

CAPÍTULO 1 - AULA 2

TENSÕES

2 de setembro de 2026

TENSÕES

- Neste capítulo, revisaremos alguns dos princípios importantes da mecânica e mostraremos como aplicá-los para determinar as cargas internas resultantes em um corpo. Em seguida, os conceitos de tensão normal e de cisalhamento serão introduzidos, e aplicações específicas da análise e do projeto de elementos sujeitos a uma carga axial ou a um cisalhamento direto serão discutidas.

Tensões

- A força e o momento atuantes em um ponto O específico da área seccionada do corpo (Fig. 1–8) representam os efeitos resultantes da distribuição de carregamento que atua sobre essa área (Fig. 1–9(a) a seguir). A determinação dessa distribuição é fundamental na resistência dos materiais. Para resolver esse problema, é necessário, primeiramente, estabelecer o conceito de tensão.

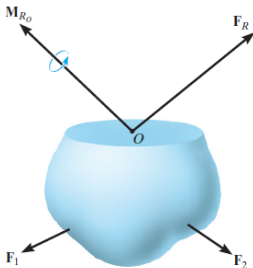


Figura: Fig. 1-8.

Tensões

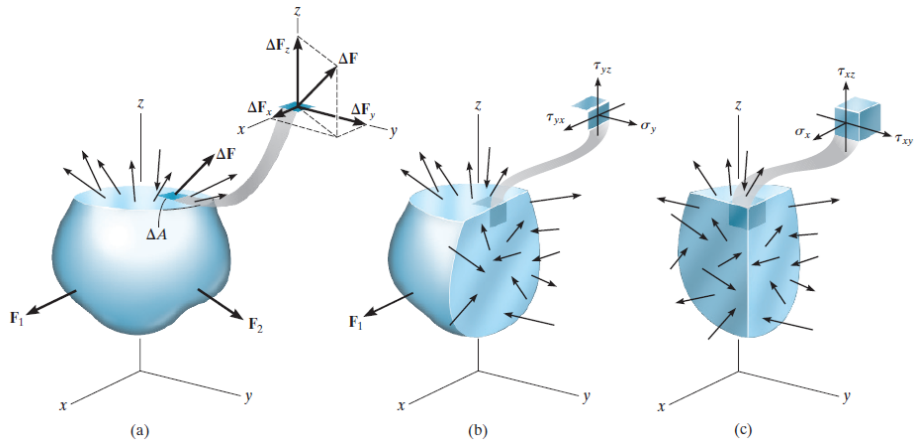


Figura: Fig. 1-9.

Tensões

- Uma força ΔF , finita, porém muito pequena, atuando sobre ΔA , é mostrada na Fig. 1–9(a). Essa força, assim como todas as outras, terá uma direção única; no entanto, para compará-la às demais forças, iremos substituí-la por suas três componentes: ΔF_x , ΔF_y e ΔF_z .

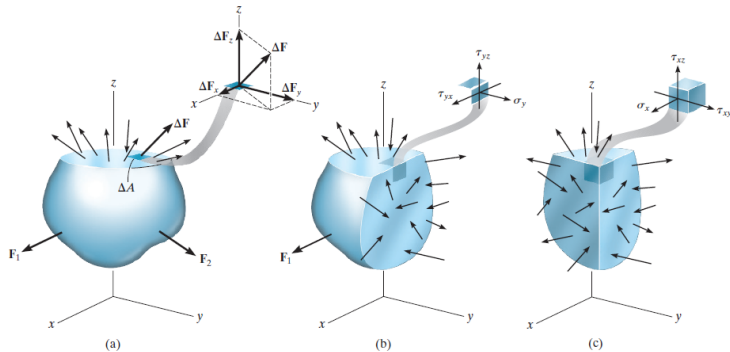


Figura: Fig. 1–9.

Tensões

- À medida que ΔA tende a zero, ΔF e suas componentes também tendem a zero; contudo, a razão entre a força e a área tenderá a um limite finito. Essa razão é denominada **tensão** e descreve a intensidade da força interna que atua sobre um plano (área) específico que passa por um ponto.

