

CAPÍTULO 5 - AULA 1

TORÇÃO

30 de setembro de 2026

Objetivos do capítulo

- Neste capítulo, discutiremos os efeitos da aplicação de um carregamento de torção a um elemento longo e retilíneo, como um eixo ou um tubo.
- Inicialmente, consideraremos que o elemento possui seção transversal circular.
- Mostraremos como determinar tanto a distribuição de tensões no interior do elemento quanto o ângulo de torção.

Eixo circular submetido a um torque

- **Torque** é um momento que tende a fazer um corpo girar ou torcer em torno de seu eixo longitudinal.
- Esse fenômeno é importante no projeto de **eixos de máquinas e veículos**.
- Quando o torque é aplicado, as **linhas longitudinais** do eixo se deformam, assumindo uma forma helicoidal.
- As **seções transversais permanecem planas**, sem empenar.
- As **linhas radiais permanecem retas**, mas giram durante a torção.
- Para **pequenos ângulos de torção**, o comprimento e o raio do eixo praticamente não variam.

Eixo circular submetido a um torque

- Podemos ilustrar fisicamente o que acontece quando um torque é aplicado a um eixo circular, considerando que o eixo é constituído por um material altamente deformável, como a borracha.



Figura: Torção em torno de um eixo de borracha.

Eixo circular submetido a um torque

- O eixo fixado ao centro desta roda é submetido a um torque, e a tensão máxima resultante deve ser suportada pelo eixo para evitar a falha.



Figura: Torção em torno de um eixo.

Eixo circular submetido a um torque

- Quando o torque é aplicado, as linhas longitudinais da malha, originalmente marcadas no eixo, conforme mostrado na Fig. 5-1(a), tendem a se deformar, assumindo a forma de uma **hélice**, conforme mostrado na Fig. 5-1(b), que intersecta as circunferências formando ângulos iguais.

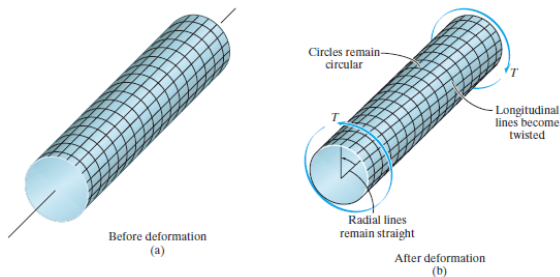


Figura: Fig. 5-1(a)-1(b).

Eixo circular submetido a um torque

- Além disso, todas as seções transversais do eixo permanecem **planas** — isto é, não sofrem empenamento nem se deformam para dentro ou para fora — e as linhas radiais permanecem retas e giram durante essa deformação.
- Desde que o **ângulo de torção seja pequeno**, o comprimento do eixo e o raio permanecerão praticamente inalterados.

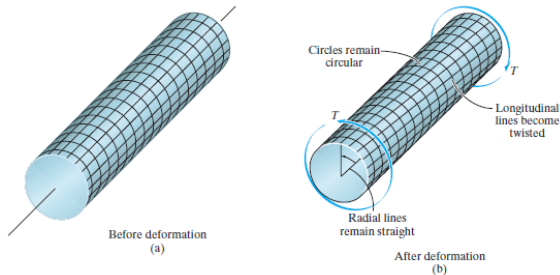


Figura: Fig. 5-1(a)-1(b).

Eixo circular submetido a um torque

- Se o eixo estiver fixado em uma de suas extremidades e um torque for aplicado à outra extremidade, então o plano sombreado em verde-escuro da Fig. 5-2(a) sofrerá uma deformação, assumindo a forma inclinada (*skewed*) mostrada na figura.

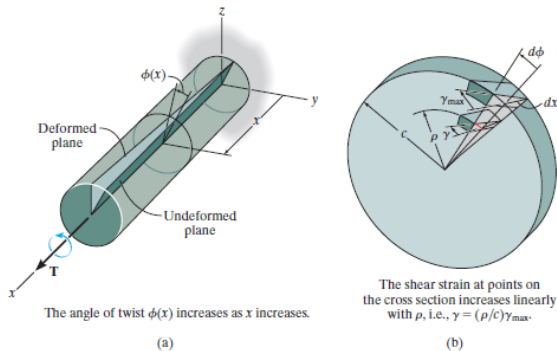


Figura: Fig. 5-2(a)-2(b).

Eixo circular submetido a um torque

- Nesse caso, uma linha radial, localizada na seção transversal a uma distância x da extremidade fixa do eixo, girará por um ângulo $\phi(x)$. Esse ângulo é chamado de **ângulo de torção**. Ele depende da posição x e varia ao longo do eixo, conforme mostrado na figura.

