

CAPÍTULO 6 - AULA 1

FLEXÃO

8 de outubro de 2026

Objetivos do capítulo

- Neste capítulo, determinaremos a **tensão em uma viga** ou em um eixo causada pela **flexão**.
- O capítulo começa com uma discussão sobre como determinar as **variações do esforço cortante e do momento fletor nesses elementos**.
- Em seguida, uma vez determinado o momento interno, pode-se calcular a **tensão de flexão máxima**.
- Inicialmente, consideraremos **elementos retos, com seção transversal simétrica e constituídos de material homogêneo e linear-elástico**.

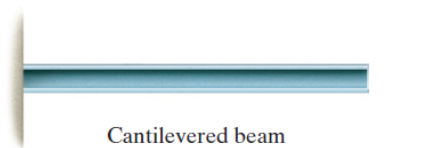
Diagramas de esforços cortantes e momentos fletores

- Elementos esbeltos que suportam cargas aplicadas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal são denominados **vigas**.
- Em geral, **as vigas são barras longas e retas com seção transversal constante**. Frequentemente, elas são classificadas de acordo com a forma como são apoiadas.
- Por exemplo, uma viga **simplesmente apoiada** possui um apoio de primeiro gênero (ou articulação móvel) em uma extremidade e um apoio de segundo gênero (ou articulação fixa) na outra (Fig. 6–1); uma **viga em balanço** é engastada em uma extremidade e livre na outra; e uma **viga com balanço** apresenta uma ou ambas as extremidades estendendo-se livremente além dos apoios.
- As vigas são consideradas entre os **elementos estruturais mais importantes**. Elas são utilizadas para sustentar o piso de uma edificação, o tabuleiro de uma ponte ou a asa de uma aeronave. Além disso, o eixo de um automóvel, a lança de um guindaste e até mesmo muitos ossos do corpo humano funcionam como vigas.

Diagramas de esforços cortantes e momentos fletores



Simply supported beam



Cantilevered beam



Overhanging beam

Figura: Fig. 6-1. Tipos comuns de vigas.

Diagramas de esforços cortantes e momentos fletores

- As cargas aplicadas geram **força cortante (V)** e **momento fletor (M)** na viga.
- Esses esforços **variam ao longo do comprimento** da viga.
- Os **diagramas de força cortante e de momento fletor** representam essa variação ao longo do eixo da viga.
- Esses diagramas permitem identificar os **valores máximos de V e M** .
- Essas informações são fundamentais para o **dimensionamento da viga**, incluindo a definição da posição e da quantidade de **armaduras ou reforços estruturais**.

Diagramas de esforços cortantes e momentos fletores

- Para expressar a **força cortante (V)** e o **momento fletor (M)** em função de x , é necessário definir a **origem** e o **sentido positivo** do eixo x . Normalmente, a origem é posicionada na extremidade esquerda da viga e o sentido positivo de x é para a direita.
- Como as vigas podem estar submetidas a **cargas distribuídas, forças concentradas e momentos concentrados**, as funções $V(x)$ e $M(x)$ podem apresentar **descontinuidades** ou mudanças em suas inclinações nos pontos onde as cargas são aplicadas.
- Por isso, as funções de força cortante e de momento fletor devem ser determinadas **separadamente para cada região da viga** entre duas descontinuidades de carregamento.
- Conforme ilustrado na Fig. 6–2, diferentes coordenadas, como x_1 , x_2 e x_3 , são necessárias para descrever a variação de V e M ao longo da viga.
- Fig. 6–2, x_1 é utilizado na região entre **A e B**, x_2 entre **B e C** e x_3 entre **C e D**.