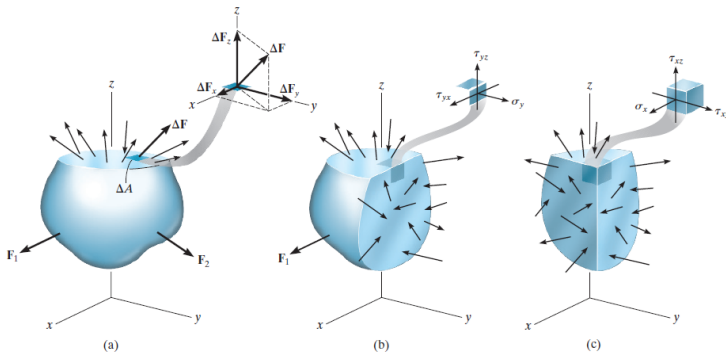


Figura: Fig. 1–9.

Tensão Normal

A intensidade da força que atua perpendicularmente a A é denominada **tensão normal**, σ (sigma). Visto que ΔF_z é perpendicular à área, então:

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

- Se a força normal ou a tensão “traciona” a área ΔA , conforme mostrado na Fig. 1–9(a), trata-se de tensão de **tração**; por outro lado, se ela “comprime” a área A , trata-se de tensão de **compressão**.

Tensões cisalhantes

A intensidade da força que atua tangencialmente a A é chamada de **tensão de cisalhamento**, τ (tau). Aqui temos dois componentes de tensão de cisalhamento,

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_X}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_Y}{\Delta A}$$

Tensões cisalhantes

- O índice z especifica a orientação da área ΔA , Fig. 1–10, em que x e y indicam os eixos ao longo dos quais atua cada tensão de cisalhamento.

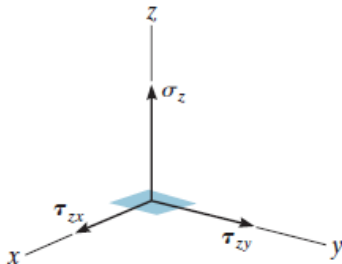


Fig. 1–10

Figura: Fig. 1–10.

Estado geral de tensões

- Se o corpo for adicionalmente seccionado por planos paralelos aos planos x - z (Fig. 1-9(b)) e y - z (Fig. 1-9(c)), podemos então “recortar” um elemento de volume cúbico de material que representa o estado de tensão atuante em torno de um ponto escolhido no corpo. Esse estado de tensão é, então, caracterizado por três componentes atuantes em cada face do elemento (Fig. 1-11).

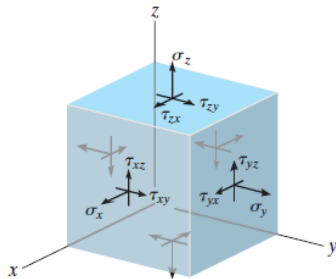


Figura: Fig. 1-11.

Unidades

- Como a tensão representa uma força por unidade de área, no Sistema Internacional de Unidades (SI), as magnitudes tanto da tensão normal quanto da tensão de cisalhamento são expressas nas unidades básicas de newtons por metro quadrado (N/m^2). Essa combinação de unidades é denominada *pascal* ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) e, como essa unidade é relativamente pequena, utilizam-se em engenharia prefixos como quilo (10^3), representado pelo símbolo “k”, mega (10^6), representado por “M”, e giga (10^9), representado por “G”, para expressar valores de tensão maiores e mais compatíveis com as aplicações práticas.
- Às vezes, a tensão é expressa em unidades de N/mm^2 , em que $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$. Entretanto, no Sistema Internacional de Unidades (SI), não é permitido utilizar prefixos no denominador de uma fração. Portanto, é preferível empregar a equivalência

$$1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MN/m}^2 = 1 \text{ MPa}.$$

Tensão normal média em uma barra com carga axial

Distribuição da tensão normal média

- Determinaremos agora a distribuição média de tensão atuante na área da seção transversal de uma barra submetida a carregamento axial, como a mostrada na Fig. 1-12(a).

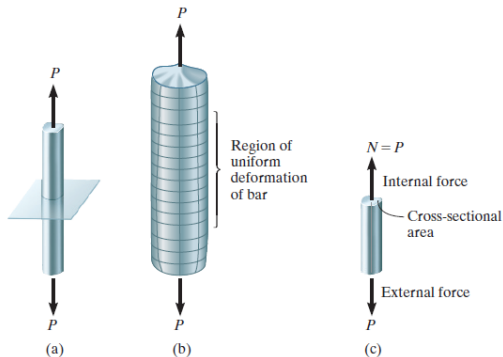


Figura: Fig. 1-12.