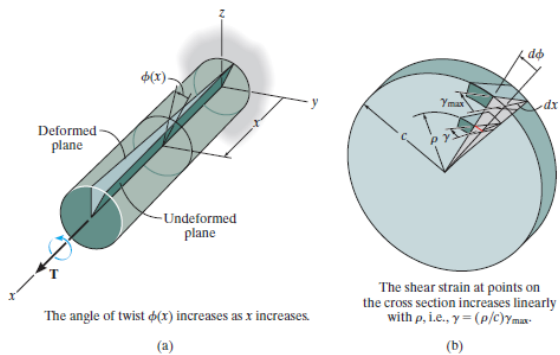


Figura: Fig. 5-2(a)-2(b).

Eixo circular submetido a um torque

- Para compreender como isso provoca deformações no material, vamos agora isolar um pequeno elemento em forma de disco, localizado a uma distância x da extremidade do eixo, conforme mostrado na Fig. 5-2(b).

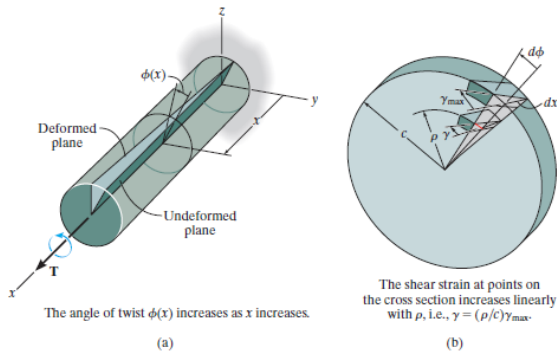


Figura: Fig. 5-2(a)-2(b).

Eixo circular submetido a um torque

- Devido à deformação, as faces frontal e traseira do elemento sofrerão rotação: a face traseira sofrerá uma rotação de $\phi(x)$, enquanto a face frontal sofrerá uma rotação de

$$\phi(x) + d\phi$$

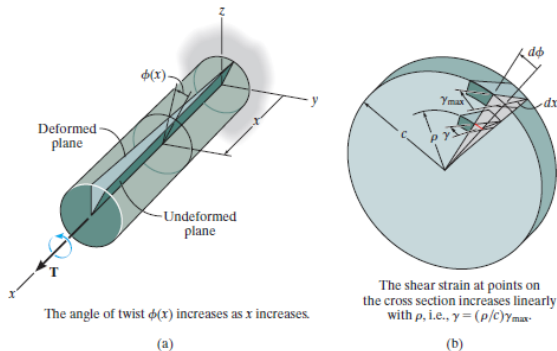


Figura: Fig. 5-2(a)-2(b).

Eixo circular submetido a um torque

- Como resultado, a diferença entre essas rotações, $d\phi$, faz com que o elemento seja submetido a uma **deformação de cisalhamento** γ (ver Fig. 3–25(b)).

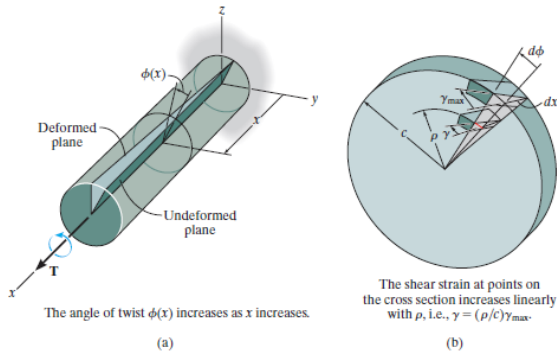


Figura: Fig. 5–2(a)-2(b).

Eixo circular submetido a um torque

- Esse ângulo (ou deformação por cisalhamento) pode ser relacionado ao ângulo ($d\phi$) observando que o comprimento do arco vermelho na Fig. 5-2(b) é

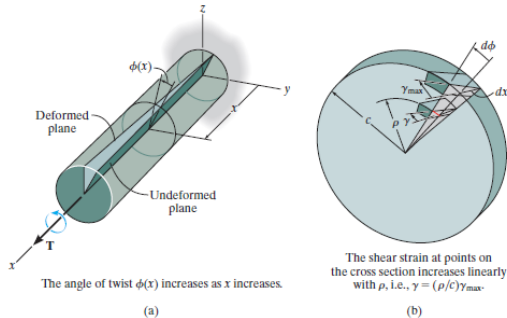
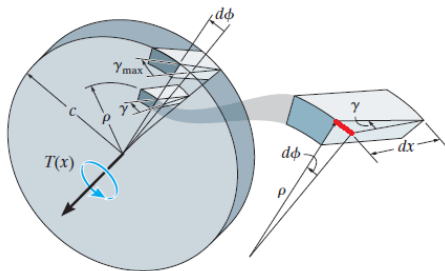


Figura: Fig. 5-2(a)-2(b).

