

CAPÍTULO 4 - AULA 1

CARGAS AXIAIS

9 de setembro de 2026

Objetivos do capítulo

- Neste capítulo, discutiremos como determinar a deformação de um elemento submetido a carregamento axial.

Princípio de Saint-Venant

- Nos capítulos anteriores foram apresentados os conceitos de **tensão**, como medida da distribuição interna de forças em um corpo, e de **deformação**, como medida da alteração de sua geometria. Também se observou que a relação entre tensão e deformação depende das propriedades do material. Para materiais que apresentam comportamento **elástico linear**, aplica-se a **Lei de Hooke**, segundo a qual a tensão e a deformação são diretamente proporcionais.
- Como exemplo, considere uma barra prismática de seção retangular submetida a uma força axial P aplicada ao longo de seu eixo centroidal, mostrada na Fig. 4-1(a). Durante a deformação elástica, as linhas de referência traçadas na barra sofrem distorções nas regiões próximas às extremidades, onde ocorrem efeitos localizados. Entretanto, na região central da barra, as linhas permanecem retas e ortogonais, indicando que a deformação é uniforme nessa parte do corpo.

Princípio de Saint-Venant

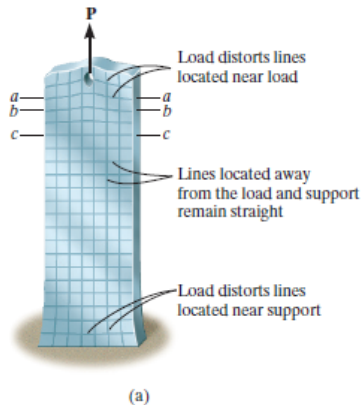


Figura: Fig. 4-1(a) - Barra prismática de seção retangular.

Princípio de Saint-Venant

- Se o material permanecer no regime elástico, as deformações produzidas estarão diretamente relacionadas às tensões por meio da **Lei de Hooke**, dada por $\sigma = E \varepsilon$ em que E é o módulo de elasticidade do material. Em consequência, a distribuição de tensões ao longo das seções transversais da barra varia nas proximidades das extremidades devido aos efeitos localizados de aplicação da carga, enquanto, na região central, a tensão torna-se praticamente uniforme, conforme ilustrado na Fig. 4-1(b).

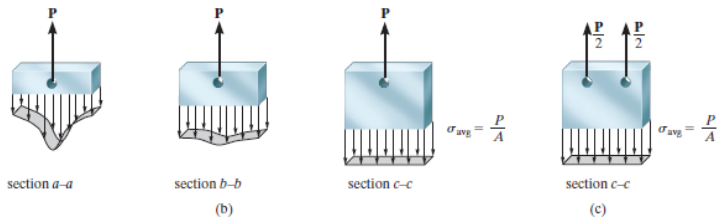


Figura: Fig. 4-1(b) e 4-1(c) - Barra prismática de seção retangular.

Princípio de Saint-Venant

- Da mesma forma, a distribuição de tensões na região do apoio também tende a se uniformizar. A uma distância suficiente do apoio, a tensão torna-se praticamente uniforme ao longo de toda a seção transversal da barra.

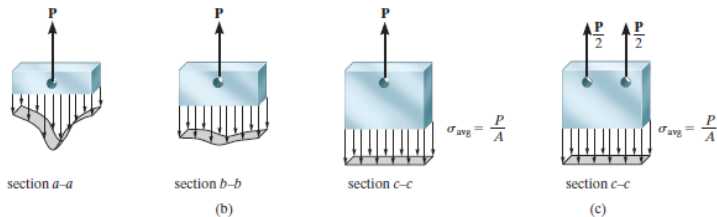


Figura: Fig. 4-1(b) e 4-1(c) - Barra prismática de seção retangular.

Princípio de Saint-Venant

- O comportamento localizado das tensões e deformações é descrito pelo **Princípio de Saint-Venant**, formulado pelo cientista francês Barré de Saint-Venant em 1855. Esse princípio estabelece que, em pontos suficientemente afastados da região de aplicação das cargas, a distribuição de tensões e deformações independe da forma como a carga é aplicada, desde que os carregamentos possuam a **mesma resultante estaticamente equivalente**. Assim, a uma distância adequada da aplicação das forças, a tensão torna-se uniforme e pode ser representada pela tensão média, $\sigma_m = \frac{P}{A}$.

