Apostila do Curso de Laboratório de Resistência dos Materiais da Faculdade de Engenharia da UFJF

Prof. Flávio Barbosa
flavio.barbosa@ufjf.edu.br

Prof. Alexandre Cury
alexandre.cury@ufjf.edu.br

1/2022

Sumário

1 Introdução **4**
1.1 Funcionamento do curso 4
1.2 Bibliografia básica 4
1.3 Programa do curso 4
1.4 Classificação dos Ensaios 4
1.5 Conceitos Fundamentais 5

2 Materiais ensaiados no curso **5**
2.1 O aço 5
2.2 O concreto 11
2.3 A madeira 12
2.3.1 Amostragem 12
2.3.2 Valores Característicos 13
2.4 O alumínio 13

3 Dispositivos de Medição **15**

4 Extensômetros Elétricos de Resistência EER ou strain-gages **16**
4.1 Circuito em ponte de Wheatstone para leitura de deformações via EER . . 18
4.1.1 Circuito em 1/4 de ponte 21
4.1.2 Circuito em 1/2 de ponte 22
4.1.3 Efeito de temperatura 22

5 Ensaios **28**
5.1 Controle de qualidade e determinação do Módulo de Elasticidade do Aço . 28
5.1.1 Resumo da norma ABNT NBR 7480:2007 28
5.1.2 Determinação do Módulo de Elasticidade do aço 31
5.1.3 Avaliação da relação tensão × deformação - Ensaio de Tração . . . 31
5.2 Ensaio de Treliça 40
5.3 Ensaio de compressão em pilarete de concreto armado 45
5.4 Dureza 54
5.4.1 Dureza Brinnell - ABNT NBR NM ISO 6506-2:2010 55
5.4.2 Dureza Rockwell - ABNT NBR NM ISO 6508-1:2008 57
5.4.3 Dureza Vickers - ABNT NBR NM ISO 6507-1:2008 58
5.4.4 Dureza Janka - ABNT NBR 7190:1997 60
5.4.5 Os testes de dureza 61
5.5 Ensaio de perfil metálico submetido à flexão 66
5.5.1 Estudo Teórico 67
5.6 Ensaio em Viga de Concreto Armado 75
5.6.1 Estudo Teórico 77
5.7 Determinação de Propriedades Dinâmicas de Estruturas 84
5.7.1 Introdução 84
5.7.2 Análise de um Sistema com um Grau de Liberdade 84
5.7.3 Objetivo Principal do Ensaio 85
5.8 Ensaio de impacto com Pêndulo Charpy 90
5.8.1 Introdução 90
5.8.2 Corpos-de-Prova 91
5.8.3 O ensaio 92

5.8.4 Principais normas para o teste 92
5.9 Ensaio para Medição de Flechas em Viga 95
5.9.1 Introdução 95
5.9.2 Estudo teórico: 95
5.9.3 O ensaio: 97
5.10 Ensaio em pórtico plano 103
5.10.1 Objetivo 103
5.10.2 O ensaio 103
5.11 Ensaio de Flambagem 111
5.11.1 Introdução 111
5.11.2 Conceito de Estabilidade Elástica 111
5.11.3 Objetivo 111
5.11.4 Estudo teórico 111
5.11.5 Hipérbole de Euler 113
5.11.6 O ensaio 114

1 Introdução

1.1 Funcionamento do curso

Trata-se de um curso com 2 créditos semanais, no qual está prevista 1 aula introdutória e teórica e 11 ensaios. A presença do aluno é **OBRIGATÓRIA**.

- Nota Final: média das notas obtidas nos relatórios.

1.2 Bibliografia básica

- Normas Brasileiras - ABNT
- Apostilas de Métodos Experimentais em Engenharia. Professores Ney Roitman e Carlos Magluta - COPPE/UFRJ;
- Livro: Resistência dos Materiais - R. C. Hibbeler;
- Apostila de Resistência dos Materiais. Prof. Flávio Barbosa - Faculdade de Engenharia - UFJF.
- Ensaios Mecânicos de Materiais Metálicos - Sérgio Augusto de Souza

1.3 Programa do curso

Vide Plano de Ensino disponibilizado no Google Classroom.

1.4 Classificação dos Ensaios

Os ensaios experimentais do curso de Laboratório de Resistência dos Materiais têm por objetivo extrair informações sobre as propriedades mecânicas dos materiais a serem ensaiados, além de verificar possíveis defeitos de fabricação das peças. Assim sendo, podemos classificar estes ensaios em dois grupos:

- **Ensaios científicos:** possuem a finalidade de pesquisa e visam determinar propriedades mecânicas dos materiais, avaliar o comportamento estrutural de uma peça, etc. Especificamente, no nosso curso de Laboratório de Resistência dos Materiais, esses ensaios buscarão, através de medições experimentais, obter os valores de deflexões, tensões e deformações obtidas através das equações da Resistência dos Materiais;
- **Ensaios tecnológicos:** usado na indústria e na construção civil, visam o controle de qualidade dos materiais, pois verificam se estes atendem às normas seguidas pelo calculista. Especificamente, no nosso curso de Laboratório de Resistência dos Materiais, ensaios como o Ensaio de Tração, Dureza, entre outros serão realizados.

Outra classificação dos ensaios se dá quanto ao estado final da amostra ensaiada:

- **Ensaios destrutivos:** inutilizam a peça ensaiada, que deve ser um corpo de prova ou uma amostra do material. Ex.: ensaios de tração ou compressão dos materiais.
- **Ensaios não-destrutivos:** não inutilizam a peça ensaiada e, por este motivo, podem ser feitos na própria peça. Ex.: ensaios de líquidos penetrantes, para verificar defeitos superficiais (trincas e fissuras) das peças, emissão acústica, extensometria, acelerometria, etc.

1.5 Conceitos Fundamentais

- **Elasticidade:** é a propriedade dos materiais de se deformarem e recuperarem a sua forma original quando cessados os efeitos da solicitação que os deformou.
- **Plasticidade:** é a propriedade dos materiais de, quando cessados os efeitos das solicitações que os deformou, não restituírem a sua forma original.
- **Rigidez:** Para um material elástico, quanto menor for a sua deformação para uma mesma solicitação, mais rígido será este material.
- **Ductilidade:** é a propriedade dos materiais de se deixarem reduzir a fios sem se romperem.
- **Maleabilidade:** é a propriedade dos materiais de se deixarem reduzir a lâminas, sem se romper.
- **Resistência:** é a capacidade de transmitir as forças internamente, dos pontos de aplicação das cargas aos apoios. É avaliada pela maior tensão que o material pode resistir.
- **Resiliência:** é a capacidade de resistência ao choque sem deformação permanente.
- **Dureza:** é a propriedade de os materiais se oporem à penetração de um corpo mais duro à si próprio. O ensaio de dureza serve para avaliar, entre outros, o grau de desgaste de um determinado material.
- **Tenacidade:** um material é dito tenaz quando, antes de romper à tração, sofre considerável deformação.
- **Material homogêneo:** O material apresenta as mesmas características mecânicas, elásticas e de resistência em todos os pontos que o constituem.
- **Material isotrópico:** O material apresenta as mesmas características mecânicas elásticas em todas as direções. Ex: aço. Já a madeira apresenta, nas direções das fibras, características mecânicas e resistentes distintas daquelas em direção perpendicular e, portanto, não é considerada um material isotrópico.

2 Materiais ensaiados no curso

2.1 O aço

O aço é uma liga de ferro e carbono contendo de 0,008% a 2% de carbono, além de outros elementos residuais resultantes do processo de fabricação (o ferro fundido possui entre 2% e 6,7% de C).

As matérias-primas para a produção do aço são: **minério de ferro** - encontrado na natureza; **coque** (carvão ou madeira) - que fornecem calor e os elementos necessários à redução do minério de ferro; **fundentes**, como calcário - para fluidificar as impurezas e formar uma escória mais fundível. A mistura entre o minério de ferro e os fundentes forma o **sínter**.

Nos altos-fornos, o coque e o sínter são misturados em proporções adequadas. A queima do coque (que é formado basicamente de carbono) fornece calor necessário à

redução do minério de ferro (retirada do oxigênio). A figura 1 apresenta de forma esquemática esta etapa de fabricação do aço.

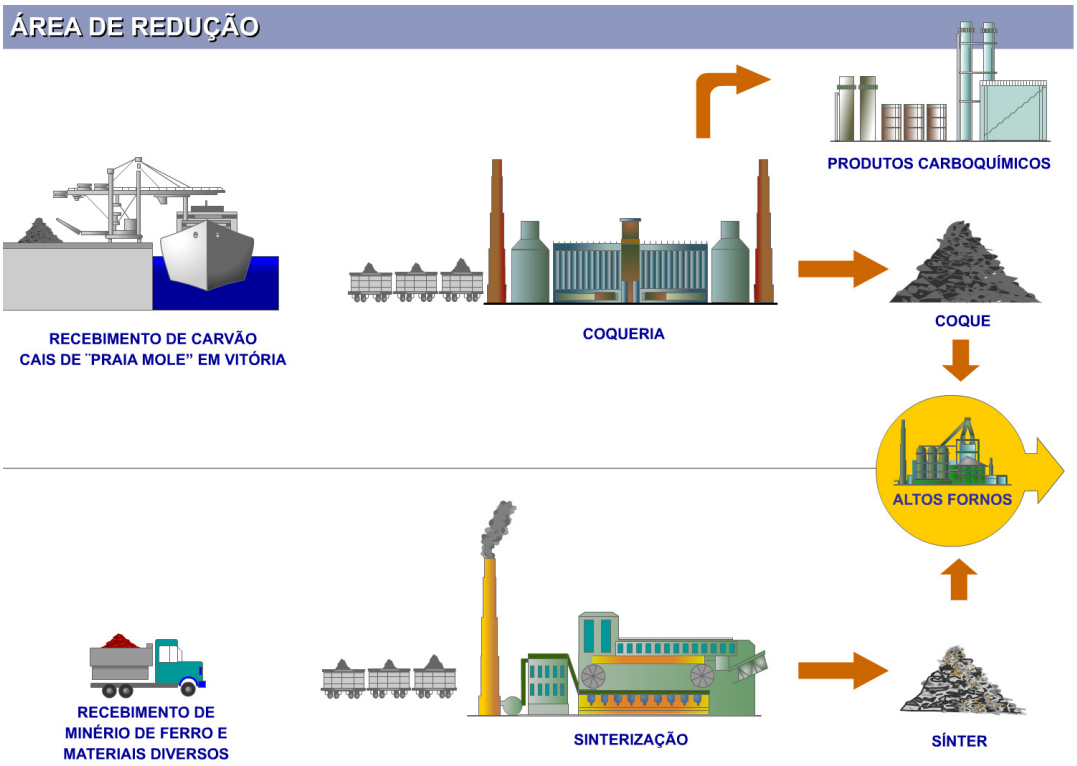


Figura 1: Esquema de fabricação do aço até o alto-forno. Siderúrgica de Tubarão - Vitória, ES

Logo da primeira fusão obtém-se o ferro gusa, na qual o carbono presente no coque se liga quimicamente ao ferro do óxido de ferro. O gusa é levado para a aciaria através dos carros torpedos que mantém sua temperatura. Na aciaria, mediante a queima de suas impurezas e gases, o gusa é transformado em aço. Nesta fase, chamada de refino do aço, são adicionados novos elementos químicos como o níquel o cromo, etc, visando conferir ao aço as propriedades mecânicas que se deseja obter. Ao final desse processo na aciaria, tem-se um lingotamento contínuo com a fabricação de tarugos (siderúrgicas que produzem aços longos como a Arcelor-Mital Juiz de Fora, por exemplo) ou placas (siderúrgicas que produzem aços planos como a de Tubarão em Vitória ou a CSN em Volta Redonda). Os tarugos ou placas são, em seguida, levados para pátios onde sofrem resfriamento natural.

A figura 2 apresenta de forma esquemática esta etapa da fabricação do aço.

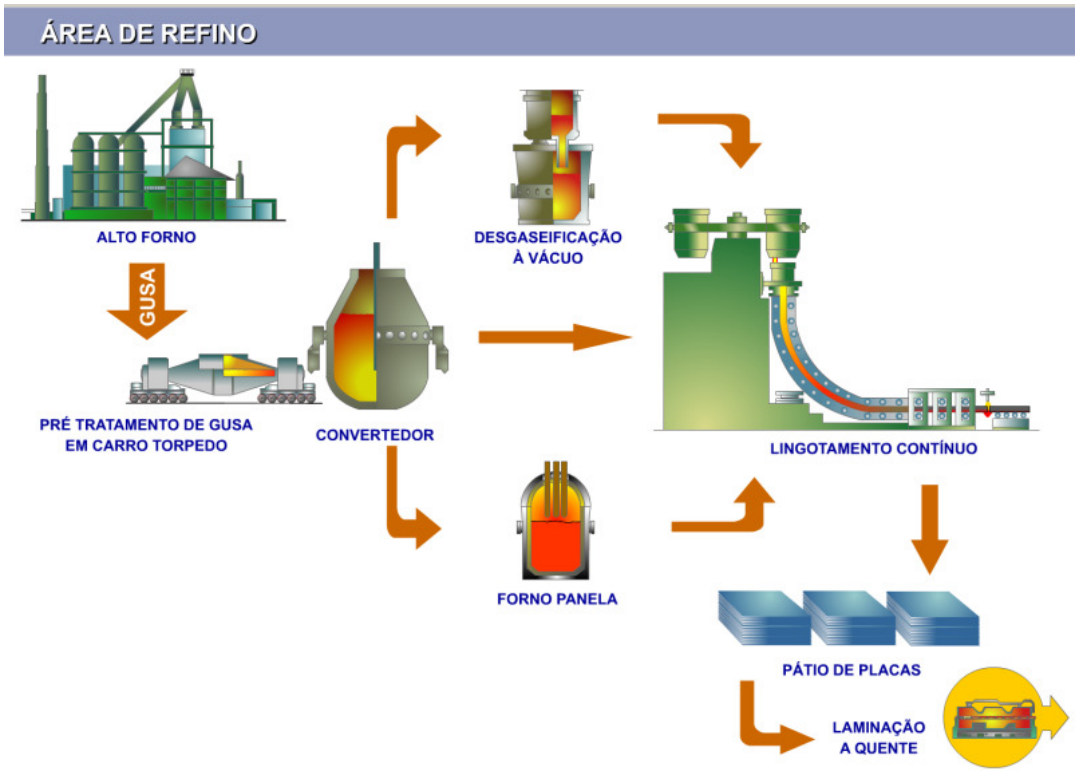


Figura 2: Esquema de fabricação do aço do alto-forno até o lingotamento contínuo. Siderúrgica de Tubarão - Vitória, ES

A próxima etapa da fabricação do aço é a laminação mostrada na figura 3. Na primeira etapa da laminação, as chapas (ou tarugos, dependendo do tipo de siderúrgica) são aquecidas e por um processo de mecânico utilizando roletes (algo semelhante ao processo de fabricação de massa para pizzas), as placas são transformadas em chapas grossas ou finas, que servem de matéria-prima para produtos acabados como chapas finas para indústria automobilística, chapas grossas para a indústria da construção civil, etc. (ver figura 3).

As chapas podem ainda sofrer processos de laminações a frio para redução de sua espessura ou ainda químicos para alterarem suas propriedades. As mais comuns são a galvanização, em que as bobinas de chapas finas são revestidas por uma solução de zinco, através de um sistema eletrolítico (galvanização eletrolítica - figura 4) ou por imersão a quente em solução de zinco (galvanização por imersão a quente - figura 5)

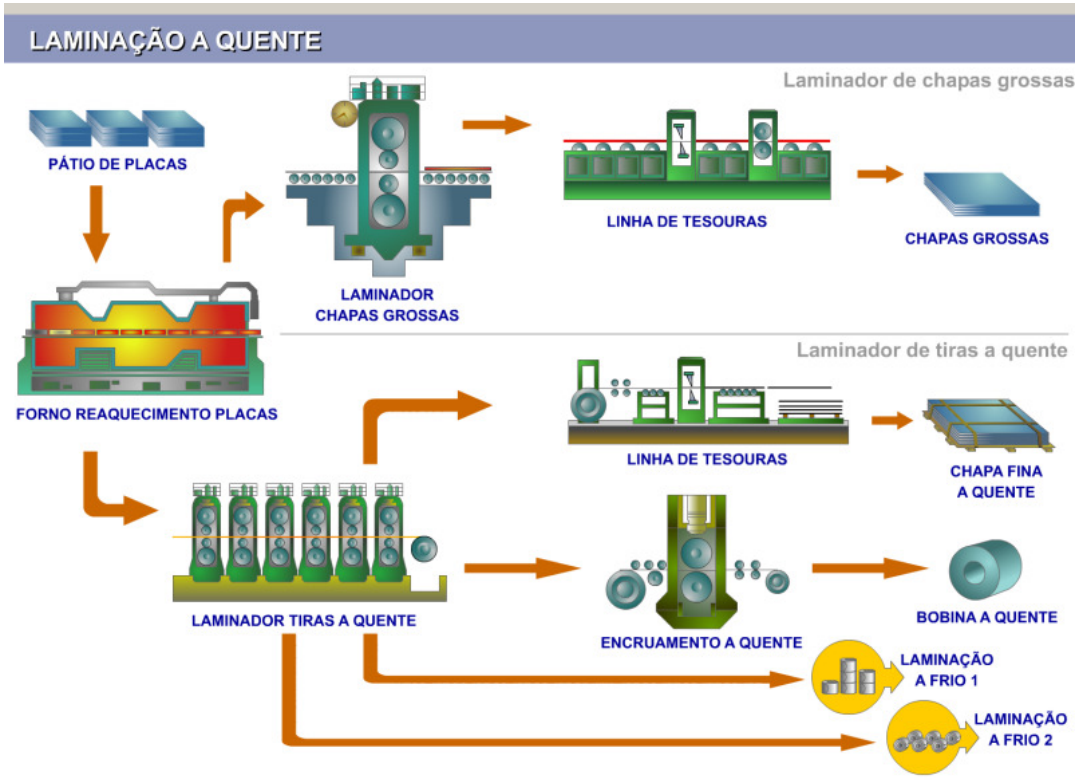


Figura 3: Laminação das placas. Siderúrgica de Tubarão - Vitória, ES

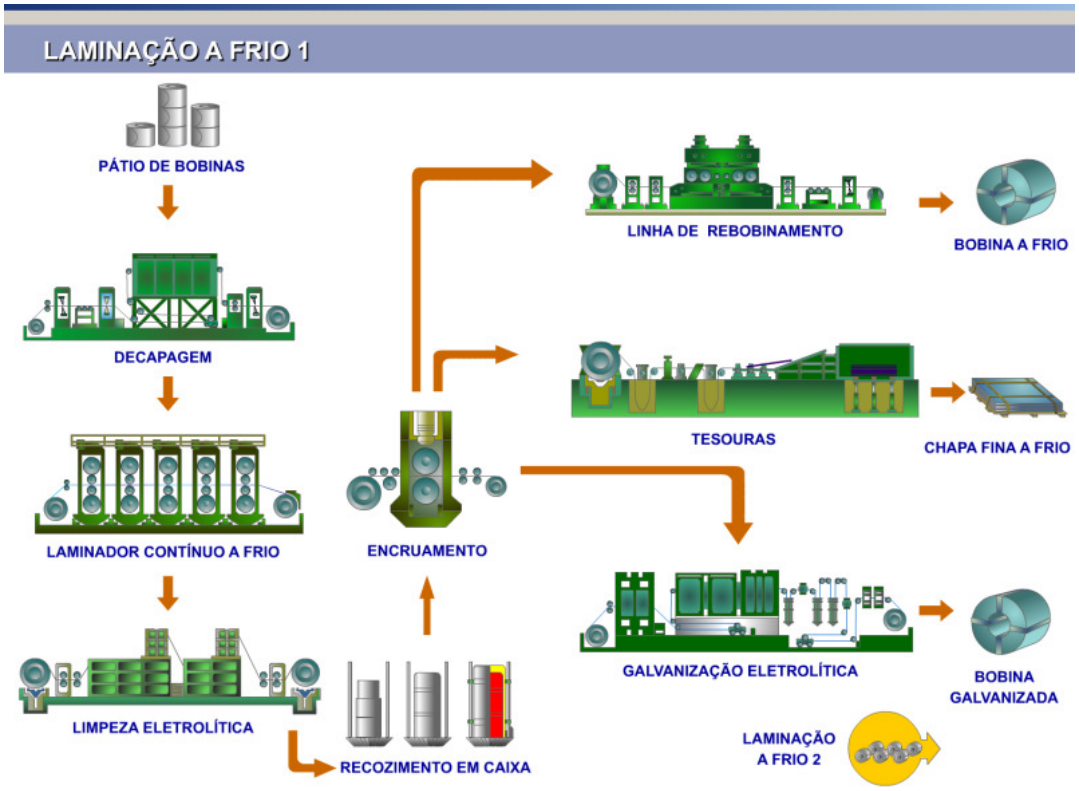


Figura 4: Laminação a frio - galvanização eletrolítica.