Eixo circular submetido a um torque



(b)

Figura: Fig. 5-2(b).

$$\tan d\phi = \frac{\text{Carco}}{\rho}$$

$$\tan \gamma = \frac{\text{Carco}}{dx}$$

$$\tan d\phi \approx d\phi = \frac{\text{Carco}}{\rho}$$

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{\text{Carco}}{dx}$$

$$\text{Carco} = \rho d\phi$$

$$\text{Carco} = \gamma dx$$

$$\rho d\phi = \gamma dx \quad \text{ou} \quad \gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

Eixo circular submetido a um torque

- Como dx e $d\phi$ são os mesmos para todos os elementos, $d\phi/dx$ é constante ao longo da seção transversal. A seguinte equação estabelece que a magnitude da deformação por cisalhamento varia apenas com a distância radial ρ em relação ao eixo. Como:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{\max}}{c}$$

Então:

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{\max}$$

- Em outras palavras, a deformação por cisalhamento no interior do eixo varia linearmente ao longo de qualquer linha radial, desde zero no eixo da barra até um valor máximo $\gamma_{\max}$ em sua superfície externa (Fig. 5-2(b)).

A fórmula da torção

- Quando um torque externo é aplicado a um eixo, ele induz um torque interno correspondente no interior do eixo. Nesta seção, desenvolveremos uma equação que relaciona esse torque interno à distribuição da tensão de cisalhamento atuante na seção transversal do eixo. Se o material for linearmente elástico, então a lei de Hooke se aplica,

$$\tau = G\gamma$$

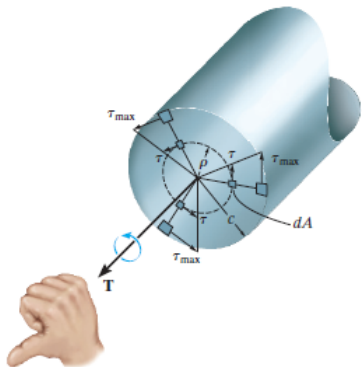
ou

$$\tau_{\max} = G\gamma_{\max},$$

- E, conseqüentemente, uma variação linear da deformação de cisalhamento, conforme observado na seção anterior, conduz a uma variação linear correspondente da tensão de cisalhamento ao longo de qualquer linha radial.
- G é definido como módulo de elasticidade transversal, ou módulo de cisalhamento, do material e a sua determinação será mostrada mais adiante nestas notas de aula.

A fórmula da torção

- Portanto, τ irá variar de zero no eixo longitudinal do eixo até um valor máximo, $\tau_{\max}$, em sua superfície externa, conforme mostrado na Fig. 5–3. Assim, de maneira semelhante à equação $\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{\max}$, podemos escrever

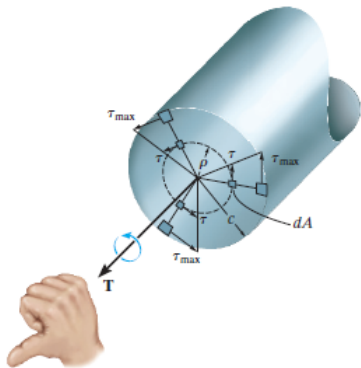


$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{\max}$$

Figura: Fig. 5–3.

A fórmula da torção

- Como cada elemento de área dA , localizado a uma distância ρ , está submetido a uma força $dF = \tau dA$ (Fig. 5-3), o torque produzido por essa força é então $dT = \rho(\tau dA)$. Para toda a seção transversal, temos

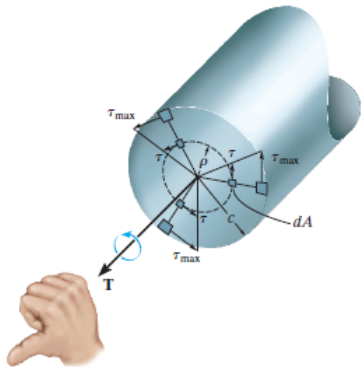


$$T = \int_A \rho(\tau dA) = \int_A \rho \left(\frac{\rho}{c} \right) \tau_{\max} dA$$

Figura: Fig. 5-3.

A fórmula da torção

- Entretanto, $\tau_{\max}/c$ é constante e, portanto,

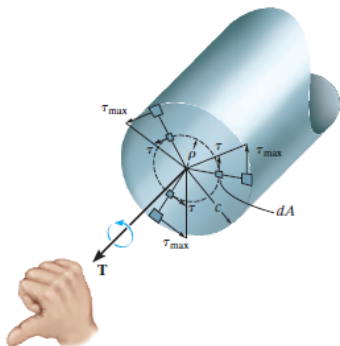


$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

Figura: Fig. 5–3.

