

CAPÍTULO 5 - AULA 3

TORÇÃO

6 de outubro de 2026

Eixos maciços não circulares

- Quando um torque é aplicado a um eixo de seção transversal circular, as deformações de cisalhamento variam linearmente de zero no centro até um valor máximo na superfície externa. Além disso, as seções transversais permanecem planas após a torção.
- Em eixos de seção transversal não circular, essa condição não é satisfeita, pois o eixo não é axisimétrico. Assim, as seções transversais sofrem **abaulamento ou empenamento** durante a torção, como apresentado na Fig. 5–23(a), o que torna a análise das tensões de cisalhamento consideravelmente mais complexa.

Eixos maciços não circulares

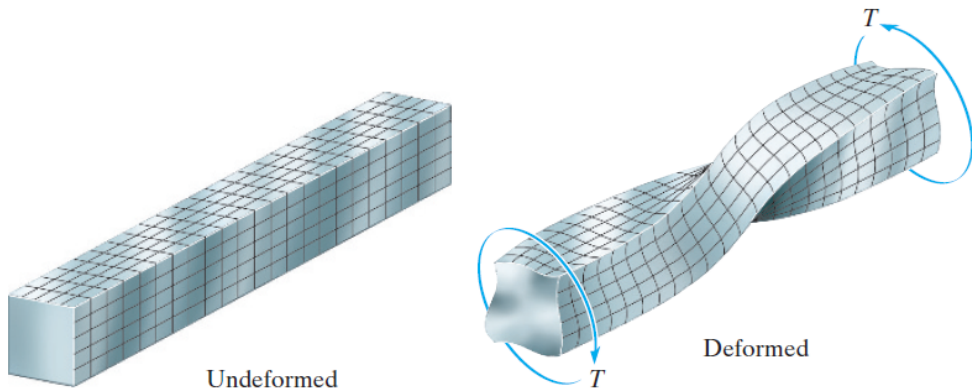
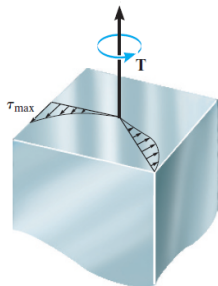


Figura: Fig. 5-23(a).

Eixos maciços não circulares

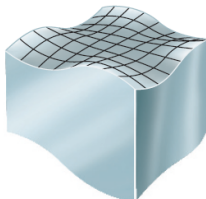
- Por meio de uma análise matemática baseada na teoria da elasticidade, é possível determinar a distribuição da tensão de cisalhamento no interior de um eixo de seção transversal quadrada. Exemplos de como a tensão de cisalhamento varia ao longo de duas linhas radiais do eixo são apresentados na Fig. 5–24(a).
- Como essas distribuições de tensão de cisalhamento diferem, as deformações de cisalhamento por elas produzidas provocarão o **empenamento da seção transversal**, conforme mostrado na Fig. 5–24(b).

Eixos maciços não circulares



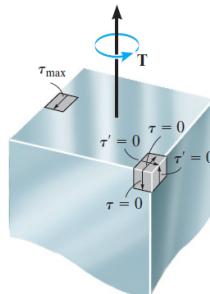
Shear stress distribution
along two radial lines

(a)



Warping of
cross-sectional area

(b)



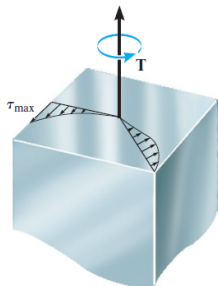
(c)

Figura: Fig. 5-24(a), Fig. 5-24(b) e Fig. 5-24(c).