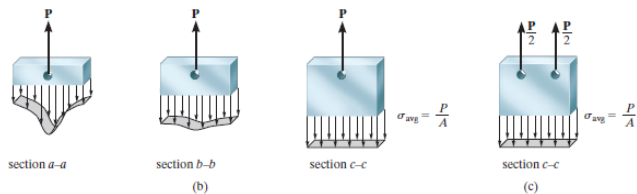


Figura: Fig. 4-1(b) e 4-1(c) - Barra prismática de seção retangular.

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

- Com base na **Lei de Hooke** e nas definições de tensão e deformação, pode-se desenvolver uma expressão para determinar o deslocamento elástico de uma barra submetida a cargas axiais. Para isso, considera-se uma barra de comprimento L , cuja área da seção transversal varia ao longo do comprimento e cujo material pode apresentar módulo de elasticidade E variável.

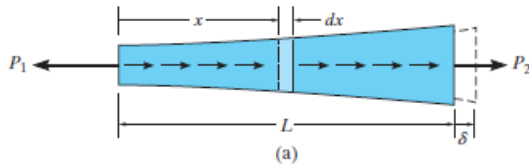


Figura: Fig. 4-2 - Barra prismática com seção variável.

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

- Deseja-se determinar o deslocamento relativo δ entre as extremidades da barra devido à aplicação do carregamento axial. Para essa análise, desprezam-se as deformações localizadas que ocorrem nas regiões de aplicação de cargas concentradas e nos pontos em que há mudanças bruscas na seção transversal.

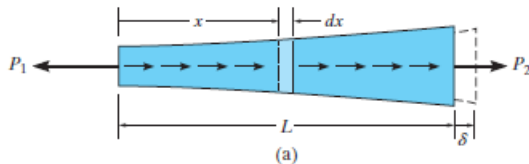


Figura: Fig. 4-2(a) - Barra prismática com seção variável.

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

- Aplicando o **método das seções**, isola-se um elemento diferencial da barra, de comprimento dx e área da seção transversal $A(x)$, localizado em uma posição arbitrária x , onde o material possui módulo de elasticidade $E(x)$. Em seguida, analisa-se o diagrama de corpo livre desse elemento para estabelecer a relação entre as forças internas e a deformação diferencial da barra, apresentado na Fig. 4-2(b).

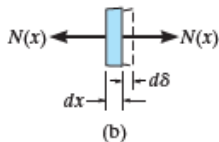


Figura: Fig. 4-2(b)- Diagrama de corpo livre do elemento.

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

- A força normal interna resultante $N(x)$ varia ao longo do comprimento da barra em função do carregamento distribuído aplicado. Essa força provoca a deformação do elemento diferencial, produzindo um deslocamento relativo infinitesimal $d\delta$ entre suas extremidades. A partir desse elemento, podem ser determinadas a tensão e a deformação correspondentes.

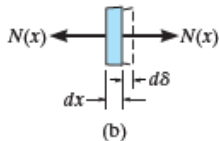


Figura: Fig. 4-2(b)- Diagrama de corpo livre do elemento.

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

- A tensão normal e a deformação específica do elemento diferencial são dadas, respectivamente, por

$$\sigma = \frac{N(x)}{A(x)} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx}.$$

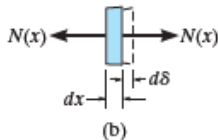


Figura: Fig. 4-2(b)- Diagrama de corpo livre do elemento.

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

- Desde que a tensão não ultrapasse o **limite de proporcionalidade** do material, a **Lei de Hooke** pode ser aplicada. Substituindo as expressões da tensão e da deformação na lei constitutiva, obtém-se a relação diferencial entre a força normal interna e o deslocamento axial do elemento,

$$\sigma = E(x) \varepsilon,$$

de onde resulta

$$\frac{N(x)}{A(x)} = E(x) \frac{d\delta}{dx},$$

ou, de forma equivalente,

$$d\delta = \frac{N(x)}{A(x) E(x)} dx.$$

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

Para determinar o deslocamento axial total da barra, integra-se a expressão do deslocamento diferencial ao longo de todo o seu comprimento L . Assim, obtém-se a expressão geral para o deslocamento elástico:

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{A(x) E(x)} dx$$

em que

- δ é o deslocamento relativo entre as extremidades da barra;
- L é o comprimento original da barra;
- $N(x)$ é o esforço normal na seção localizada na posição x ;
- $A(x)$ é a área da seção transversal da barra, expressa em função de x ;
- $E(x)$ é o módulo de elasticidade do material, expresso em função de x .