A fórmula da torção

- A integral representa o momento polar de inércia da área da seção transversal do eixo em relação ao seu eixo longitudinal. A seguir, calcularemos seu valor, mas, por ora, o representaremos por J . Como resultado, a equação acima pode ser rearranjada e escrita de uma forma mais compacta, a saber,

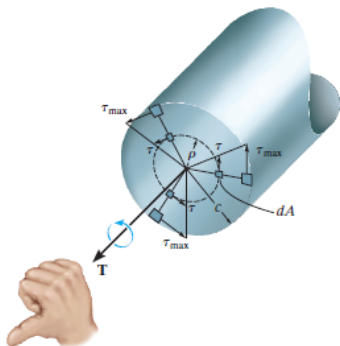


$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

Figura: Fig. 5–3.

A fórmula da torção

- Como resultado, a equação anterior pode ser rearranjada e escrita de uma forma mais compacta,



$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} c$$

Figura: Fig. 5-3.

A fórmula da torção

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} c$$

$\tau_{\max}$ = tensão de cisalhamento máxima no eixo, que ocorre em sua superfície externa;

T = torque interno resultante que atua na seção transversal. Seu valor é determinado pelo método das seções e pela equação de equilíbrio de momentos aplicada em relação ao eixo longitudinal do eixo;

J = momento polar de inércia da área da seção transversal;

c = raio externo do eixo.

A fórmula da torção

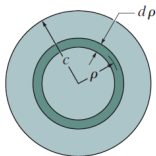
- A equação anterior pode ser adaptada para qualquer distância ρ ao longo da seção transversal e a tensão de cisalhamento poderá ser determinada.

$$\tau = \frac{T}{J} \rho$$

- Qualquer uma das duas equações anteriores é frequentemente denominada fórmula da torção. Lembre-se de que ela é utilizada apenas se o eixo tiver seção transversal circular e o material for homogêneo e apresentar comportamento linear.

Momento polar de inércia

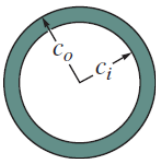
- Seção circular cheia



$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

Figura: Fig. 5–4. Seção circular cheia.

- Seção circular vazada



$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

Figura: Fig. 5–5. Seção circular vazada.

Distribuição da tensão cisalhante

- Se um elemento na seção transversal do eixo ou do tubo for isolado, então, devido à propriedade de complementaridade do cisalhamento, tensões de cisalhamento iguais também devem atuar em quatro de suas faces adjacentes, conforme mostrado na Fig. 5-6(a).

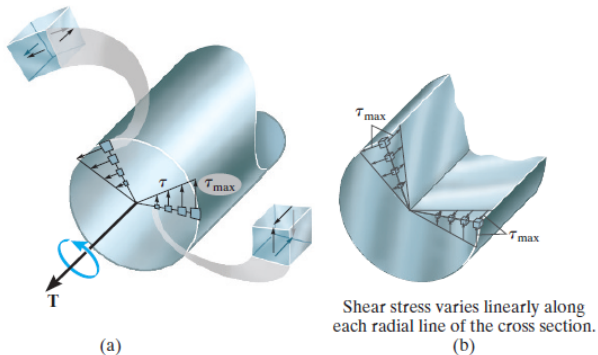


Figura: Fig. 5-6.

Distribuição da tensão cisalhante

- Como resultado, o torque interno T gera uma distribuição linear de tensão de cisalhamento ao longo de cada linha radial no plano da seção transversal e também desenvolve uma distribuição de tensão de cisalhamento ao longo de um plano axial (Fig. 5-6(b)).

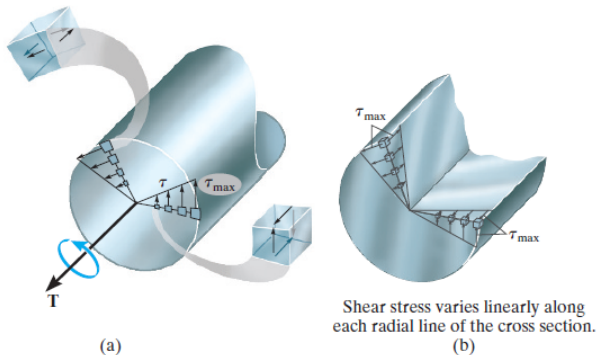


Figura: Fig. 5-6.