Eixos maciços não circulares

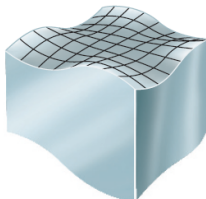
- Em particular, observe que os pontos localizados nos cantos do eixo devem estar sujeitos a uma **tensão de cisalhamento nula** e, portanto, a uma **deformação de cisalhamento nula**. A razão para isso pode ser demonstrada considerando um elemento de material localizado em um desses pontos de canto, conforme mostrado na Fig. 5–24(c).
- Espera-se que a face superior desse elemento esteja sujeita a uma tensão de cisalhamento que contribua para o torque aplicado T . Entretanto, isso não pode ocorrer, pois as tensões de cisalhamento complementares τ e τ' que atuam na superfície externa do eixo devem ser nulas.

Eixos maciços não circulares



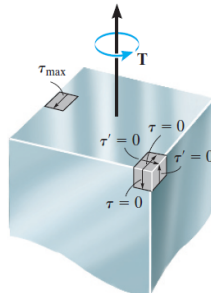
Shear stress distribution
along two radial lines

(a)



Warping of
cross-sectional area

(b)



(c)

Figura: Fig. 5-24(a), Fig. 5-24(b) e Fig. 5-24(c).

Eixos maciços não circulares

Observe a deformação do elemento quadrado quando a barra de borracha é submetida a um torque.

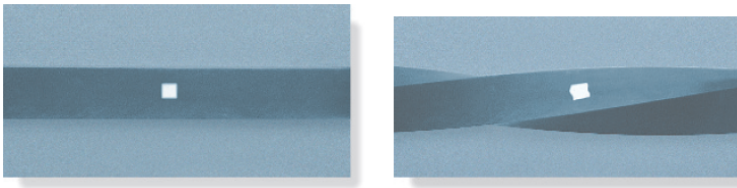


Figura: Barra de borracha submetida à torção.

Eixos maciços não circulares

- Utilizando a teoria da elasticidade, a Tabela 5–1 apresenta os resultados da análise para seções transversais quadradas, juntamente com os obtidos para eixos com seções transversais triangulares e elípticas.
- Em todos os casos, a **tensão de cisalhamento máxima** ocorre em um ponto da borda da seção transversal mais próximo do eixo central. Também são apresentadas as fórmulas do **ângulo de torção** para cada eixo.
- A partir desses resultados, pode-se demonstrar que o eixo mais eficiente possui uma **seção transversal circular**, pois está sujeito tanto a uma tensão de cisalhamento máxima menor quanto a um ângulo de torção menor em comparação com um eixo de mesma área de seção transversal, porém não circular, submetido ao mesmo torque.

Eixos maciços não circulares

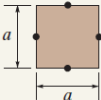
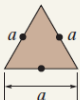
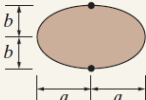
Shape of cross section	$\tau_{\max}$	ϕ	Shape of cross section	$\tau_{\max}$	ϕ	Shape of cross section	$\tau_{\max}$	ϕ
Square 	$\frac{4.81 T}{a^3}$	$\frac{7.10 TL}{a^4 G}$	Equilateral triangle 	$\frac{20 T}{a^3}$	$\frac{46 TL}{a^4 G}$	Ellipse 	$\frac{2 T}{\pi ab^2}$	$\frac{(a^2 + b^2) TL}{\pi a^3 b^3 G}$

Figura: Tabela 5.1.

Exemplo 5.11

O eixo de alumínio 6061-T6 ($G = 26 \text{ GPa}$) mostrado na Fig. 5–25 possui seção transversal triangular equilátera. Determine o maior torque T que pode ser aplicado à extremidade do eixo, considerando que a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{\text{adm}} = 56 \text{ MPa}$ e que o ângulo de torção em sua extremidade está limitado a $\phi_{\text{adm}} = 0,02 \text{ rad}$. Determine também qual torque pode ser aplicado a um eixo de seção transversal circular fabricado com a mesma quantidade de material.