Diagramas de esforços cortantes e momentos fletores

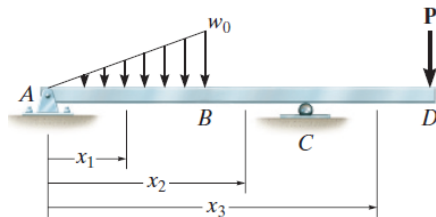
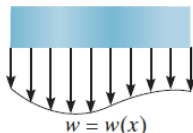


Figura: Fig. 6-2. Viga biaapoida com balanço.

Convenção de sinais

- Antes de determinar a **força cortante (V)** e o **momento fletor (M)** em função de x e, posteriormente, construir os respectivos diagramas, é necessário estabelecer uma **convenção de sinais** para definir os valores **positivos** e **negativos** de V e M .
- Embora a escolha da convenção de sinais seja arbitrária, neste caso será adotada uma convenção frequentemente utilizada na **prática da engenharia**, conforme ilustrado na Fig. 6–3.
- De acordo com essa convenção, considera-se **positivo** quando a carga distribuída atua **para cima** sobre a viga.
- A **força cortante interna** é considerada positiva quando provoca uma **rotação no sentido horário** do segmento da viga sobre o qual atua.
- O **momento fletor interno** é considerado positivo quando provoca **compressão nas fibras superiores** do segmento.
- Os carregamentos que atuam em **sentido oposto** ao definido acima são considerados **negativos**.

Convenção de sinais



Positive external distributed load



Positive internal shear



Positive internal moment

Beam sign convention

Figura: Fig. 6–3. Convenção de sinais.

Exemplo 6.1.

Desenhe os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga mostrada na Fig. 6-4(a).

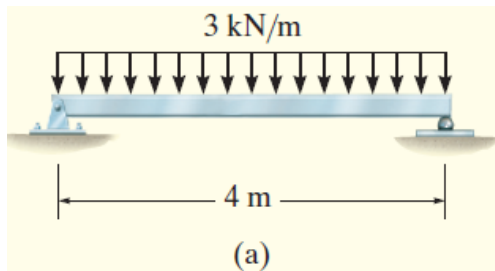


Figura: Fig. 6-4(a). Exemplo 6.1.

Exemplo 6.1.

Reações de apoio

As reações de apoio são mostradas na figura a seguir.

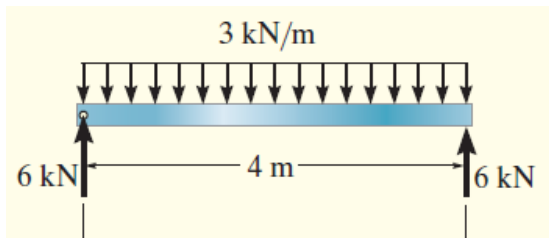


Figura: Reações de apoio - Exemplo 6.1.

Exemplo 6.1.

Funções do esforço cortante e momento fletor

O diagrama de corpo livre do segmento esquerdo da viga é mostrado na Fig. 6-4(b). A carga distribuída sobre esse segmento é representada por sua força resultante $(3x)$ kN, determinada apenas após o segmento ser isolado em um diagrama de corpo livre. Essa força atua no centroide da área sob a carga distribuída, a uma distância de $x/2$ da extremidade direita. A aplicação das duas equações de equilíbrio resulta em

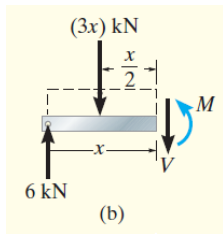


Figura: Fig. 6-4(b) – Diagrama de corpo livre do segmento esquerdo - Exemplo 6.1.

Exemplo 6.1.

Funções do esforço cortante e momento fletor

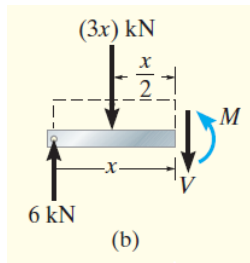


Figura: Fig. 6-4(b) – Diagrama de corpo livre do segmento esquerdo - Exemplo 6.1.