Distribuição da tensão cisalhante

- É interessante notar que, devido a essa distribuição axial da tensão de cisalhamento, os eixos de madeira tendem a rachar ao longo do plano axial quando submetidos a um torque excessivo (Fig. 5–7). Isso ocorre porque a madeira é um material anisotrópico, apresentando uma resistência ao cisalhamento paralela aos seus grãos ou fibras — orientada ao longo do eixo da peça — muito inferior à sua resistência perpendicular às fibras, no plano da seção transversal.

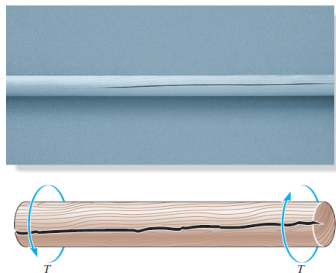


Figura: Fig. 5–7. Falha de um eixo de madeira por torção.

Distribuição da tensão cisalhante

- O eixo de transmissão tubular de um caminhão foi submetido a um torque excessivo, resultando em falha por escoamento do material. Os eixos de transmissão são projetados para falhar antes que ocorram danos por torção em componentes do motor ou da transmissão.



Figura: Eixo de transmissão tubular de um caminhão.

Exemplo 5.1

O eixo maciço e o tubo mostrados na Fig. 5–8 são feitos de um material com tensão de cisalhamento admissível de 75 MPa. Determine o torque máximo que pode ser aplicado a cada seção transversal e mostre a tensão atuante em um pequeno elemento de material no ponto A do eixo e nos pontos B e C do tubo.

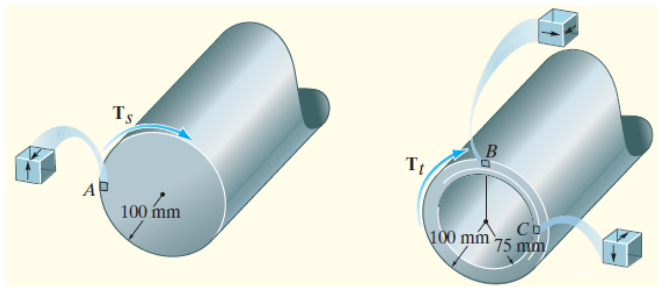


Figura: Fig. 5–8. Exemplo 5.1.

Exemplo 5.1

Propriedades das seções

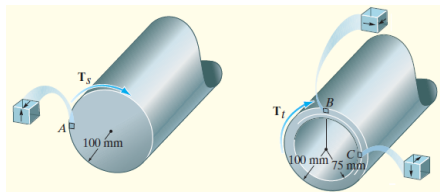


Figura: Fig. 5–8. Exemplo 5.1.

$$J_s = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} (100 \text{ mm})^4 = 157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_t = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{2} [(100 \text{ mm})^4 - (75 \text{ mm})^4] = 107,378 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Exemplo 5.1

O torque máximo em cada caso é:

- Para o eixo maciço:

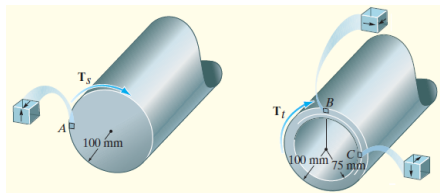


Figura: Fig. 5–8. Exemplo 5.1.

$$(\tau_{\max})_s = \frac{T_s}{J_s} c \quad 75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{T_s}{157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4} (100 \text{ mm}) \quad T_s = 117,81 \text{ kN.m}$$

Exemplo 5.1

- Para o eixo vazado:

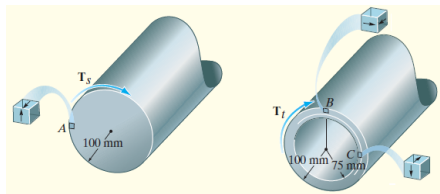


Figura: Fig. 5–8. Exemplo 5.1.

$$(\tau_{\max})_t = \frac{T_t}{J_t} c \quad 75 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \frac{T_t}{107,378 \times 10^6 \text{ mm}^4} (100 \text{ mm}) \quad T_t = 80,5 \text{ kN.m}$$

Exemplo 5.1

- A tensão de cisalhamento no raio máximo do tubo maciço é:

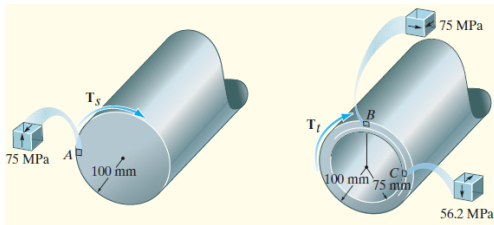


Figura: Fig. 5–8. Exemplo 5.1.

$$(\tau)_s = \frac{T_s}{J_s} c = \frac{117,81 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{157,079 \times 10^6 \text{ mm}^4} (100 \text{ mm}) = 75 \text{ MPa}.$$