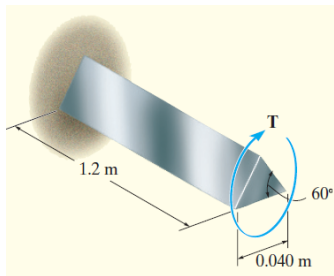


Figura: Fig. 5.25 - Exemplo 5.11.

Exemplo 5.11

Por inspeção, o torque interno resultante em qualquer seção transversal ao longo do eixo também é igual a T . Utilizando as fórmulas para $\tau_{\max}$ e ϕ apresentadas na Tabela 5-1, temos:

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{20T}{a^3}; \quad 56 \text{ N/mm}^2 = \frac{20T}{(40 \text{ mm})^3} \quad T = 179,2 \text{ N.m}$$

Além disso, considerando a restrição do ângulo de torção,

$$0,02 \text{ rad} = \frac{46T(1200 \text{ mm})}{(40 \text{ mm})^4 [26 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} \quad T = 24,12 \text{ N.m}$$

Por comparação, o torque é limitado a $T = 24,12 \text{ N.m}$.

Exemplo 5.11

Se a mesma quantidade de alumínio for utilizada para fabricar um eixo com o mesmo comprimento e seção transversal circular, o raio da seção transversal pode ser calculado. Temos:

$$A_{\text{círculo}} = A_{\text{triângulo}}; \quad \pi c^2 = \frac{1}{2}(40 \text{ mm})(40 \text{ mm}) \sin 60^\circ \quad c = 14,85 \text{ mm}$$

As limitações impostas pela tensão de cisalhamento e pelo ângulo de torção exigem:

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{T}{J} c; \quad 56 \text{ N/mm}^2 = \frac{T}{\left(\frac{\pi}{2}\right) (14,85 \text{ mm})^4} (14,85 \text{ mm}) \quad T = 288,08 \text{ N.m}$$

$$\phi_{\text{adm}} = \frac{TL}{JG} \quad 0,02 \text{ rad} = \frac{T(1200 \text{ mm})}{\left(\frac{\pi}{2}\right) (14,85 \text{ mm})^4 [26 \text{ N/mm}^2]} \quad T = 33,1 \text{ N.m}$$

Como o torque deve satisfazer simultaneamente ambas as condições, o ângulo de torção é a restrição que limita o torque. Assim, $T = 33,1 \text{ N.m}$.

Exemplo 5.11

OBSERVAÇÃO: Comparando este resultado ($33,1 \text{ N} \cdot \text{m}$) com o resultado obtido anteriormente ($24,1 \text{ N} \cdot \text{m}$), observa-se que um eixo de seção transversal circular pode suportar um torque **37,3% maior** do que um eixo de seção transversal triangular.

TUBOS DE PAREDES FINAS COM SEÇÕES TRANSVERSAIS FECHADAS

- Tubos de paredes finas com seção transversal não circular são frequentemente utilizados na construção de estruturas leves, como as de aeronaves. Em algumas aplicações, esses tubos podem estar submetidos a carregamento de torção e, portanto, nesta seção serão analisados os efeitos da torção sobre esses elementos.
- Aqui, será considerado um tubo de seção transversal fechada, isto é, uma seção que não apresenta interrupções ou aberturas ao longo de seu comprimento, conforme mostrado na Fig. 5–26(a).
- Como as paredes são finas, será determinada a **tensão de cisalhamento média**, assumindo-se que essa tensão é uniformemente distribuída ao longo da espessura do tubo em cada ponto.

Tubos de paredes finas

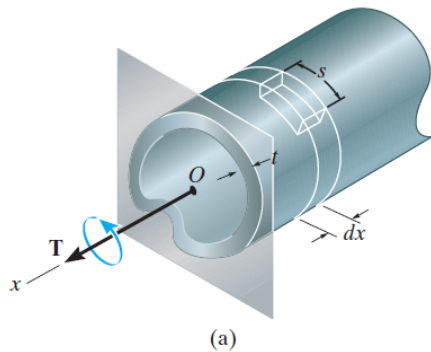


Figura: Fig. 5-26(a).

