

CAPÍTULO 1 - AULA 3

TENSÕES

7 de setembro de 2026

Tensões de cisalhamento médias

- A tensão de cisalhamento foi definida anteriormente como a componente de tensão que atua no plano da área seccionada. Para mostrar como essa tensão pode se desenvolver, considere o efeito da aplicação de uma força F à barra da Fig. 1–19(a).

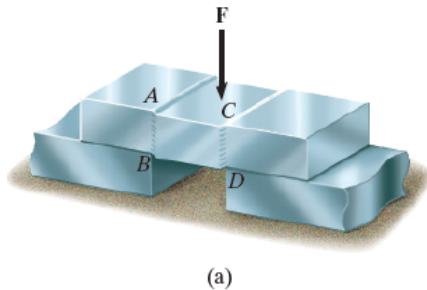


Figura: Fig. 1–19(a).

Tensões de cisalhamento médias

- Se a força F for suficientemente elevada, ela poderá provocar deformação e ruptura do material da barra ao longo dos planos identificados por AB e CD . O diagrama de corpo livre do segmento central isolado da barra, mostrado na Fig. 1–19(*b*), indica que a força cortante $V = \frac{F}{2}$ deve ser aplicada em cada seção para manter o segmento em equilíbrio.

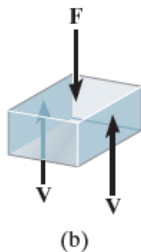


Figura: Fig. 1–19(*b*).

Tensões de cisalhamento médias

- A tensão de cisalhamento média distribuída em cada área seccionada que desenvolve essa força de cisalhamento é definida por

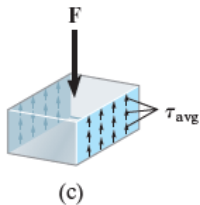


Figura: Fig. 1–19(c).

$$\tau_{med} = \frac{V}{A}$$

Tensões de cisalhamento médias

$$\tau_{\text{med}} = \frac{V}{A}$$

τ_{med} = tensão de cisalhamento média na seção, assumida
como sendo a mesma em todos os pontos da seção,

V = força cortante resultante interna na seção, determinada
a partir das equações de equilíbrio,

A = área da seção.

Tensões de cisalhamento médias

- O pino *A*, utilizado para conectar o sistema de articulação deste trator, está sujeito a cisalhamento duplo, pois atuam tensões de cisalhamento nas superfícies do pino em *B* e *C*.



Figura: Exemplo de um elemento estrutural sob cisalhamento.

Equilíbrio das tensões de cisalhamento

- Considere o bloco mostrado na Fig. 1–20(a), que foi seccionado e submetido à força cortante interna (V). Um elemento de volume tomado em um ponto localizado em sua superfície estará sujeito a uma tensão de cisalhamento direta τ_{zy} , conforme ilustrado na Fig. 1–20(b).

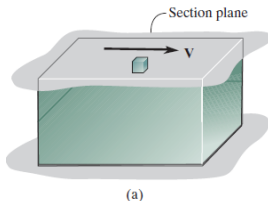


Figura: Fig. 1–20(a).

Equilíbrio das tensões de cisalhamento

- Entretanto, para que esse elemento satisfaça as condições de equilíbrio de forças e momentos, será necessário que tensões de cisalhamento também se desenvolvam em outras três faces do elemento. Para demonstrar isso, é necessário, inicialmente, traçar o diagrama de corpo livre do elemento, mostrado na Fig. 1–20(c). Em seguida, o equilíbrio de forças na direção y exige que:

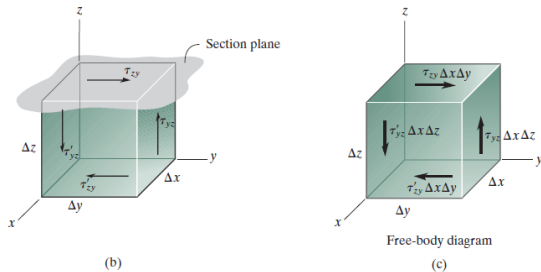


Figura: Fig. 1–20(b) e Fig. 1–20(c).