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

Carga e Área da Seção Transversal Constantes

Em muitas aplicações, a barra possui **área de seção transversal constante** e é constituída por um **material homogêneo**, de modo que o módulo de elasticidade E permanece constante. Além disso, quando forças axiais constantes são aplicadas em suas extremidades, a força normal interna N também é constante ao longo de toda a barra. Nessas condições, a expressão geral do deslocamento axial simplifica-se para

$$\delta = \frac{NL}{AE}.$$

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

Carga e Área da Seção Transversal Constantes

Se a barra estiver submetida a várias forças axiais diferentes ao longo de seu comprimento, ou se a área da seção transversal ou o módulo de elasticidade variar abruptamente de uma região da barra para outra, como mostrado na Fig. 4-3(b), então a equação anterior pode ser aplicada a cada segmento da barra no qual essas grandezas permaneçam constantes. O deslocamento de uma extremidade da barra em relação à outra é obtido pela soma algébrica dos deslocamentos relativos das extremidades de cada segmento. Para esse caso geral,

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

Carga e Área da Seção Transversal Constantes

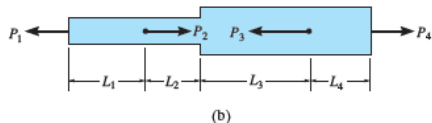


Figura: Fig. 4-3(a) - Barra com área e seção transversal constantes em vários segmentos.

$$\delta = \sum \frac{NL}{AE}.$$

Deformação elástica de um elemento carregado axialmente

Convenção de sinais

É recomendável utilizar uma convenção de sinais consistente para o esforço normal e o deslocamento da barra. Para isso, considera-se que tanto a força quanto o deslocamento são positivos quando produzem tração e alongamento, conforme ilustrado na Fig. 4-4. Por outro lado, uma força e um deslocamento negativos produzem compressão e contração.

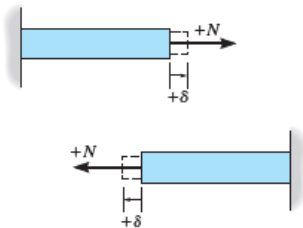


Figura: Fig. 4-4(a) - Barra sob tração e alongamento.

Exemplo 4.1

A barra uniforme de aço A-36 ($E = 200 \text{ GPa}$) mostrada na Fig. 4-5(a) possui diâmetro de 50 mm e está submetida ao carregamento indicado. Determine os deslocamentos do ponto D e do ponto B em relação ao ponto C .

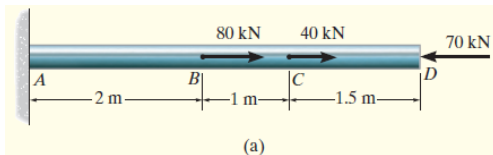


Figura: Fig. 4-5(a) - Exemplo 4.1.

Exemplo 4.1

Forças internas

As forças internas, ou esforços normais, na barra são determinadas pelo **método das seções** e pela condição de **equilíbrio na direção horizontal**. Os resultados são apresentados nos diagramas de corpo livre mostrados na Fig. 4-5(b). O diagrama de força normal, ilustrado na Fig. 4-5(c), mostra a variação dessas forças ao longo do comprimento da barra.

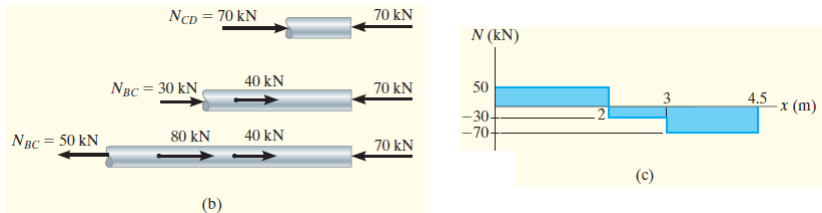
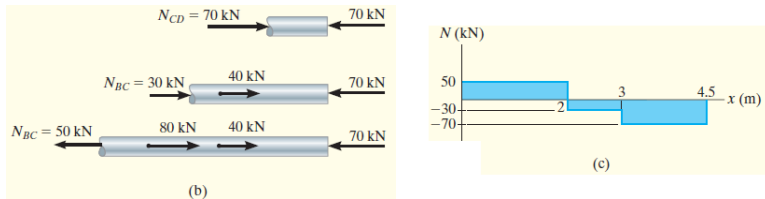


Figura: Fig. 4-5(b) e Fig. 4-5(c) - Exemplo 4.1.