$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$6 \text{ kN} - (3x) \text{ kN} - V = 0$$

$$V = (6 - 3x) \text{ kN}$$

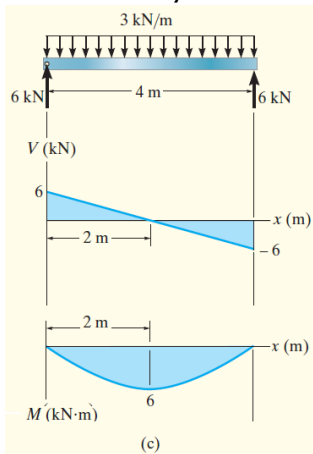
$$+ \circlearrowleft \sum M = 0;$$

$$- 6 \text{ kN}(x) + (3x) \text{ kN} \left(\frac{x}{2} \right) + M = 0$$

$$M = (6x - 1,5x^2) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Exemplo 6.1.

Diagramas de esforço cortante e momento fletor



Os diagramas de esforço cortante e de momento fletor são mostrados na Fig. 6-4(c) são obtidos traçando-se os gráficos das equações anteriores.

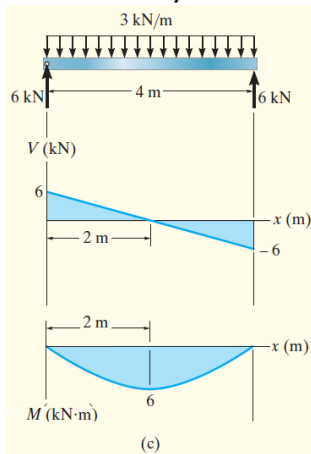
O ponto de esforço cortante nulo é:

$$V = (6 - 3x) \text{ kN} = 0 \quad x = 2 \text{ m}$$

Figura: Fig. 6-4(c) – Diagrama de corpo livre do segmento esquerdo - Exemplo 6.1.

Exemplo 6.1.

Diagramas de esforço cortante e momento fletor



A partir do **diagrama de momento fletor** o valor de x determinado representa o ponto da viga onde ocorre o **momento fletor máximo**.

Isto ocorre porque $V = \frac{dM}{dx}$

$$M_{\max} = [6(2) - 1,5(2)^2] \text{ kN} \cdot \text{m} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura: Fig. 6-4(c) – Diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores - Exemplo 6.1.

Exemplo 6.2.

Desenhe os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga mostrada na Fig. 6-5(a).

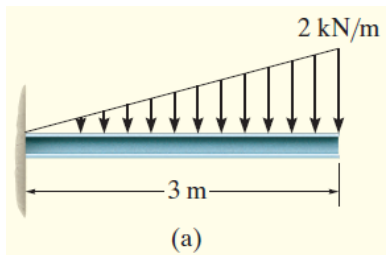


Figura: Fig. 6-5(a). Exemplo 6.2.

Exemplo 6.2.

Reações de apoio

As reações de apoio são mostradas na figura a seguir.

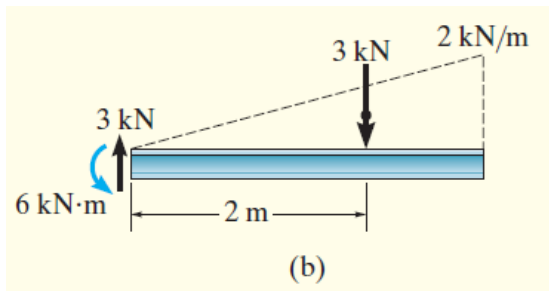


Figura: Figura - Reações de apoio - Exemplo 6.2.

Exemplo 6.2.

Funções do esforço cortante e momento fletor

O diagrama de corpo livre de um segmento da viga de comprimento x é apresentado na Fig. 6–5(c). A intensidade da carga triangular distribuída na seção é determinada pela proporção $\frac{w}{x} = \frac{2 \text{ kN/m}}{3 \text{ m}}$. Portanto, a intensidade da carga na seção é dada por $w = \frac{2}{3}x \text{ kN/m}$.