Equilíbrio das tensões de cisalhamento

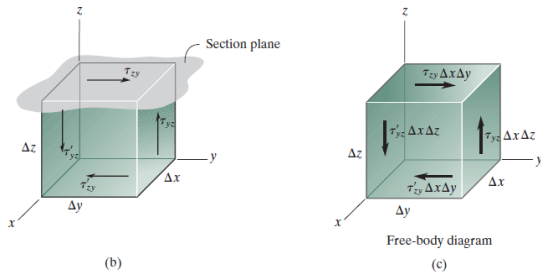


Figura: Fig. 1-20(b) e Fig. 1-20(c).

$$\sum F_y = 0; \quad \underbrace{\tau_{zy}(\Delta x \Delta y)}_{\text{força}} - \underbrace{\tau'_{zy}(\Delta x \Delta y)}_{\text{força}} = 0, \quad \tau_{zy} = \tau'_{zy} \quad (1)$$

Equilíbrio das tensões de cisalhamento

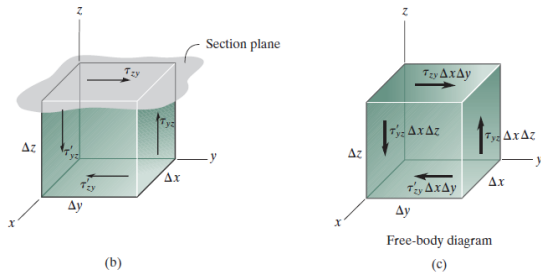
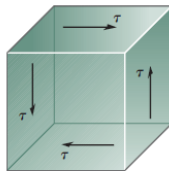


Figura: Fig. 1-20(b) e Fig. 1-20(c).

$$\sum M_x = 0; \quad \underbrace{-\tau_{zy}(\Delta x \Delta y)}_{\text{força}} \underbrace{\Delta z}_{\text{distância}} + \underbrace{\tau_{yz}(\Delta x \Delta z)}_{\text{força}} \underbrace{\Delta y}_{\text{distância}} = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

Equilíbrio das tensões de cisalhamento

- **Todos os quatro estados de tensão de cisalhamento devem possuir a mesma magnitude e estar orientados, nas arestas opostas do elemento**, de modo que apontem um em direção ao outro ou se afastem um do outro, conforme ilustrado na Fig. 1-20(d).



Pure shear

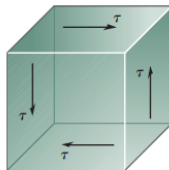
(d)

Figura: Fig. 1-20(d).

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} = \tau_{yz} = \tau'_{yz} = \tau.$$

Equilíbrio das tensões de cisalhamento

- Essa característica é conhecida como a *propriedade complementar do cisalhamento* (*complementary property of shear*) e, nesse caso, o elemento está submetido a um *estado de cisalhamento puro* (*pure shear*).



Pure shear

(d)

Figura: Fig. 1-20(d).

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} = \tau_{yz} = \tau'_{yz} = \tau.$$

Exemplo 1.9

Determine a tensão de cisalhamento média no pino de 20 mm de diâmetro em A e no pino de 30 mm de diâmetro em B que sustenta a viga na Fig. 1-21(a).

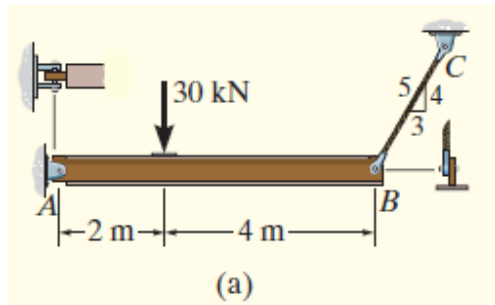


Figura: Fig. 1-21(d) - Exemplo 1.9.