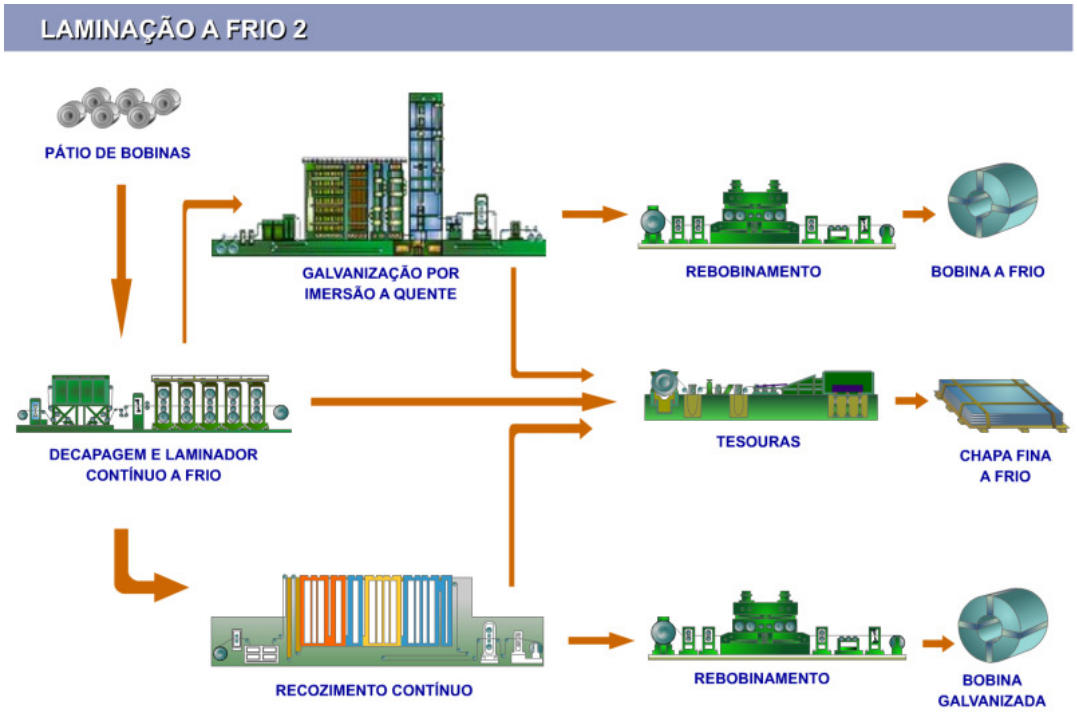


Figura 5: Laminação a frio - galvanização por imersão a quente.

Um dos grandes problemas da siderurgia são os impactos ambientais por ela causados. Hoje em dia, a legislação brasileira impõe limites severos para a poluição gerada nas siderúrgicas. Desta forma, é no extrativismo que precisamos concentrar esforços atualmente. Para se produzir carvão, toneladas de árvores vêm sendo queimadas em fornos principalmente no Estado de Mato Grosso e norte de Minas Gerias. Muitas vezes com o uso de mão-de-obra mal remunerada, em condições de trabalho nem sempre ideais. Constantemente observa-se em matérias jornalísticas dos meios de comunicação a constatação do uso de mão de obra infantil. A figura 6, extraída do site (http://www.ecodebate.com.br/tag/carvao/), mostra uma matéria do ano de 2009 em que ficam explícitos os problemas relativos ao extrativismo do carvão. Diversas matérias recentes podem ser encontradas nesse site.

MG: MPE, Secretaria da Fazenda e Polícia Militar combatem a 'máfia do carvão' por dano ambiental e tributário

admin carvão, crime ambiental, MP

Carvoaria ilegal, em foto de arquivo MMA

Operação "SOS Cerrado" faz busca e apreensão em todo o Norte e Noroeste do Estado

O Ministério Público Estadual (MPE), a Secretaria de Estado da Fazenda (SEF) e a Polícia Militar do Estado de Minas Gerais (PMMG) deflagraram nesta manhã, dia 31 de março, uma operação, denominada "SOS Cerrado" para identificar e desarticular várias organizações criminosas que fazem parte da denominada "máfia do carvão". Investigações do Ministério Público revelam que os integrantes dessas organizações formam várias células espalhadas por todo o Norte e Noroeste do Estado, praticando crimes contra a ordem tributária, contra a fé pública, a administração pública, o meio ambiente e outros crimes conexos.

Figura 6: Matéria de abril de 2009 extraída em março de 2010 do site http://www.ecodebate.com.br/tag/carvao/

Outro problema recorrente no processo de fabricação do aço é a deterioração ambiental das minas e de seus arredores. A figura 7 dá uma ideia do grau de degradação ambiental em uma mina da MBR mineradora nos arredores de Belo Horizonte junto à Serra do Curral.

Entretanto, o desenvolvimento do país passa pela produção de aço. Assim sendo,

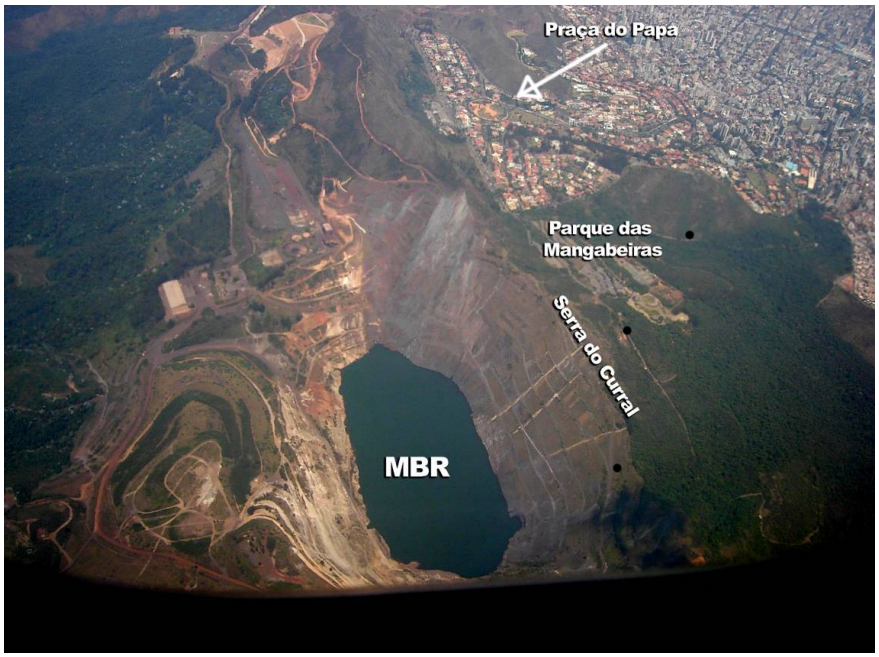


Figura 7: Vista aérea de uma mina de Ferro em Belo Horizonte

como engenheiros e cidadãos, devemos respeitar a legislação e contribuir para minimizar os impactos ambientais embutidos no processo de fabricação do aço.

$$[sustentabilidade] = [desenvolvimento + minimizacão\ \ dos\ \ impactos\ \ ambientais]$$

Na construção civil, o aço é empregado em peças de estruturas metálicas, concreto armado, protendido e outros. Devido a sua resistência aos esforços axiais de tração, são empregados também como tirantes podendo ser, em alguns casos, o principal elemento de sustentação das estruturas (pontes estaiadas).

Nomenclatura:

Aços para concreto armado: esses aços são classificados pela ABNT e seguem nomenclatura: CA XX, onde CA = Concreto Armado e XX é a tensão limite de escoamento em kgf/mm^2 também designada por f_{yk}. Quando o aço não apresentar escoamento definido, esta tensão pode ser calculada pelo valor sob carga correspondente à deformação permanente de 0,2%. Exemplos CA 25, CA 50 (barras), CA 60 (fios).

Aços para concreto protendido (fios e cordoalhas): de forma análoga, a nomenclatura da ABNT será: CP XX, onde CP = concreto protendido e XX é a tensão limite de escoamento.

2.2 O concreto

Concreto é um mistura de pasta de cimento com agregados (brita e areia). No curso de Laboratório de Resistência dos Materiais, este material será objeto de estudo em pilaretes e em vigas de concreto armado. Em ambos os casos, serão medidas tensões somente no aço, uma vez que as medições de tensões em concretos são mais difíceis de serem obtidas.

Uma vez que existem cadeiras do curso de Engenharia Civil que dedicam boa parte

do seu tempo ao estudo deste material, solicita-se aos alunos que busquem materiais de consulta na bibliografia específica.

2.3 A madeira

(contribuição do prof. Bruno Márcio Agostini)

A madeira é, provavelmente, o material de construção mais antigo dada a sua disponibilidade na natureza e sua relativa facilidade de manuseio. Comparada a outros materiais de construção convencionais utilizados atualmente, a madeira apresenta uma excelente relação resistência/peso. A madeira possui ainda outras características favoráveis ao uso em construção, tais como facilidade de beneficiamento e bom isolamento térmico.

As madeiras utilizadas em construção são obtidas a partir do tronco de árvores. Distinguem-se duas categorias principais de madeiras:

- Madeiras duras: Provenientes de árvores frondosas, dicotiledôneas da classe Angiosperma. Possuem folhas achatadas e largas e apresentam crescimento lento. Ex: peroba, ipê, aroeira, sucupira.

- Madeiras macias: Provenientes em geral das árvores coníferas da classe Gimnosperma. Possuem folhas em forma de agulhas ou escamas e sementes agrupadas em forma de cones e apresentam crescimento rápido. Ex: cedrinho, pinheiros, eucaliptos.

Devido à orientação das células e, consequentemente, das fibras, a madeira é um material anisotrópico, apresentando três direções principais (longitudinal, radial e tangencial). A diferença de propriedades entre as direções radial e tangencial raramente tem importância prática. Diferencia-se, porém, as propriedades na direção das fibras principais (direção longitudinal, crescimento vertical) e na direção perpendicular a estas fibras (radial e tangencial, crescimento circunferencial).

As propriedades físicas e mecânicas das espécies de madeira são determinadas por meio de ensaios padronizados realizados em amostras devidamente retiradas de um determinado lote de madeira. No Brasil, estes ensaios estão descritos no Anexo B da NBR 7190/1997-Projeto de estruturas de madeira.

É primordial saber que as propriedades mecânicas obtidas nesses ensaios variam com o teor de umidade da madeira, tempo de duração do carregamento e ocorrência de defeitos. Somente após conhecida a variação das propriedades mecânicas da madeira em função destes fatores, chega-se aos valores a serem utilizados em projeto.

Em geral, realiza-se primeiramente um ensaio destrutivo em uma amostra pertencente ao lote em estudo para que se tenha uma estimativa do valor da propriedade que se procura determinar.

Uma vez de posse desta estimativa, realiza-se o ensaio conforme estabelece a NBR 7190. A duração do ensaio varia de três a oito minutos, seguindo dois ciclos de carga e descarga para acomodação do equipamento de ensaio. A segunda recarga segue até a ruptura do corpo-de-prova, a qual é caracterizada pela ruptura ou deformação excessiva.

2.3.1 Amostragem

Para a investigação direta de lotes de madeira serrada considerados homogêneos, cada lote não deve ter volume superior a 12 m^3.

Do lote a ser investigado, deve-se extrair uma amostra, com corpos-de-prova distribuídos aleatoriamente no lote, devendo ser representativa da totalidade deste. Para isso, não se deve retirar mais de um corpo-de-prova de uma mesma peça. Os corpos-de-prova devem ser isentos de defeitos e retirados de regiões afastadas das extremidades das peças de pelo menos cinco vezes a menor dimensão da seção transversal da peça considerada, mas nunca menor que 30 cm.

O número de corpos-de-prova deve atender aos objetivos da caracterização:

- **Caracterização simplificada:** seis corpos-de-prova
- **Caracterização mínima da resistência de espécies pouco conhecidas:** doze corpos-de-prova.

2.3.2 Valores Característicos

Os valores característicos das propriedades da madeira devem ser estimados pela equação 1, como é proposto na NBR 7190:

$$x_{wk} = \left(2\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{\frac{n}{2}-1}}{\frac{n}{2} - 1} - x_{\frac{n}{2}}\right) 1,1 \tag{1}$$

Os resultados devem ser colocados em ordem crescente $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, desprezando-se o valor mais alto se o número de corpos-de-prova for ímpar, não se tomando para x_{wk} valor inferior a x_1, nem a 0,7 do valor médio (x_m). Ou seja:

$$x_{wk} \geq x_1 \quad \text{e} \tag{2}$$

$$x_{wk} \geq 0,7x_m \tag{3}$$

2.4 O alumínio

O alumínio[1], apesar de ser o terceiro elemento mais abundante na crosta terrestre, é o metal mais recente a ser usado em escala industrial. Mesmo utilizado milênios antes de Cristo, o alumínio começou a ser produzido comercialmente há cerca de 150 anos. Sua produção atual supera a soma de todos os outros metais não-ferrosos. Esses dados já mostram a importância do alumínio para a nossa sociedade. Antes de ser descoberto como metal isolado, o alumínio acompanhou a evolução das civilizações. Sua cronologia mostra que, mesmo nas civilizações mais antigas, o metal dava um tom de modernidade e sofisticação aos mais diferentes artefatos.

Quando o alumínio era pouco conhecido e tinha um custo elevado de produção, suas primeiras aplicações foram limitadas a trabalhos luxuosos, como em estatuetas e placas comemorativas. Com o desenvolvimento dos processos industriais, o metal passou a estar disponível em maiores quantidades (embora ainda medido em quilos, ao invés de toneladas), e começou a ser usado na decoração Vitoriana como em bandejas e escovas de cabelo ornamentais. No final do século XIX, com o aumento da produção e preços menores, foi sendo gradualmente utilizado em utensílios de cozinha e em alguns dos primeiros automóveis que já possuíam painéis revestidos de alumínio.

Consequentemente, no início do século XX, as indústrias de alumínio começaram a trabalhar na produção de ligas de alumínio com propriedades mecânicas mais elevadas.

[1](Extraído das página web da Associação Brasileira do Alumínio - http://www.abal.org.br/ do instituto Brasileiro de Mineração - http://www.ibram.org.br/)

Os primeiros experimentos ocorreram através de tentativas e erros, aliados a observações perspicazes, responsáveis pelo aprimoramento dos princípios metalúrgicos fundamentais envolvidos.

O rápido e notável crescimento da importância do alumínio na indústria é resultado de uma série de fatores:

- É um metal que possui excelente combinação de propriedades úteis, resultando numa adequabilidade técnica para um campo vasto de aplicações em engenharia;
- Pode ser facilmente transformado por meio de todos processos metalúrgicos normais, tornando-se assim, viável à indústria manufatureira em qualquer forma necessária;
- Em laboratórios acadêmicos, a indústria do alumínio e seus próprios usuários têm desenvolvido novas pesquisas, técnicas de fabricação, de soldagem e de acabamento, o que tem levado a um conhecimento maior de técnicas de engenharia deste metal, fazendo com que seja considerado um material de fácil utilização;
- A livre divulgação da indústria sobre recomendações aos usuários e potenciais de uso do alumínio, o que foi muito importante para sua aceitação geral.

A bauxita é o minério mais importante para a produção de alumínio, contendo de 35% a 55% de óxido de alumínio. Trata-se de um material heterogêneo, composto principalmente de um ou mais hidróxidos de alumínio, e várias misturas de sílica, óxido de ferro, dióxido de titânio, silicato de alumínio e outras impurezas em quantidades menores. A maior parte da extração mundial de bauxita (aproximadamente 85%) é usada como matéria-prima para a fabricação de alumínio. A figura 8 mostra uma foto do mineral.

Figura 8: Fragmento de bauxita

O Brasil tem a terceira maior reserva do minério no mundo, localizada na região amazônica, perdendo apenas para Austrália e Guiné. Além da Amazônia, o alumínio pode ser encontrado no sudeste do Brasil, na região de Poços de Caldas (MG) e Cataguases (MG). As reservas medidas e indicadas de minério de bauxita no Brasil alcançam 3,5 bilhões de toneladas.

Atualmente, o Brasil é o segundo maior produtor de minério de bauxita, com 25 milhões de toneladas produzidas. A Austrália é líder em produção, com 62 milhões de toneladas em 2010, que correspondem a 30% da produção global.

O processo de fabricação do alumínio, assim como no aço, passa, também, por um processo de redução (retirada de oxigênio).

3 Dispositivos de Medição

Existem diversos tipos de dispositivos para medições usados na instrumentação de estruturas, dentre os quais destacam-se:

- Flexímetros - Medidores de deslocamentos. Necessita de ponto fixo e é usado em ensaios estáticos ou dinâmicos de baixa velocidade. São bastante robustos e, em muitos casos, funcionam a partir de acoplamento de engrenagens, podendo apresentar mostradores digitais ou analógicos. A figura 9 apresenta a foto de um flexímetro analógico.

Figura 9: Foto de um flexímetro analógico

- Extensômetros Elétricos ou *strain-gages* - Medidores de deformações. Podem ser resistivos ou a base de cristais (piezoelétricos). Seu princípio de funcionamento é baseado no fato de que deformações impostas a esse tipo de sensor implicam em variações na sua resistência elétrica. Sendo assim, uma vez conectados à estrutura, pode-se medir deformações a partir de medidas elétricas extraídas do *strain-gage*. São usados em ensaios estáticos e dinâmicos. A figura 10 apresenta a foto de um *strain-gages*.

Figura 10: Exemplo de EER

- Acelerômetros - Medidores de aceleração. Não precisam de ponto fixo. São muito usados em ensaios dinâmicos, apresentando resultados bastante confiáveis. São construídos, em geral, com strain-gages ou a base de cristais (piezoelétricos). A medição de deslocamentos a partir das acelerações nem sempre fornecem bons resultados (dificuldades no processo de integração numérica). A figura 11 mostra o detalhe de um acelerômetro.

Figura 11: Exemplo de Acelerômetro

No presente curso, os sensores a serem usados são mecânicos, com funcionamento analógico (com engrenagens e mostradores de ponteiro) e aqueles baseados em Extensômetros Elétricos de Resistência (EER). Assim sendo, na próxima seção serão abordados os principais aspectos de funcionamento desse tipo de sensor.

4 Extensômetros Elétricos de Resistência EER ou strain-gages

São extensômetros que utilizam princípios elétricos para seu funcionamento. O tipo mais comum utilizado em ensaios de estruturas são os do tipo fole, conforme mostrado nas figuras 12 e 13. Dependendo do tipo de base e do material metálico resistente, os extensômetros elétricos terão suas características e aplicações caracterizadas.

Figura 12: Exemplo de EER

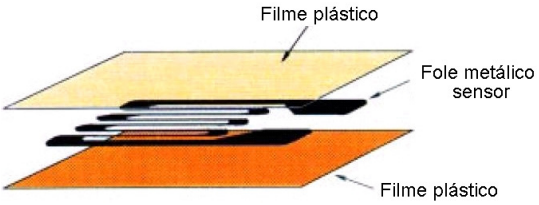


Figura 13: Esquema físico de um EER

O princípio básico de funcionamento é que a resistência elétrica R de um fio condutor é função do seu comprimento L, da área da seção transversal A e da resistividade elétrica ρ do seu material, conforme equação que segue:

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{4}$$

A equação 4 permite escrever, então:

$$R = f(\rho, L, A) \tag{5}$$

Diferenciando a equação 5, tem-se:

$$dR = \underbrace{\frac{\partial R}{\partial \rho}}_{a} d\rho + \underbrace{\frac{\partial R}{\partial L}}_{b} dL + \underbrace{\frac{\partial R}{\partial A}}_{c} dA \tag{6}$$

Desenvolvendo cada uma das derivadas parciais, vem:

$$a \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{L}{A} \tag{7}$$

$$b \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\rho}{A} \tag{8}$$

$$c \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial A} = \frac{\partial(\rho L A^{-1})}{\partial A} = -\rho L A^{-2} \tag{9}$$

Substituindo as derivadas parciais em 6, tem-se:

$$dR = \frac{L}{A} d\rho + \frac{\rho}{A} dL - \frac{\rho L}{A^2} dA \tag{10}$$

Dividindo a equação 10 por $R = \rho L/A$, vem:

$$\frac{dR}{R} = \underbrace{\frac{d\rho}{\rho}}_{d} + \frac{dL}{L} - \underbrace{\frac{dA}{A}}_{e} \tag{11}$$

O termo "e" da equação 11 pode ser colocado em função de $\frac{dL}{L}$. Supondo-se uma seção transversal retangular de dimensões $y \times z$ do fio condutor ($A = yz$). Desenvolvendo-se as derivadas parciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
dA &= \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \\
dA &= z dy + y dz \\
\frac{dA}{A} &= \frac{z dy}{yz} + \frac{y dz}{yz} \\
\frac{dA}{A} &= \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \\
\frac{dA}{A} &= \epsilon_y + \epsilon_z \\
\frac{dA}{A} &= -\nu \frac{dL}{L} - \nu \frac{dL}{L} \\
\frac{dA}{A} &= -2\nu \frac{dL}{L}
\end{aligned} \tag{12}$$

onde ν é o coeficiente de Poisson do material do fio condutor.

O termo "d" da equação 11 também pode ser escrito em função de $\frac{dL}{L}$. De acordo com as experiências de Bridgman, tem-se:

$$\frac{d\rho}{\rho} = c \frac{dV}{V} \tag{13}$$

onde

$$V = zyL \tag{14}$$

é o volume do fio condutor e c é a constante de Bridgman.

Desenvolvendo a equação 14:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial z}dz + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial L}dL \\ dV &= yLdz + zLdy + zydL \\ \frac{dV}{V} &= \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} + \frac{dL}{L} \\ \frac{dV}{V} &= -\nu\frac{dL}{L} - \nu\frac{dL}{L} + \frac{dL}{L} \end{aligned} \tag{15}$$

Substituindo a equação 15 em 13 tem-se então:

$$\frac{d\rho}{\rho} = c\left(-\nu\frac{dL}{L} - \nu\frac{dL}{L} + \frac{dL}{L}\right) \tag{16}$$

Levando as equações 12 e 16 na equação 11, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= c\left(-\nu\frac{dL}{L} - \nu\frac{dL}{L} + \frac{dL}{L}\right) + \frac{dL}{L} + 2\nu\frac{dL}{L} \\ \frac{dR}{R} &= \left[(1+2\nu) + c(1-2\nu)\right]\frac{dL}{L} \end{aligned} \tag{17}$$

Chamando $k = [(1+2\nu) + c(1-2\nu)]$, chega-se finalmente a:

$$\frac{dR}{R} = k\frac{dL}{L} \tag{18}$$

ou simplesmente:

$$\frac{dR}{R} = k\epsilon_x \tag{19}$$

A constante k é conhecida pelo seu nome em inglês "*gage-factor*" e é uma característica do EER normalmente fornecida pelo fabricante. Assim sendo, fica claro que é possível conhecer a deformação ϵ_x no ponto onde foi colado o EER, bastando para isso conhecer a variação de sua resistência elétrica.

