

CAPÍTULO 5 - AULA 2

TORÇÃO

6 de outubro de 2026

Ângulo de torção

- Nesta seção, desenvolveremos uma fórmula para determinar o ângulo de torção ϕ de uma extremidade de um eixo em relação à outra extremidade. Para generalizar esse desenvolvimento, consideraremos que o eixo possui uma seção transversal circular que pode variar gradualmente ao longo de seu comprimento, conforme mostrado na Fig. 5-12(a).

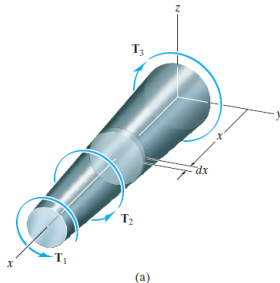


Figura: Fig. 5-12(a).

Ângulo de torção

- Utilizando o método das seções, um disco diferencial de espessura dx , localizado na posição x , é isolado do eixo, conforme mostrado na Fig. 5-12(b). Nessa posição, o torque interno é $T(x)$, uma vez que o carregamento externo pode fazê-lo variar ao longo do eixo.

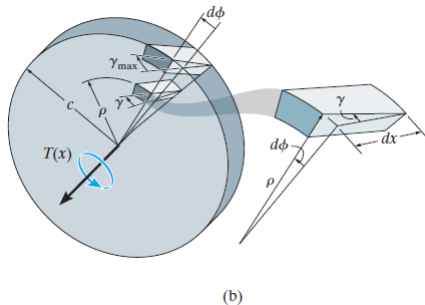
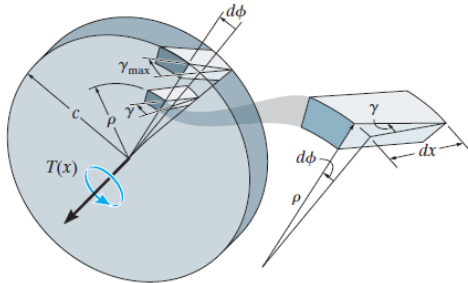


Figura: Fig. 5-12(b).

Ângulo de torção

- Devido a $T(x)$, o disco sofrerá torção, de modo que a rotação relativa entre uma de suas faces e a outra será $d\phi$. Como resultado, um elemento de material localizado a um raio arbitrário ρ dentro do disco sofrerá uma deformação de cisalhamento γ . Os valores de γ e $d\phi$ estão relacionados pela equação, a saber:



(b)

$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho}$$

Figura: Fig. 5-12(b).

Ângulo de torção

- Como a lei de Hooke, $\gamma = \frac{\tau}{G}$ é válida, e a tensão de cisalhamento pode ser expressa em termos do torque aplicado por meio da fórmula da torção,

$$\tau = \frac{T(x)}{J(x)} \rho$$

então,

$$\gamma = \frac{T(x)}{J(x)G(x)} \rho$$

substituindo esta expressão na anterior

$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho} \quad d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G(x)} dx$$

Ângulo de torção

- Integrando ao longo de todo o comprimento L do eixo, podemos obter o ângulo de torção de todo o eixo, a saber:

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G(x)} dx$$

ϕ = ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra extremidade, medido em radianos;

$T(x)$ = torque interno na posição arbitrária x , determinado pelo método das seções e pela equação de equilíbrio de momentos aplicada em torno do eixo;

$J(x)$ = momento polar de inércia do eixo, expresso como uma função de x ;

$G(x)$ = módulo de elasticidade ao cisalhamento do material, expresso em função de x .

Ângulo de torção

Torque e área da seção transversal constantes

- Usualmente, na prática de engenharia, o material é homogêneo, de modo que G é constante. Além disso, a área da seção transversal e o torque externo são constantes ao longo do comprimento do eixo, conforme mostrado na Fig. 5-13.

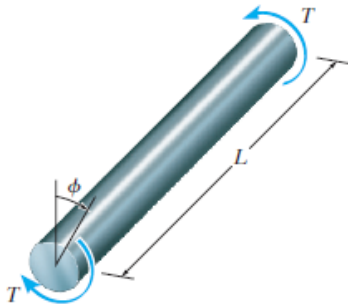


Figura: Fig. 5-13 - Barra com área de seção transversal constante e do mesmo material, submetida a um único torque aplicado nas extremidades.

Ângulo de torção

Torque e área da seção transversal constantes

- Nesse caso, o torque interno $T(x) = T$, o momento polar de inércia $J(x) = J$, e a equação anterior pode ser integrada, resultando em

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

Observe as semelhanças entre as duas equações acima e as de uma barra submetida a carregamento axial.