Tensão normal média em uma barra com carga axial

- Quando a área da seção transversal da barra está submetida à força axial pelo centroide, ela está submetida apenas à tensão normal, como apresentado na Fig. 1.12(a).
- A seção transversal é a seção tomada perpendicularmente ao eixo longitudinal da barra e, como a barra é prismática, todas as seções transversais são iguais ao longo de seu comprimento. Desde que o material da barra seja homogêneo e isotrópico — isto é, apresente as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume e as mesmas propriedades em todas as direções.
- Note que materiais anisotrópicos, como a madeira, apresentam propriedades diferentes em direções distintas; e, embora isso ocorra, se as fibras da madeira estiverem orientadas ao longo do eixo da barra (como, por exemplo, em uma tábua de madeira comum), então a barra também se deformará uniformemente quando submetida à carga axial P .

Tensão normal média em uma barra com carga axial

- Se fizermos um corte transversal na barra e a separarmos em duas partes, o equilíbrio exige que a força normal resultante N na seção seja igual a P (Fig. 1-12(c)). E, como o material sofre uma deformação uniforme, é necessário que a seção transversal esteja submetida a uma distribuição constante de tensão normal.

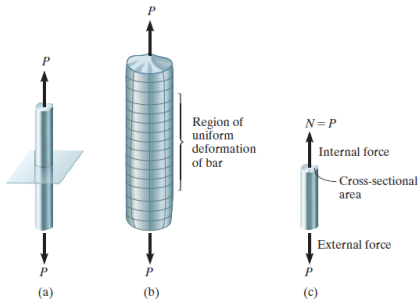


Figura: Fig. 1-12.

Tensão normal média em uma barra com carga axial

- Como resultado, cada pequena área ΔA da seção transversal está submetida a uma força $\Delta N = \sigma \Delta A$, conforme mostrado na Fig. 1-12(d), e a soma dessas forças, atuando sobre toda a área da seção transversal, deve ser equivalente à força resultante interna P na seção.

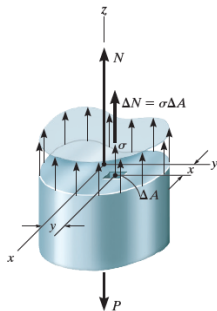
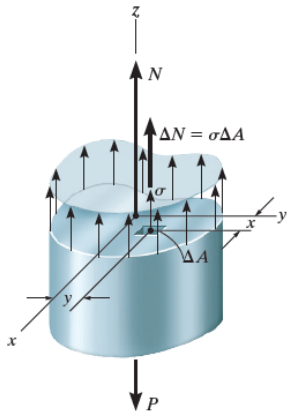


Figura: Fig. 1-12(d).

Tensão normal média em uma barra com carga axial



$$\uparrow (+) \quad \sum F_{RZ} = \sum F_Z;$$

$$\int_A dN = \int_A \sigma dA \quad N = \sigma \times A$$

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{N}{A}$$

Figura: Fig. 1-12(d).

Tensão normal média em uma barra com carga axial

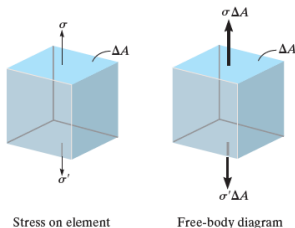
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

σ_{med} = tensão normal média em qualquer ponto da área da seção transversal,
 N = força normal resultante interna, que atua através do centroide da
área da seção transversal. N é determinada utilizando o
método das seções e as equações de equilíbrio; neste caso, $N = P$,
 A = área da seção transversal da barra na qual σ é determinada.

Tensão normal média em uma barra com carga axial

Equilíbrio

- A distribuição de tensões na Fig. 1–12 indica que existe apenas uma tensão normal em qualquer pequeno elemento de volume do material situado em cada ponto da seção transversal. Assim, se considerarmos o equilíbrio vertical de um elemento de material e, em seguida, aplicarmos a equação de equilíbrio de forças ao seu diagrama de corpo livre, Fig. 1–13,



$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0, \\ \sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) &= 0, \\ \therefore \sigma &= \sigma' .\end{aligned}$$

Figura: Fig. 1–13.