Exemplo 5.1

- A tensão de cisalhamento no raio externo do tubo vazado é

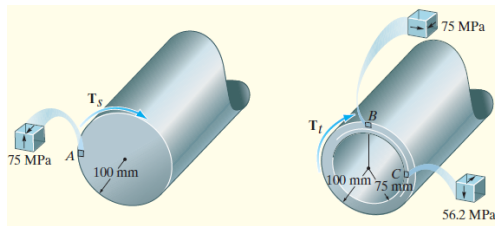


Figura: Fig. 5–8. Exemplo 5.1.

$$(\tau_o)_t = \frac{T_t}{J_t} c_o = \frac{80,5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{107,378 \times 10^6 \text{ mm}^4} (100 \text{ mm}) = 75 \text{ MPa}.$$

Exemplo 5.1

- A tensão de cisalhamento no raio interno do tubo vazado é

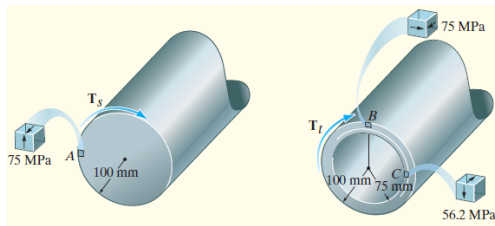


Figura: Fig. 5–8. Exemplo 5.1.

$$(\tau_i)_t = \frac{T_t}{J_t} c_i = \frac{80,5 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{107,378 \times 10^6 \text{ mm}^4} (75 \text{ mm}) = 56,2 \text{ MPa}.$$

Exemplo 5.2

O eixo mostrado na Fig. 5–9(a), com 150 mm de diâmetro ($c = 75$ mm), é apoiado por dois mancais e está sujeito a três torques. Determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos A e B , localizados na seção $a - a$ do eixo.

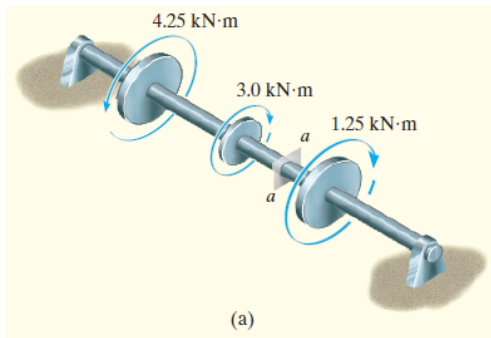


Figura: Fig. 5–9(a). Exemplo 5.2.

Exemplo 5.2

Torque na seção $a - a$ - Diagrama de corpo livre

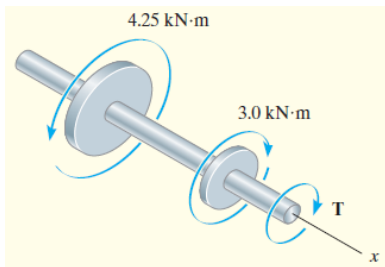


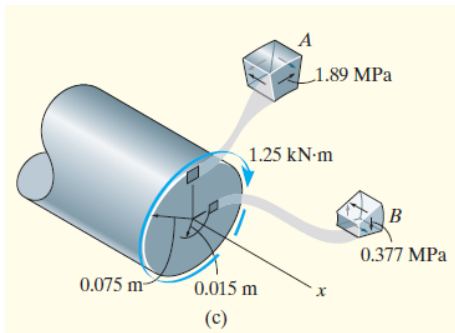
Figura: Fig. 5-9(b). Exemplo 5.2.

$$\sum M_x = 0; \quad 4,25 \text{ kN.m} - 3,0 \text{ kN.m} - T = 0 \quad T = 1,25 \text{ kN.m}$$

Momento polar de inércia ($c = 75 \text{ mm}$) $J = \frac{\pi}{2}(75)^4 = 49,700 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Exemplo 5.2

- Como o ponto A está em $\rho = c = 75\text{mm}$,

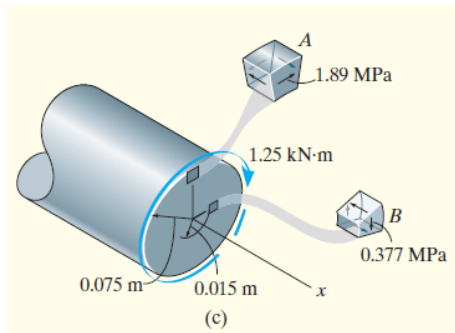


$$\tau_A = \frac{T}{J} c = \frac{[1,25 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}]}{49,70 \times 10^6 \text{ mm}^4} (75 \text{ mm})$$
$$= 1,89 \text{ MPa}$$

Figura: Fig. 5–9(c). Exemplo 5.2.