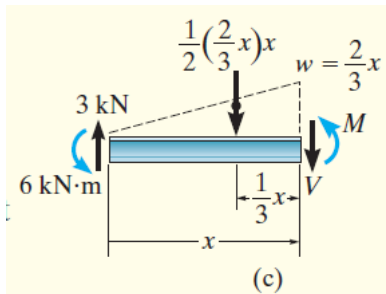


Figura: Fig. 6–5(c) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.2.

Exemplo 6.2.

Funções do esforço cortante e momento fletor

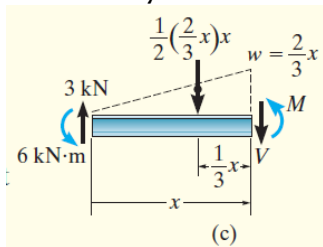


Figura: Fig. 6-4(b) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.2.

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$3 \text{ kN} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x \right) x - V = 0$$

$$V = \left(3 - \frac{1}{3}x^2 \right) \text{ kN}$$

Exemplo 6.2.

Funções do esforço cortante e momento fletor

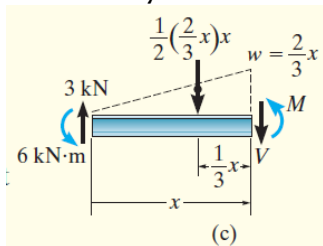


Figura: Fig. 6-4(b) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.2.

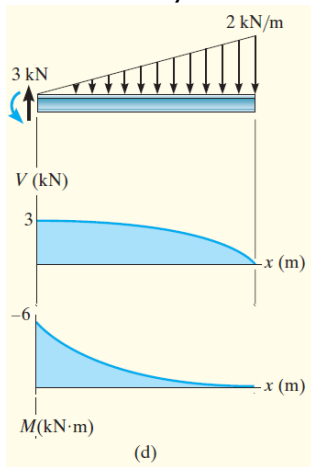
$$+ \circlearrowleft \sum M = 0;$$

$$6 \text{ kN} \cdot \text{m} - (3 \text{ kN})(x) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x \right) x \left(x - \frac{1}{3}x \right) + M = 0$$

$$M = \left(-6x + 3x^2 - \frac{2}{9}x^3 \right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Exemplo 6.2.

Diagramas de esforço cortante e momento fletor



Os diagramas de esforço cortante e de momento fletor são mostrados na Fig. 6–5(d) são obtidos traçando-se os gráficos das equações anteriores.

Figura: Fig. 6–5(d) – Diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores - Exemplo 6.2.

Exemplo 6.3.

Desenhe os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga mostrada na Fig. 6-6(a).

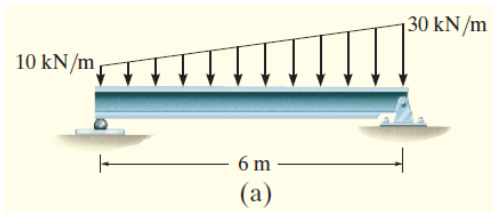


Figura: Fig. 6-6(a). Exemplo 6.3.

Exemplo 6.3.

Reações de apoio

As reações de apoio são mostradas na Fig. 6-6(b). A carga distribuída é decomposta em componentes triangulares e retangulares, que são então substituídas por suas respectivas forças resultantes. As reações foram determinadas conforme mostrado no diagrama de corpo livre da viga (Fig. 6-6(b)).

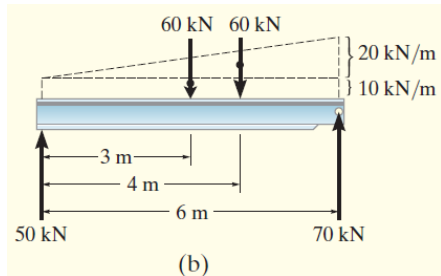


Figura: Fig. 6-6(b) - Reações de apoio - Exemplo 6.3.