- Essa equação é frequentemente utilizada para determinar o módulo de elasticidade ao cisalhamento, G , de um material. Para isso, um corpo de prova de comprimento e diâmetro conhecidos é colocado em uma máquina de ensaio de torção, como a mostrada na Fig. 5–14. O torque aplicado T e o ângulo de torção ϕ são então medidos ao longo do comprimento L .

Ângulo de torção

Torque e área da seção transversal constantes

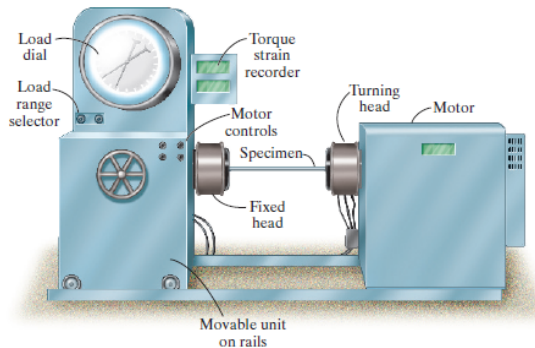


Figura: Fig. 5-14 - Ensaio de torção.

Ângulo de torção

Torque e área da seção transversal constantes

- A partir da equação

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

obtemos

$$G = \frac{TL}{J\phi}$$

- Para obter um valor mais confiável de G , vários desses ensaios são realizados e utiliza-se a média.

Ângulo de torção

Múltiplos torques

- Se o eixo estiver submetido a vários torques diferentes, ou se a área da seção transversal ou o módulo de elasticidade ao cisalhamento variarem abruptamente de uma região do eixo para a seguinte, então a equação que determina o ângulo de torção deve ser aplicada a cada segmento do eixo em que essas grandezas sejam constantes.

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

- Aqui, a soma deve ser algébrica; portanto, os termos podem ser positivos ou negativos, dependendo do sentido do torque e da convenção de sinais adotada.

Ângulo de torção

Convenção de sinais

- A melhor maneira de aplicar essa equação é adotar uma convenção de sinais tanto para o torque interno quanto para o ângulo de torção em uma extremidade do eixo em relação à outra. Para isso, utilizaremos a **regra da mão direita**, segundo a qual tanto o torque quanto o ângulo serão positivos quando o polegar estiver apontado para fora do eixo, enquanto os dedos se curvarem no sentido do torque, conforme mostrado na Fig. 5-15.

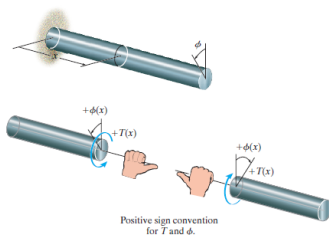


Figura: Fig. 5-15 - Convenção de sinais.

Exemplo 5.5

Determine o ângulo de torção da extremidade A do eixo de aço A-36 mostrado na Fig. 5-16(a). Além disso, qual é o ângulo de torção de A em relação a C ? O eixo possui diâmetro de 200 mm.

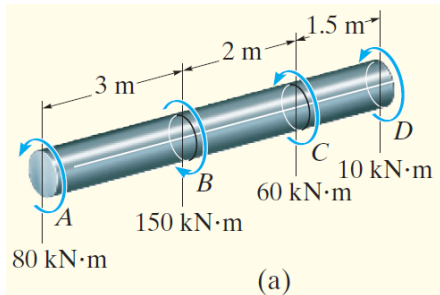


Figura: Fig. 5-16(a) - Exemplo 5.5.

Exemplo 5.5

Torques internos

- Utilizando o método das seções, os torques internos são determinados em cada segmento, conforme mostrado na Fig. 5–16(b). Pela regra da mão direita, considerando positivos os torques orientados para fora da extremidade seccionada do eixo, temos

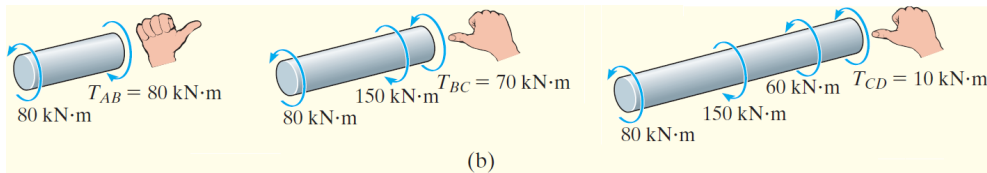


Figura: Fig. 5–16(b). Diagramas de corpo livre.

$$T_{AB} = +80 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad T_{BC} = -70 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad T_{CD} = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Exemplo 5.5

Diagrama de torção

- Esses resultados também são apresentados no **diagrama de torção**, que indica como o torque interno varia ao longo do eixo, conforme mostrado na Fig. 5–16(c).