4.1 Circuito em ponte de Wheatstone para leitura de deformações via EER

Devido às imprecisões e dificuldades de se fazer a leitura direta da variação da resistência elétrica em função de deformações via EER, normalmente utilizam-se circuitos que, a partir de leituras de voltagem, fornecem de forma indireta esta variação de resistência. O circuito em ponte de Wheatstone, por exemplo, desempenha esse papel e pode ser usado para aplicações tanto estáticas como dinâmicas. Observar a figura 14.

Aplicando a lei de Ohm, tem-se:

$$V_{AC} = V = (R_1 + R_2)I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{V}{R_1 + R_2} \tag{20}$$

$$V_{AC} = V = (R_3 + R_4)I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{V}{R_3 + R_4} \tag{21}$$

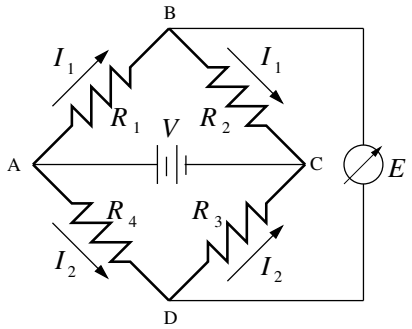


Figura 14: Ponte de Wheatstone

Ainda aplicando a lei de Ohm, tem-se:

$$V_{AB} = R_1 I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \tag{22}$$

$$V_{AD} = R_4 I_2 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V \tag{23}$$

Sendo E a leitura realizada, partindo-se das equações anteriores, vem:

$$E = V_{BD} = V_{AB} - V_{AD} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V - \frac{R_4}{R_3 + R_4} V \tag{24}$$

$$E = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} V = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_4 & R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_2) & 0 \\ 0 & (R_3 + R_4) \end{vmatrix}} V \tag{25}$$

A voltagem E lida será igual a zero e a ponte considerada em equilíbrio se:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \tag{26}$$

O balanceamento inicial permite o emprego da ponte de Wheatstone para leituras estáticas e dinâmicas. Após ser balanceada, aplica-se o carregamento na estrutura sensoreada, o que resulta em deformações nos EER. A leitura $E = 0$, obtida para a ponte em equilíbrio, passa então a ser $\Delta E \neq 0$:

$$\Delta E = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + \Delta R_1 & R_2 + \Delta R_2 \\ R_4 + \Delta R_4 & R_3 + \Delta R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2) & 0 \\ 0 & (R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4) \end{vmatrix}} V = \frac{A}{B} V \tag{27}$$

Desenvolvendo A:

$$\begin{aligned}
A &= (R_1 + \Delta R_1)(R_3 + \Delta R_3) - (R_4 + \Delta R_4)(R_2 + \Delta R_2) \\
&= R_1 R_3 + R_1 \Delta R_3 + \Delta R_1 R_3 + \underbrace{\Delta R_1 \Delta R_3}_{segunda\ ordem} - R_4 R_2 - R_4 \Delta R_2 - \Delta R_4 R_2 - \underbrace{\Delta R_4 \Delta R_2}_{segunda\ ordem} \\
&= R_1 \Delta R_3 + \Delta R_1 R_3 - R_4 \Delta R_2 - \Delta R_4 R_2 \\
&= R_1 R_3 \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_3}{R_3} \right) + R_2 R_4 \left(-\frac{\Delta R_2}{R_2} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \\
&= R_1 R_3 \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right)
\end{aligned} \tag{28}$$

Desenvolvendo B:

$$B = (R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2)(R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4) \tag{29}$$

Desprezando os termos de segunda ordem e os produtos de $\Delta R_i R_j$, $(i, j = 1 \cdots 4)$, que são muito pequenos comparados com os produtos $R_i R_j$ tem-se:

$$\begin{aligned}
B &= R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 \\
&= R_1R_4 + 2R_1R_3 + R_2R_3 \\
&= \frac{R_2}{R_2}R_1R_4 + 2R_1R_3 + R_2R_3 \\
&= \frac{R_1}{R_2}R_1R_3 + 2R_1R_3 + R_2R_3 \\
&= \frac{{R_1}^2R_3}{R_2} + 2R_1R_3 + R_2R_3 \\
&= \frac{R_3}{R_2}\left({R_1}^2 + 2R_1R_2 + {R_2}^2\right) \\
&= \frac{R_1R_3}{R_1R_2}\left(R_1 + R_2\right)^2
\end{aligned} \tag{30}$$

Substituindo os valores de A e B e na equação 27:

$$\begin{aligned}
\Delta E = \frac{A}{B}V &= \underbrace{R_1R_3\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4}\right)}_{A}\underbrace{\frac{R_1R_2}{\left(R_1 + R_2\right)^2 R_1R_3}}_{1/B}V \\
\Delta E &= V\frac{R_1R_2}{\left(R_1 + R_2\right)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4}\right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Da equação 19 tem-se $\frac{dR}{R} = k\epsilon_x$, e a equação anterior passa a ser escrita como:

$$\Delta E = V\frac{R_1R_2}{\left(R_1 + R_2\right)^2}\left(k_1\epsilon_{x1} - k_2\epsilon_{x2} + k_3\epsilon_{x3} - k_4\epsilon_{x4}\right) \tag{32}$$

Normalmente, utilizam-se EERs iguais entre si, o que resulta em $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$. Assim sendo, a última equação pode ser simplificada:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= V\frac{RR}{\left(R + R\right)^2}\left(k\epsilon_{x1} - k\epsilon_{x2} + k\epsilon_{x3} - k\epsilon_{x4}\right) \\
\Delta E &= \frac{V}{4}k\left(\epsilon_{x1} - \epsilon_{x2} + \epsilon_{x3} - \epsilon_{x4}\right)
\end{aligned} \tag{33}$$

Uma observação importante é a seguinte: caso se tenham 4 EERs medindo deformações em um "mesmo ponto" da estrutura, ou seja, $\epsilon_{x1} = \epsilon_{x2} = \epsilon_{x3} = \epsilon_{x4} = \epsilon_x$, tem-se:

$$\Delta E = \frac{V}{4}k(\epsilon_x - \epsilon_x + \epsilon_x - \epsilon_x) = 0 \tag{34}$$

e, consequentemente, a leitura que se faz com o voltímetro seria nula, o que tornaria o ensaio com esta configuração completamente equivocado.

O que fazer então? Para contornar este problema, pode-se colar os EER em posições da estrutura com medidas simétricas de deformações, por exemplo, como mostrado na figura 15.

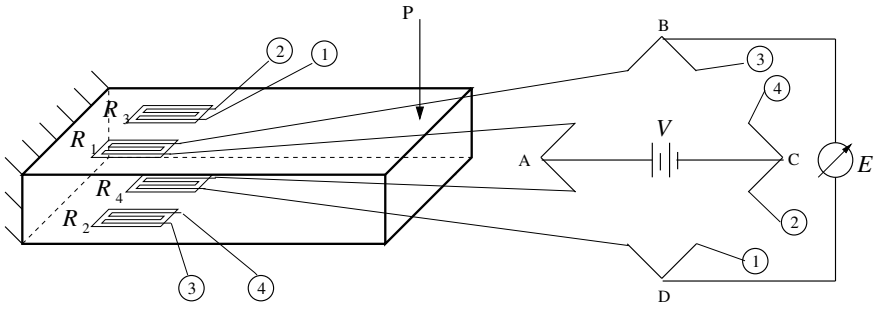


Figura 15: Ensaio de flexão

Neste caso deseja-se medir a deformação longitudinal devida à flexão da barra. Observa-se que as deformações para a carga P nos pontos onde estão colados os EER são idênticas em módulo e iguais a:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x1} &= \epsilon_x \\ \epsilon_{x2} &= -\epsilon_x \\ \epsilon_{x3} &= \epsilon_x \\ \epsilon_{x4} &= -\epsilon_x \end{aligned} \tag{35}$$

Levando as equações 35 à equação 33, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{V}{4} k[\epsilon_x - (-\epsilon_x) + \epsilon_x - (-\epsilon_x)] \\ \Delta E &= \frac{V}{4} k\ 4\ \epsilon_x = V k \epsilon_x \end{aligned} \tag{36}$$

Outra forma de resolver este tipo de problema, pois nem sempre é possível sensorear pontos com valores simétricos de deformação, são os circuitos em 1/4 de ponte (um EER ativo) ou 1/2 de ponte (dois EER ativos).

4.1.1 Circuito em 1/4 de ponte

Numa medição de deformações, nem sempre são utilizados 4 EER ativos. Pode-se adotar 3 resistências elétricas fixas e apenas um EER ($R_1 = R$ por exemplo medindo $\epsilon_{x1} = \epsilon_x$, como mostrado na figura 16.

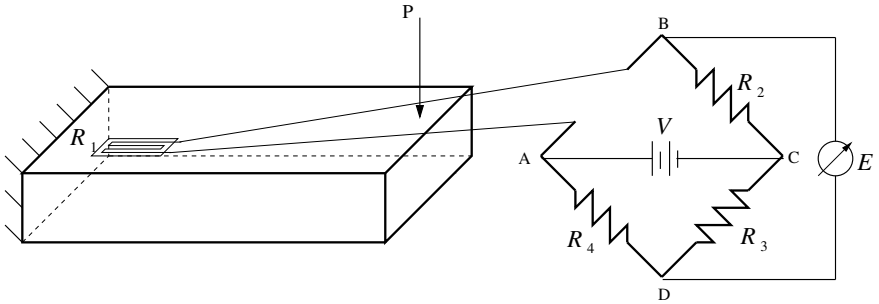


Figura 16: Ensaio de flexão com 1/4 de ponte

Assim sendo, a equação 33 fica:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{V}{4}k(\epsilon_{x1}\underbrace{-\epsilon_{x2}+\epsilon_{x3}-\epsilon_{x4}}_{=0}) \\ \Delta E &= \frac{V}{4}k\epsilon_x \end{aligned} \tag{37}$$

4.1.2 Circuito em 1/2 de ponte

De forma semelhante ao apresentado no item anterior, pode-se adotar 2 resistências elétricas fixas e dois EER ($R_1 = R_2 = R$) por exemplo medindo $\epsilon_{x1} = -\epsilon_{x2} = \epsilon_x$, conforme mostra figura 17.

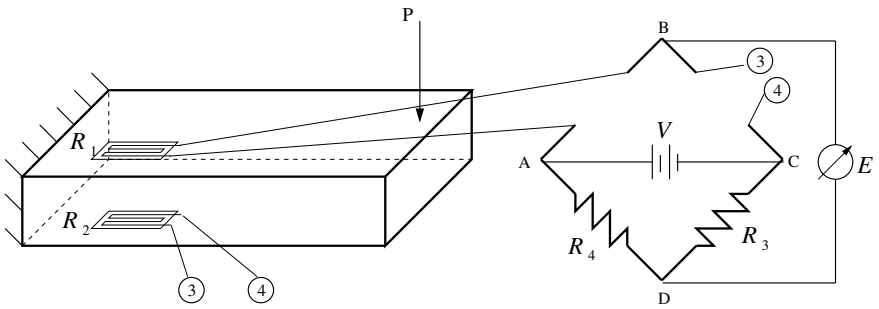


Figura 17: Ensaio de flexão com 1/2 de ponte

Assim sendo, a equação 33 fica:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{V}{4}k[\epsilon_x-(-\epsilon_x)+\underbrace{\epsilon_{x3}}_{=0}\underbrace{-\epsilon_{x4}}_{=0}] \\ \Delta E &= \frac{V}{2}k\epsilon_x \end{aligned} \tag{38}$$

É importante observar que os EER ativos devem estar em braços opostos da ponte de Wheatstone para não anular mutuamente suas medidas de deformações.

4.1.3 Efeito de temperatura

A sensibilidades de medidas realizadas via EER é bastante grande em geral. Com isso, diferenças de temperatura durante o ensaio podem comprometer os resultados pois os EER irão medir, além da deformação pelo carregamento, deformações provindas da variação de temperatura. Assim sendo, tem-se:

$$\epsilon_{xi} = \epsilon_{xi}^{carg} + \epsilon_{xi}^{temp} \tag{39}$$

sendo $i = 1 \cdots 4$, ϵ_{xi}^{carg} a parcela de deformação devida ao carregamento (normalmente o que se deseja medir) e ϵ_{xi}^{temp} a parcela de deformação provinda da variação de temperatura.

Para contornar estes problemas, pode-se adotar as seguintes estratégias:

- Usar um EER colado em uma peça de mesmo material da estrutura ensaiada, no mesmo ambiente de ensaio, conforme sugere figura 18.

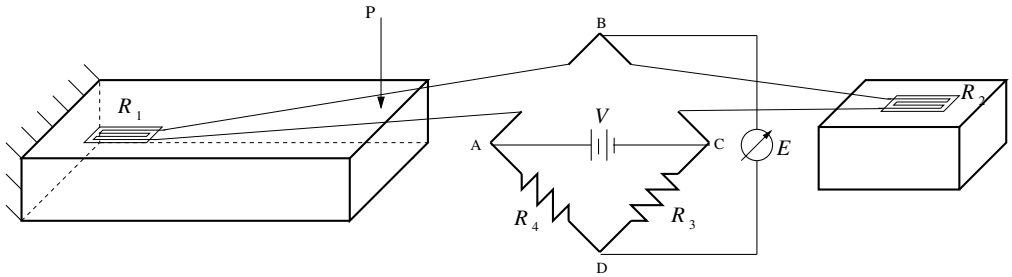


Figura 18: Eliminação do efeito de temperatura

Neste caso, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{V}{4}k(\underbrace{\epsilon_x}_{\epsilon_x{}^{carg}+\epsilon_x{}^{temp}} \overbrace{-\epsilon_x}^{\epsilon_x{}^{temp}} + \underbrace{\epsilon_{x3}}_{=0} - \underbrace{\epsilon_{x4}}_{=0}) \\
\Delta E &= \frac{V}{4}k\epsilon_x{}^{carg} + \epsilon_x{}^{temp} - \epsilon_x{}^{temp} \\
\Delta E &= \frac{V}{4}k\epsilon_x{}^{carg} \qquad (40)
\end{aligned}$$

- Colar EER em braços adjacentes (R_1 e R_2 por exemplo) da ponte em pontos de deformações devido ao carregamento simétricas, conforme já mostrado na figura 17. Neste caso, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{V}{4}k(\underbrace{\epsilon_x}_{\epsilon_x{}^{carg}+\epsilon_x{}^{temp}} - \underbrace{\epsilon_x}_{-\epsilon_x{}^{carg}+\epsilon_x{}^{temp}} + \underbrace{\epsilon_{x3}}_{=0} - \underbrace{\epsilon_{x4}}_{=0}) \\
\Delta E &= \frac{V}{4}k(\epsilon_x{}^{carg} + \epsilon_x{}^{temp} + \epsilon_x{}^{carg} - \epsilon_x{}^{temp}) \\
\Delta E &= \frac{V}{2}k\epsilon_x{}^{carg} \qquad (41)
\end{aligned}$$

As páginas que seguem algumas informações extraídas de catálogos do fabricante de EER:
KYOWA ELECTRONIC INSTRUMENTS CO., LTD.
Overseas Department:
1-22-14, Toranomon, Minato-ku, Tokyo 105-0001, Japan
Tel: (03) 3502-3553 Fax: (03) 3502-3678
http://www.kyowa-ei.com
e-mail: overseas@kyowa-ei.co.jp
que trazem os tipos de ligação em ponte de Wheatstone mais comuns usados nos ensaios de engenharia. Logo em seguida, uma tabela com diversos tipos de extensômetros é apresentada. Nas equações apresentadas nas tabelas que seguem tem-se a seguinte correspondência de variáveis:

Variável	Apostila LRM	catálogos Kyowa
Voltagem de alimentação	V	E
Leitura de voltagem	ΔE	e_o
Deformação	ϵ_x	ϵ_o
Gage factor	k	K_s

No.	Name	Application Sample	Circuit	Output	Remarks
1	1-active-gage 2-wire system Number of gages: 1	Uniaxial stress (uniform tension/compression)	Rg, R, R, R, e_o, E	$e_o=\frac{E}{4}K_s\cdot\varepsilon_o$ K_s: Gage factor ε_o: Strain E: Bridge voltage e_o: Output voltage Rg: Gage resistance R: Fixed resistance	Suitable for use under environment of less ambient temerature changes; no temperature compensation. x1 output
2	1-active-gage 3-wire system Number of gages: 1	Uniaxial stress (uniform tension/compression)	Rg, R, R, R, e_o, E	$e_o=\frac{E}{4}K_s\cdot\varepsilon_o$	No temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled. x1 output
3	Dual 1-active-gage 2-wire system in series (to cancel bending strain) Number of gages: 2	Bending Rg_1, Rg_2 Uniaxial stress (uniform tension/compression)	Rg_1, Rg_2, R, R, R, e_o, E	$e_o=\frac{E}{4}K_s\cdot\varepsilon_o$ Rg_1 ..... Strain: ε_1 Rg_2 ..... Strain: ε_2 $\varepsilon_o=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ R: Fixed resistance $R=Rg_1+Rg_2$	No temperature compensation; bending strain cancelled. x1 output
4	Dual 1-active-gage 3-wire system in series (to cancel bending strain) Number of gages: 2	Bending Rg_1, Rg_2 Uniaxial stress (uniform tension/compression)	Rg_1, Rg_2, R, R, R, e_o, E	$e_o=\frac{E}{4}K_s\cdot\varepsilon_o$ Rg_1 ..... Strain: ε_1 Rg_2 ..... Strain: ε_2 $\varepsilon_o=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ R: Fixed resistance $R=Rg_1+Rg_2$	No temperature compensation; bending strain cancelled; thermal effect of leadwires cancelled. x1 output
5	Active-dummy 2-gage system Number of gages: 2	Active gage Rg_1 Uniaxial stress (uniform tension/compression) Dummy gage Rg_2	R, R, e_o, Rg_1, Rg_2, E	$e_o=\frac{E}{4}K_s\cdot\varepsilon_o$ K_s: Gage factor ε_o: Strain E: Bridge voltage e_o: Output voltage Rg_1: Strain: ε_o R: Fixed resistance Rg_2..... Strain: 0	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled. x1 output
6	Orthogonal 2-active-gage system Number of gages: 2	Rg_2, Rg_1 Uniaxial stress (uniform tension/compression)	R, R, e_o, Rg_1, Rg_2, E	$e_o=\frac{(1+\nu)E}{4}K_s\cdot\varepsilon_o$ ν: Poisson's ratio Rg_1, Rg_2: Gage resistance Rg_1 ..... Strain: ε_o Rg_2 ..... Strain: $-\nu\varepsilon_o$ R: Fixed resistance	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled. x(1+ν) output
7	2-active-gage system (for bending strain measurement) Number of gages: 2	Rg_1, Rg_2 Bending stress	R, R, e_o, Rg_1, Rg_2, E	$e_o=\frac{E}{2}K_s\cdot\varepsilon_o$ Rg_1 ..... Strain: ε_o Rg_2 ..... Strain: $-\varepsilon_o$ R: Fixed resistance	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled; compressive/ tensile strain cancelled. x2 output
8	Opposite side 2-active-gage 2-wire system Number of gages: 2	Rg_1, Rg_2 Uniaxial stress (uniform tension/compression)	R, Rg_2, e_o, R, Rg_1, E	$e_o=\frac{E}{2}K_s\cdot\varepsilon_o$ Rg_1 ..... Strain: ε_o Rg_2 ..... Strain: ε_o R: Fixed resistance	No temperature compensation; bending strain cancelled by bonding to the front and rear. x2 output

Figura 19:

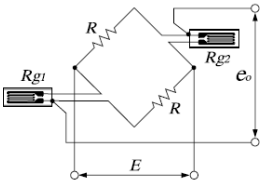
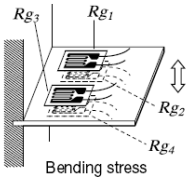
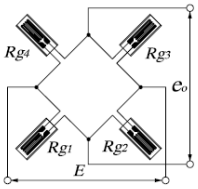
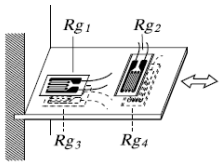
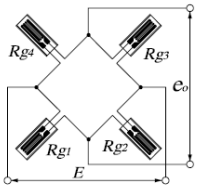
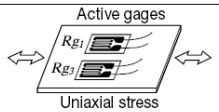
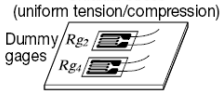
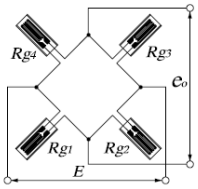
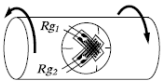
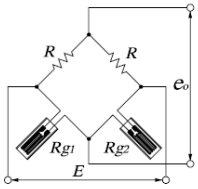
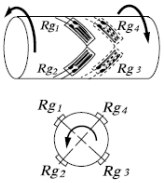
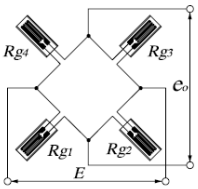
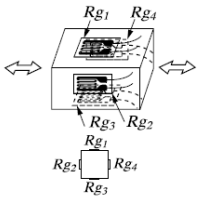
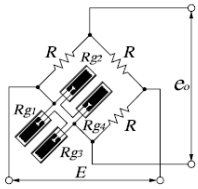
No.	Name	Application Sample	Circuit	Output	Remarks
9	Opposite side 2-active-gage 3-wire system Number of gages: 2	 Uniaxial stress (uniform tension/compression)		$e_o = \frac{E}{2} K_s \cdot \varepsilon_o$ Rg_1 ..... Strain: ε_o Rg_2 ..... Strain: ε_o R: Fixed resistance	No temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled; bending strain cancelled by bonding to the front and rear. x2 output
10	4-active-gage system (for bending strain measurement) Number of gages: 4	 Bending stress		$e_o = K_s \cdot \varepsilon_o \cdot E$ Rg_1, Rg_3 ..... Bending strain: ε_o Rg_2, Rg_4 ..... Bending strain: $-\varepsilon_o$	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled; compressive/ tensile strain cancelled. x4 output
11	Orthogonal 4-active-gage system Number of gages: 4			$e_o = \frac{(1+\nu)E}{2} K_s \cdot \varepsilon_o$ ν: Poisson's ratio Rg_1, Rg_3 ..... Strain: ε_o Rg_2, Rg_4 ..... Strain: $-\nu\varepsilon_o$	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled. x2(1+ν) output
12	Active-dummy 4-gage system Number of gages: 4	Active gages  Uniaxial stress (uniform tension/compression) Dummy gages 		$e_o = \frac{E}{2} K_s \cdot \varepsilon_o$ Rg_1, Rg_3 ..... Strain: ε_o Rg_2, Rg_4 ..... Strain: 0	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled; bending strain cancelled by bonding to the front and rear. x2 output
13	2-active-gage system (for bending strain measurement) Number of gages: 2			$e_o = \frac{E}{2} K_s \cdot \varepsilon_o$ Rg_1 ..... Bending strain: ε_o Rg_2 ..... Bending strain: $-\varepsilon_o$ R: Fixed resistance	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled. x2 output
14	4-active-gage system (for bending strain measurement) Number of gages: 4			$e_o = K_s \cdot \varepsilon_o \cdot E$ Rg_1, Rg_3 ..... Bending strain: ε_o Rg_2, Rg_4 ..... Bending strain: $-\varepsilon_o$	Temperature compensation; thermal effect of leadwires cancelled. x4 output
15	4-active-1-gage system (for mean strain measurement) Number of gages: 4			$e_o = \frac{E}{2} K_s \cdot \varepsilon_o$ $\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4}{4}$ R: Fixed resistance $Rg = R$ $R = Rg_1 = Rg_2 = Rg_3 = Rg_4$	No temperature compensation; mean strain. x1 output

Figura 20:

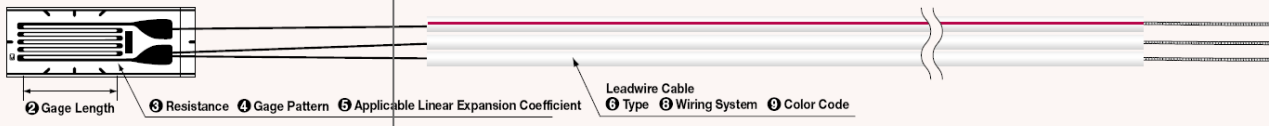
1b Selecting a strain gage based on operating environment and purpose

	Name/series designation		Materials: Resistive element	Materials: Base	Operating temperature ranges in combination with major adhesives after curing*1 (°C)	Self-temperature-compensation range (°C)	Applicable linear expansion coefficient ($\times 10^{-6}$/°C)	Strain limit at room temp., approx.*2 (%)	Fatigue life at room temp., approx.*3 (times)
For general stress measurement	General-purpose foil strain gages **KFG**	For general purpose	CuNi alloy foil	Polyimide	CC-33A: –196 to 120 EP-34B: –55 to 150 PC-6: –196 to 150	10 to 100	5, 11, 16, 23, 27	5.0	1.2×10^7
		For sensing element of transducers			PC-6: –196 to 150 EP-34B: –55 to 150	10 to 100	11, 16, 23, 27	5.0	1.2×10^7
		For concrete			CC-35: –30 to120 PC-12: –196 to 150	10 to 100	11	5.0	1.2×10^7
		Concentrated stress measurement			CC-33A: –196 to 120 EP-34B: –55 to 150 PC-6: –196 to 150	10 to 100	11, 16, 23, 27	—	—
		Residual stress measurement			CC-33A: –196 to 120 EP-34B: –55 to 150 PC-6: –196 to 150	10 to 100	11, 16, 23, 27	—	—
		Bolt axial tension measurement			EP-18: Room temp. to 50 EP-34B: Room temp. to 50	10 to 100	11	—	—
	Foil strain gages with temperature sensor **KFGT**		CuNi alloy foil	Polyimide	CC-33A: –10 to 120 EP-34B: –10 to 120 PC-6: –10 to 120	10 to 100	11, 16, 23	3	1×10^6
	Foil strain gages **KFR**	Strain measurement at middle temperatures; for transducers	NiCr alloy foil	Polyimide	PC-6: –196 to 150 CC-33A: –196 to 120 EP-34B: –55 to 150	0 to 150	11, 16, 23	2.2	1×10^6
		Concentrated stress measurement			PC-6: –196 to 150 CC-33A: –196 to 120 EP-34B: –55 to 150	0 to 150	11, 16, 23	—	—
	Waterproof foil strain gages **KFW**		CuNi alloy foil	Paper base + phenol-epoxy	CC-33A: –10 to 80 EP-18: –10 to 80	10 to 80	11, 16, 23	2.8	3×10^4
	Small-sized waterproof strain gages **KFWS**		CuNi alloy foil	Polyimide	CC-33A: –10 to 80 EP-18: –10 to 80	10 to 80	11, 16, 23	5.0	3×10^4
	Weldable waterproof strain gages **KCW**		NiCr alloy foil	Stainless steel	(Spot welding) –20 to 100	10 to 90	11	0.5	1×10^6 *A
	Wire strain gages **KC**		CuNi alloy foil	Paper base + phenol-epoxy	PC-12: –196 to 150 CC-35: –30 to 120	10 to 60	11	1.8	1.5×10^5
	Embeddable strain gages **KM**		CuNi alloy	Acrylate	(Embedment) –10 to 70	0 to 50	11	0.3	—
	Embeddable strain gages for concrete **KMC**		CuNi alloy wire	Silicone	(Embedment) Room temp. to 70	—	—	0.3	—
For composite materials, plastics and rubber	Foil strain gages for composite materials **KFRP**		NiCr alloy foil	Polyimide	EP-34B: –55 to 200 CC-33A: –196 to 120	0 to 150	1, 3, 6, 9	2.2	1×10^6
	Strain gages for printed boards **KFRS**		NiCr alloy foil	Polyimide	CC-33A: –196 to 120 PC-6: –196 to 150	–30 to 120	13	1.6	2×10^6
	Foil strain gages for plastics **KFP**		CuNi alloy foil	Paper base + phenol-epoxy	EP-34B: –20 to 80 CC-33A: –20 to 80	10 to 80	65	3.0	1×10^6
	Foil strain gages for low-elasticity materials **KFML**		CuNi alloy foil	Phenol-epoxy	EC-30: 0 to 60 CC-33A: 0 to 60	—	—	1.0	—
For infinitesimal strain measurement	Semiconductor strain gages **KSP**	Micro-strain measurement	P type Si	Paper base + phenol-epoxy	PC-12: –50 to 150 CC-33A: –50 to 120	—	—	0.3	2×10^6 *A
		For sening element of highly sensitive transducers	P type Si	Paper base + phenol-epoxy	PC-12: –50 to 150 CC-33A: –50 to 120	—	—	0.3	2×10^6 *A
		Micro-strain meas; 2-element, temperature-compensation type	P type Si N type Si	Paper base + phenol-epoxy	PC-12: –50 to 150 CC-33A: –50 to 120	20 to 70	11	0.3	2×10^6 *A
	Self-temperature-compensation semiconductor strain gages **KSN**		N type Si	Paper base + phenol-epoxy	PC-12: –50 to 150 CC-33A: –50 to 120 EP-17: –50 to 120(E5)	20 to 70	11, 16	0.3	2×10^6 *A
	High-output semiconductor strain gages **KSPH**		P type Si	Paper base + phenol-epoxy	PC-12: –50 to 150 CC-33A: –50 to 120	—	—	0.3	2×10^6 *A
	Ultralinear semiconductor strain gages **KSPL**		P type Si	Paper base + phenol-epoxy	PC-12: –50 to 150 CC-33A: –50 to 120	—	—	0.3	2×10^6 *A

Notes

*1. Underlined adhesives are those used for strain limit tests at room temperature and for fatigue tests at room temperature.
*2. Typical values with uniaxial gages. Strain limit is the mechanical limit where a difference between the strain reading and mechanical strain initiated by applying tension load exceeds 10%
*3. Typical values with uniaxial gages. Strain level: ±1500 με; *A: ±1000 με; *B: ±500 με, *C: ±100 με

Figura 21:



KFG - 2 - 120 - C1 - 11 L 1M 3 R

❶ Series Designation

KFG: General-purpose foil strain gage
KFGT: Foil strain gage with temp. sensor
KFR: Foil strain gage
KFW: Waterproof foil strain gage
KFWS: Small waterproof foil strain gage
KCW: Weldable waterproof foil strain gage
KC: Wire strain gage
KM: Embedded foil strain gage for concrete
KMC: Embedded wire strain gage for concrete
KFRP: Foil strain gage for composite materials
KFRS Foil strain gage for printed boards
KFP: Foil strain gage for plastics
KFML: Foil strain gage for low-elasticity materials
KSP: Semiconductor strain gage
KSN: Self-temperature-compensation semiconductor strain gage
KSPH: High-output semiconductor strain gage
KSPL: Ultralinear semiconductor strain gage
KHCX: Encapsulated strain gage
KHCD: Encapsulated strain gage
KHCS: Encapsulated strain gage
KHCM: Encapsulated strain gage
KHC: Encapsulated strain gage
KFU: High-temperature foil strain gage
KH: Weldable high-temp. foil strain gage
KFH: High-temperature foil strain gage
KFL: Low-temperature foil strain gage
KLM: Ultrahigh-elongation wire strain gage
KFEL: High-elongation foil strain gage
KFN: Noninductive foil strain gage
KFS: Shielded foil strain gage
KFF: Foil bending strain gage
KCH: Foil strain gage with protector
KMP: Embedded foil strain gage for plastics
KTB: Temperature gage
KV: Crack gage

❷ Gage Length

015: 0.15mm
02N: 0.2mm
02: 0.2mm
03: 0.3mm
05: 0.5mm
1N: 1mm
1: 1mm
1.5: 1.5mm
2N: 2mm
2: 2mm
3: 3mm
4N: 4mm
4: 4mm
5: 5mm
6: 6mm
7: 7mm
9: 9mm
10: 10mm
20: 20mm
30: 30mm
60: 60mm
70: 70mm
80: 80mm
120: 120mm

❸ Resistance

50: 50Ω
60: 60Ω
120: 120Ω
200: 200Ω
350: 350Ω
500: 500Ω
1K: 1000Ω
2K: 2000Ω
10K: 10000Ω

❹ Gage Pattern

A1: Uniaxial, leads at one end (KC, KTB gage)
A9: Uniaxial, leads at one end (KLM gage)
C1: Uniaxial, leads at one end (foil gage)
C2: Uniaxial 90°, lead at both ends
C3: Uniaxial 0°, lead at both ends
C9: Uniaxial, leads at one end (KFN gage)
C11: Uniaxial, 2-element, 1mm thick (KFF gage)
C12: Uniaxial, 2-element, 2mm thick (KFF gage)
C15: Uniaxial right 45°, for shearing strain, leads at one end
C16: Uniaxial left 45°, for shearing strain, leads at one end
C20: Uniaxial, leads at a side (for bolt axial tension)
D1: Biaxial 0°/90°, lead at both ends
D2: Biaxial 0°/90°, lead at both ends (for torque)
D3: Triaxial 0°/60°/45°, lead at both ends, plane arrangement
D4: Triaxial 0°/120°/240°, plane arrangement
D6: Quadraxial 0°/30°/90°/150°
D9: Uniaxial 5-element 90°
D16: Biaxial 0°/90° stacked rosette, round base
D17: Triaxial 0°/90°/45° stacked rosette, round base
D19: Uniaxial 5-element 0°
D20: Biaxial 0°/90° (KFN gage)
D22: Triaxial 0°/90°/45°, plane arrangement
D25: Triaxial 0°/90°/45°, plane arrangement
D28: Triaxial 0°/135°/90°, plane arrangement (for boring)
D29: Biaxial 0°/90°, leads at one end, plane arrangement
D30: Triaxial 0°/60°/45°, leads at one end, plane arrangement
D31: Biaxial 0°/90°, leads at one end (for torque)
D39: Biaxial 5-element 0°/90°
E3: Uniaxial, lead at both ends (semiconductor gage)
E4: Uniaxial, leads at one end (semiconductor gage)
E5: Uniaxial, lead at both ends with no base (semiconductor gage)
F2: Uniaxial 2-element (semiconductor gage)
F3: Biaxial 0°/90° (semiconductor gage)
G4: Uniaxial, leads at one end (KH-G4)
G8: Uniaxial active/dummy 2-element, Inconel (for KHC)
G9: Uniaxial active/dummy 2-element, SUS (for KHC)
G10: Uniaxial (for KCW)
G11: Uniaxial (for KHCD)
G12: Uniaxial active/dummy 2-element (for KHCS)
G13: Uniaxial active/dummy 2-element (for KHCX)
G14: Full-bridge (for KCW)
G15: Uniaxial active/dummy 2-element (for KHCM)
H1: Uniaxial (for KM-30)
H2: Uniaxial (for KM-120)
H3: Uniaxial (for KMC)
H4: Uniaxial with T thermocouple (for KMC)
J1: Uniaxial (for KFS)

❺ Applicable Linear Expansion Coefficient

(x10^{-6}/°C)

1: CFRP, etc. for composite materials
Amber (1.1)
Diamond (1.2)

3: GFRP, etc. for composite materials
Silicon (2.3)
Sulfur (2.7)

5: GFRP, etc. for composite materials
Tungsten (4.5)
Lumber (5.0)
Molybdenum (5.2)
Zirconium (5.4)
Kobar (5.9)

6: GFRP, etc. for composite materials
28 Tantalum (6.6)

9: CFRP, GFRP, etc. for composite materials
Titanium alloy (8.5)
Platinum (8.9)
Soda-lime glass (9.2)

11: Common steel (11.7)
SUS631 (10.3)
SUS630 (10.6)
Cast iron (10.8)
Nickel-molybdenum steel (11.3)
Beryllium (11.5)
Inconel X (12.1)

13: NCF, etc. for corrosion and heat-resistant alloys
Nickel (13.3)
Printed board (13.0)

16: Stainless steel SUS304 (16.2)
Beryllium steel (16.7)
Copper (16.7)

23: 2014-T4 aluminum (23.4)
Brass (21.0)
Tin (23.0)
2024-T4 aluminum (23.2)

27: Magnesium alloy (27.0)
Composite material GFRP (35.0)

65: Acrylic resin (65.0)
Polycarbonate (66.6)

Leadwire Cable

❻ Type

B: Glass-coated cable of 3 Ni-clad copper wires
C: MI cable (for KHC, KHCD, KHCM, KHCS and KHCX gages)
D: Glass-coated cable of 3 FeNi-clad copper wires
F: Fluoplastic-coated high/low temp. 3-wire cable (equiv. to L-3 leadwire cable)
G: Polyethylene-coated cross-link 3-wire cable
H: High/low temp. 3-wire cable (equiv. to L-17 leadwire cable)
J: Vinyl-coated normal temp. low-noise 3-wire cable (equiv. to L-13 leadwire cable)
L: Vinyl-coated flat 2 or 3-wire cable (L-6, L-7, L-9 or L-10)
N: Polyester-coated copper wire cable
R: Mid-temp. 2 or 3-wire cable (L-11 or L-12)
W: Vinyl-coated flat 3-wire cable (for KM-120)
Y: Vinyl-coated flat 2-wire cable (for KM-30)

❼ Length

C: Centimeter
e.g. 30C = 30cm
M: Meter
e.g. 3M = 3m

❽ Wiring System

2: 2-wire system
3: 3-wire system
In the case of encapsulated gage
Number: Length of soft cable
V: With bridge adapter
F: With compression fitting
FV: With both bridge adapter and compression fitting

❾ Color Code

Color codes are available for only vinyl-coated flat leadwire cables.

2-wire system
R: Red
W: White*
B: Black*
G: Green*
Y: Yellow*
*Custom-made
S: Multi-axial gages (Standard)
• Biaxial (D16)
0° (1st axis): Red
90° (2nd axis): White
• Triaxial (D17)
0° (1st axis): Red
45° (3rd axis): Green
90° (2nd axis): White

3-wire system
The insulator color is white and the stripe color code is as follows.
R: Red
L: Blue*
B: Black*
G: Green*
Y: Yellow*
*Custom-made
S: Multi-axial gages (Standard)
• Biaxial (D16)
0° (1st axis): Red
90° (2nd axis): Black
• Triaxial (D17)
0° (1st axis): Red
45° (3rd axis): Blue
90° (2nd axis): Black

To select a strain gage equipped with leadwire cable, refer to Page 24

5 Ensaios

5.1 Controle de qualidade e determinação do Módulo de Elasticidade do Aço

A norma fundamental que será aqui aplicada é a ABNT NBR 7480:2007 que estabelece os requisitos exigidos para encomenda, fabricação e fornecimento de barras e fios de aço destinados a armaduras para estruturas de concreto armado, com ou sem revestimento superficial.

Código	ABNT NBR **7480**:2007
Código Secundário :	ABNT/EB 3
Data de Publicação :	03/09/2007
Válida a partir de :	03/03/2008
Título :	Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação
Título Idioma Sec. :	Steel for the reinforcement of concrete structures - Specification
Comitê :	ABNT/CB-28 Siderurgia
Nº de Páginas :	13
Status :	Em Vigor
Organismo :	ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas
Preço (R$) :	59,25
Objetivo :	Esta Norma estabelece os requisitos exigidos para encomenda, fabricação e fornecimento de barras e fios de aço destinados a armaduras para estruturas de concreto armado, com ou sem revestimento superficial.

Figura 23: Detalhe da ABNT NBR 7480:2007

5.1.1 Resumo da norma ABNT NBR 7480:2007

1. **Classificação**: **Barras** - produtos de diâmetro 6,3 mm ou superior, obtidos por laminação a quente sem processo posterior de deformação mecânica. **Fios** - produtos de diâmetro 10 mm ou inferior, obtidos a partir do fio máquina por trefilação ou laminação a frio.

2. **Categorias**: - **Barras** CA-25 ou CA-50. **Fios** CA-60.

3. **Configuração geométrica**: as barras CA-50 devem ter nervuras transversais e as CA-25 devem ser lisas. Os fios podem ser lisos, entalhados ou nervurados.

4. **Defeitos**: o material deve ser isento de corrosão, manchas de óleo, redução de seção e fissuras. Oxidação superficial é permitida.

5. **Massa**: a massa real das barras deve ser igual a sua massa nominal com as tolerâncias conforme tabelas que seguem (considerar a massa específica do aço como 7850 kg/m^3)

Barras	Massa nominal [b] kg/m	Máxima variação permitida para massa nominal
6,3	0,245	± 7%
8,0	0,395	± 7%
10,0	0,617	± 6%
12,5	0,963	± 6%
16,0	1,578	± 5%
20,0	2,466	± 5%
22,0	2,984	± 4%
25,0	3,853	± 4%
32,0	6,313	± 4%
40,0	9,865	± 4%

Fios	Massa nominal [b] kg/m	Máxima variação permitida para massa nominal
2,4	0,036	± 6%
3,4	0,071	± 6%
3,8	0,089	± 6%
4,2	0,109	± 6%
4,6	0,130	± 6%
5,0	0,154	± 6%
5,5	0,187	± 6%
6,0	0,222	± 6%
6,4	0,253	± 6%
7,0	0,302	± 6%
8,0	0,395	± 6%
9,5	0,558	± 6%
10,0	0,617	± 6%

Figura 24:

6. **Comprimento das barras**: 12m com tolerância de 1%,

7. **Marcação**: as barras e fios devem ser identificados com a categoria e o diâmetro do material.

8. **Propriedades Mecânicas da Tração e dobramento**: devem obedecer a tabela que segue:

Categoria	Valores mínimos de tração				Ensaio de dobramento a 180°	
	Resistência característica de escoamento[a] f_{yk} MPa[e]	Limite de resistência[b] f_{st} MPa[f]	Alongamento após ruptura em 10 ϕ[c] A %	Alongamento total na força máxima[d] A_{gt} %	Diâmetro do pino mm	
					$\phi < 20$	$\phi \geq 20$
CA-25	250	1,20 f_y	18	-	2 ϕ	4 ϕ
CA-50	500	1,08 f_y	8	5	3 ϕ	6 ϕ
CA-60	600	1,05 f_y[c]	5	-	5 ϕ	-

Figura 25:

9. **Amostragem**: os lotes para análises deverão ser de no máximo 30t. Deve-se extrair 3 amostras por lote.

10. **Ensaios mais comuns**: **Tração** (ABNT NBR ISO 6892). $L_o = 10$ diâmetros nominais; resistência ao escoamento caracterizada por um patamar no diagrama tensão-deformação ou calculada como 0,2 % de deformação residual ou a tensão correspondente à deformação de 0,5%. **Dobramento** (ABNT NBR ISO 7438):

11. **Demais Ensaios**: Fadiga (ABNT NBR 7478) e conformação superficial (ABNT NBR 7477)

12. **Aceitação**: Atender aos itens 4, 5, 7, ensaios de tração e dobramento.

13. **Contraprova** Em caso de um dos corpos-de-prova não atender a todas as especificações da norma, ensaios com mais seis corpos-de-prova deverão ser realizados. Caso algum destes corpos-de-prova não atenda a todas as especificações da norma, o lote deverá ser rejeitado.