Fluxo de cisalhamento

- As Figs. 5–26(a) e 5–26(b) mostram um pequeno elemento do tubo com comprimento finito s e largura diferencial dx . Em uma extremidade, o elemento tem espessura t_A e, na outra, t_B .
- Devido ao torque T , desenvolve-se uma tensão de cisalhamento na face frontal do elemento. Especificamente, na extremidade A , a tensão de cisalhamento é τ_A , enquanto na extremidade B , é τ_B .
- Essas tensões podem ser relacionadas, observando-se que as tensões de cisalhamento complementares τ_A e τ_B também devem atuar nas faces longitudinais do elemento. Essas faces possuem uma largura constante dx e, portanto, as forças que atuam sobre elas são

Fluxo de cisalhamento

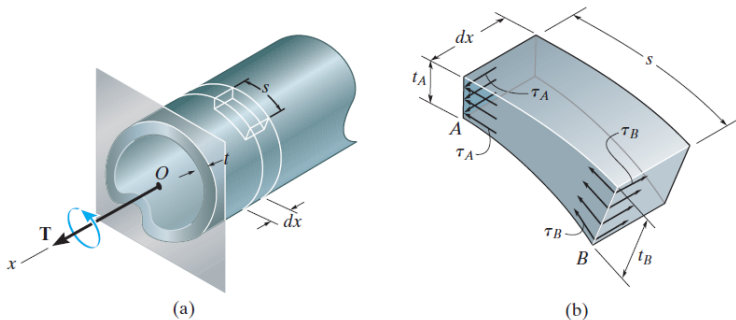


Figura: Fig. 5-26(a) e Fig. 5-26(b).

$$dF_A = \tau_A t_A dx \quad dF_B = \tau_B t_B dx$$

$$dF_A = dF_B \quad \tau_A t_A = \tau_B t_B$$

Fluxo de cisalhamento

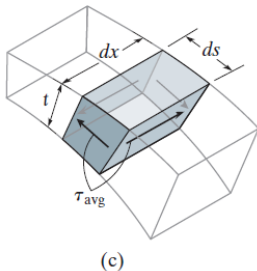
- Esse resultado importante mostra que o produto da tensão de cisalhamento média pela espessura do tubo é o mesmo em todos os pontos da seção transversal. Esse produto, denotado por q , é denominado **fluxo de cisalhamento** (*shear flow*). De forma geral, podemos expressá-lo como

$$q = \tau_{\text{med}} t$$

- Como q é constante ao longo da seção transversal, a maior tensão de cisalhamento média deve ocorrer onde a espessura do tubo é menor.

Fluxo de cisalhamento

- Se um elemento diferencial com espessura t , comprimento ds e largura dx for isolado do tubo, conforme mostrado na Fig. 5-26(c), então a face frontal sobre a qual atua a tensão de cisalhamento média possui área $dA = t ds$. Assim



$$dA = t ds$$

$$dF = \tau_{med}(t ds)$$

$$q = \tau_{med} t$$

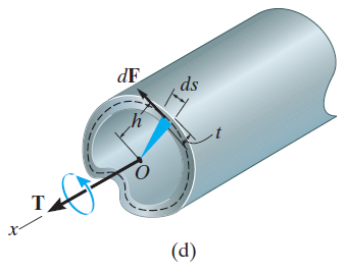
$$dF = q ds \quad \text{ou} \quad q = \frac{dF}{ds}$$

Figura: Fig. 5-26(c).

- Em outras palavras, o fluxo de cisalhamento mede a força por unidade de comprimento ao longo da seção transversal.