Exemplo 6.3.

Funções do esforço cortante e momento fletor

O diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é apresentado na Fig. 6–6(c). Como mencionado anteriormente, o carregamento trapezoidal é substituído por distribuições retangular e triangular.

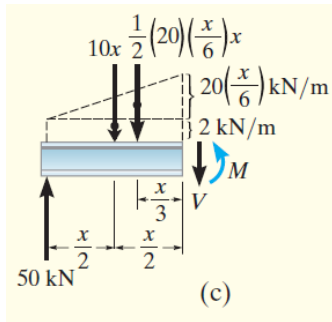


Figura: Fig. 6–6(c) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.3.

Exemplo 6.3.

Funções do esforço cortante e momento fletor

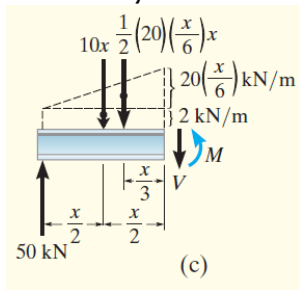


Figura: Fig. 6–6(c) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.3.

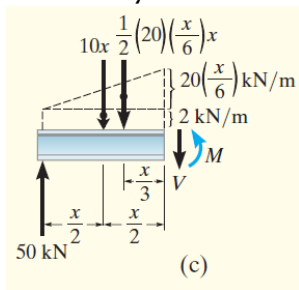
$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$50 \text{ kN} - (10 \text{ kN/m})x - \frac{1}{2}(20 \text{ kN/m})\left(\frac{x}{6} \text{ m}\right)x - V = 0$$

$$V = \left(50 - 10x - \frac{5}{3}x^2\right) \text{ kN}$$

Exemplo 6.3.

Funções do esforço cortante e momento fletor



$$+ \circlearrowleft \sum M = 0;$$

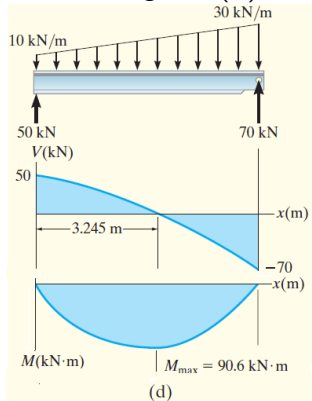
$$(-50 \text{ kN})(x) + [(10 \text{ kN/m})x] \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(20 \text{ kN/m}) \left(\frac{x}{6}\right) x \left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = \left(50x - 5x^2 - \frac{5}{9}x^3 \right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura: Fig. 6–6(c) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.3.

Exemplo 6.3.

Diagramas de esforço cortante e momento fletor Os diagramas são representados graficamente na Fig. 6–6(d).



O ponto onde ocorre o momento máximo é determinado pela condição $\frac{dM}{dx} = V = 0$

$$V = 0 = 50 - 10x - \frac{5}{3}x^2 \quad x = 3,245 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 50(3,245) - 5(3,245)^2 - \frac{5}{9}(3,245)^3$$

$$M_{\max} = 90,62 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura: Fig. 6–6(d) – Diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores - Exemplo 6.3.

Exemplo 6.4.

Desenhe os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga mostrada na Fig. 6-7(a).

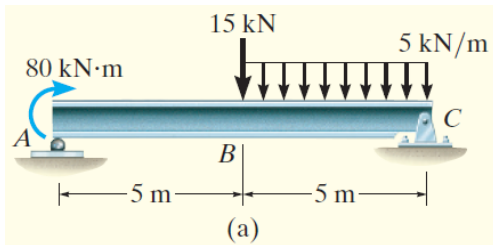


Figura: Fig. 6-7(a). Exemplo 6.4.

Exemplo 6.4.

Reações de apoio

As reações de apoio são mostradas na figura a seguir.