Exemplo 1.9

Ações internas

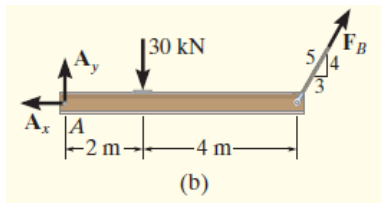


Figura: Fig 1-21(b) - Exemplo 1.9.

$$+ \curvearrowright \quad \sum M_A = 0; \quad F_B \left(\frac{4}{5} \right) (6) - (30)(2) = 0$$

$$F_B = 12,5 \text{ kN}$$

$$+ \rightarrow \quad \sum F_x = 0; \quad (12,5) \left(\frac{3}{5} \right) - A_x = 0$$

$$A_x = 7,50 \text{ kN}$$

Exemplo 1.9

Ações internas

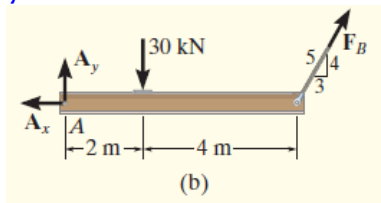


Figura: Fig 1-21(b) - Exemplo 1.9.

$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$A_y + 12,5 \left(\frac{4}{5} \right) - 30 \text{ kN} = 0 \quad A_y = 20 \text{ kN}$$

$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(7,50)^2 + (20)^2} = 21,36 \text{ kN}$$

Exemplo 1.9

Pino A

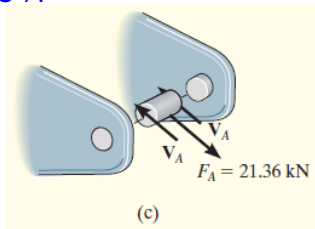
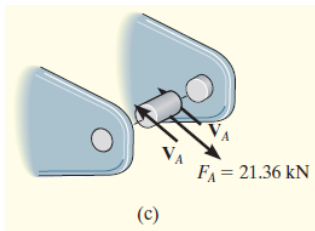


Figura: Fig 1-21(c) - Exemplo 1.9.

O pino em A é apoiado por duas chapas laterais fixas. Assim, o diagrama de corpo livre da porção central do pino, mostrado na Fig. 1-21(c), apresenta duas superfícies de cisalhamento entre a viga e cada uma das chapas laterais.

Exemplo 1.9

Pino A



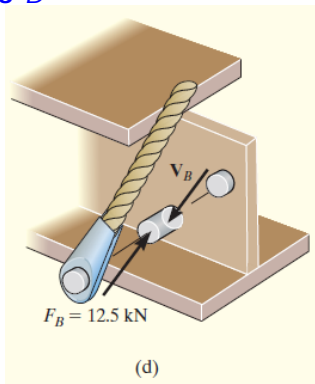
Como a força exercida pela viga sobre o pino (21,36 kN) é resistida pelas forças de cisalhamento atuando em cada uma das duas superfícies, esse caso é denominado *cisalhamento duplo*. Assim:

Figura: Fig 1-21(c) - Exemplo 1.9.

$$V_A = \frac{F_A}{2} = \frac{21,36}{2} = 10,68 \text{ kN.}$$

Exemplo 1.9

Pino B



Na Fig. 1–21(a), observe que o pino em B está submetido a *cisalhamento simples*, que ocorre na seção entre o cabo e a viga, conforme mostrado na Fig. 1–21(d).

Para esse segmento do pino,

$$V_B = F_B = 12,50 \text{ kN}.$$

Figura: Fig 1-21(d) - Exemplo 1.9.

Exemplo 1.9

Tensões de cisalhamento médias

$$(\tau_A)_{\text{med}} = \frac{V_A}{A_A} = \frac{10,68 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (20)^2} = 34,0 \text{ MPa}$$

$$(\tau_B)_{\text{med}} = \frac{V_B}{A_B} = \frac{12,50 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (30)^2} = 17,7 \text{ MPa}$$

Exemplo 1.10

Se a junta de madeira da Fig. 1–22(a) tiver uma espessura de 150 mm, determine a tensão de cisalhamento média ao longo dos planos de cisalhamento $a-a$ e $b-b$ do elemento conectado. Para cada plano, represente o estado de tensão em um elemento do material.

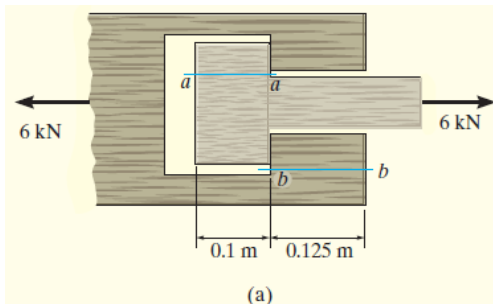


Figura: Fig. 1–22(a) - Exemplo 1.10.