Tensão média de cisalhamento

- A tensão de cisalhamento média pode ser relacionada ao torque T considerando o torque produzido por essa tensão de cisalhamento em relação a um ponto selecionado O dentro do contorno do tubo, conforme mostrado na Fig. 5–26(d). Como mostrado, a tensão de cisalhamento desenvolve uma força



$$dF = \tau_{\text{med}} dA = \tau_{\text{med}}(t ds)$$

Figura: Fig. 5–26(d).

Tensão média de cisalhamento

- Essa força atua tangencialmente à linha central da parede do tubo e, se o braço de momento for h , o torque é

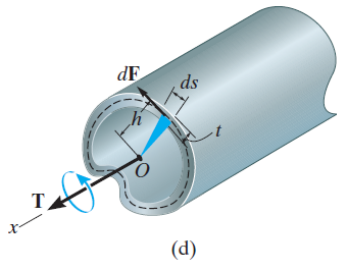


Figura: Fig. 5-26(d).

$$dT = h(dF) = h(\tau_{\text{med}} t ds)$$

Para toda a seção transversal, temos

$$T = \oint h \tau_{\text{med}} t ds$$

Tensão média de cisalhamento

- Aqui, a “integral de linha” indica que a integração deve ser realizada ao longo de todo o contorno. Como o fluxo de cisalhamento $q = \tau_{\text{med}} t$ é constante, ele pode ser colocado para fora da integral, de modo que

$$T = \tau_{\text{med}} t \oint h \, ds$$

- Pode-se fazer uma simplificação gráfica para avaliar a integral, observando que a área limitada pela linha média, mostrada pelo triângulo em azul na Fig. 5–26(d), é

$$dA_m = \frac{1}{2} h \, ds$$

Assim

$$T = 2\tau_{\text{med}} t \int dA_m = 2\tau_{\text{med}} t A_m$$

Tensão média de cisalhamento

- Isolando τ_{med} , temos

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T}{2 t A_m}$$

Onde:

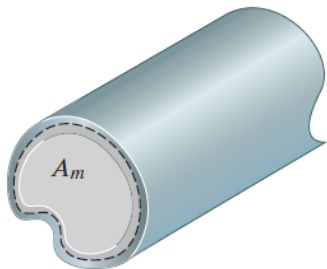
τ_{med} = tensão de cisalhamento média atuando sobre uma determinada espessura do tubo;

T = torque interno resultante na seção transversal;

t = espessura do tubo no ponto onde τ_{med} deve ser determinada;

A_m = área delimitada pelo contorno da linha central, ou linha média, da espessura do tubo, mostrada sombreada na Fig. 5-26(e).

Tensão média de cisalhamento



(e)

Figura: Fig. 5-26(c).

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T}{2 t A_m}$$

Finalmente, como $q = \tau_{\text{med}} t$,
então o fluxo de cisalhamento
ao longo de toda a seção transversal
torna-se

$$q = \frac{T}{2 A_m}$$

Ângulo de torção

- O ângulo de torção de um tubo de paredes finas de comprimento L pode ser determinado utilizando métodos de energia, e o desenvolvimento da equação necessária é apresentado como um problema posteriormente no livro. Se o material apresentar comportamento linear elástico e G for o módulo de cisalhamento, então esse ângulo ϕ , dado em radianos, pode ser expresso como

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

- Novamente, a integração deve ser realizada ao longo de todo o contorno da área da seção transversal do tubo.

Exemplo 5.12

Calcule a tensão de cisalhamento média em um tubo de paredes finas com seção transversal circular, de raio médio r_m e espessura t , submetido a um torque T , conforme mostrado na Fig. 5–27(a). Determine também o ângulo relativo de torção se o tubo tiver comprimento L .

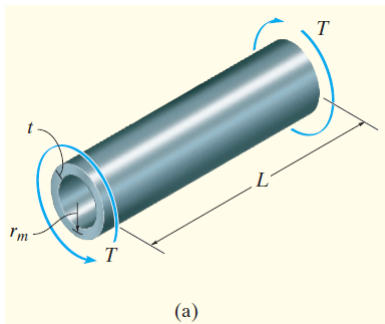


Figura: Fig. 5–26(c). Exemplo 5.12.