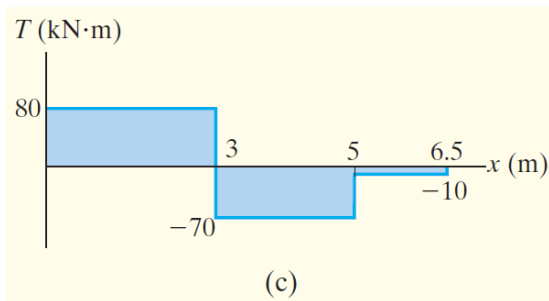


Figura: Fig. 5–16(c). Diagrama de torção.

Exemplo 5.5

Ângulo de torção

- O momento polar de inércia do eixo é

$$J = \frac{\pi}{2}(100 \text{ mm})^4 = 157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4.$$

- Para o aço A-36 $G = 75 \text{ GPa}$. Portanto, a extremidade A do eixo apresenta uma rotação de

$$\begin{aligned}\phi_A &= \frac{TL}{JG} = \frac{80 \times (10^6) \text{ N} \cdot \text{mm} (3000 \text{ mm})}{(157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4) (75 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} + \\ &\quad - \frac{70 \times (10^6) \text{ N} \cdot \text{mm} (2000 \text{ mm})}{(157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4) (75 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} - \frac{10 \times (10^6) \text{ N} \cdot \text{mm} (1500 \text{ mm})}{(157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4) (75 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} \\ &= 7,22 \times 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

Exemplo 5.5

Ângulo de torção

- O **ângulo de torção relativo de A em relação a C** envolve apenas dois segmentos do eixo.

$$\begin{aligned}\phi_{A/C} &= \frac{TL}{JG} = \frac{80 \times (10^6) \text{ N} \cdot \text{mm} (3000 \text{ mm})}{(157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4) (75 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} + \\ &\quad - \frac{70 \times (10^6) \text{ N} \cdot \text{mm} (2000 \text{ mm})}{(157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4) (75 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} \\ &= 8,49 \times 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

- Ambos os resultados são positivos, o que significa que a extremidade A irá girar no sentido indicado pela curvatura dos dedos da mão direita quando o polegar estiver apontado para fora do eixo.

Exemplo 5.6

As engrenagens acopladas ao eixo de aço com a extremidade fixa estão submetidas aos torques mostrados na Fig. 5–17(a). Se o eixo possui diâmetro de 14 mm, determine o deslocamento do dente P da engrenagem A . Considere $G = 80$ GPa.

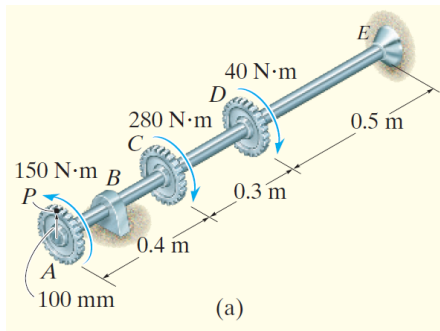


Figura: Fig. 5-17(a) - Exemplo 5.6.

Exemplo 5.6

Torques internos

- Por inspeção, os torques nos segmentos AC , CD e DE são diferentes, porém constantes ao longo de cada segmento. Os diagramas de corpo livre desses segmentos, juntamente com os torques internos calculados, são mostrados na Fig. 5–17(b). Utilizando a regra da mão direita e a convenção de sinais estabelecida, segundo a qual o torque positivo é orientado para fora da extremidade seccionada do eixo, temos:

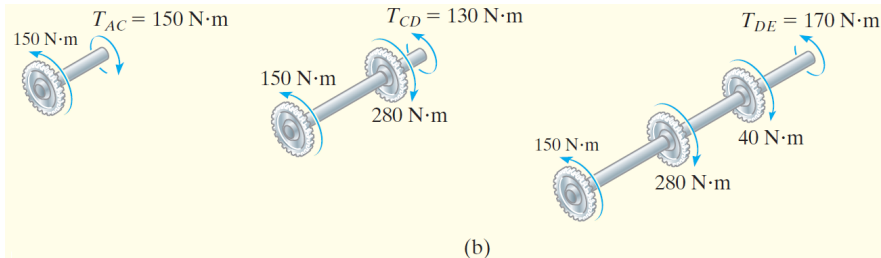


Figura: Fig. 5–17(b). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.6

Ângulo de torção

- O momento polar de inércia do eixo é

$$J = \frac{\pi}{2}(7 \text{ mm})^4 = 3,771 \times 10^3 \text{ mm}^4.$$

- Para o aço A-36 $G = 75 \text{ GPa}$. Portanto, a extremidade A do eixo apresenta uma rotação de

$$\begin{aligned}\phi_A &= \frac{TL}{JG} = \frac{150 \times (10^3) \text{ N} \cdot \text{mm} (400 \text{ mm})}{(3,771 \times 10^3 \text{ mm}^4) (80 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} - \\ &\quad - \frac{130 \times (10^3) \text{ N} \cdot \text{mm} (300 \text{ mm})}{(3,771,079 \times 10^3 \text{ mm}^4) (80 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} - \frac{170 \times (10^3) \text{ N} \cdot \text{mm} (500 \text{ mm})}{(3,771 \times 10^3 \text{ mm}^4) (80 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} \\ &= -0,2121 \text{ rad}\end{aligned}$$

Exemplo 5.6

- Como a resposta é negativa, pela regra da mão direita, o polegar está direcionado para o apoio E do eixo e, portanto, a engrenagem A girará conforme mostrado na Fig. 5–17(c). O deslocamento do dente P da engrenagem A é

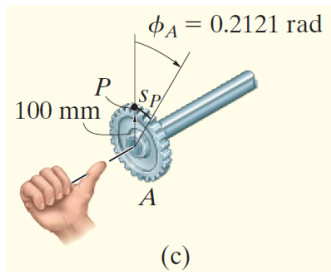


Figura: Fig. 5–17(c).

$$s_P = \phi_A r = (0,2121 \text{ rad})(100 \text{ mm}) = 21,2 \text{ mm}$$

Exemplo 5.7

Os dois eixos maciços de aço mostrados na Fig. 5-18(a) são acoplados por meio de engrenagens. Determine o ângulo de torção da extremidade A do eixo AB quando o torque $T = 45 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado. O eixo DC está fixo em D . Cada eixo possui diâmetro de 20 mm. Considere $G = 80 \text{ GPa}$.

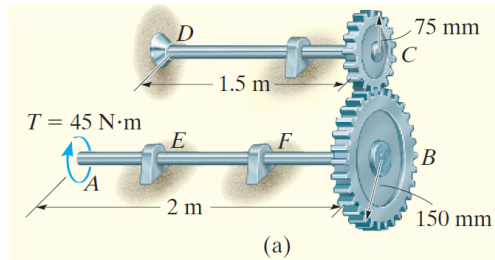


Figura: Fig. 5-18(a) - Exemplo 5.7.

Exemplo 5.7

Torques internos

- Os diagramas de corpo livre para cada eixo são mostrados nas Figs. 5–18(b) e 5–18(c).

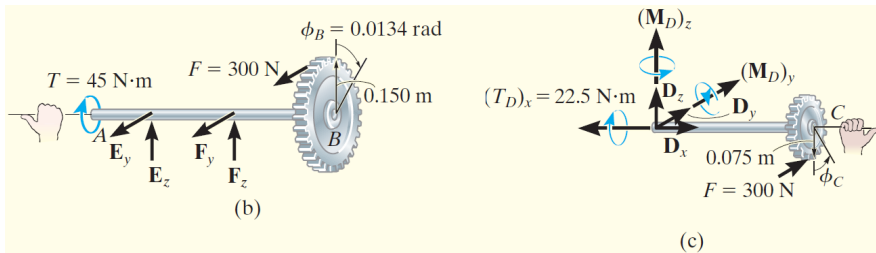


Figura: Fig. 5–18(b) e Fig. 5–18(c). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.7

Torques internos

- Somando os momentos em torno do eixo AB , obtemos a força tangencial de reação entre as engrenagens:

$$F = \frac{45 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,15 \text{ m}} = 300 \text{ N}$$