Tensão normal média em uma barra com carga axial

- Em outras palavras, as componentes de tensão normal no elemento devem ser de magnitude igual, porém de sentidos opostos. Sob essa condição, o material é submetido a uma tensão uniaxial, e essa análise aplica-se a elementos submetidos à tração ou à compressão, conforme mostrado na Fig. 1–14.

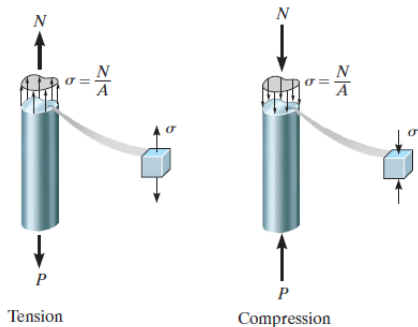


Figura: Fig. 1–14.

Tensão normal média em uma barra com carga axial

Tensão normal média máxima

- Em nossa análise, tanto a força interna N quanto a área da seção transversal A eram constantes ao longo do eixo longitudinal da barra; conseqüentemente, a tensão normal $\sigma = N/A$ também é constante ao longo de todo o comprimento da barra.
- Ocasionalmente, porém, a barra pode estar sujeita a várias cargas axiais externas, ou pode ocorrer uma variação em sua área da seção transversal. Como resultado, a tensão normal na barra pode variar de uma seção para outra e, para determinar a tensão normal média máxima, torna-se importante identificar a posição em que a razão N/A é máxima.
- O Exemplo 1.5 ilustra esse procedimento. Uma vez conhecida a solicitação interna ao longo da barra, é possível identificar a razão máxima N/A .

Exemplo 1.5

A barra da Fig. 1–15(a) possui largura constante de 35 mm e espessura de 10 mm. Determine a tensão normal média máxima na barra quando ela é submetida ao carregamento mostrado.

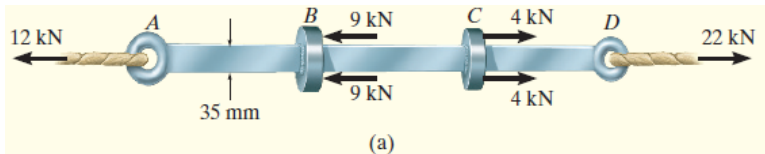


Figura: Fig 1-15(a).

Exemplo 1.5

Ações internas

- Por inspeção, as forças axiais internas nas regiões AB , BC e CD são constantes, mas apresentam magnitudes distintas. Utilizando o método das seções, essas cargas são representadas nos diagramas de corpo livre dos segmentos à esquerda, apresentados na Fig. 1–15(b).

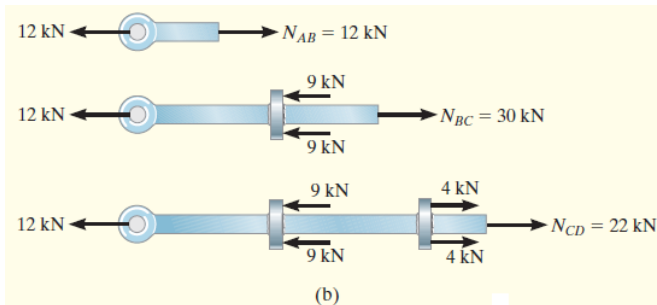


Figura: Fig 1-15(b).

Exemplo 1.5

Ações internas

- O diagrama de força normal, que ilustra graficamente esses resultados, é apresentado na Fig. 1-15(c). A maior carga ocorre na região BC , onde $N_{BC} = 30$ kN. Visto que a área da seção transversal da barra é constante, a maior tensão normal média também ocorre nessa região.

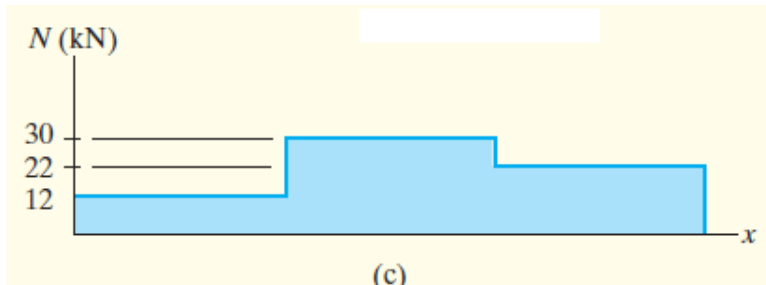


Figura: Fig 1-15(c).