Exemplo 5.12

Tensão de cisalhamento média

A área limitada pela linha média do tubo e a tensão cisalhante são:

$$A_m = \pi r_m^2 \quad \tau_{\text{med}} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{T}{2\pi r_m^2 t}.$$

Podemos verificar a validade desse resultado aplicando a fórmula da torção. Assim, temos:

$$J = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2} (r_o^2 + r_i^2) (r_o^2 - r_i^2) = \frac{\pi}{2} (r_o^2 + r_i^2) (r_o + r_i) (r_o - r_i)$$

Como $r_m \approx r_o \approx r_i$ e $t = r_o - r_i$, temos

$$J = \frac{\pi}{2} (2r_m^2) (2r_m) t = 2\pi r_m^3 t \quad \text{e} \quad \tau_{\text{med}} = \frac{T}{J} r_m = \frac{T}{2\pi r_m^3 t} r_m = \frac{T}{2\pi r_m^2 t}$$

o que está de acordo com o resultado anterior.

Exemplo 5.12

Tensão de cisalhamento média

- A distribuição da tensão de cisalhamento média atuando ao longo da seção transversal do tubo é mostrada na Fig. 5—27(b).

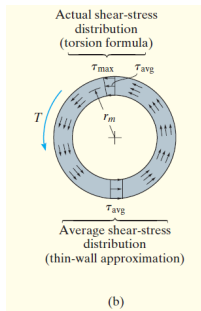


Figura: Fig. 5–26(c). Exemplo 5.12.

Exemplo 5.12

Ângulo de torção

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint_C \frac{ds}{t} = \frac{TL}{4(2\pi r_m^2)^2 G} \oint_C \frac{ds}{t}$$

A integral representa o comprimento ao redor da linha média da seção, que é $2\pi r_m$.
Substituindo, o resultado final é

$$\phi = \frac{TL}{2\pi r_m^3 G t}$$

Exemplo 5.13

O tubo é feito de bronze C86100 e possui uma seção transversal retangular, conforme mostrado na Fig. 5–28(a). Se ele estiver sujeito aos dois torques, determine a tensão de cisalhamento média no tubo nos pontos A e B . Além disso, determine o ângulo de torção da extremidade C . O tubo está fixado em E .

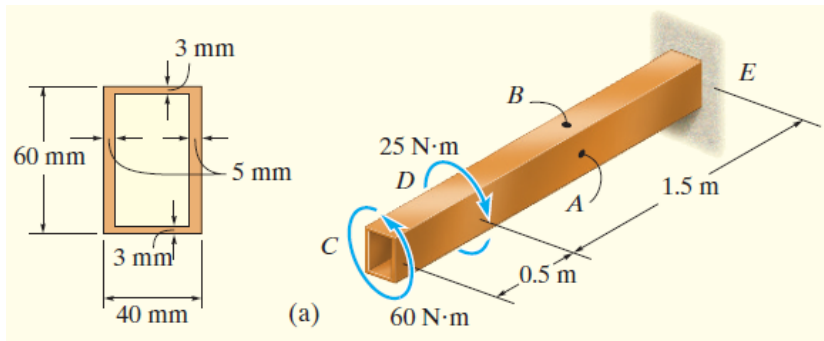


Figura: Fig. 5–28. Exemplo 5.13.