Exemplo 5.2

- Da mesma forma, para o ponto B , em $\rho = 15 \text{ mm}$, temos,



$$\tau_A = \frac{T}{J} \rho = \frac{[1,25 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}]}{49,70 \times 10^6 \text{ mm}^4} (15 \text{ mm})$$
$$= 0,377 \text{ MPa}$$

Figura: Fig. 5–9(c). Exemplo 5.2.

Exemplo 5.3

O tubo mostrado na Fig. 5–10(a) possui raio interno de 40 mm e raio externo de 50 mm. Se a sua extremidade for apertada contra o suporte em A utilizando a chave dinamométrica, determine a tensão de cisalhamento desenvolvida no material nas paredes interna e externa ao longo da parte central do tubo.

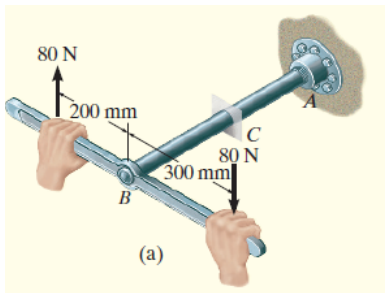


Figura: Fig. 5–10(a). Exemplo 5.3.

Exemplo 5.3

Torque

- Faz-se um corte na seção intermediária C ao longo do eixo do tubo (Fig. 5–10(b)). A única incógnita nessa seção é o torque interno T . Assim, tem-se que

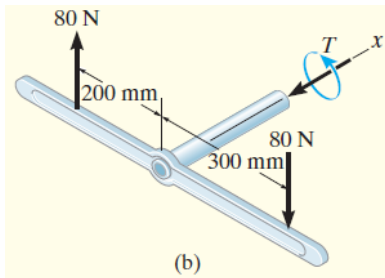


Figura: Fig. 5–10(b). Exemplo 5.3.

$$\sum M_x = 0; \quad 80 \times 0,3 + 80 \times 0,2 - T = 0 \quad T = 40 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Exemplo 5.3

Momento polar de inércia $J = \frac{\pi}{2} [(50)^4 - (40)^4] = 5,7961 \times 10^6 \text{ mm}^4$

- Para qualquer ponto situado na superfície externa do tubo ($c_o = 50 \text{ mm}$):

$$\tau_o = \frac{T}{J} c_o = \frac{40 \times 10^3 \text{ N mm}}{5,7961 \times 10^6 \text{ mm}^4} (50 \text{ mm}) = 0,345 \text{ MPa}$$

- E para qualquer ponto localizado na superfície interna, ($c_i = 40 \text{ mm}$):

$$\tau_i = \frac{T}{J} c_i = \frac{40 \times 10^3 \text{ N mm}}{5,7961 \times 10^6 \text{ mm}^4} (40 \text{ mm}) = 0,276 \text{ MPa}$$

Exemplo 5.3

- Estes resultados são apresentados em dois pequenos elementos na Fig. 5–10(c).

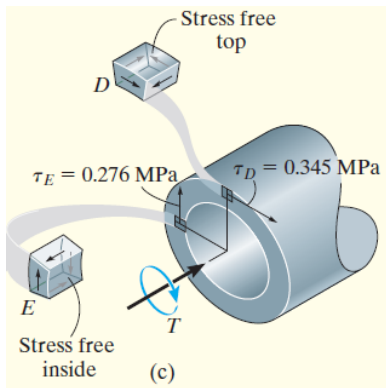


Figura: Fig. 5–10(c). Exemplo 5.3.

Transmissão de potência

- Eixos e tubos com seções transversais circulares são frequentemente utilizados para transmitir potência desenvolvida por uma máquina. Quando utilizados para essa finalidade, eles são submetidos a um torque que depende tanto da potência gerada pela máquina quanto da velocidade angular do eixo.
- A potência é definida como o trabalho realizado por unidade de tempo. Além disso, o trabalho transmitido por um eixo em rotação é igual ao torque aplicado multiplicado pelo ângulo de rotação. Portanto, se, durante um intervalo de tempo dt , um torque aplicado T faz com que o eixo gire de um ângulo $d\theta$, então o trabalho realizado é $T d\theta$ e a potência instantânea é

$$P = T \frac{d\theta}{dt}$$

- Como a velocidade angular do eixo é $\omega = d\theta/dt$, então a potência é:

$$P = T\omega$$

Transmissão de potência

- Eixos e tubos com seções transversais circulares são frequentemente utilizados para transmitir potência desenvolvida por uma máquina. Quando utilizados para essa finalidade, eles são submetidos a um torque que depende tanto da potência gerada pela máquina quanto da velocidade angular do eixo.
- A potência é definida como o trabalho realizado por unidade de tempo. Além disso, o trabalho transmitido por um eixo em rotação é igual ao torque aplicado multiplicado pelo ângulo de rotação. Portanto, se, durante um intervalo de tempo dt , um torque aplicado T faz com que o eixo gire de um ângulo $d\theta$, então o trabalho realizado é $T d\theta$ e a potência instantânea é

$$P = T \frac{d\theta}{dt}$$

- Como a velocidade angular do eixo é $\omega = d\theta/dt$, então a potência é:

$$P = T\omega$$

Transmissão de potência

- No Sistema Internacional (SI), a potência é expressa em *watts* quando o torque é medido em newton-metros (N.m) e a velocidade angular ω é dada em radianos por segundo (rad/s) e $1 \text{ W} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$.
- A potência também pode ser expressa em cavalos-vapor (hp), uma unidade frequentemente utilizada na prática de engenharia, em que

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

- Para máquinas, a frequência de rotação de um eixo, f , é frequentemente utilizada. Ela representa o número de revoluções, ou “ciclos”, que o eixo realiza por segundo e é expressa em hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s}$).

Transmissão de potência

- Como

$$1 \text{ ciclo} = 2\pi \text{ rad}$$

- Temos:

$$\omega = 2\pi f$$

- Portanto, a equação da potência apresentada anteriormente também pode ser escrita como

$$P = 2\pi fT$$

Transmissão de potência

$$P = 2\pi fT$$

Para se aplicar esta equação, que relaciona a potência aplicada a um eixo que gira com uma velocidade angular ω ao torque T , deve-se observar as unidades, que devem estar no SI, ou seja:

- Potência (P): watt ($1 \text{ W} = 1 \text{ N}\cdot\text{m/s}$).
- Velocidade angular $\omega = 2\pi f$: rad/s.
- Frequência f : Hertz = Hz
- Torque (T): Nm.

Se a potência for expressa em cavalos-vapor (CV) ou horse-power (hp), então os fatores de conversão para W são, respectivamente:

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W} \quad \text{e} \quad 1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

Projeto de eixos

- Quando a potência transmitida por um eixo e sua frequência de rotação são conhecidas, o torque desenvolvido no eixo pode ser determinado pela equação

$$T = \frac{P}{2\pi f}.$$

- Isto é, conhecendo T e a tensão de cisalhamento admissível do material, τ_{adm} , podemos então dimensionar a seção transversal do eixo usando a fórmula da torção. Especificamente, o parâmetro de projeto ou geométrico J/c torna-se

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{adm}}}$$

Projeto de eixos

- Para um eixo maciço,

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

e, portanto, após a substituição dos valores, pode-se determinar um único valor para o raio c do eixo.

- Se o eixo for tubular,

$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

o projeto permite uma ampla variedade de possibilidades para a solução. Isso ocorre porque pode-se fazer uma escolha arbitrária para c_o ou c_i . Normalmente, fixa-se previamente a razão entre o raio interno c_i e o raio externo c_o , definindo-se uma única solução para o projeto.

Exemplo 5.4

Um eixo maciço de aço AB , mostrado na Fig. 5–11, deve ser utilizado para transmitir 5 hp a partir do motor M ao qual está acoplado. Se o eixo gira a uma velocidade de $\omega = 175$ rpm e o aço possui uma tensão de cisalhamento admissível $\tau_{\text{adm}} = 100$ MPa, determine o diâmetro necessário do eixo, arredondando para o milímetro mais próximo.

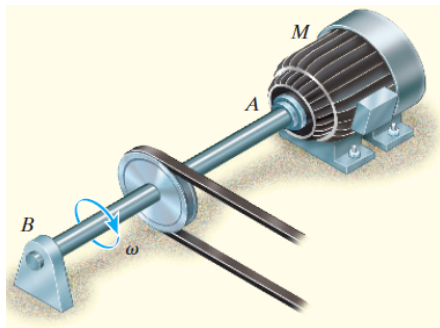


Figura: Fig. 5–11. Exemplo 5.4.

Exemplo 5.4

$$P = (5 \text{ hp}) \times \left(\frac{746 \text{ W}}{1 \text{ hp}} \right) = 3750 \text{ W}$$

$$f = \frac{175}{60} \text{ Hz} \quad \omega = 2 \pi \times \frac{175}{60} = 18,326 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{3750}{18,326} = 204,627 \text{ Nm}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{\pi c^4}{2 c} \quad c = \left(\frac{2T}{\pi \tau_{\text{adm}}} \right)^{1/3}$$

$$c \geq 10,84 \text{ mm} \quad 2c = 21,68 \text{ mm} \quad d = 22 \text{ mm}$$