5.1.2 Determinação do Módulo de Elasticidade do aço

5.1.3 Avaliação da relação tensão × deformação - Ensaio de Tração

A amostra de material a ser testada é constituída de uma barra reta de seção constante (comprimento L, diâmetro D e área de seção transversal A, na configuração inicial), semelhante á barra ilustrada na figura 26.

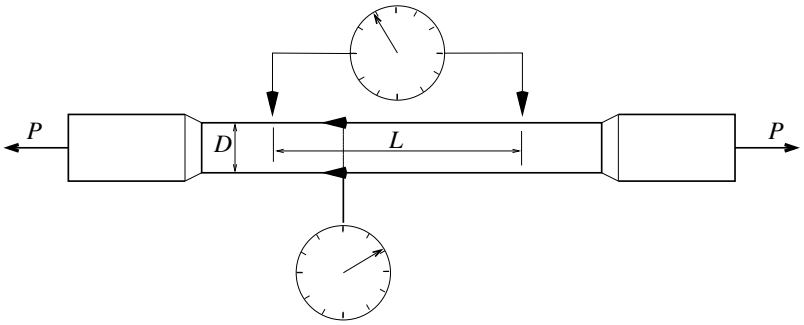
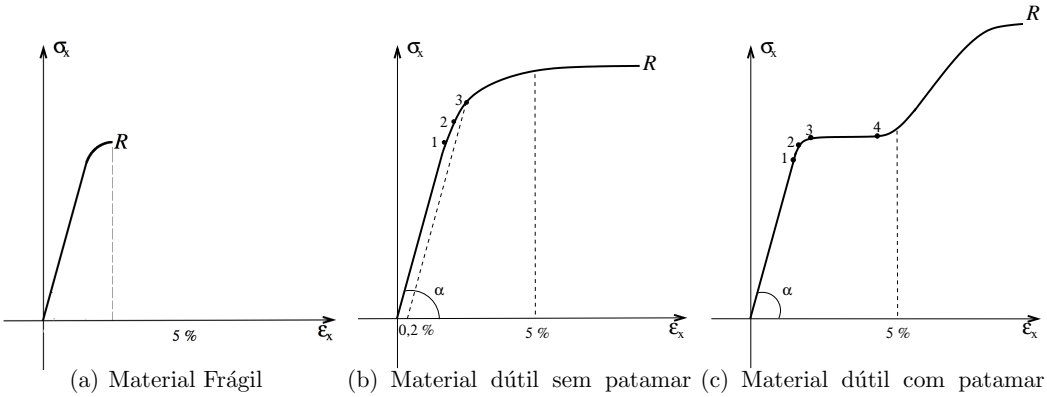


Figura 26: Corpo-de-prova de um ensaio de tração

O ensaio de tração consiste em aplicar ao CP uma carga P axial de tração que aumenta lenta e gradualmente (carga "estática"), medindo-se a carga P e as deformações até a ruptura do CP.

A forma do diagrama tensão *times* deformação depende do tipo de material. Existem materiais de comportamento linear, ou pelo menos com uma região linear (aço, alumínio), e de comportamento não-linear (maioria das borrachas). O nível de tensão a partir do qual o material deixa de ter comportamento linear é chamado de **limite de proporcionalidade** (ponto 1 - figuras 27(b,c)).

Dentre os materiais de comportamento linear, identificam-se 3 tipos mais comuns de diagramas tensão-deformação conforme os mostrados na figura 27.



(a) Material Frágil (b) Material dútil sem patamar de escoamento (c) Material dútil com patamar de escoamento

Figura 27: Exemplos de diagramas do ensaio de tração em materiais de comportamento linear

As principais características observadas nos diagramas da figura 27 são as seguintes:

- **(a) Material frágil** (concreto, vidro): A ruptura (ponto R) se dá para valores $\epsilon_x < 5$ %;

- **(b) Material dúctil sem patamar de escoamento definido** (aços especiais com alto teor de carbono). A ruptura (ponto R) se dá para valores $\epsilon_x >> 5$ % e o material não apresenta patamar de escoamento, onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante.

- **(c) Material dúctil com escoamento definido** (aços comuns, com baixo teor de carbono). A ruptura (ponto R) se dá para valores $\epsilon_x >> 5$ % e o material apresenta patamar de escoamento (trecho entre os pontos 3 e 4), onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante.

Para um CP em aço, pode-se verificar experimentalmente, no diagrama tensão-deformação, obtido num ensaio de tração, que existe um nível de tensão próximo ao limite de proporcionalidade, tal que, quando o CP é carregado acima deste nível, o mesmo não retorna a sua configuração original. Este ponto é chamado de **limite de elasticidade** (ponto 2 - figuras 27(b,c)). Após este ponto, passam a existir deformações permanentes ou plásticas.

No aço, os limites de elasticidade e proporcionalidade são muito próximos, tanto que normalmente não se faz muita distinção entre esses dois níveis de tensão. Materiais que possuem estes dois limites muito próximos são chamados de **materiais elásticos lineares**. Estes materiais, como é o caso do aço, serão os objetos de estudo deste curso.

O limite de elasticidade e o limite de proporcionalidade são difíceis de se determinar com precisão. Em razão disso, para uma definição mais simples do início do comportamento não-elástico, os engenheiros utilizam a tensão de escoamento ou ponto de escoamento. Em aços com baixo teor de carbono, este ponto é obtido diretamente da curva tensão-deformação (ver ponto 3 da figura 27(c)). Já para aços especiais com alto teor de carbono, este ponto é arbitrado como sendo a tensão que provoca uma pequena deformação residual de 0,2 % após o descarregamento.

Nesta etapa do ensaio de tração, o Módulo de Elasticidade de uma barra de aço CA 50 (diâmetro = 12,5 mm) será determinado utilizando-se um extensômetro mecânico.

Relatório - Controle de qualidade e determinação do Módulo de Elasticidade do Aço

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Cálculos referentes à planilha

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA - FAC. DE ENGENHARIA **LABORATÓRIO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS**										**REF. N°**			**CERTIFICADO M°**						
CLIENTE:										Recebido por					/ /				
OBRA:										Ensaiado por						/ /			
FORNECEDOR:										Calculado por							/ /		
MAT. ENSAIADO:	Φ	CATEG.	Φ	CATEG.	Φ	CATEG.	Φ	CATEG.		Obs: massa específica do aço = 7850 kg/m3									
( ) TRAÇÃO	( ) DOBRAMENTO				( ) DESBITOLAMENTO														
C P N°	N° da amostra	Diâmetro indicado (mm)	Massa (kg)	Comprimento (m)	Massa Linear (kg/m)	Massa Linear exata (kg/m)	Variação da Massa Linear exata (%)	Diâmetro Calculado (mm)	Área da Seção Calculada (mm2)	Lim. de escoamento		Lim. de Resistência		Alongamento			Dobram. 180°	Especificação da Amostra
										(kN)	(MPa)	(kN)	(MPa)	L_0 mm	L_f mm	%	RES.	

Figura 28:
35

O esboço do diagrama tensão $\times$ deformação da barra ensaiada até à ruptura, indicando os valores da tensão de escoamento (real ou convencional), da tensão de ruptura e da deformação na ruptura

Análise da aceitação (item 12 da norma). Avaliar cada item separadamente

Determinação do Módulo de Elasticidade do Aço

CA 50:

$L =$ _____mm; $\phi = 12{,}5$mm; $P_{escoamento} =$ _____;$P_{ruptura}$=_____; $\Delta L_{ruptura}$=_____;

P (kgf)	P (kN)	σ (MPa)	ΔL (mm)	ϵ_{ext} (%)
1000				
2000				
4000				
6000				

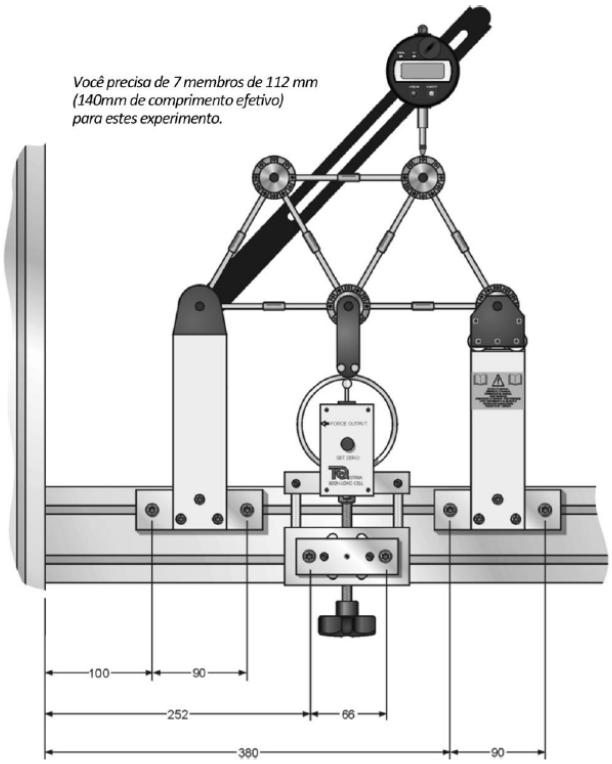
Cálculos referentes às planilhas

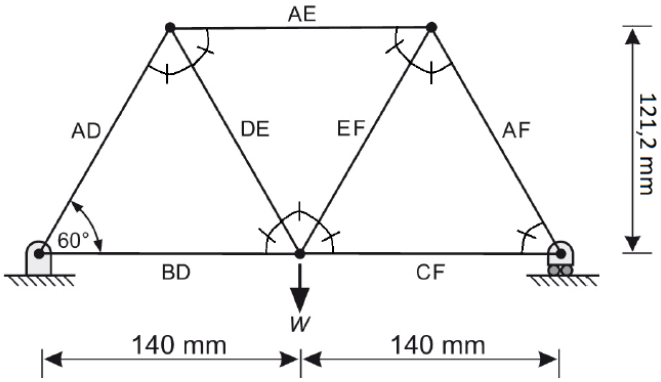
Cálculo das diferenças percentuais entre os Módulos de Elasticidade obtidos e o valor encontrado na literatura (norma NBR 6118)

Conclusões

5.2 Ensaio de Treliça

Treliças são estruturas onde cada um dos elementos estruturais que as compõem são barras submetidas apenas a esforços normais. É o caso típico de estruturas formadas por barras com ligações rotuladas e carregamentos nodais. No ensaio de hoje será analisada a treliça que segue, calculando-se as tensões normais teóricas nos seus elementos estruturais e comparando-os com seus respectivos valores experimentais medidos durante o experimento.





Relatório - Ensaio de Treliça

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Considere o diâmetro das barras igual a 5,65 mm.

Valores medidos de deformação e micro-strain (1 micro-strain = 10^{-6} strain)

Carga (N)	AD	AE	AF	BD	CF	DE	EF
100							
200							
300							

Calcule as tensões teóricas e compare com os respectivos resultados experimentais:

F = 100 N

Membro	Tensão Experimental	Tensão Teórica
AD		
AE		
AF		
BD		
CF		
DE		
EF		

F = 200 N

Membro	Tensão Experimental	Tensão Teórica
AD		
AE		
AF		
BD		
CF		
DE		
EF		

F = 300 N

Membro	Tensão Experimental	Tensão Teórica
AD		
AE		
AF		
BD		
CF		
DE		
EF		

Cálculos referentes às planilhas

Traçar um gráfico relacionando o carregamento (F) e as respectivas tensões (teóricas e experimentais) para a barra AD

Conclusões

5.3 Ensaio de compressão em pilarete de concreto armado

Este ensaio científico consiste em determinar as tensões normais nas armaduras longitudinais de um pilarete curto (não sujeito à flambagem).

Trata-se de um pilarete de base circular de 20cm de altura e 10cm de diâmetro. Este pilarete foi armado com 4 barras de 12,5mm de diâmetro e estribos de 6,3mm. As barras longitudinais foram instrumentadas, cada uma delas com um *strain-gage* para medida de deformação linear na direção longitudinal. As fotos da figura 29 mostram algumas etapas da confecção deste pilarete.

Figura 29: Etapas da confecção do pilarete de concreto armado.

Este pilarete será ensaiado à compressão até a carga de 60kN. O esquema de ensaio, bem como do pilarete instrumentado, são mostrados na figura 30.

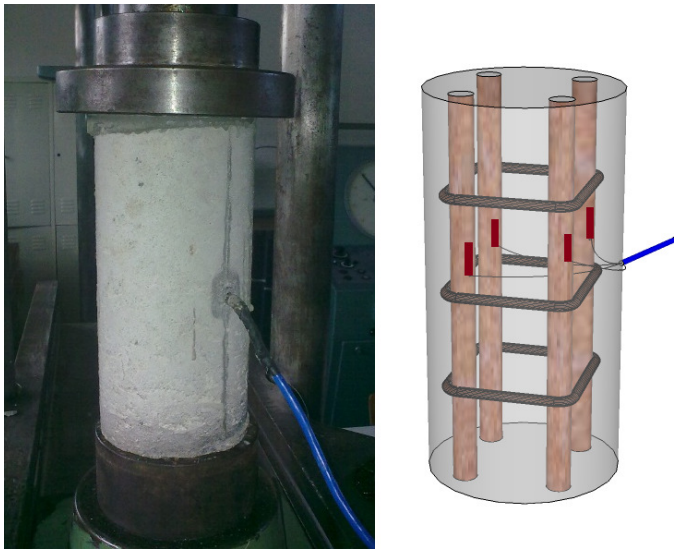


Figura 30: Esquema de ensaio e do pilarete instrumentado.

Para efeitos de cálculo considere:

- Módulo de Elasticidade do aço: 210GPa
- Módulo de Elasticidade do concreto: 15 GPa

Para este ensaio, considerando-se a teoria da Resistência dos Materiais, pode-se escrever:

$$\begin{cases} N_a + N_c &= -P \\ \dfrac{N_a L_a}{E_a A_a} &= \dfrac{N_c L_c}{E_c A_c} \end{cases} \tag{42}$$

onde: N, L, E, A são, respectivamente, o esforço normal, o comprimento, o Módulo de Elasticidade, a área (índice "a" para o aço e "c" para o concreto), e P a carga de compressão. Nas equações 42 tem-se uma equação de equilíbrio e uma equação de compatibilidade de deslocamentos.

Partindo-se dos dados disponíveis do ensaio, observa-se que as incógnitas das equações 42 são N_a e N_c. A solução deste sistema linear de duas incógnitas e duas equações fornece os valores de N_a e N_c que permitem o cálculo das tensões atuantes no concreto (σ_c) e no aço (σ_a):

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{N_a}{A_a} \\ \sigma_c &= \frac{N_c}{A_c} \end{aligned} \tag{43}$$

Sabendo-se que os *strain-gages* estão ligados em circuitos de 1/4 de ponte de Wheatstone com *gage-factor* igual a 2,12 e que a voltagem de alimentação é de 5V é possível medir as tensões nas barras de aço e compará-las com as tensões teóricas.

Relatório - Ensaio de compressão em pilarete de concreto armado

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Observe que os valores de deformação não são idênticos em todos os pontos monitorados. Isto se deve às imperfeições dos corpos-de-prova, erros inerentes à instrumentação, desníveis e também à dificuldade de se aplicar a carga uniformemente distribuída exatamente na direção longitudinal do pilarete. Para efeito de medidas de tensão através das medidas de deslocamentos, considere o valor médio dos 4 *strain-gages*.

P (kgf)	ΔE_1(mV)	ϵ_1 (%)	ΔE_2(mV)	ϵ_2 (%)	ΔE_3(mV)	ϵ_3 (%)	ΔE_4(mV)	ϵ_4 (%)
2000								
4000								
6000								

Cálculos da planilha

Tensões normais no aço e no concreto, obtidas das medições experimentais, para as cargas de 2000, 4000 e 6000 kgf

Tensões normais no aço e no concreto, obtidas da teoria da Resistência dos Materiais, para as cargas de 2000, 4000 e 6000 kgf

Calcule as diferenças percentuais entre os valores teóricos e experimentais

O cálculo teórico das tensões normais no aço e no concreto para a carga de 6000 kgf, obtido através da teoria da Resistência dos Materiais, caso o concreto usado fosse de melhor qualidade, com Módulo de Elasticidade igual a 25 GPa (apresentar os cálculos). Observe se houve aumento ou redução de tensões no aço e no concreto se comparado aos resultados teóricos do pilarete ensaiado.

Conclusões

5.4 Dureza

A dureza consiste numa medida da resistência de um material a uma deformação plástica localizada. A primeira escala usada para se quantificar a dureza foi a escala de Mohs, mostrada na figura 31. A Escala de Mohs quantifica a resistência que um determinado mineral oferece ao risco. O diamante risca o vidro, portanto, este é mais duro que o vidro. Esta escala foi criada em 1812 pelo mineralogista alemão Friedrich Mohs.

Figura 31: Escala de Mohs

Alguns parâmetros úteis para a avaliação da escala de Mohs:

Dureza	Objeto
2,5	Unha
3,0	Moeda de cobre
5,5	Lâmina do canivete
5,5 a 6	Vidro
7	Porcelana
9,1	Ponta de vídia

Essa classificação é adequada em alguns ramos da engenharia. Entretanto, para problemas de engenharia Civil e Mecânica, em que os metais são matérias primas em diversas situações, a escala de Mohs apresenta baixa resolução, pois a maioria dos metais apresenta durezas Mohs entre 4 e 8.

Assim, outras formas de determinação de dureza foram desenvolvidas. As mais usadas são baseadas na correlação entre as dimensões de impressões causadas por penetradores padronizados forçados contra a superfície do material a ser testado. Desta forma, quanto mais macio for o material, maior e mais profunda será a impressão e menor será o índice de dureza. Os ensaios de dureza são realizados frequentemente uma vez que são simples e baratos, parcialmente não destrutivos (o corpo de prova não é fraturado e nem deformado drasticamente) e permitem determinar outras propriedades do material. Os principais ensaios de dureza são:

- Dureza Brinnel
- Dureza Rockwell

- Dureza Vickers
- Dureza Janka

5.4.1 Dureza Brinnell - ABNT NBR NM ISO 6506-2:2010

É um dos tipos de dureza mais utilizados na área de engenharia, sendo simbolizada por HB. Consiste em comprimir lentamente uma esfera de aço de diâmetro $D = 2R$ sobre uma superfície plana, polida e limpa de um metal através de uma carga P, durante um tempo t. Essa compressão provocará uma impressão permanente no metal com formato de uma calota esférica, tendo um diâmetro $d = 2r$. A dureza Brinell é definida em N/mm^2 ou kgf/mm^2, como o quociente entre a carga aplicada e a área de contato (área superficial) A_c, a qual é relacionada com os valores D e d, conforme a expressão:

$$HB = \frac{F}{A_c} = \frac{F}{\pi D p} \tag{44}$$

A figura 32 mostra o esquema do ensaio.

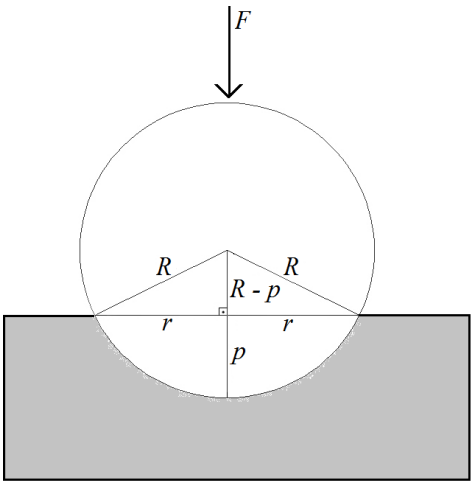


Figura 32: Esquema da dureza

De todos os termos da equação 44, apenas o valor de p (a profundidade da impressão) ainda não é conhecido. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura 32 tem-se:

$$\begin{aligned} R^2 &= (R-p)^2 + r^2 \\ R^2 &= R^2 - 2Rp + p^2 + r^2 \\ p^2 - 2Rp + r^2 &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

Resolvendo a equação de segundo grau:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2R \pm \sqrt{(2R)^2 - 4r^2}}{2} \\ p &= R \pm \sqrt{R^2 - r^2} \\ p &= R - \sqrt{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

que pode ser reescrita em função de D e d:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \\
p &= \frac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{2} \qquad (46)
\end{aligned}
$$

Levando o valor de p na equação 44, chega-se finalmente a:

$$
HB = \frac{2F}{\pi D \left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} \qquad (47)
$$

O ensaio padronizado, proposto por Brinell, é realizado com carga de 3.000 kgf e esfera de 10 mm de diâmetro, de aço temperado. Porém, usando cargas e esferas diferentes, é possível chegar ao mesmo valor de dureza, desde que se observem algumas condições:

- A carga será determinada de tal modo que o diâmetro de impressão d se situe no intervalo de 0,25 a 0,5 do diâmetro da esfera D. A impressão será considerada ideal se o valor de d ficar na média entre os dois valores anteriores, ou seja, 0,375 mm.

- Para obter um diâmetro de impressão dentro do intervalo citado no item anterior, deve-se manter constante a relação entre a carga (F) e o diâmetro ao quadrado da esfera do penetrador (D^2) , ou seja, a relação F/D^2 é igual a uma constante chamada fator de carga. Para padronizar o ensaio, foram fixados valores de fatores de carga de acordo com a faixa de dureza e o tipo de material. O quadro a seguir mostra os principais fatores de carga utilizados e respectivas faixas de dureza e indicações.

$\frac{F}{D^2}$	DUREZA	MATERIAIS
30	90 a 415 HB	Aços e ferros fundidos
10	30 a 140 HB	Cobre, alumínio e suas ligas mais duras
5	15 a 70 HB	Ligas antifricção, cobre, alumínio e suas ligas mais moles
2,5	até 30 HB	Chumbo, estanho, antimônio e metais-patente

Figura 33: Fatores de Carga

O número de dureza Brinell deve ser seguido pelo símbolo HB, sem qualquer sufixo, sempre que se tratar do ensaio padronizado, com aplicação da carga durante 15 segundos. Em outras condições, o símbolo HB recebe um sufixo formado por números que indicam as condições específicas do teste, na seguinte ordem: diâmetro da esfera, carga e tempo de aplicação da carga. Exemplificando: Um valor de dureza Brinell 85, medido com uma esfera de 10 mm de diâmetro e uma carga de 1.000 kgf, aplicada por 30 segundos, é representado da seguinte forma: $85HB$ 10/1000/30.