Exemplo 1.10

Ações internas

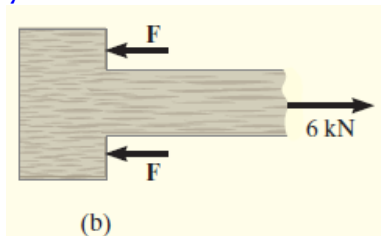


Figura: Fig 1-21(b) - Exemplo 1.9.

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0;$$

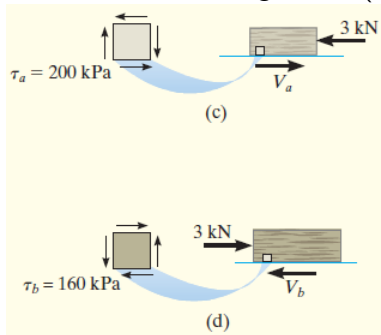
$$6 - F - F = 0,$$

$$F = 3 \text{ kN}$$

Exemplo 1.10

Ações internas

Considere agora o equilíbrio dos segmentos cortados pelos planos de cisalhamento $a-a$ e $b-b$, mostrados nas Figs. 1-22(c) e 1-22(d).



$$+ \rightarrow \quad \sum F_x = 0; \quad V_a - 3 = 0 \quad V_a = 3 \text{ kN}$$

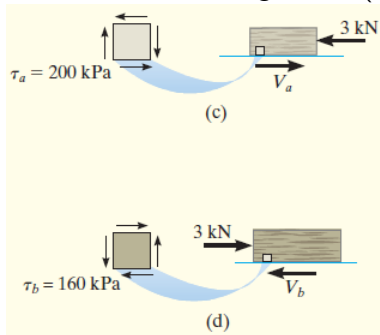
$$+ \rightarrow \quad \sum F_x = 0; \quad 3 - V_b = 0 \quad V_b = 3 \text{ kN}$$

Figura: Fig 1-21(c) e Fig 1-21(d) - Exemplo 1.9.

Exemplo 1.10

Tensões de cisalhamento médias

Considere agora o equilíbrio dos segmentos cortados pelos planos de cisalhamento $a-a$ e $b-b$, mostrados nas Figs. 1-22(c) e 1-22(d).



$$\begin{aligned}(\tau_a)_{\text{med}} &= \frac{V_a}{A_a} = \frac{3 \times 10^3}{100 \times 150} \\ &= 0,2 \text{ MPa} = 200 \text{ kPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tau_b)_{\text{med}} &= \frac{V_b}{A_b} = \frac{3 \times 10^3}{125 \times 150} \\ &= 0,16 \text{ MPa} = 160 \text{ kPa}\end{aligned}$$

Figura: Fig 1-21(c) e Fig 1-21(d) - Exemplo 1.9.

Exemplo 1.11

O elemento inclinado na Fig. 1–23(a) está sujeito a uma força de compressão de 3000 N. Determine a tensão de compressão média ao longo das superfícies de contato lisas definidas por AB e BC , e a tensão de cisalhamento média ao longo do plano horizontal definido por DB .

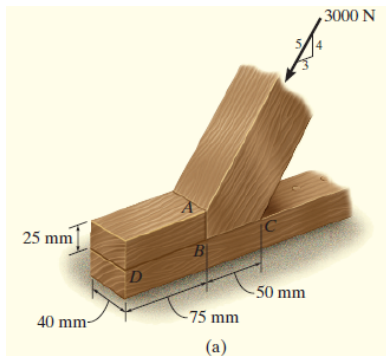
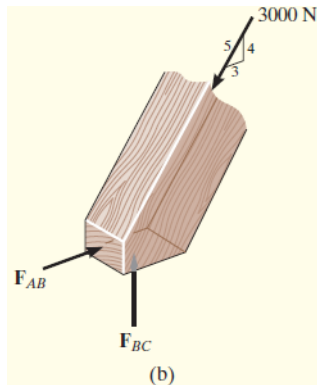


Figura: Fig. 1–23(a) - Exemplo 1.11.