Exemplo 1.5

Tensões normais médias

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{30 \times 10^3 \text{ N}}{(35 \text{ mm})(10 \text{ mm})} = 85,7 \text{ MPa}$$

A distribuição de tensões atuante em uma seção transversal arbitrária da barra, na região *BC*, é mostrada na Fig. 1–15(*d*).

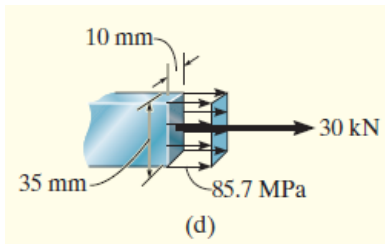


Figura: Fig 1-15(*d*).

Exemplo 1.5

A luminária de 80 kg é sustentada por duas barras, AB e BC , conforme mostrado na Fig. 1-16(a). Se a barra AB tem diâmetro de 10 mm e a barra BC tem diâmetro de 8 mm, determine a tensão normal média em cada barra.

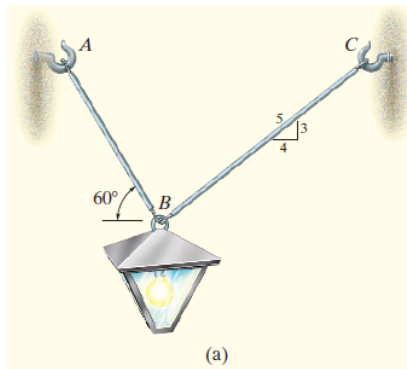


Figura: Fig 1-16(a).

Exemplo 1.5

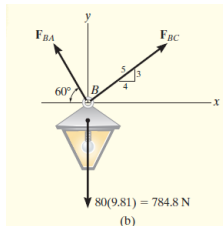


Figura: Fig. 1-16(b).

$$\rightarrow (+) \quad \sum F_x = 0; \quad F_{BC} \left(\frac{4}{5} \right) - F_{BA} \cos 60^\circ = 0,$$

$$-\uparrow (+) \quad \sum F_y = 0; \quad F_{BC} \left(\frac{3}{5} \right) + F_{BA} \sin 60^\circ - 784,8 = 0,$$

$$F_{BC} = 395,2 \text{ N}$$

$$F_{BA} = 632,4 \text{ N}.$$

Exemplo 1.5

Tensões normais médias

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395}{(\pi 8^2/4)} = 7,86 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632,4}{(\pi 10^2/4)} = 8,05 \text{ MPa}$$

Exemplo 1.5

A distribuição de tensão normal média atuante em uma seção transversal da barra AB é mostrada na Fig. 1-16(c) e, em um ponto dessa seção transversal, um elemento está sob tensão conforme mostrado na Fig. 1-16(d).

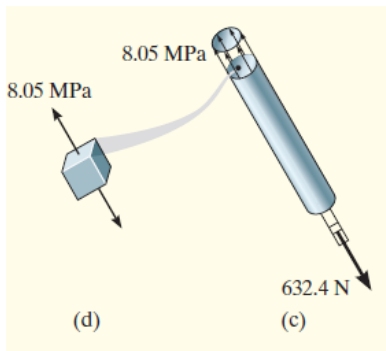


Figura: Fig 1-16(c) e 1-16(d).

Exemplo 1.7

A peça mostrada na Fig. 1-17(a) é feita de aço com densidade de 7850 kg/m^3 . Determine a tensão de compressão média atuante nos pontos A e B .

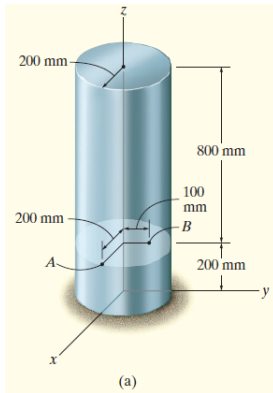


Figura: Fig 1-17(a).

Exemplo 1.7

Ações internas

Um diagrama de corpo livre do segmento superior da peça fundida, com a seção passando pelos pontos A e B , é mostrado na Fig. 1-17(b). O peso desse segmento é determinado por $W_{st} = \gamma_{st} \times V_{st}$.