A medida do diâmetro da calota (d) deve ser obtida pela média de duas leituras obtidas a $90^{\underline{o}}$ uma da outra, e de maneira geral não pode haver diferença maior que 0,06 mm entre as duas leituras, para esferas de 10 mm.

O ensaio Brinell é usado especialmente para avaliação de dureza de metais não ferrosos, ferro fundido, aço, produtos siderúrgicos em geral e de peças não temperadas. É feito em equipamento de fácil operação. Por outro lado, o uso deste ensaio é limitado pela esfera

empregada. Usando-se esferas de aço temperado só é possível medir dureza até 500 HB, pois durezas maiores danificariam a esfera.

Alguns estudos científicos buscam relacionar valores de dureza à resistência à tração dos materiais. Após diversos ensaios realizados no LRM da UFJF, propõe-se a fórmula empírica para a avaliação da tensão de escoamento de aço estrutural:

$$\sigma_e(\text{MPA}) = 2,6 \text{ HB} \tag{48}$$

5.4.2 Dureza Rockwell - ABNT NBR NM ISO 6508-1:2008

Simbolizada por HR. Difere fundamentalmente do ensaio de dureza Brinell pelo fato de eliminar o tempo necessário para medição de qualquer dimensão da impressão causada, pois o resultado pode ser lido diretamente na máquina de ensaio. Os penetradores pequenos podem ser cones de diamante com 120° de conicidade ou esferas de aço temperado.

O penetrador é em primeiro lugar aplicado à superfície do material de ensaio sob uma carga secundária de 10 kgf (pré-carga), sendo o objetivo penetrar nas imperfeições da superfície da peça e vencer as deformações elásticas. Após a pré-carga de 10 kgf ser aplicada, um braço é acionado para aplicar a carga principal. Um mostrador graduado na máquina indica em escalas de dureza Rockwell (A, B, C etc.), baseadas na diferença da profundidade de penetração causada pelas cargas principal e secundária. O número obtido de dureza é adimensional.

O ensaio pode ser realizado em dois tipos de máquina que se diferenciam pela precisão dos componentes, tendo ambas a mesma técnica de operação: máquina padrão para medida de dureza Rockwell comum e dureza Rockwell superficial. A máquina padrão mede a dureza Rockwell normal é indicada para avaliação de dureza em geral. A máquina mais precisa mede a dureza Rockwell superficial, e é indicada para avaliação de dureza em folhas finas ou lâminas, ou camadas superficiais de materiais.

Nos ensaios de dureza Rockwell normal utiliza-se uma pré-carga de 10 kgf e a carga maior pode ser de 60, 100 ou 150 kgf. Nos ensaios de dureza Rockwell superficial a pré-carga é de 3 kgf e a carga maior pode ser de 15, 30 ou 45 kgf.

Estas escalas não têm relação entre si. Por isso, não faz sentido comparar a dureza de materiais submetidos a ensaio de dureza Rockwell utilizando escalas diferentes. Ou seja, um material ensaiado numa escala só pode ser comparado a outro material ensaiado na mesma escala. O quadro da figura 34 mostra as escalas mais utilizadas nos processos industriais.

O número de dureza Rockwell deve ser seguido pelo símbolo HR, com um sufixo que indique a escala utilizada. Veja, por exemplo, a interpretação do resultado $64HRC$:

- 64 é o valor de dureza obtido no ensaio;
- HR indica que se trata de ensaio de dureza Rockwell;
- a última letra, no exemplo C, indica qual a escala empregada.

A profundidade que o penetrador vai atingir durante o ensaio é importante para definir a espessura mínima do corpo de prova. De modo geral, a espessura mínima do corpo de prova deve ser 17 vezes a profundidade atingida pelo penetrador. Entretanto, não há meios de medir a profundidade exata atingida pelo penetrador no ensaio de dureza Rockwell.

É possível obter a medida aproximada desta profundidade (p), a partir do valor de dureza indicado na escala da máquina de ensaio, utilizando as fórmulas a seguir:

- Penetrador de diamante: p (mm) = 0,002(100 - HR)

ESCALA DE DUREZA ROCKWELL NORMAL E APLICAÇÕES				
ESCALA	CARGA MAIOR	PENETRADOR	FAIXA DE UTILIZAÇÃO	CAMPO DE APLICAÇÃO
A	60	diamante cone 120°	20 a 88 HRA	Carbonetos, folhas de aço com fina camada superficial endurecida
C	150	diamante cone 120°	20 a 70 HRC	Aço, titânio, aços com camada endurecida profunda, materiais com HRB>100
D	100	diamante cone 120°	40 a 77 HRD	Chapas finas de aço com média camada endurecida
B	100	esfera aço 1,5875 mm	20 a 100 HRB	Ligas de cobre, aços brandos, ligas de alumínio, ferro maleável etc.
E	100	esfera aço 3,175 mm	70 a 100 HRE	Ferro fundido, ligas de alumínio e de magnésio
F	60	esfera aço 1,5875 mm	60 a 100 HRF	Ligas de cobre recozidas, folhas finas de metais moles
G	150	esfera aço 1,5875 mm	30 a 94 HRG	Ferro maleável, ligas de cobre-níquel-zinco e de cobre-níquel
H	60	esfera aço 3,175 mm	80 a 100 HRH	Alumínio, zinco, chumbo
K	150	esfera aço 3,175 mm	40 a 100 HRK	Metais de mancais e outros muito moles ou finos

Figura 34: Escalas de dureza rockwell

- Penetrador esférico: p (mm) = 0,002(130 - HR)

Por exemplo, a profundidade aproximada de penetração que será atingida ao ensaiar um material com dureza estimada de $40HRC$ é de 0,12 mm.(Rockwell normal - penetrador de diamante).

O quadro da figura 35 apresenta de forma aproximada algumas relações entre as durezas até aqui estudadas:

5.4.3 Dureza Vickers - ABNT NBR NM ISO 6507-1:2008

O ensaio de dureza Vickers, simbolizada por HV, também emprega o princípio de penetração. O método é baseado no princípio de que as impressões provocadas pelo penetrador possuem similaridade geométrica, independentemente da carga aplicada. Assim, cargas de diversas magnitudes são aplicadas na superfície plana da amostra, dependendo da dureza a ser medida. O Número Vickers (HV) é então determinado pela razão entre a carga e a área superficial da impressão, sendo o penetrador de formato piramidal.

A Dureza Vickers é dada por:

$$HV = \frac{F}{A_s} \tag{49}$$

onde A_s é a área lateral da pirâmide da figura 36.

No ensaio para determinação da dureza Vickers a leitura efetuada é da diagonal da base da pirâmide d. Desta forma é necessário calcular a área A_s em função de d. O lado a da base da pirâmide é dado por:

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{50}$$

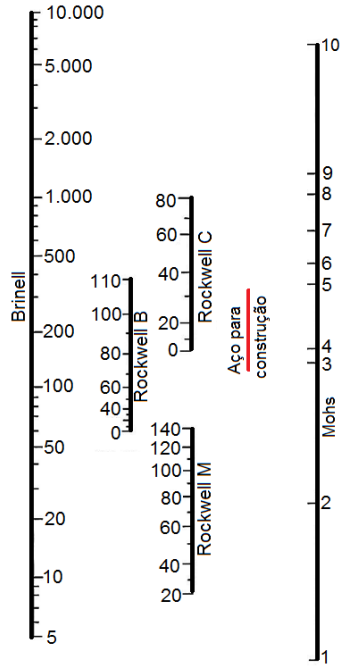


Figura 35: Estimativas de relações entre as durezas

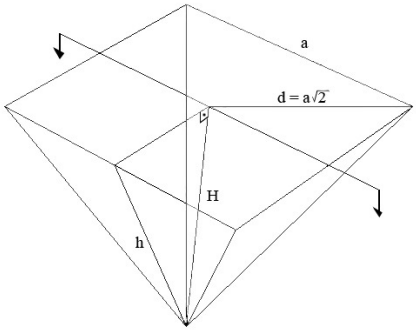


Figura 36: Geometria da região penetrada no corpo-de-prova

Como a geometria do penetrador é conhecida, pode-se analisar o corte indicado na figura 36, onde o plano de corte contém a altura da pirâmide e seu apótema, chegando-se a:

$$h \cos \alpha = \frac{a}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2 \cos \alpha} = \frac{d}{2\sqrt{2} \cos \alpha} \tag{51}$$

A área de contato (A_s) do penetrador com o corpo de prova coincide com a área lateral da pirâmide:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{4ah}{2} = \frac{4d^2}{4\sqrt{2}\sqrt{2} \cos \alpha} \\ A_s &= 2.\frac{d^2}{4 \cos \alpha} = \frac{d^2}{2 \cos \alpha} \end{aligned}$$

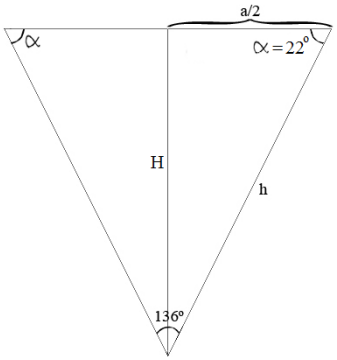


Figura 37: Corte na região penetrada no corpo de prova contendo o apótema (h) e a altura da pirâmide (H)

$$A_s = \frac{d^2}{2\cos 22^o} = \frac{d^2}{1,8544}$$

logo:

$$HV = \frac{F}{A_s} = \frac{1,8544F}{d^2} \tag{52}$$

A dureza Vickers é representada pelo valor de dureza, seguido do símbolo HV e de um número que indica o valor da carga aplicada. A representação 440 HV indica que o valor da dureza Vickers

Neste método, ao contrário do que ocorre no Brinell, as cargas podem ser de qualquer valor, pois as impressões são sempre proporcionais à carga, para um mesmo material. Deste modo, o valor de dureza será o mesmo, independentemente da carga utilizada. Por uma questão de padronização, as cargas recomendadas são: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 120 kgf. Para cargas muito altas (acima de 120 kgf), ao invés do penetrador de pirâmide de diamante pode-se também usar esferas de aço temperado de 1 ou 2 mm de diâmetro na mesma máquina.

Por ser dependente da área a escala Vickers varia rapidamente quando comparada a Rockwell, por exemplo: 68 HRC 940 HV e 60 HRC 697 HV.

O ensaio Vickers fornece uma escala contínua de dureza, medindo todas as gamas de valores de dureza numa única escala. As impressões são extremamente pequenas e, na maioria dos casos, não inutilizam as peças, mesmo as acabadas. O penetrador, por ser de diamante, é praticamente indeformável. Este ensaio aplica-se a materiais de qualquer espessura, e pode também ser usado para medir durezas superficiais.

5.4.4 Dureza Janka - ABNT NBR 7190:1997

A dureza Janka(f_H) É uma variação do método Brinell, usada em geral para madeiras. A dureza Janka é definida pela força necessária para penetrar, até a metade do diâmetro, uma esfera de aço de diâmetro 11,28 mm (área de contato da penetração de 1 cm^2). O carregamento deve ser monotônico crescente aplicado até que a esfera penetre a uma profundidade igual ao seu raio (5,64 mm), em um período de pelo menos um minuto (1 mm a cada 10 segundos).

A Dureza Janka é dada por:

$$f_H = \frac{F_{max}}{A_{sd}} \tag{53}$$

Observações:

1. O corpo-de-prova deve ter forma prismática de seção quadrada de 5,0 cm e comprimento ao longo das fibras de 15,0 cm e deve ser fabricado com seus lados menores perpendiculares às direções preferenciais da madeira.

2. A dureza da madeira é medida na direção paralela às fibras (fH_0) e/ou na direção normal às fibras (fH_{90}).

3. Para o cálculo da dureza usar equação 1 deste texto, extraído da NBR 7190.

Para se ter uma noção da magnitude de dureza Janka, é reproduzido na figura 38 um quadro com comparação entre diversas espécies de madeiras:

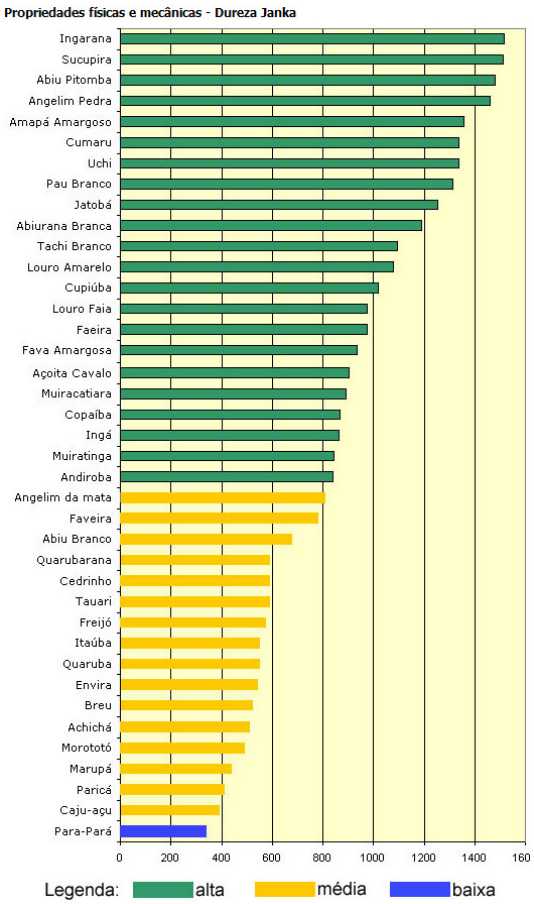


Figura 38: Comparação de durezas Janka - fonte:http://www.remade.com.br

5.4.5 Os testes de dureza

Serão realizados testes de dureza em aço (durezas Brinell, Rockwell e Vickers) e madeira (Janka). Os testes em aço serão realizados em uma amostra preparada de aço para concreto armado CA 50. Já o teste de dureza Janka será realizado em CPs de madeira devidamente preparados.

Relatório - Dureza

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____

_____

_____

_____

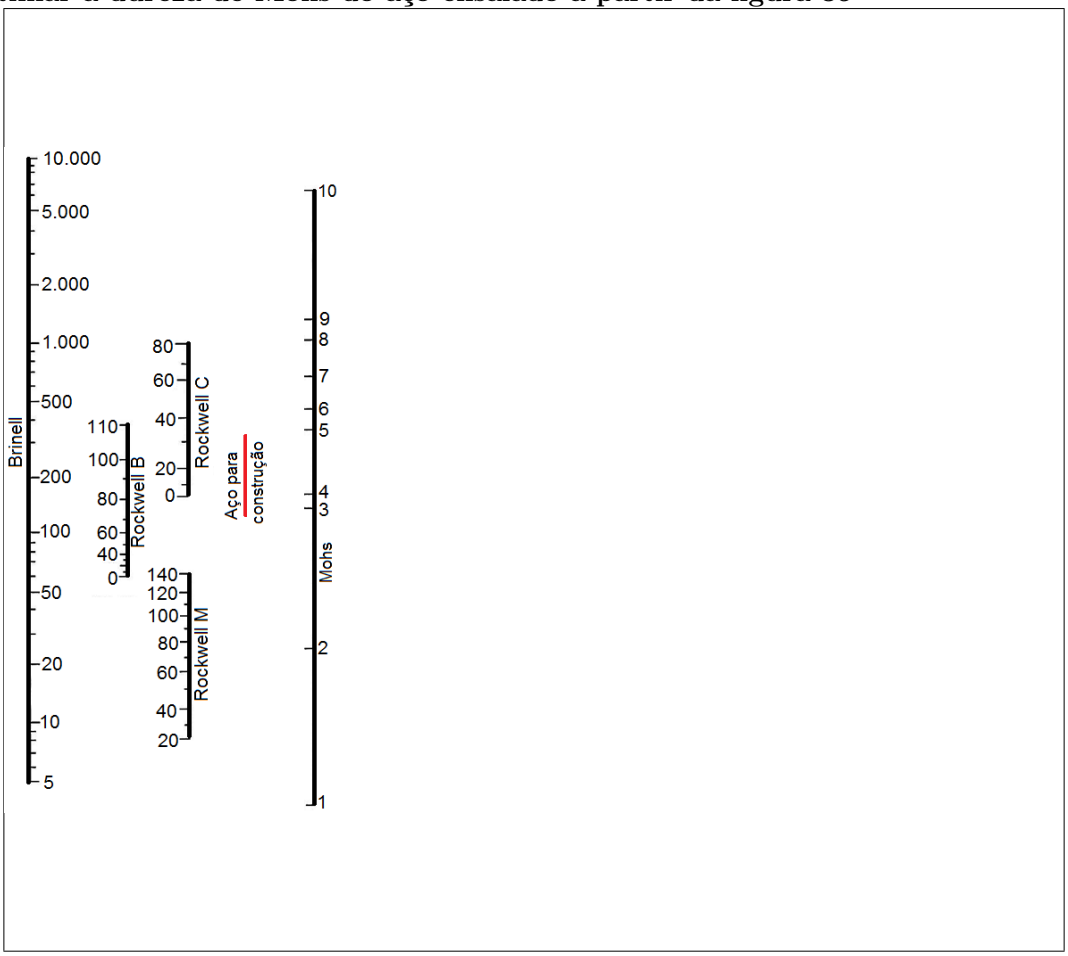
Preencha as tabelas que seguem

ϕ_1 (mm)	ϕ_2 (mm)	F (kgf)	HB	HRC	d_1 (mm)	d_2 (mm)	F (kgf)	HV

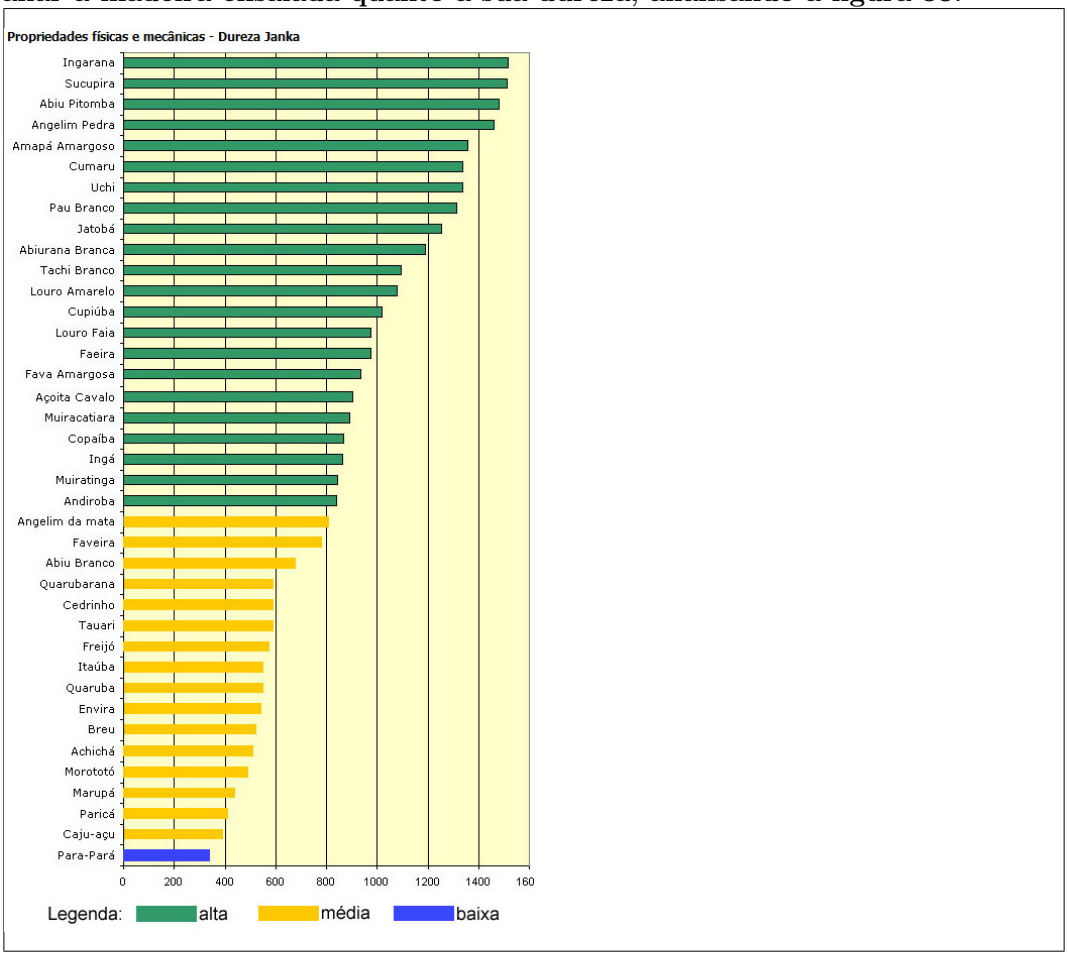
f^1_{H90}	f^2_{H90}	f^3_{H90}	f^4_{H90}	f^5_{H90}	f^6_{H90}	f_{H90}

Cálculos das planilhas

Estimar a dureza de Mohs do aço ensaiado a partir da figura 35



Avaliar a madeira ensaiada quanto à sua dureza, analisando a figura 38.



Conclusões

5.5 Ensaio de perfil metálico submetido à flexão

Este ensaio científico consiste em determinar as tensões normais em um perfil I de aço, submetido à flexão simples.

Trata-se de uma viga com seção transversal I bi-apoiada e solicitada por uma carga concentrada no meio do vão e instrumenta com 4 *strain-gages*. A foto da figura 39 mostra a viga deste ensaio.

