ao longo da espessura $t = 30\,\text{mm}$. Consequentemente, o momento estático Q é calculado considerando a área da tábua superior, conforme ilustrado na Figura 7–10(a). Assim, temos:

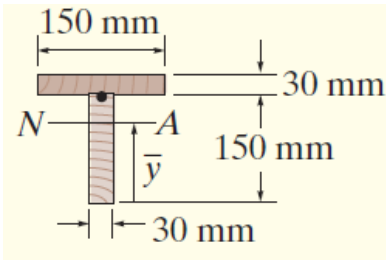


$$Q = \bar{y}'A' = (180\,\text{mm} - 15\,\text{mm} - 120\,\text{mm})(30\,\text{mm})(150\,\text{mm})$$

$$= 202\,500\,\text{mm}^3 = 0{,}2025 \times 10^6\,\text{mm}^3$$

Exemplo 7.1

Aplicando a fórmula da tensão de cisalhamento:



$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{(19{,}5 \times 10^3\,\text{N})(0{,}2025 \times 10^6\,\text{mm}^3)}{(27{,}0 \times 10^6\,\text{m}^4)(30\,\text{mm})} = 4{,}88\,\text{MPa}$$

Exemplo 7.1

A tensão de cisalhamento que atua na face superior da tábua inferior é ilustrada na Figura 7–10(c).

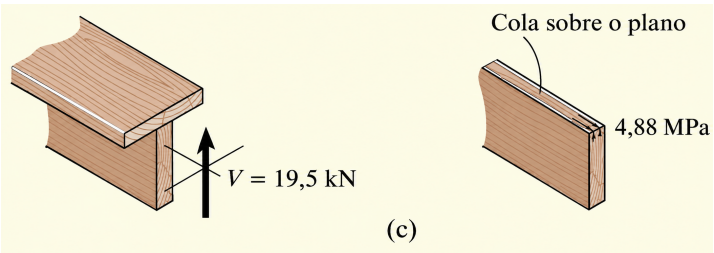


Figura: Fig. 7–10(c) - Exemplo 7.1.

Observação: É a resistência da cola a essa tensão de cisalhamento longitudinal que impede o deslizamento relativo entre as tábuas junto ao apoio da direita.

Exemplo 7.2

Determine a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal da viga mostrada na Fig. 7–11(a).

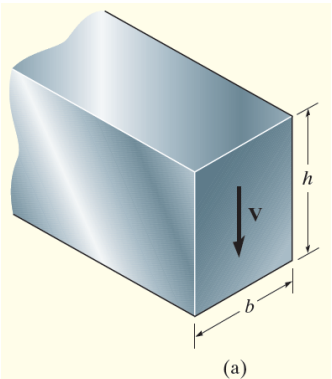


Figura: Fig. 7–11(a) - Exemplo 7.2.

Exemplo 7.2

A distribuição pode ser determinada calculando-se a tensão de cisalhamento em uma altura arbitrária y em relação ao eixo neutro, conforme a Fig. 7–11(b), e, em seguida, traçando-se o gráfico dessa função. Neste caso, a área destacada em cor escura, A', será utilizada para calcular Q. Portanto,

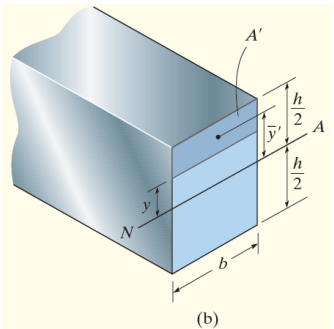
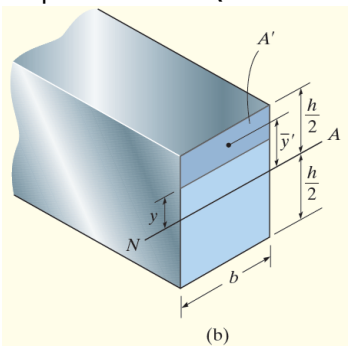


Figura: Fig. 7–11(b) - Exemplo 7.2.

Exemplo 7.2

A distribuição pode ser determinada calculando-se a tensão de cisalhamento em uma altura arbitrária y em relação ao eixo neutro, conforme a Fig. 7–11(b), e, em seguida, traçando-se o gráfico dessa função. Neste caso, a área destacada em cor escura, A', será utilizada para calcular Q. Portanto,

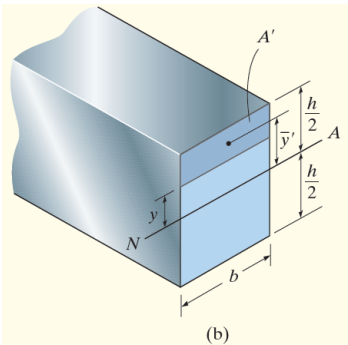


$$Q = \bar{y}' A' = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) \right] \left(\frac{h}{2} - y\right) b$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) b$$

Figura: Fig. 7-11(b) - Exemplo 7.2.