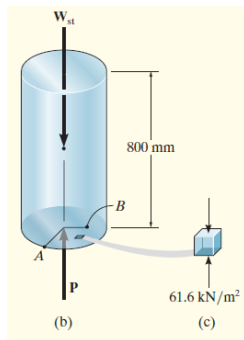
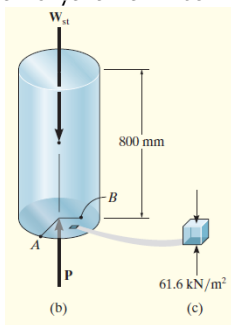


Figura: Fig 1-17(b) e 1-17(c).

Exemplo 1.7

Ações internas

Assim, a força axial interna P na seção é



$$+ \uparrow \sum F_z = 0, \quad P - W_{st} = 0,$$

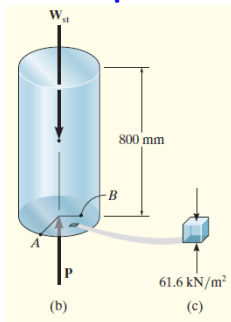
$$P - (7850)(9,81)(0,80) [\pi(0,2)^2] = 0,$$

$$P = 7,7417 \times 10^3 \text{ N}.$$

Figura: Fig 1-17(b) e 1-17(c).

Exemplo 1.7

Tensão de compressão média



$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A} = \frac{7,7417 \times 10^3 \text{ N}}{\pi(200 \text{ mm})^2} \\ &= 0,0616 \text{ N/mm}^2 \\ &= 0,0616 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Figura: Fig 1-17(b) e 1-17(c).

Exemplo 1.8

O elemento AC , mostrado na Fig. 1–18(a), está sujeito a uma força vertical de 3 kN. Determine a posição “ x ” dessa força de modo que a tensão de compressão média no apoio C seja igual à tensão de tração média na barra de ligação AB . A barra possui área de seção transversal de 400 mm^2 e a área de contato em C é de 650 mm^2 .

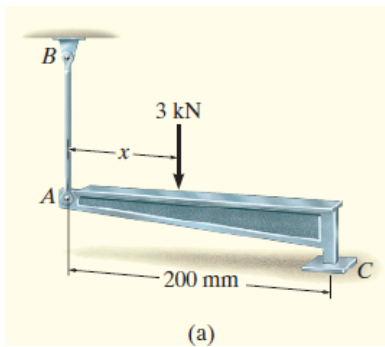
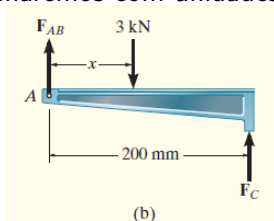


Figura: Fig 1-18(a).

Exemplo 1.8

Ações internas

As forças em A e C podem ser relacionadas considerando o diagrama de corpo livre do elemento AC (Fig. 1-18(b)). Há três incógnitas: F_{AB} , F_C e x . Para a resolução, trabalharemos com unidades de newton e de milímetros.



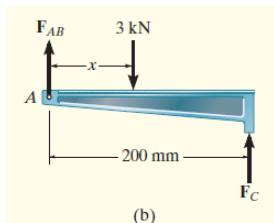
$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y &= 0; & F_{AB} + F_C - 3000 &= 0, \\ + \curvearrowright \sum M_A &= 0; & -(3000)x + F_C(200) &= 0. \end{aligned}$$

Figura: Fig 1-18(b).

Exemplo 1.8

Tensão normal média

Uma terceira equação necessária pode ser escrita, exigindo que a tensão de tração na barra AB e a tensão de compressão em C sejam equivalentes, isto é,



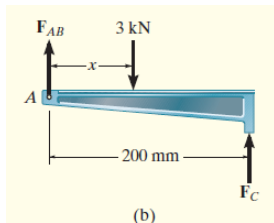
$$\sigma = \frac{F_{AB}}{400 \text{ mm}^2} = \frac{F_C}{650 \text{ mm}^2},$$

$$F_C = 1,625 F_{AB}.$$

Figura: Fig 1-18(b).

$$F_{AB} = 1143 \text{ N} \quad F_C = 1857 \text{ N}$$

Exemplo 1.8



$$-(3000)x + F_C(200) = 0$$

$$x = 124 \text{ mm} \quad 0 < x < 200 \text{ mm}$$

Figura: Fig 1-18(b).