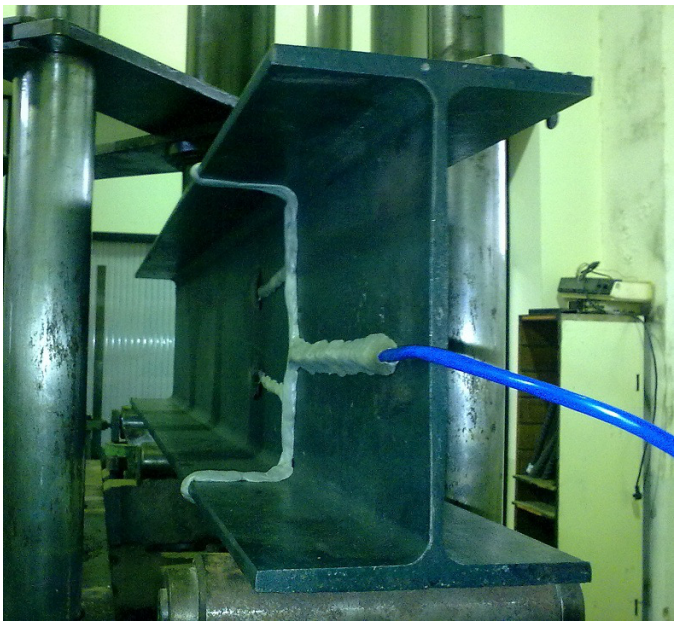


Figura 39: Foto do perfil metálico.

Para melhor ilustrar o ensaio, segue o esquema da viga ensaiada.

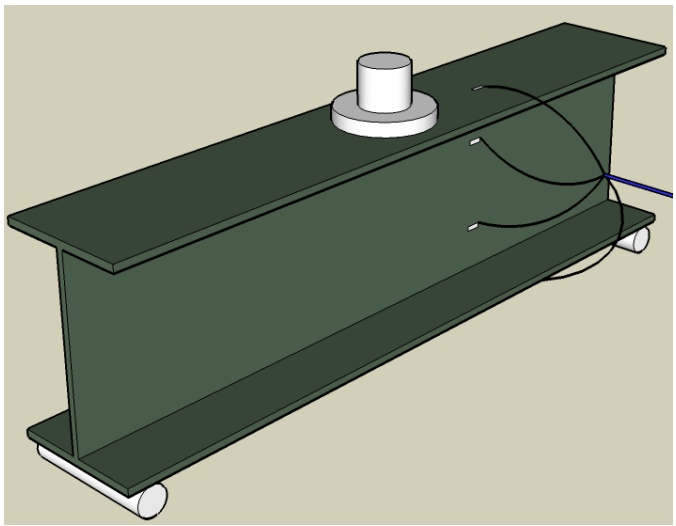


Figura 40: Esquema do ensaio.

A distância entre os apoios é de 1,0m e o ponto central de carregamento está no meio

do vão. Os *strain-gages* foram colados em posições conforme mostrado na figura 41. Esta figura também mostra alguns detalhes da seção transversal do perfil que tem 6,5 mm de espessura da alma, 10 mm de espessura da mesa, altura $h = 206$ mm e base $b = 135$ mm.

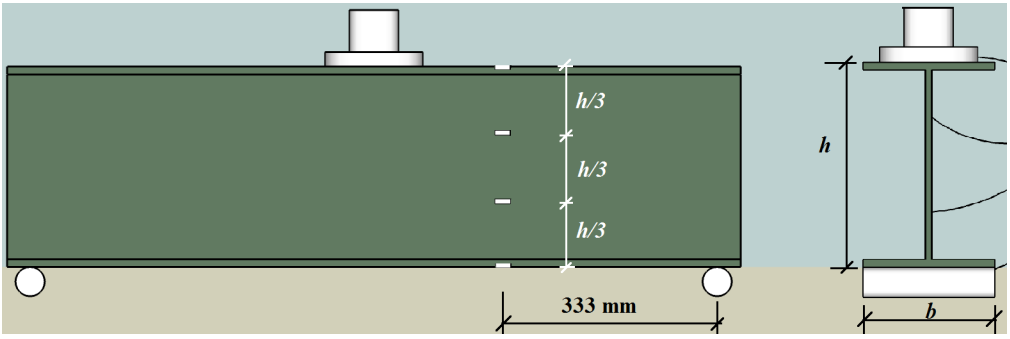


Figura 41: Posições dos *strain-gages*.

5.5.1 Estudo Teórico

Para a figura 42 que segue, tem-se de forma simplificada:

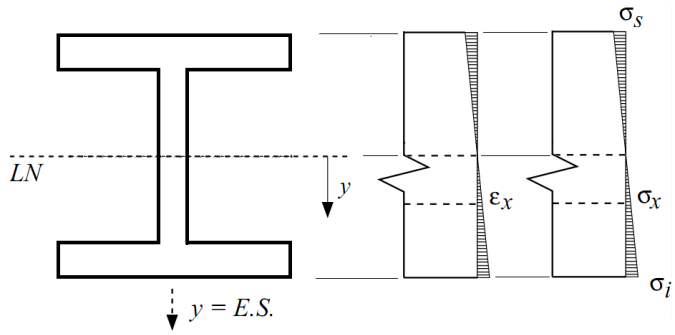


Figura 42: Diagramas de deformação longitudinal e tensões normais

$$\epsilon_x = Ky. \tag{54}$$

Aplicando a Lei de Hooke:

$$\sigma = E\epsilon_x = EKy. \tag{55}$$

Chamando de $k = EK$, tem-se então:

$$\sigma = ky. \tag{56}$$

Para uma barra submetida a flexão pura ou simples, tem-se que o esforço normal é nulo, ou seja:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_x dA &= 0 \\ \int_A kydA &= 0 \\ \int_A ydA &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

sendo A a área da seção transversal da viga.

A equação 57 permite concluir que a linha neutra passa pelo CG da seção transversal da viga.

Aplicando a definição de momento fletor:

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \tag{58}$$

E aplicando equação 56, tem-se então:

$$M_z = \int_A k y^2 dA = k \int_A y^2 dA = k I_z \tag{59}$$

Desta forma, o valor de k fica:

$$k = \frac{M_z}{Iz}, \tag{60}$$

e chega-se finalmente a:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \tag{61}$$

De posse dos valores teóricos é possível comparar com os valores obtidos dos ensaios.

Relatório - Ensaio de perfil metálico submetido à flexão

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Sabendo-se que os *strain-gages* estão ligados em circuitos de 1/4 de ponte de Wheatstone com *gage-factor* igual a 2,12 e que a voltagem de alimentação é de 5V, preencha a tabela que segue

P (kgf)	ΔE_1(mV)	ϵ_1 (%)	ΔE_2(mV)	ϵ_2 (%)	ΔE_3(mV)	ϵ_3 (%)	ΔE_4(mV)	ϵ_4 (%)
6000								
8000								
10000								

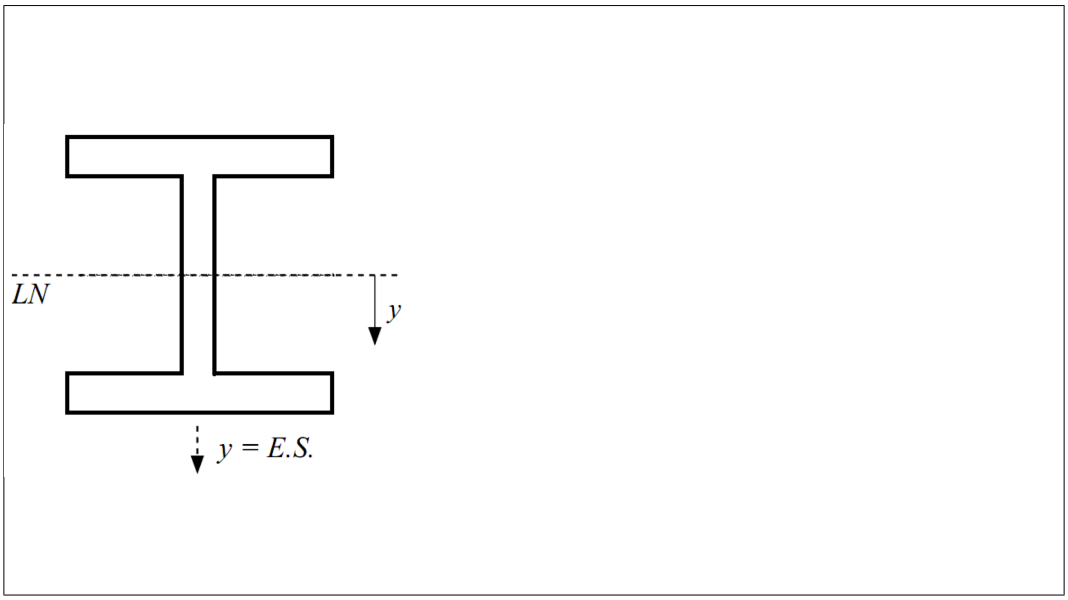
Cálculos da planilha

Calcule as tensões normais devidas à flexão, obtidas das medições experimentais, para as cargas de 6000, 8000 e 10000 kgf

Calcule as tensões normais devidas à flexão, obtidas da teoria (Equações da Resistência dos Materiais), para as cargas de 6000, 8000 e 10000 kgf

Calcule as diferenças percentuais entre os valores teóricos e experimentais

Trace, numa mesma figura, os gráficos que descrevem a variação das tensões normais ao longo da altura do perfil ensaiado para os valores teóricos e experimentais



Conclusões

5.6 Ensaio em Viga de Concreto Armado

Este ensaio científico consiste em determinar as tensões normais na armadura longitudinal de uma viga de concreto armado submetida à flexão simples.

Trata-se de uma viga com seção transversal retangular bi-apoiada, solicitada por uma carga concentrada no meio do vão e instrumenta com *strain-gages*. A foto da figura 43 mostra algumas fases de confecção da viga deste ensaio.

Figura 43: Fotos da confecção da viga de concreto armado.

Para melhor ilustrar o ensaio, segue o esquema da viga ensaiada.

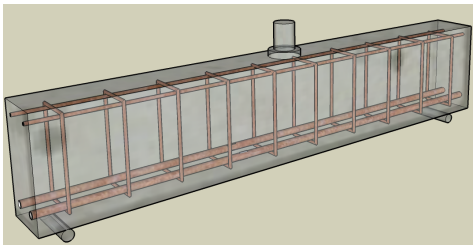


Figura 44: Esquema do ensaio.

A viga possui 4 *strain-gages* ligados em 1/4 de ponte, todos colados na armadura longitudinal: duas barras de 12.5 mm de diâmetro. O posicionamento dos *strain-gages* é mostrado na figura 45, onde também são apresentadas as dimensões da seção transversal da viga. Conforme se observa nesta figura, foram colados 4 *strain-gages* no meio do vão ($L = 600$ mm).

Esta figura também mostra alguns detalhes da seção transversal que tem 180 mm de altura útil e 100 mm de largura.

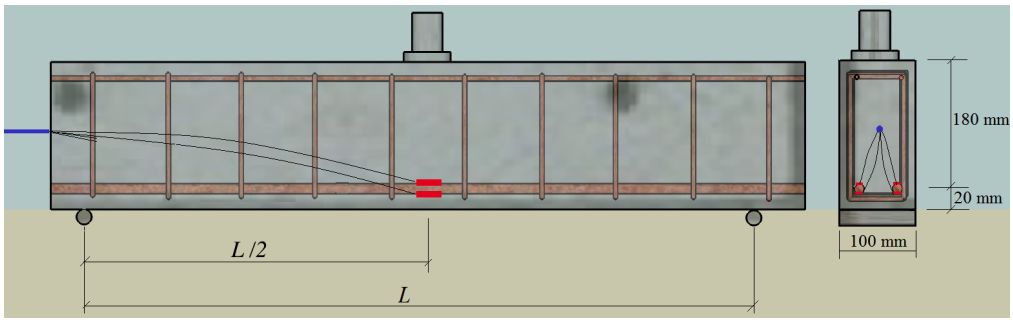


Figura 45: Posicionamento dos *strain-gages* e seção transversal

5.6.1 Estudo Teórico

Seja a figura 46 que segue, onde são mostrados o perfil do sólido de tensões normais na seção transversal da viga, bem como o binário formado pelas resultantes de tração e compressão:

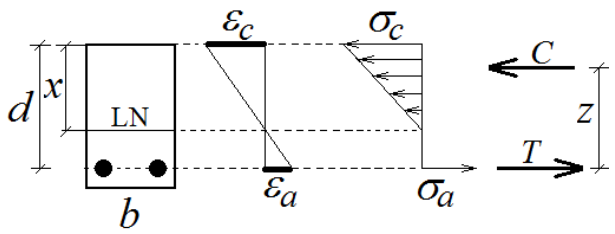


Figura 46: .

Pode-se escrever então que:

$$z = d - \frac{x}{3} \tag{62}$$
$$T = \sigma_a A_a \tag{63}$$
$$C = \frac{x\sigma_c}{2} b \tag{64}$$

Como o esforço normal é nulo, o somatório de força na horizontal deve ser zero:

$$\begin{aligned} T &= C \\ \sigma_a A_a &= \frac{x\sigma_c}{2} b \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_c} &= \frac{bx}{2A_a} \end{aligned} \tag{65}$$

Já o somatório de momentos na seção é equilibrado pelo fletor (M_z) atuante:

$$\begin{aligned} M_z &= Tz = Cz \\ M_z &= \sigma_a A_a \left(d - \frac{x}{3}\right) = \frac{x\sigma_c}{2} b \left(d - \frac{x}{3}\right) \end{aligned} \tag{66}$$

Pela hipótese das seções planas na flexão, pode-se escrever:

$$\frac{\epsilon_a}{\epsilon_c} = \frac{d-x}{x} \tag{67}$$

e pelas lei de Hooke:

$$\frac{\frac{\sigma_a}{E_a}}{\frac{\sigma_c}{E_c}} = \frac{d-x}{x} \tag{68}$$

Chamando a razão $\frac{E_a}{E_c} = n$, a equação anterior pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c} = n\frac{(d-x)}{x} \tag{69}$$

Igualando as equações 69 e 65, tem-se:

$$\frac{bx}{2A_a} = n\frac{(d-x)}{x} \tag{70}$$

A equação 70 pode ser reescrita, considerando o valor de $a = \frac{b}{2A_a n}$, levando a:

$$ax^2 + x - d = 0 \tag{71}$$

A raiz $0 < x < d$ da equação 71, define a posição da linha neutra. De posse do valor de x, do momento fletor atuante e e das demais propriedades geométricas da viga, pode-se voltar nas equações 66 e se determinar as tensões no aço e no concreto.

De posse dos valores teóricos é possível comparar com os valores obtidos dos ensaios.

Relatório - Ensaio em viga de concreto armado

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Sabendo-se que os *strain-gages* estão ligados em circuitos de 1/4 de ponte de Wheatstone com *gage-factor* igual a 2,12 e que a voltagem de alimentação é de 5V, preencha as tabelas que seguem

P (tf)	ΔE_1(mV)	ϵ_1 (%)	ΔE_2(mV)	ϵ_2 (%)	ΔE_3(mV)	ϵ_3 (%)	ΔE_4(mV)	ϵ_4 (%)
2								
3								

Cálculos da planilha

Calcule as tensões normais devidas à flexão, obtidas das medições experimentais, para as cargas de 2 tf e 3 tf. Para este item, tomar média das leituras

Calcule as tensões normais devidas à flexão, obtidas da teoria (Equações da Resistência dos Materiais), para as cargas de 2 tf e 3 tf

Calcule as diferenças percentuais entre os valores teóricos e experimentais

Conclusões

5.7 Determinação de Propriedades Dinâmicas de Estruturas

5.7.1 Introdução

A análise dinâmica pode ser vista como uma abordagem mais abrangente da análise estrutural, uma vez que considera a variação do carregamento ao longo do tempo.

Existem duas diferenças básicas entre um problema estático e um dinâmico. A primeira refere-se ao fato de que o carregamento num problema dinâmico varia com o tempo. A segunda e mais importante diferença é o aparecimento das forças inerciais que são contrárias à aceleração.

É importante ressaltar que um problema dinâmico não possui uma solução única como um problema estático, ele apresenta uma sucessão de soluções correspondentes ao tempo de interesse do problema.

Quando usar a análise dinâmica?

Em geral se as forças inerciais representam uma parcela significativa do total do carregamento equilibrado pelas forças elásticas internas da estrutura, então o caráter dinâmico do problema deve ser levado em consideração na sua solução. Por outro lado se os movimentos são pouco acelerados e as forças inerciais são consideravelmente pequenas, a resposta do problema pode ser encontrado através de procedimentos da análise estrutural estática, mesmo que o carregamento e a resposta variem com o tempo.

5.7.2 Análise de um Sistema com um Grau de Liberdade

As propriedades físicas essenciais de um sistema estrutural elástico ou mecânico sujeito a uma fonte externa de excitação ou carregamento dinâmico são: massa, propriedades elásticas (flexibilidade ou rigidez) e o amortecimento ou perda de energia mecânica.

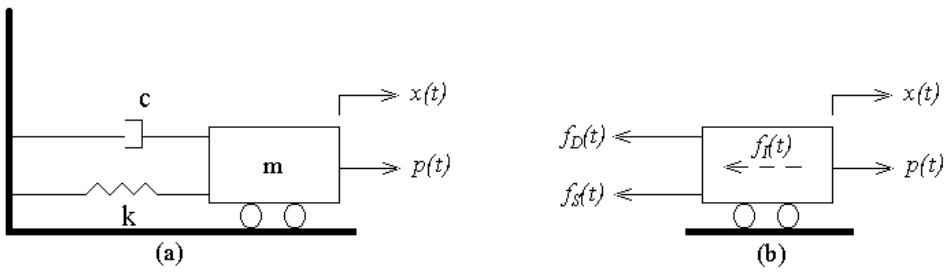


Figura 47: sistema de um grau de liberdade: (a) componentes básicas; (b) diagrama de corpo livre. Na figura k é rigidez da mola; c a constante de amortecimento viscoso (proporcional à velocidade); m é a massa do sistema; $x(t)$ é o deslocamento do bloco e $p(t)$ é a força aplicada.

A equação de movimento de um sistema como o mostrado na figura anterior é obtida diretamente a partir da expressão de equilíbrio de todas as forças atuantes no sistema.

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \tag{72}$$

onde $f_I(t) = m\ddot{x}$ é a força inercial, $f_D(t) = c\dot{x}$ é a força de amortecimento e $f_S(t) = kx$ é a força elástica. Assim:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \tag{73}$$

Considerando-se que a força aplicada $p(t)$ é nula tem-se um sistema em vibrações livres e a sua equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{74}$$

A solução dessa equação, para sistemas pouco amortecidos e partindo do repouso pode ser aproximada por:

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t)e^{-\xi\omega t} \tag{75}$$

onde $x(0)$ é o deslocamento inicial; ω é a frequência natural do sistema; e ξ é a taxa de amortecimento.

Caso ξ fosse igual a 100%, não há oscilação no sistema. Na prática $\xi < 10\%$, sendo comum em estruturas valores de taxa de amortecimento inferiores a 4%. A resposta típica de um sistema com amortecimento $\xi < 100\%$ está graficamente representada na figura 48.

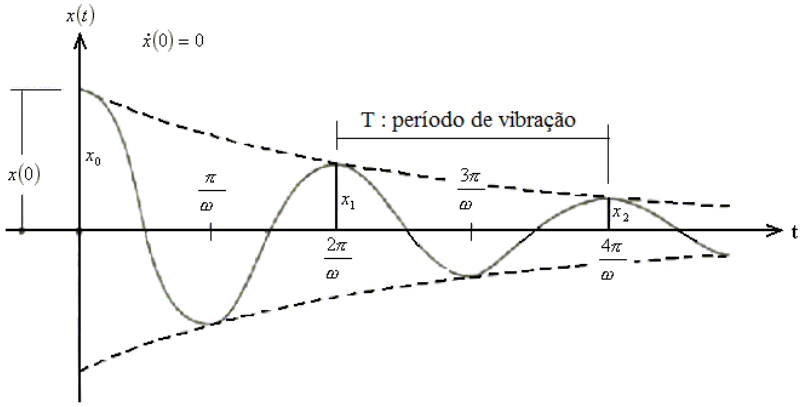


Figura 48: Resposta de vibrações livres de um sistema sub-crítico.

Uma maneira usual de se aproximar a taxa de amortecimento ξ é:

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi}\ln\frac{x_1}{x_2} \tag{76}$$

Como se pode observar, um sistema de um grau de liberdade em vibrações livres partindo do repouso, pode ser modelado a partir do conhecimento de 3 parâmetros:

- Frequência Natural: ω;
- Taxa de Amortecimento: ξ; e
- Deslocamento Inicial: $x(0)$

5.7.3 Objetivo Principal do Ensaio

Avaliar as características dinâmicas de uma viga engastada (haste) e livre a partir de um ensaio experimental onde se um deslocamento inicial é imposto, a haste parte do repouso e vibra livremente.

Relatório - Determinação de Propriedades Dinâmicas de Estruturas

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Apresente uma figura com a resposta em vibrações livres da estrutura ensaiada, onde serão assinalados os períodos de vibração em três posições distintas do gráfico, bem como o deslocamento inicial da viga

Calcule a frequência natural de vibração a partir dos 3 períodos de vibração identificados no item anterior. $T = 1/f$

Calcule a taxa de amortecimento a partir dos 3 períodos de vibração identificados no item anterior. (equação 76)

Apresente uma outra figura onde deverão constar dois gráficos: O gráfico do primeiro item e o gráfico da equação 75 com os valores de deslocamento inicial, frequência natural e taxa de amortecimento iguais aos calculados nos itens anteriores

Conclusões

5.8 Ensaio de impacto com Pêndulo Charpy

fontes:

`http://www.cimm.com.br/portal/material_didatico\\`
`http://www.guiametal.com.br/uploads/pdf/ensaio-de-impacto-charpy.pdf`

5.8.1 Introdução

Por mais de um século, o teste de impacto Charpy tem sido empregado como um teste válido para avaliar a tenacidade ao impacto de um material. Na configuração original, mede-se a energia consumida para promover a fratura de um corpo-de-prova entalhado com uma seção transversal de $80mm^2$.