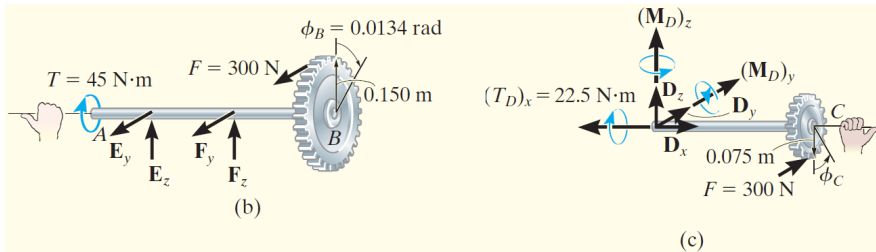


Figura: Fig. 5–18(b) e Fig. 5–18(c). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.7

Torques internos

- Somando os momentos em torno do eixo DC , essa força então produz um torque de

$$T_{DC} = 300 \text{ N}(0,075 \text{ m}) = 22,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

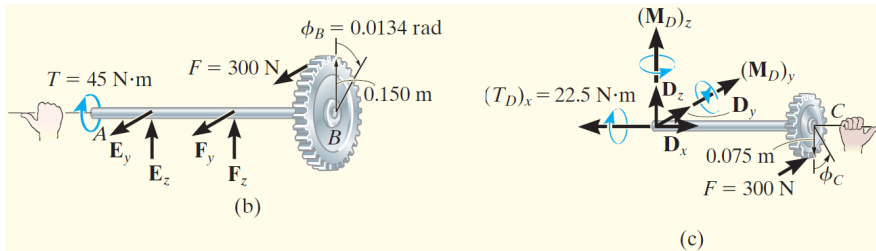


Figura: Fig. 5–18(b) e Fig. 5–18(c). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.7

Ângulos de torção

- Para resolver o problema, primeiro calcularemos a **rotação da engrenagem C** devido ao torque de $22,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ no eixo DC , conforme mostrado na Fig. 5–18(c). Esse ângulo de torção é

$$\phi_C = \frac{TL_{DC}}{JG} = \frac{(22,5 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1500 \text{ mm})}{\left[\frac{\pi}{2}(10 \text{ mm})^4\right](80 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} = +0,0269 \text{ rad}$$

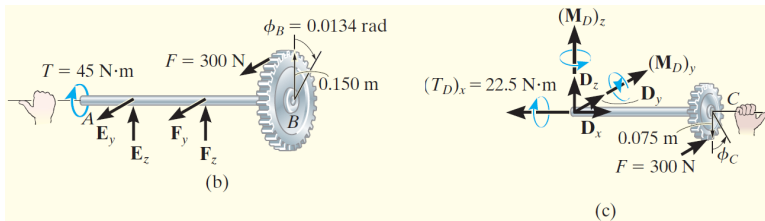


Figura: Fig. 5–18(b) e Fig. 5–18(c). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.7

Ângulos de torção

- Como as engrenagens nas extremidades dos eixos estão engrenadas, a rotação ϕ_C da engrenagem C faz com que a engrenagem B gire de um ângulo ϕ_B , conforme mostrado na Fig. 5-18(d), onde

$$\phi_B(150 \text{ mm}) = (0,0269 \text{ rad})(75 \text{ mm}) \quad \phi_B = 0,0134 \text{ rad}$$

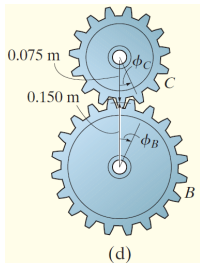


Figura: Fig. 5-18(d).

Exemplo 5.7

Ângulos de torção

- Agora determinaremos o **ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade B** do eixo AB, causado pelo torque de $45 \text{ N} \cdot \text{m}$, conforme mostrado na Fig. 5–18(b). Temos

$$\phi_{A/B} = \frac{TL_{AB}}{JG} = \frac{(45 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(2000 \text{ mm})}{\left[\frac{\pi}{2}(10 \text{ mm})^4\right](80 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)} = +0,0716 \text{ rad}$$

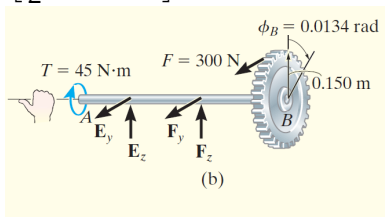


Figura: Fig. 5–18(b).

Exemplo 5.7

Ângulos de torção

- A rotação da extremidade A é, portanto, determinada pela soma de ϕ_B e $\phi_{A/B}$, uma vez que ambos os ângulos estão no mesmo sentido, conforme mostrado na Fig. 5–18(b). Temos

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 0,0134 \text{ rad} + 0,0716 \text{ rad} = +0,0850 \text{ rad}$$

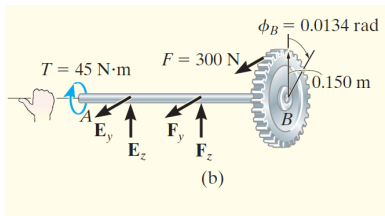


Figura: Fig. 5–18(b).