Exemplo 1.10

Ações internas



$$+ \rightarrow \quad \sum F_x = 0; \quad F_{AB} - (3000) \left(\frac{3}{5} \right) = 0,$$

$$F_{AB} = 1800 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \quad \sum F_y = 0; \quad F_{BC} - (3000) \left(\frac{4}{5} \right) = 0,$$

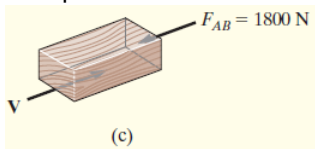
$$F_{BC} = 2400 \text{ N}$$

Figura: Fig 1-23(b) - Exemplo 1.11.

Exemplo 1.10

Ações internas

Também, a partir do diagrama de corpo livre do segmento superior ABD do elemento inferior, mostrado na Fig. 1-23(c), a força cortante que atua sobre a seção horizontal DB é obtida por



$$\sum F_x = 0;$$

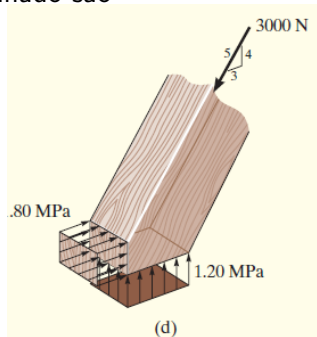
$$V = 1800 \text{ N}$$

Figura: Fig 1-23(c) - Exemplo 1.11.

Exemplo 1.11

Tensões médias

As tensões de compressão médias ao longo dos planos horizontal e vertical do elemento inclinado são



$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{1800 \text{ N}}{(25 \text{ mm})(40 \text{ mm})} = 1,80 \text{ MPa}$$

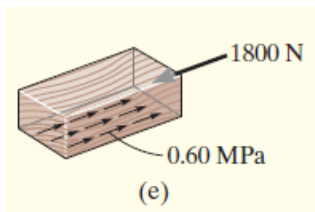
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{2400 \text{ N}}{(50 \text{ mm})(40 \text{ mm})} = 1,20 \text{ MPa}$$

Figura: Fig 1-23(d) - Exemplo 1.11.

Exemplo 1.11

Tensões médias

A tensão média de cisalhamento atuando sobre o plano horizontal definido por DB é



$$\tau_{\text{med}} = \frac{1800 \text{ N}}{(75 \text{ mm})(40 \text{ mm})} = 0,600 \text{ MPa}.$$

Figura: Fig 1-23(e) - Exemplo 1.11.

Dimensionamento por tensões admissíveis

Para garantir a segurança de um elemento estrutural ou mecânico, é necessário restringir a carga aplicada a um valor inferior à carga máxima que o elemento pode suportar.

Existem diversas razões para isso:

- As dimensões previstas para uma estrutura ou máquina podem não ser exatas, devido a erros de fabricação ou de montagem de seus componentes.
- Vibrações desconhecidas, impactos ou carregamentos acidentais podem ocorrer sem terem sido considerados no projeto.
- A corrosão atmosférica, o apodrecimento ou a ação das intempéries tendem a deteriorar os materiais ao longo de sua vida útil.
- Alguns materiais, como madeira, concreto e compósitos reforçados com fibras, podem apresentar grande variabilidade em suas propriedades mecânicas.

Dimensionamento por tensões admissíveis

Um método para especificar a carga admissível de um elemento consiste em utilizar um número denominado **fator de segurança**. Ele é definido como a razão entre a carga de ruptura $F_{ruptura}$ e a carga admissível F_{adm} ,

$$F.S. = \frac{F_{ruptura}}{F_{adm}}$$

Onde $F_{ruptura}$ é obtida por meio de ensaios experimentais do material.

Se a carga aplicada ao elemento estiver linearmente relacionada à tensão desenvolvida em seu interior, como ocorre nos casos

$$\sigma_{med} = \frac{N}{A} \quad \text{e} \quad \tau_{med} = \frac{V}{A},$$

Dimensionamento por tensões admissíveis

Então o fator de segurança também pode ser expresso como a razão entre a tensão de ruptura $\sigma_{ruptura}$ (ou $\tau_{ruptura}$) e a tensão admissível σ_{adm} (ou τ_{adm}). Como a área A é cancelada, obtém-se

$$\text{F.S.} = \frac{\sigma_{ruptura}}{\sigma_{adm}}$$

ou

$$\text{F.S.} = \frac{\tau_{ruptura}}{\tau_{adm}}$$

Dimensionamento por tensões admissíveis

Ao adotar hipóteses simplificadoras sobre o comportamento do material, as equações

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{N}{A} \quad \text{e} \quad \tau_{\text{med}} = \frac{V}{A}$$

podem, frequentemente, ser utilizadas para analisar ou dimensionar uma ligação simples ou um elemento mecânico.