Exemplo 7.2

Aplicando a fórmula da tensão de cisalhamento, temos:



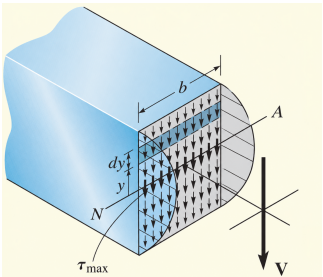
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{h^2}{4}\right) - y^2\right] b}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right) b}$$

$$= \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Figura: Fig. 7-11(b) - Exemplo 7.2.

Exemplo 7.2

Esse resultado indica que a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal é parabólica. Como mostrado na Fig. 7–11(c), a intensidade varia de zero no topo e na base, $y = \pm\frac{h}{2}$, até um valor máximo no eixo neutro, $y = 0$. Como a área da seção transversal é $A = bh$, então, para $y = 0$, torna-se



$$\tau_{\text{max}} = 1,5\,\frac{V}{A}$$

Figura: Fig. 7-11(c) - Exemplo 7.2.

Exemplo 7.2

Esse mesmo valor para τ_{max} pode ser obtido diretamente pela fórmula do cisalhamento, $\tau = \frac{VQ}{It}$, reconhecendo-se que τ_{max} ocorre onde Q é máximo, uma vez que V, I e t são constantes.

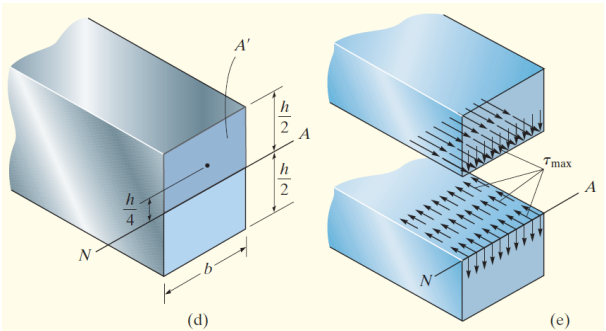
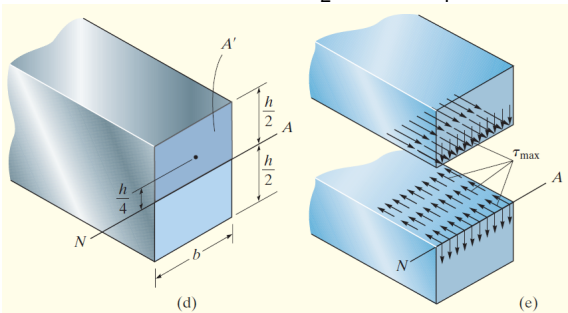


Figura: Fig. 7-11(d) e Fig. 7-11(e) - Exemplo 7.2.

Exemplo 7.2

Por inspeção, Q será máximo quando toda a área acima (ou abaixo) do eixo neutro for considerada; isto é, $A' = \frac{bh}{2}$ e $\bar{y}' = \frac{h}{4}$, conforme a Fig. 7–11(d). Assim,



$$\tau_{\text{max}} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{h}{4}\right)\left(\frac{bh}{2}\right)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)b} = 1,5\,\frac{V}{A}$$

Figura: Fig. 7-11(d) e Fig. 7-11(e) - Exemplo 7.2.

Por comparação, τ_{max} é 50% maior que a tensão de cisalhamento média; isto é, $\tau_{\text{méd}} = \frac{V}{A}$.

Exemplo 7.3

Uma viga de aço de seção transversal em forma de perfil de abas largas possui as dimensões mostradas na Fig. 7–12(a). Se ela estiver submetida a uma força cortante de $V = 80\,\text{kN}$, trace o diagrama de distribuição da tensão de cisalhamento atuante na seção transversal da viga.

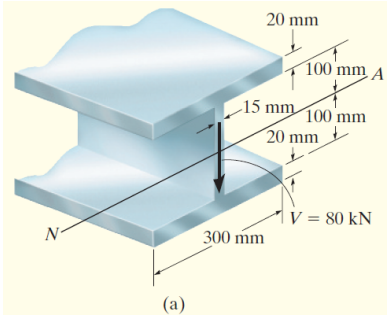


Figura: Fig. 7–12(a) - Exemplo 7.3.

Exemplo 7.3

Como a mesa e a alma do perfil são elementos retangulares, assim como no exemplo anterior, a distribuição da tensão de cisalhamento será parabólica e, neste caso, variará conforme mostrado na Fig. 7–12(b). Devido à simetria, é necessário determinar apenas as tensões de cisalhamento nos pontos B', B e C.