Exemplo 5.13

Tensão de cisalhamento média

- Se o tubo for seccionado nos pontos A e B , o diagrama de corpo livre resultante é mostrado na Fig. 5–28(b). O torque interno é $35 \text{ N} \cdot \text{m}$. Como mostrado na Fig. 5–28(d), a área limitada pela linha média é

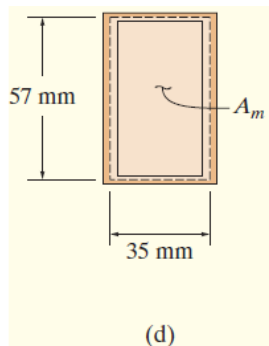
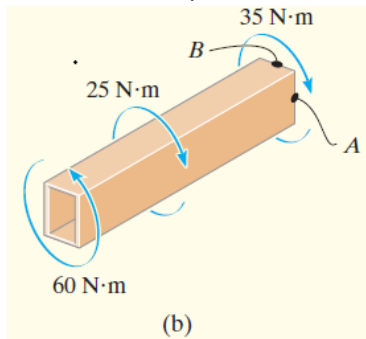


Figura: Fig. 5–28(b) e Fig. 5–28(d) . Exemplo 5.13.

Exemplo 5.13

Tensão de cisalhamento média

- Área limitada pela linha média

$$A_m = (35 \text{ mm})(57 \text{ mm}) = 1995 \text{ mm}^2$$

- No ponto A $t_A = 5 \text{ mm}$

$$\tau_A = \frac{T}{2t_A A_m} = \frac{35 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}}{2(5 \text{ mm})(1995 \text{ mm}^2)} = 1,75 \text{ MPa}$$

- No ponto B $t_B = 3 \text{ mm}$

$$\tau_B = \frac{T}{2t_B A_m} = \frac{35 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}}{2(3 \text{ mm})(1995 \text{ mm}^2)} = 2,92 \text{ MPa}$$

Exemplo 5.13

Tensão de cisalhamento média

Esses resultados são mostrados nos elementos de material localizados nos pontos *A* e *B*, conforme ilustrado na Fig. 5–28e. Observe atentamente como o torque de $35 \text{ N} \cdot \text{m}$ na Fig. 5–28(*b*) produz essas tensões nas faces posteriores de cada elemento.

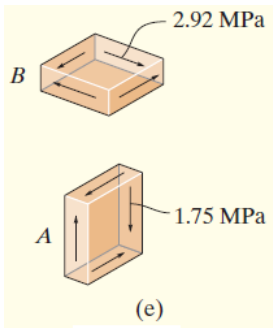


Figura: Fig. 5–28(e) . Exemplo 5.13.

Exemplo 5.13

Ângulo de torção

- A partir dos diagramas de corpo livre das Figuras 5–28(b) e 5–28(c), os torques internos nas regiões DE e CD são $35 \text{ N} \cdot \text{m}$ e $60 \text{ N} \cdot \text{m}$, respectivamente.

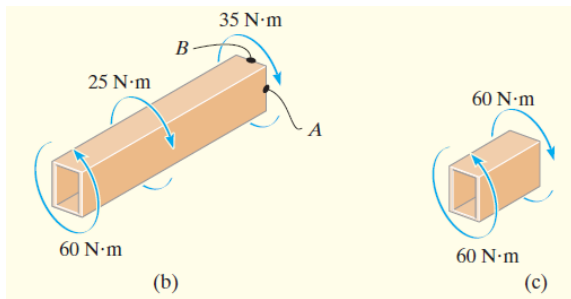


Figura: Fig. 5–28(b) e Fig. 5–28(b). Exemplo 5.13.

Exemplo 5.13

Ângulo de torção

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint_C \frac{ds}{t} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}(500 \text{ mm})}{4(1995 \text{ mm}^2)^2(138 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} \left[2 \left(\frac{57 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} + \frac{35 \text{ mm}}{3 \text{ mm}} \right) \right] + \\ &+ \frac{35 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}(500 \text{ mm})}{4(1995 \text{ mm}^2)^2(138 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} \left[2 \left(\frac{57 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} + \frac{35 \text{ mm}}{3 \text{ mm}} \right) \right] = 6,291 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0,360^\circ\end{aligned}$$