Exemplo 5.8

O poste maciço de ferro fundido, com diâmetro de 0,05 m, mostrado na Fig. 5–19(a), está enterrado 0,6 m no solo. Se um torque for aplicado em sua extremidade superior com uma chave rígida, determine a **tensão de cisalhamento máxima** no poste e o **ângulo de torção** em sua extremidade superior. Considere que o torque está prestes a girar o poste e que o solo exerce uma **resistência uniforme à torção de $t \text{ N} \cdot \text{m}/\text{m}$** ao longo dos 0,6 m de comprimento enterrado. Considere $G = 40 \text{ GPa}$.

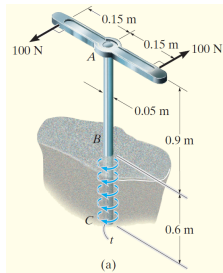


Figura: Fig. 5-19(a) - Exemplo 5.8.

Exemplo 5.8

Torques internos

- O torque interno no segmento (AB) do poste é constante. A partir do diagrama de corpo livre, Fig. 5–19(b), temos

$$\sum M_z = 0; \quad T_{AB} = (100\text{N})(0,30\text{m}) = 30\text{N} \cdot \text{m}$$

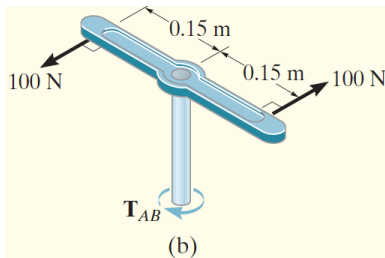


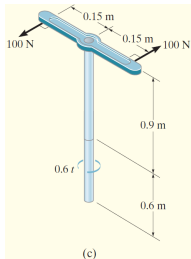
Figura: Fig. 5–19(b). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.8

Torques internos

- A magnitude da distribuição uniforme de torque ao longo do segmento enterrado BC pode ser determinada pelo equilíbrio do poste como um todo, Fig. 5–19(c).

Portanto,



$$\sum M_z = 0;$$

$$(100 \text{ N})(0,30 \text{ m}) - t(0,6 \text{ m}) = 0$$

$$t = 50 \text{ N} \cdot \text{m/m}$$

Figura: Fig. 5–19(c). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.8

Torques internos

- Portanto, a partir do diagrama de corpo livre de uma seção do poste localizada na posição x , Fig. 5–19(*d*), temos:

$$\sum M_z = 0; \quad T_{BC} - 50x = 0 \quad T_{BC} = 50x$$

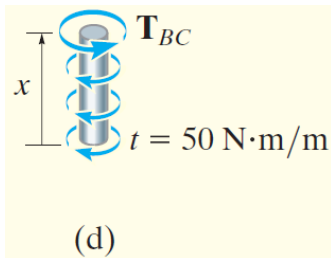


Figura: Fig. 5–19(*d*). Diagramas de corpo livre.

Exemplo 5.8

Tensão máxima de cisalhamento

- A maior valor da tensão de cisalhamento ocorre na região AB , pois o torque é máximo nessa região e J é constante para o eixo. Aplicando a fórmula da torção, temos

$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB}}{J} c = \frac{30 \times 10^3 \text{ N.mm}}{\frac{\pi}{2} (25 \text{ mm})^4} (25) \text{ mm} = 1,22 \text{ MPa}$$

Exemplo 5.8

ângulo de torção

- O ângulo de torção no topo pode ser determinado em relação à base do eixo, uma vez que ela está fixa, enquanto o topo está prestes a girar. Ambos os segmentos AB e BC sofrem torção e, portanto, neste caso, temos:

$$\begin{aligned}\phi_A &= \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} + \int_0^{L_{BC}} \frac{T_{BC}}{JG} dx = \\ &= \frac{(30 \times 10^3 \text{ N.m})(900 \text{ mm})}{JG} + \frac{1}{JG} \int_0^{600 \text{ mm}} 50x dx = \\ &= \frac{27 \times 10^6 \text{ Nmm}^2}{JG} + \frac{50 [(600)^2/2] \text{ Nmm}^2}{JG} = 0,00147 \text{ rad}\end{aligned}$$