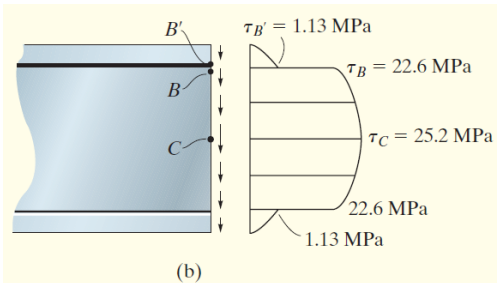
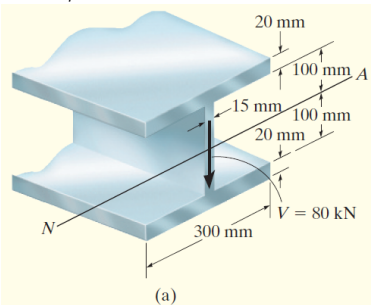


Figura: Fig. 7–12(b) - Exemplo 7.3.

Exemplo 7.3

Para mostrar como esses valores são obtidos, devemos primeiro determinar o momento de inércia da área da seção transversal em relação ao eixo neutro. Trabalhando em milímetros, temos:



$$I = \frac{1}{12}(15)(200)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(300)(20)^3 + (300)(20)(110)^2\right]$$

$$= 155{,}6 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

Figura: Fig. 7–12(b) - Exemplo 7.3.

Exemplo 7.3

Para o ponto B', temos $t_{B'} = 300\,\text{mm}$, e A' é a área sombreada em azul-escuro, mostrada na Fig. 7–12(c). Assim,

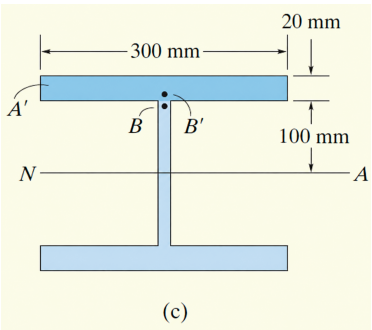


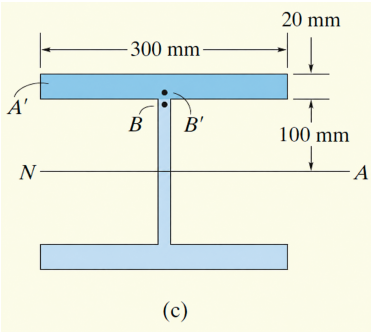
Figura: Fig. 7–12(c) - Exemplo 7.3.

$$
\begin{aligned}
Q_{B'} &= \bar{y}' A' \\
&= (110\,\text{mm})(300\,\text{mm})(20\,\text{mm}) \\
&= 0{,}660 \times 10^6\,\text{mm}^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{B'} &= \frac{V Q_{B'}}{I t_{B'}} \\
&= \frac{(80 \times 10^3\,\text{N})(0{,}660 \times 10^6\,\text{mm}^3)}{(155{,}6 \times 10^6\,\text{mm}^4)(300\,\text{mm})} \\
&= 1{,}13\,\text{MPa}
\end{aligned}
$$

Exemplo 7.3

Para o ponto B, temos $t_B = 15\,\text{mm}$ e $Q_B = Q_{B'}$, conforme a Fig. 7–12(c). Portanto,



$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It_B}$$

$$= \frac{(80 \times 10^3\,\text{N})(0{,}660 \times 10^6\,\text{mm}^3)}{(155{,}6 \times 10^6\,\text{mm}^4)(15\,\text{mm})}$$

$$= 22{,}6\,\text{MPa}$$

Figura: Fig. 7–12(c) - Exemplo 7.3.

Exemplo 7.3

Observe, a partir da discussão sobre as "Limitações do Uso da Fórmula do Cisalhamento", que os valores calculados tanto para $\tau_{B'}$ quanto para τ_B são, na realidade, bastante diferentes. Para o ponto C, temos $t_C = 15\,\text{mm}$, e A' é a área sombreada em azul-escuro, mostrada na Fig. 7–12(d).

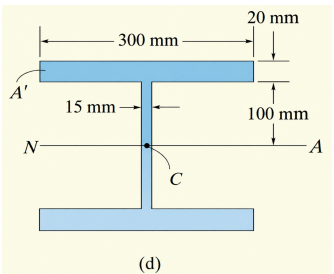


Figura: Fig. 7–12(d) - Exemplo 7.3.

Exemplo 7.3

Considerando essa área como sendo composta por dois retângulos, temos:

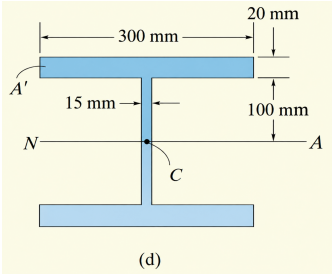


Figura: Fig. 7–12(d) - Exemplo 7.3.

$$Q_C = \bar{y}'A' = (110)(300)(20) + (50)(15)(100) = 0{,}735 \times 10^6\,\text{mm}^3$$

$$\tau_C = \tau_{\text{max}} = \frac{VQ_C}{It_C} = \frac{(80 \times 10^3\,\text{N})(0{,}735 \times 10^6\,\text{mm}^3)}{(155{,}6 \times 10^6\,\text{mm}^4)(15\,\text{mm})} = 25{,}2\,\text{MPa}$$