Exemplo 4.1

Deslocamentos

Utilizando a convenção de sinais estabelecida, o deslocamento da extremidade da barra é, portanto,



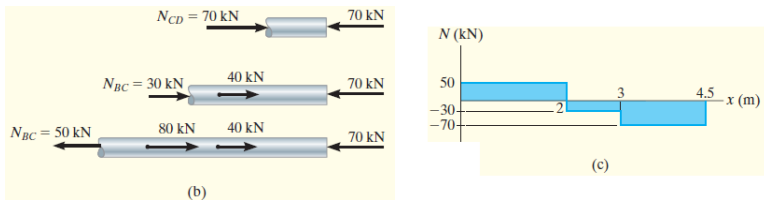
$$\delta_D = \sum \frac{NL}{AE} = \frac{[-70 \times 10^3 \text{ N}](1500 \text{ mm})}{\pi(25 \text{ mm})^2[200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} + \frac{[-30 \times 10^3 \text{ N}](1000 \text{ mm})}{\pi(25 \text{ mm})^2[200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} + \frac{[50 \times 10^3 \text{ N}](2000 \text{ mm})}{\pi(25 \text{ mm})^2[200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} = -89,1 \times 10^{-3} \text{ mm}.$$

Esse resultado negativo indica que o ponto D desloca-se para a esquerda.

Exemplo 4.1

Deslocamentos

O deslocamento de B em relação a C , $\delta_{B/C}$, é causado apenas pela carga interna na região BC . Assim,



$$\delta_{B/C} = \frac{NL}{AE} = \frac{[-30 \times 10^3 \text{ N}](1000 \text{ m})}{\pi(25 \text{ mm})^2[200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} = -76,4 \text{ mm}.$$

O resultado negativo indica que o ponto B desloca-se em direção ao ponto C .

Exemplo 4.2

O conjunto mostrado na Fig. 4-6(a) é constituído por um **tubo de alumínio** AB , com área da seção transversal de 400 mm^2 . Uma **barra de aço**, de diâmetro 10 mm, está fixada a um colar rígido e passa pelo interior do tubo. Se uma carga de tração de 80 kN for aplicada à barra de aço, determine o deslocamento da extremidade C da barra. Considere: $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$, $E_{\text{alumínio}} = 70 \text{ GPa}$.

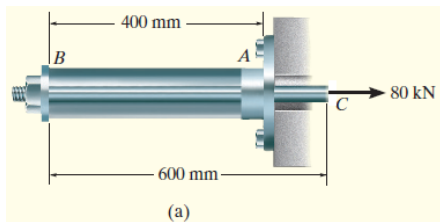


Figura: Fig. 4-6(a) - Exemplo 4.2.

Exemplo 4.2

Forças internas

Os diagramas de corpo livre do tubo e da barra, mostrados na Fig. 4-6(b), indicam que a barra está submetida a uma **força de tração** de 80 kN, enquanto o tubo está submetido a uma **força de compressão** de 80 kN.

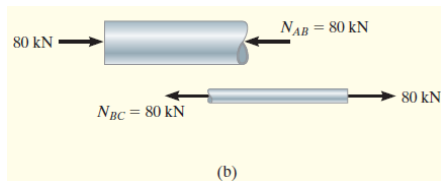
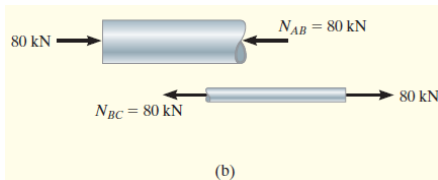


Figura: Fig. 4-6(b) - Exemplo 4.2.

Exemplo 4.2

Deslocamentos



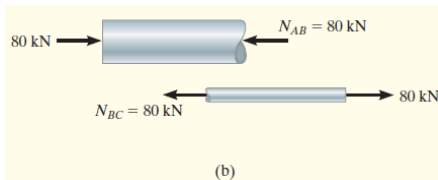
Inicialmente, determina-se o deslocamento do ponto C em relação ao ponto B . Trabalhando com unidades de newtons e milímetros, tem-se:

$$\delta_{C/B} = \frac{NL}{AE} = \frac{[+80 \times 10^3 \text{ N}] (600 \text{ mm})}{\pi(5 \text{ mm})^2 [200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} = +3,056 \text{ mm} \rightarrow .$$

O sinal positivo indica que o ponto C desloca-se para a direita em relação ao ponto B , uma vez que a barra se alonga.