Por exemplo, se um elemento estiver submetido a uma força normal em uma determinada seção, a área necessária dessa seção é dada por

$$A = \frac{N}{\sigma_{\text{adm}}}$$

Por outro lado, se a seção estiver submetida a uma força cortante média, a área necessária da seção é

$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}}$$

Exemplo 1.12

O braço de controle está sujeito ao carregamento mostrado na Fig. 1–25(a). Determine, com aproximação de 1 mm, o diâmetro necessário do pino de aço em A e C, se o coeficiente de segurança ao cisalhamento for F.S. = 1,5 e a tensão de cisalhamento de ruptura do aço for $\tau_{\text{ruptura}} = 82,5 \text{ MPa}$.

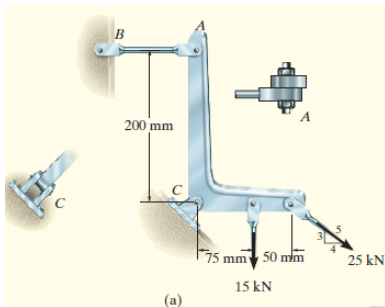
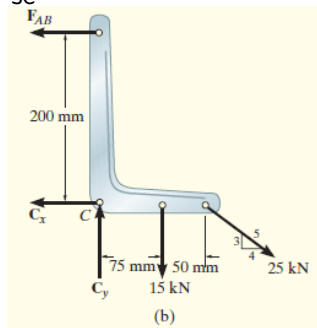


Figura: Fig. 1–25(a) - Exemplo 1.12.

Exemplo 1.12

O diagrama de corpo livre do braço é mostrado na Fig. 1-25(b). Para que haja equilíbrio, tem-se



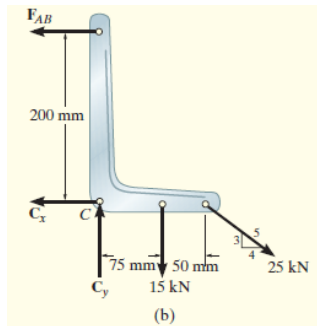
$$+ \curvearrowright \quad \sum M_C = 0;$$

$$F_{AB}(0,20) - (15)(0,075) - (25) \left(\frac{3}{5} \right) (0,125) = 0,$$

$$F_{AB} = 15 \text{ kN}$$

Figura: Fig 1-25(b) - Exemplo 1.12.

Exemplo 1.12



$$+ \rightarrow \sum F_x = 0; \quad -15 - C_x + (25) \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$C_x = 5 \text{ kN.}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0; \quad C_y - 15 - (25) \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

$$C_y = 30 \text{ kN}$$

Figura: Fig 1-25(b) - Exemplo 1.12.

O pino em C resiste à força resultante aplicada nesse ponto, cuja magnitude é

$$F_C = \sqrt{(5)^2 + (30)^2} = 30,41 \text{ kN}$$

Exemplo 1.12

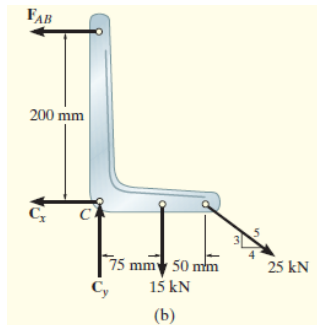


Figura: Fig 1-25(b) - Exemplo 1.12.