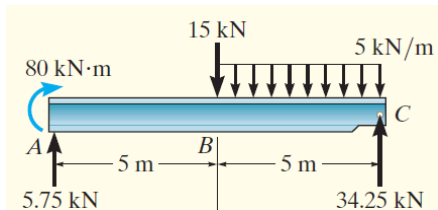
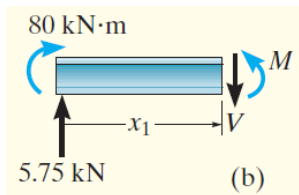


Figura: Reações de apoio - Exemplo 6.4.

Exemplo 6.4.

Funções do esforço cortante e momento fletor Como há uma descontinuidade na carga distribuída e também uma carga concentrada no centro da viga, duas regiões de x devem ser consideradas para descrever as funções de força cortante e de momento fletor ao longo de toda a viga.



$$0 \leq x_1 \leq 5 \text{ m}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; \quad 5,75 \text{ kN} - V = 0$$

$$V = 5,75 \text{ kN}$$

$$+ \curvearrowright \sum M = 0;$$

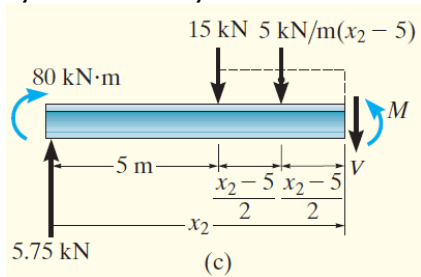
$$- 80 \text{ kN} \cdot \text{m} - (5,75 \text{ kN})x_1 + M = 0$$

$$M = (80 + 5,75x_1) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura: Fig. 6-7(b) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.4.

Exemplo 6.4.

Funções do esforço cortante e momento fletor



$$5 \leq x_1 \leq 10 \text{ m}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$5.75 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - \\ - (5 \text{ kN/m})(x_2 - 5 \text{ m}) - V = 0$$

$$V = (15.75 - 5x_2) \text{ kN}$$

Figura: Fig. 6-7(c) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.4.

Exemplo 6.4.

Funções do esforço cortante e momento fletor

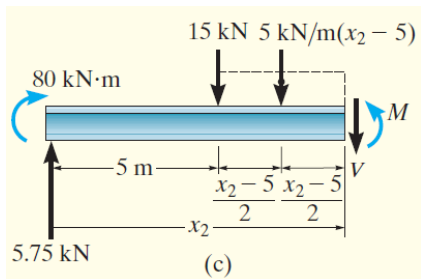


Figura: Fig. 6-7(c) – Diagrama de corpo livre - Exemplo 6.4.

$$5 \leq x_1 \leq 10 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} + \circlearrowleft \sum M &= 0; \\ - 80 \text{ kN} \cdot \text{m} - (5.75 \text{ kN})x_2 &+ \\ + (15 \text{ kN})(x_2 - 5 \text{ m}) &+ \\ + (5 \text{ kN/m})(x_2 - 5 \text{ m}) \left(\frac{x_2 - 5 \text{ m}}{2} \right) &+ \\ + M &= 0 \end{aligned}$$

$$M = (-2.5x_2^2 + 15.75x_2 + 92.5) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Exemplo 6.4.

Diagramas do esforço cortante e do momento fletor

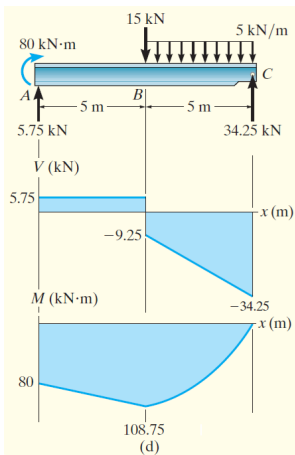


Figura: Fig. 6–7(d) – Diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores - Exemplo 6.4.