Exemplo 4.2

Deslocamentos



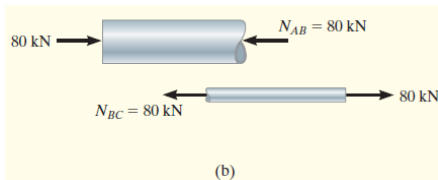
O deslocamento do ponto B em relação à extremidade fixa A é

$$\delta_B = \frac{NL}{AE} = \frac{[-80 \times 10^3 \text{ N}](400 \text{ mm})}{[400 \text{ mm}^2][70 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} = -1,143 \text{ mm} \rightarrow .$$

O sinal negativo indica que o tubo se encurta. Como a extremidade A está fixa, o ponto B desloca-se para a direita em relação a A em 1,143 mm.

Exemplo 4.2

Deslocamentos



Como ambos os deslocamentos ocorrem para a direita, o deslocamento do ponto C em relação à extremidade fixa A é dado por

$$\delta_C = \delta_B + \delta_{C/B} = 1,143 \text{ mm} + 3,056 \text{ mm} = 0,00420 \text{ m} = 4,20 \text{ mm} \rightarrow .$$

Exemplo 4.3

A viga rígida AB apoia-se sobre os dois pilares curtos mostrados na Fig. 4-7(a). O pilar AC é de **aço** e possui diâmetro de 20 mm, enquanto o pilar BD é de **alumínio** e possui diâmetro de 40 mm. Determine o deslocamento do ponto F da viga AB quando uma carga vertical de 90 kN é aplicada nesse ponto. Considere $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$ e $E_{\text{alumínio}} = 70 \text{ GPa}$.

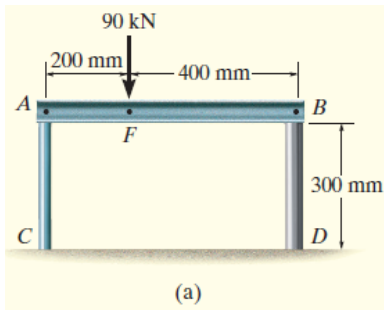
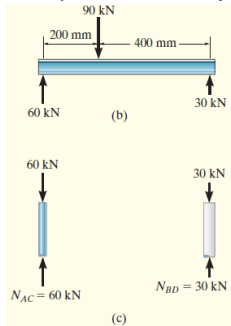


Figura: Fig. 4-7(a) - Exemplo 4.3.

Exemplo 4.3

Forças internas

As forças de compressão atuantes no topo de cada pilar são determinadas a partir das condições de equilíbrio da viga AB , conforme mostrado na Fig. 4-7(b). Essas forças são iguais às forças internas que atuam em cada um dos pilares, representadas na Fig. 4-7(c).



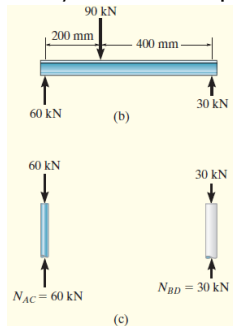
$$\begin{aligned}\delta_A &= \frac{N_{AC} L_{AC}}{A_{AC} E_{\text{aço}}} \\ &= \frac{[-60 \times 10^3 \text{ N}](300 \text{ mm})}{\pi(10 \text{ mm})^2[200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} \\ &= -0,286 \text{ mm} \downarrow.\end{aligned}$$

Figura: Fig. 4-7(b) e Fig. 4-7(b) - Exemplo 4.3.

Exemplo 4.3

Forças internas

As forças de compressão atuantes no topo de cada pilar são determinadas a partir das condições de equilíbrio da viga AB , conforme mostrado na Fig. 4-7(b). Essas forças são iguais às forças internas que atuam em cada um dos pilares, representadas na Fig. 4-7(c).



$$\begin{aligned}\delta_B &= \frac{N_{BD} L_{BD}}{A_{BD} E_{\text{alumínio}}} \\ &= \frac{[-30 \times 10^3 \text{ N}](300 \text{ mm})}{\pi (20 \text{ mm})^2 [70 \times 10^3 \text{ N/mm}^2]} \\ &= -0,102 \text{ mm} \downarrow .\end{aligned}$$

Figura: Fig. 4-7(b) e Fig. 4-7(b) - Exemplo 4.3.