$$F.S. = \frac{\tau_{ruptura}}{\tau_{adm}}$$

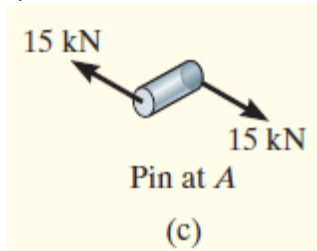
$$1,5 = \frac{82,5 \text{ MPa}}{\tau_{adm}}$$

$$\tau_{adm} = 55 \text{ MPa}$$

Exemplo 1.12

Pino A

Este pino é submetido a cisalhamento simples, Fig. 1-25(c), de modo que



$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}}; \quad \frac{\pi}{4} (d_A^2) = \frac{15 \times 10^3}{55}$$

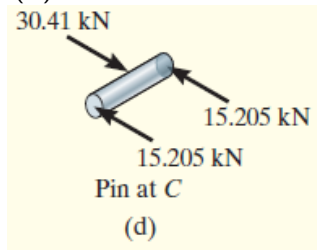
$$d_A = 18,63 \text{ mm} \quad \text{Adote} \quad d_A = 19 \text{ mm}.$$

Figura: Fig 1-25(c) - Exemplo 1.12.

Exemplo 1.12

Pino C

Como o pino está sujeito a cisalhamento duplo, uma força de cisalhamento de 15,205 kN atua sobre a área da seção transversal entre o braço e cada folha de suporte do pino, Fig. 1-25(d). Temos



$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}}; \quad \frac{\pi}{4} (d_C^2) = \frac{15,205 \times 10^3}{55}$$

$$d_C = 18,76 \text{ mm} \quad \text{Adote} \quad d_C = 19 \text{ mm}.$$

Figura: Fig 1-25(d) - Exemplo 1.12.

Exemplo 1.13

A barra de suspensão é apoiada em sua extremidade por um disco circular rigidamente conectado, conforme mostrado na Fig. 1–26(a). Sabendo que a barra passa por um furo de diâmetro 40 mm, determine o diâmetro mínimo requerido da barra e a espessura mínima do disco necessária para suportar a carga de 20 kN. Admita que a tensão normal admissível para a barra seja $\sigma_{\text{adm}} = 60 \text{ MPa}$ e que a tensão de cisalhamento admissível para o disco seja $\tau_{\text{adm}} = 35 \text{ MPa}$.

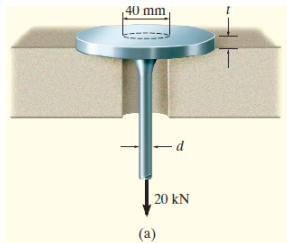


Figura: Fig. 1–26(a) - Exemplo 1.13.

Exemplo 1.13

Diâmetro da barra

Por inspeção, verifica-se que a força axial na barra é de 20 kN. Assim, a área da seção transversal necessária da barra é dada por

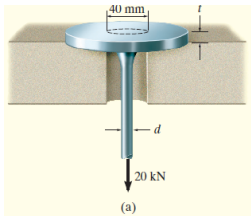


Figura: Fig. 1-26(a) - Exemplo 1.13.

$$A = \frac{N}{\sigma_{\text{adm}}}, \quad \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{20 \times 10^3}{60}, \quad d = 20,6 \text{ mm} \quad (2)$$

Exemplo 1.13

Espessura do disco

Conforme mostrado no diagrama de corpo livre da Fig. 1–26(b), o material na área seccionada do disco deve resistir à tensão de cisalhamento para impedir o movimento do disco através do orifício. Se essa tensão de cisalhamento for considerada uniformemente distribuída sobre a área seccionada, então, como $V = 20 \text{ kN}$, temos

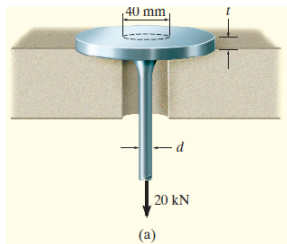
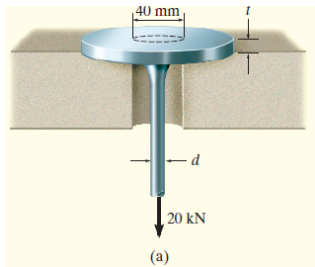


Figura: Fig. 1–26(a) - Exemplo 1.13.

Exemplo 1.13

Espessura do disco



$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}},$$
$$2\pi(20) t = \frac{20 \times 10^3}{35},$$
$$t = 4,55 \text{ mm}$$

Figura: Fig 1-26(a) - Exemplo 1.13.