Exemplo 4.3

Um diagrama mostrando os deslocamentos da linha de centro da viga nos pontos A , B e F é apresentado na Fig. 4-7(d). Pela proporcionalidade do triângulo sombreado em azul, o deslocamento do ponto F é, portanto,

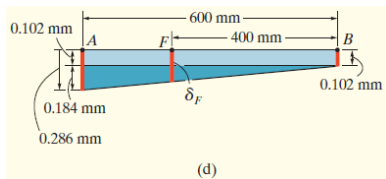


Figura: Fig. 4-7(d) - Exemplo 4.3.

$$\delta_F = 0,102 \text{ mm} + (0,184 \text{ mm}) \left(\frac{400 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} \right) = 0,225 \text{ mm} \downarrow .$$

O resultado indica que o ponto F desloca-se **para baixo** em 0,225 mm.

Exemplo 4.4

Uma barra é constituída por um material com **peso específico** $\gamma = 6 \text{ kN/m}^3$ e **módulo de elasticidade** igual a 9 GPa. Se essa barra possui a forma de um **cone**, com as dimensões mostradas na Fig. 4-8(a), determine o deslocamento de sua extremidade devido à ação da gravidade quando ela é suspensa na posição vertical.

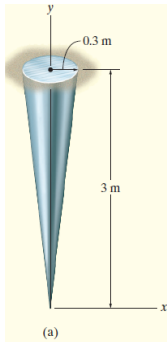


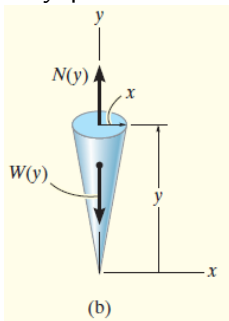
Figura: Fig. 4-8(a) - Exemplo 4.4.

Exemplo 4.4

Forças internas

A força axial interna varia ao longo da barra, pois depende do peso $W(y)$ da porção da barra localizada abaixo de uma seção qualquer, conforme mostrado na Fig. 4-8(b).

Assim, para calcular o deslocamento, deve-se utilizar a Eq. 4-1. Na seção situada a uma distância y da extremidade livre do cone, o raio x da seção transversal é determinado em função de y por meio de uma relação de proporcionalidade, isto é,



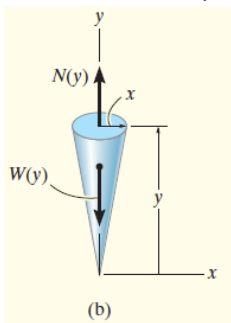
$$\frac{x}{y} = \frac{0,3 \text{ m}}{3 \text{ m}},$$

$$x = 0,1y.$$

Exemplo 4.4

Forças internas

O volume de um cone que possui uma base de raio x e altura y é dado por



$$V = \frac{1}{3}\pi y x^2,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi y(0, 1y)^2,$$

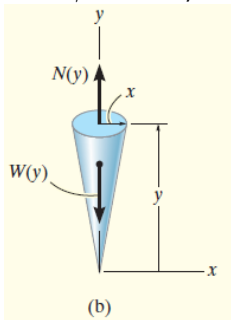
$$V = \frac{\pi(0, 01)}{3}y^3,$$

$$V = 0,01047y^3.$$

Exemplo 4.4

Forças internas

Como $W = \gamma V$, a força axial interna na seção torna-se



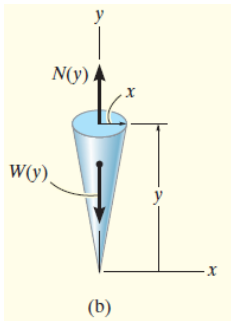
$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$N(y) = 6(10^3)(0,01047y^3) = 62,83y^3.$$

Exemplo 4.4

Deslocamentos

A área da seção transversal também é uma função da posição y , conforme mostrado na Fig. 4–8b. Portanto,



$$A(y) = \pi x^2 = 0,03142 y^2$$

$$\begin{aligned}\delta &= \int_0^L \frac{N(y) dy}{A(y)E} = \int_0^3 \frac{(62,83y^3) dy}{(0,03142y^2)(9 \times 10^9)} \\ &= 222,2 \times 10^{-9} \int_0^3 y dy \\ \delta &= 1 (10^{-6}) \text{ m}\end{aligned}$$