Exemplo 1.14

Determine a maior carga P que pode ser aplicada às barras da junta sobreposta mostrada na Figura 1–27(a). O parafuso tem diâmetro de 10 mm e tensão de cisalhamento admissível de 80 MPa. Cada placa tem uma tensão admissível de 50 MPa, uma tensão de esmagamento admissível de 80 MPa e uma tensão de cisalhamento admissível de 30 MPa.

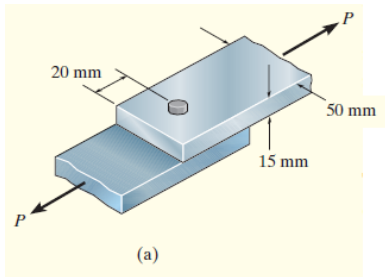
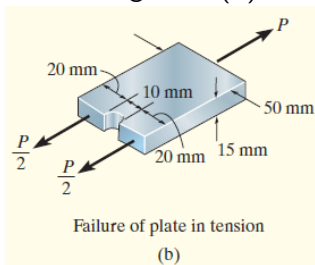


Figura: Fig. 1–27(a) - Exemplo 1.14.

Exemplo 1.14

Ruptura por tração na chapa

Se a placa falhar por tração, a ruptura ocorrerá na menor seção transversal, conforme ilustrado na Fig. 1-27(b).



$$(\sigma_{\text{adm}})_t = \frac{N}{A}$$
$$50 = \frac{P}{2(20)(15)}$$

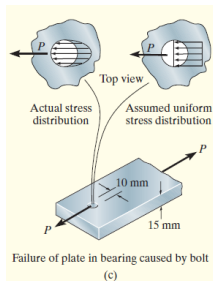
$$P = 30 \text{ kN}$$

Figura: Fig 1-26(a) - Exemplo 1.14.

Exemplo 1.14

Ruptura por esmagamento do parafuso

Um diagrama de corpo livre da placa superior, Fig. 1–27(c), mostra que o parafuso exercerá uma distribuição complexa de tensão na placa ao longo da área central curva de contato com o parafuso. Para simplificar a análise de pequenas conexões com pinos ou parafusos como esta, as normas de projeto permitem que a área projetada do parafuso seja utilizada no cálculo da tensão de apoio. Portanto,



$$(\sigma_{\text{adm}})_b = \frac{N}{A}$$
$$80 = \frac{P}{(10)(15)}$$

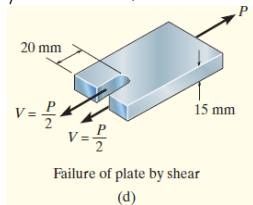
$$P = 12 \text{ kN}$$

Figura: Fig 1-26(c) - Exemplo 1.14.

Exemplo 1.14

Ruptura da placa por cisalhamento.

Existe a possibilidade de o parafuso rasgar a placa por cisalhamento ao longo da seção mostrada no diagrama de corpo livre da Fig. 1-26(d). Nesse caso, a força cortante é $V = P/2$. Assim,



$$(\tau_{\text{adm}})_p = \frac{V}{A}$$
$$30 = \frac{P/2}{(20)(15)}$$

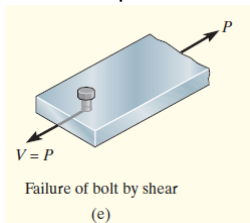
Figura: Fig 1-26(d) - Exemplo 1.14.

$$P = 18 \text{ kN}$$

Exemplo 1.14

Ruptura do parafuso por cisalhamento.

O parafuso pode falhar por cisalhamento ao longo do plano que separa as placas. O diagrama de corpo livre mostrado na Fig. 1–27(e) indica que



$$(\tau_{\text{adm}})_b = \frac{V}{A}$$
$$80 = \frac{P}{\frac{\pi}{4}(10)^2}$$

$$P = 6,28 \text{ kN}$$

Figura: Fig 1-26(e) - Exemplo 1.14.

Exemplo 1.14

Valor máximo admissível para P .

Comparando os resultados obtidos, verifica-se que a maior carga admissível para a ligação é determinada pela resistência ao cisalhamento do parafuso. Portanto,

$$P = 6,28 \text{ kN.}$$