Muitos aços apresentam pequenos valores de energia a baixas temperaturas, as quais se elevam a medida que a temperatura aumenta, em um regime de transição, até atingir um "plateau" para altas temperaturas. Uma operação segura de um componente ou estrutura somente é possível se a temperatura de operação estiver acima do regime de transição. Portanto, define-se a temperatura de transição como sendo aquela em que o material passa de um comportamento dúctil (fratura dúctil) para um comportamento frágil (fratura frágil). Assim como existem os tipos de fratura, existem os mecanismos de fratura, isto é, dúctil e frágil, de forma que o mecanismo de fratura dúctil consome uma grande quantidade de energia (ver Figuras 49 e 50), enquanto que o mecanismo frágil consome uma pequena quantidade de energia.

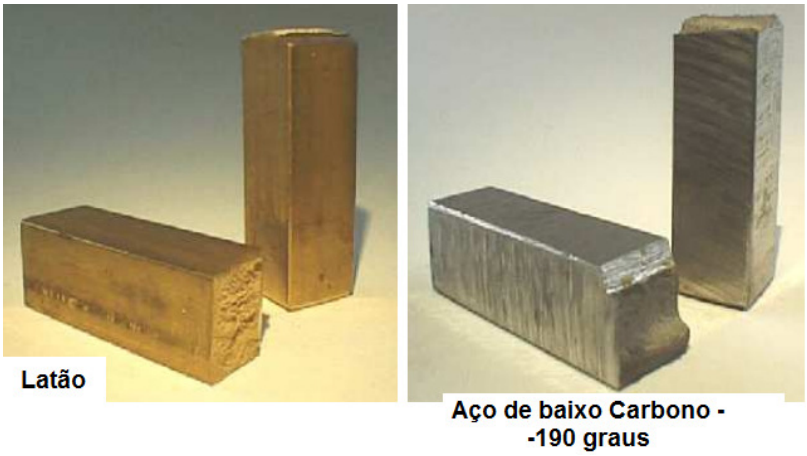


Figura 49: Ruptura frágil

O ensaio para avaliar essa resistência ao impacto é realizado com o pêndulo de impacto. O corpo-de-prova é fixado num suporte, na base da máquina. O martelo do pêndulo - com uma borda de aço endurecido de raio específico - é liberado de uma altura pré-definida, causando a ruptura do corpo-de-prova pelo efeito da carga instantânea. A altura de elevação do martelo após o impacto dá a medida da energia absorvida pelo corpo-de-prova. O teste pode ser conduzido em temperatura ambiente ou em temperaturas mais baixas para testar a fragilização do material por efeito de baixa temperatura.

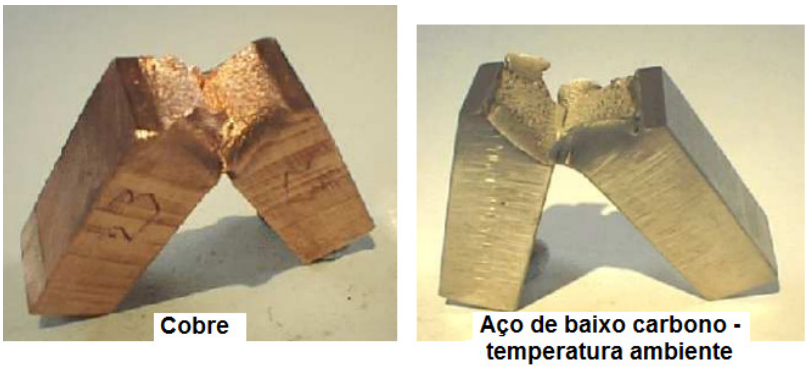


Figura 50: Ruptura dúctil

5.8.2 Corpos-de-Prova

No ensaio Charpy o corpo-de-prova é bi-apoiado como uma viga simples, com um entalhe central. O corpo-de-prova é posicionado de forma que o entalhe fique na face oposta à face de impacto. O posicionamento do entalhe é tal que o impacto ocorre na região de maior tensão - a seção transversal média do corpo-de-prova.

Os corpos de podem ser de diferentes tipos e dimensões dos entalhes.

A norma americana E23 especifica os tipos. Eles são divididos em três grupos , a saber: A , B e C. Todos possuem as mesmas dimensões. A seção transversal é quadrada com 10 mm de lado e o comprimento é de 55 mm.

O entalhe é executado no ponto médio do comprimento e pode ter 3 diferentes formas, em V em forma de fechadura e em U invertido, que correspondem aos grupos A, B e C respectivamente (ver figura 51).

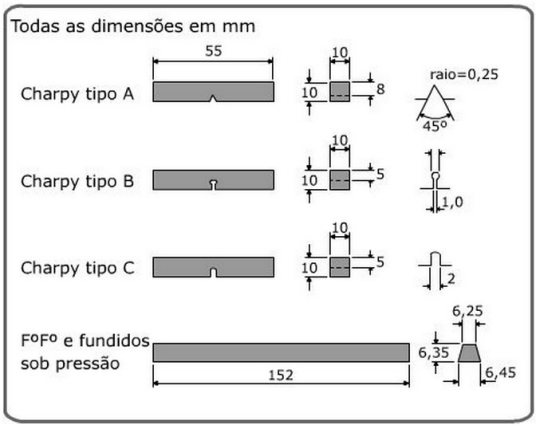


Figura 51: Corpos de prova

Entalhes mais profundos ou agudos, Charpy A, são indicados para teste de materiais mais dúcteis ou quando se usam menores velocidades no teste. As duas condições favorecem a ruptura frágil.

Para ferros fundidos e metais fundidos sob pressão o corpo-de-prova não necessita de entalhe.

5.8.3 O ensaio

O ensaio consiste em se avaliar a perda de energia potencial do martelo (ver figuras 51 e 53), dispendida para romper o corpo-de-prova, através a avaliação das diferenças de alturas h_o e h_f. Normalmente os equipamentos dispõem de escalas de medições que fornecem diretamente essa perda de energia potencial.

Figura 52: Foto do Pêndulo Charpy

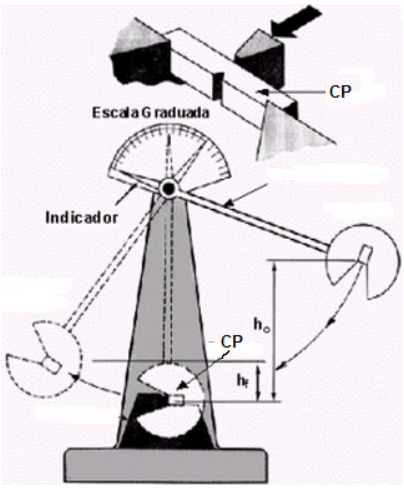


Figura 53: Esquema do ensaio

5.8.4 Principais normas para o teste

- NBRNM 281-1 (11/2003) Materiais metálicos - Parte 1: Ensaio de impacto por pêndulo Charpy
- NBR NM281-2 (11/2003) Materiais metálicos - Parte 2: Calibração de máquinas de ensaios de impacto por pêndulo Charpy
- NBR6157 (12/1988) Materiais metálicos - Determinação da resistência ao impacto em corpos-de-prova entalhados simplesmente apoiados

Relatório - Ensaio de impacto com Pêndulo Charpy

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

A perda total de energia do corpo-de-prova ensaiado

Avalie o tipo de fratura do corpo de prova ensaiado (dúctil ou frágil)

Conclusões

5.9 Ensaio para Medição de Flechas em Viga

5.9.1 Introdução

Na maioria das vezes as deformações de uma viga não são perceptíveis a olho nu. Por exemplo, numa viga submetida à flexão, o deslocamento vertical de seu eixo, normalmente não é facilmente notado.

Dá-se o nome de linha elástica da flexão (LE) à curva que representa o eixo de uma viga deformada, inicialmente retilínea, submetida à flexão pura ou simples, como mostra a figura 54. Denomina-se flecha do ponto "A"como a distância vertical medida entre sua posição sobre a linha elástica até o eixo da viga no estado original (sem cargas) - δ.

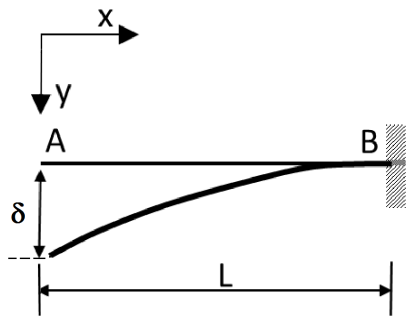


Figura 54: Linha Elástica de uma viga e flecha no ponto C

Esse ensaio tem o objetivo de avaliar a flecha na extremidade livre de uma viga de alumínio engastada submetida à flexão simples, comparando os valores medidos através da instrumentação com os respectivos valores teóricos obtidos através da teoria da Resistência dos Materiais.

5.9.2 Estudo teórico:

Seja a equação diferencial da linha elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M}{EI} \tag{77}$$

Sendo $M(x) = -Px$, tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{EI} \tag{78}$$

Integrando-se uma vez em relação a x, vem:

$$\frac{dy}{dx} = \theta(x) = \frac{Px^2}{2EI} + C_1 \tag{79}$$

onde C_1 é uma constante de integração. Sabe-se que, no engaste ($x = L$), a rotação é nula. Assim:

$$\theta(L) = \frac{PL^2}{2EI} + C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = -\frac{PL^2}{2EI} \tag{80}$$

Integrando-se, mais uma vez, em relação a x e substituindo o valor de C_1 encontrado, vem:

$$y(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + C_2 \tag{81}$$

onde C_2 é uma constante de integração. Sabe-se que, no engaste ($x = L$), a flecha é nula. Assim:

$$y(L) = \frac{PL^3}{6EI} - \frac{PL^2L}{2EI} + C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = \frac{PL^3}{3EI} \tag{82}$$

A equação da linha elástica para esta viga é dada, então, por:

$$y(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}, \qquad 0 \leq x \leq L \tag{83}$$

A flecha máxima δ, ocorre na extremidade livre da viga, isto é, no ponto A ($x = 0$). Assim,

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \tag{84}$$

Substituindo o valor de x na equação 83, pode-se obter a flecha y em qualquer ponto do domínio.

5.9.3 O ensaio:

Para a realização do ensaio será utilizada uma viga de alumínio (E = 69 GPa) com seção transversal retangular (16 mm × 3 mm e comprimento L = 300 mm), engastada-livre, solicitada por uma carga concentrada P de valor conhecido ($P = 1,255$ N) aplicado na estrutura conforme mostra a Figura 55. A leitura das flechas será realizada através de Processamento Digital de Imagens - PDI.

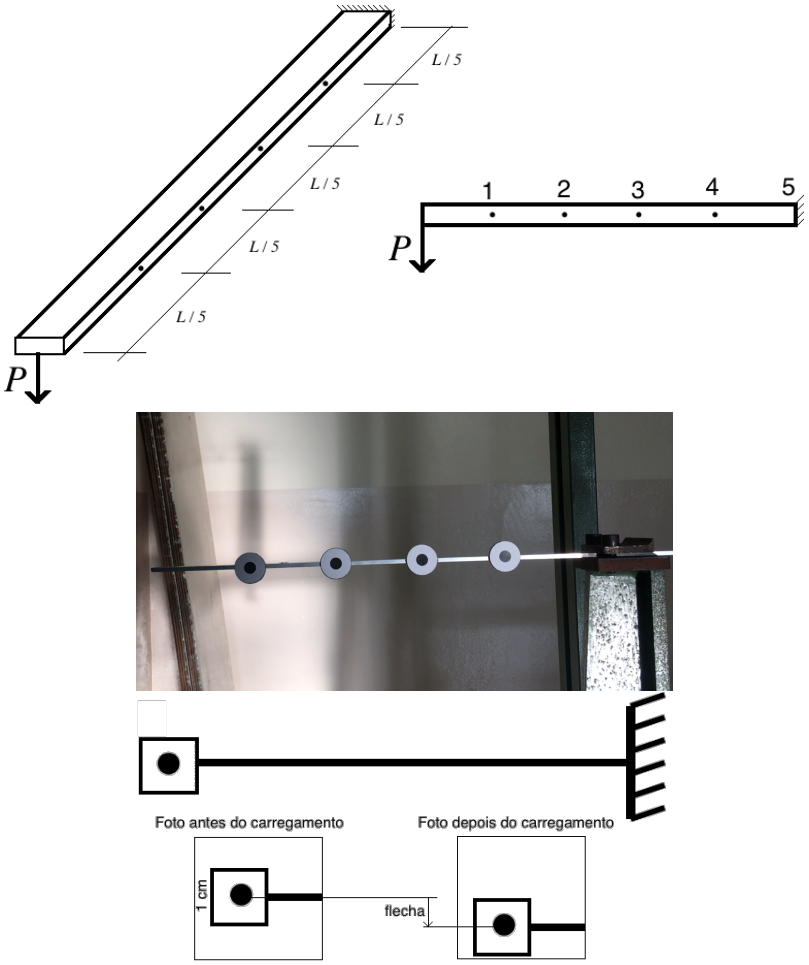


Figura 55: Esquema para ensaio - uso de PDI

O uso de PDI no presente caso passa pela binarização mostrada na figura 56. Na sequência aplica-se a equação 85 para o cálculo da coordenda do CG do alvo.

$$\overline{y} = \frac{1}{NM} \sum_{x=1}^{N} \sum_{y=1}^{M} b(x,y)y \tag{85}$$

Finalmente faz-se a transformação do valor de $\overline{y}$ obtido em "pixels" para alguma unidade de medida, sabendo-se de antemão alguma relação extraída da imagem, conforme sugere a figura 85. Nesse exemplo te-se 10 pixels = 1cm, logo:

$$\lambda = \frac{1 \text{ cm}}{10 \text{ pixels}} = 0,1\text{cm/pixels} \tag{86}$$

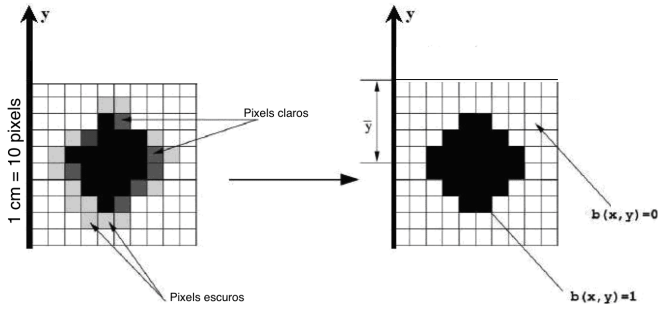


Figura 56: Binarização

e a flecha y em cm fica:

$$y = \lambda \overline{y} \tag{87}$$

No presente ensaio tem-se cada alvo com diâmetro igual a 22 mm (moeda de 5 centavos) o que na imagem equivale a 65 pixels. Ou seja, $\lambda = 0,3385$ mm/pixel

Relatório - Ensaio para medição de flechas em vigas

Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Tabela com resultados de deslocamentos em milímetros obtidos através de PDI

m (g)	F (N)	flecha 1	flecha 2	flecha 3	flecha 4	flecha 5
						0

Calcule os valores de flecha na extremidade livre da viga, obtidos através da teoria da Resistência dos Materiais

Calcule as diferenças percentuais entre os valores teóricos e experimentais

Um gráfico contendo no eixo vertical o valor da carga vertical, exibindo duas séries: uma com as flechas obtidas teoricamente e outra com as flechas médias experimentalmente

Conclusões

5.10 Ensaio em pórtico plano

5.10.1 Objetivo

O objetivo deste ensaio é comparar os resultados para tensões e deslocamentos obtidos em cálculos de estruturas hiperestáticas com valores experimentais.

O esquema do pórtico é mostrado na figura 57 e a instrumentação com 04 strain-gages pode ser vista na figura 58.

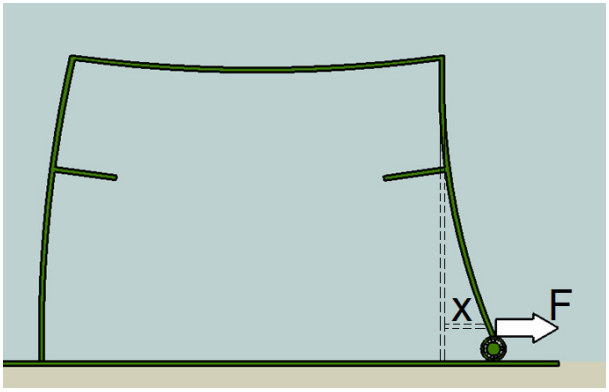


Figura 57: Esquema do pórtico

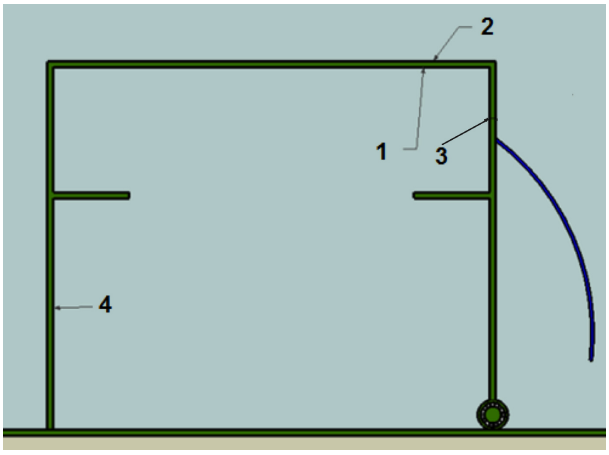


Figura 58: Localização dos strain-gages

5.10.2 O ensaio

A partir de uma carga F horizontal de valor conhecido aplicada à estrutura conforme indicado na figura 59 e do deslocamento horizontal x medido no ponto de aplicação da força é possível verificar o "Método da Carga Unitária", sabendo-se que a seção transversal do pórtico tem 24mm de base $\times$ 7,8 mm de altura e o aço tem Módulo de Elasticidade igual a 210 GPa.

Em seguida, para a carga F aplicada na estrutura, pelo "Método das Forças", é possível calcular os diagramas de Momento Fletor e Esforço Normal. De posse desses

valores pode-se calcular as tensões normais nos pontos onde estão fixados os strain-gages e compará-los com valores medidos.

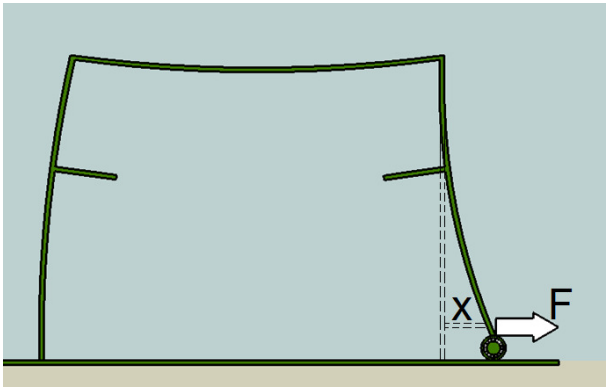


Figura 59: Pórtico com o carregamento

Relatório - Ensaio de pórtico plano

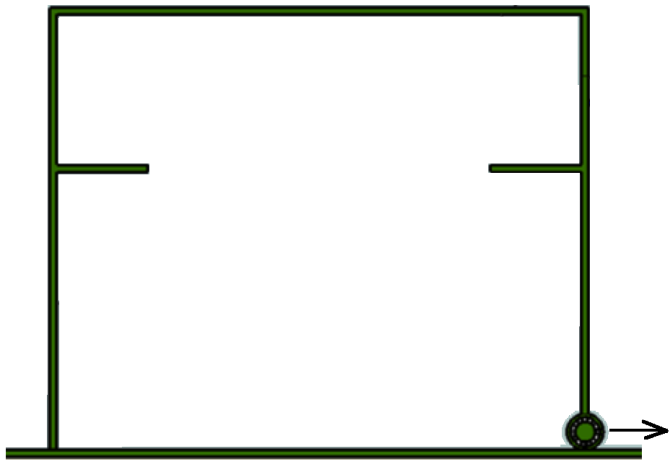
Nome(s): _____

Matrícula(s): _____ Data: _____ Turma: _____

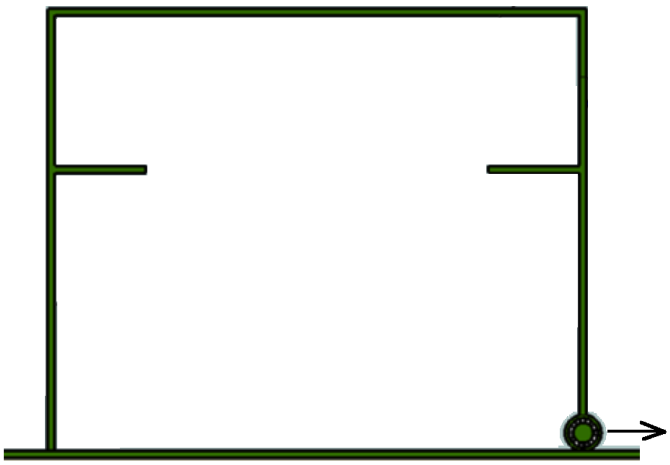
Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Traçar os diagramas de esforço normal e momento fletor do pórtico para uma carga F=.....N;



Normal



Fletor

Calcule as tensões normais devidas à flexão, obtidas das medições experimentais para os pontos 1, 2, 3 e 4

Calcule as tensões normais devidas à flexão, obtidas teoricamente para os pontos 1, 2, 3 e 4

Calcular o deslocamento horizontal para o ponto de aplicação da carga

Compare o deslocamento horizontal obtido no item anterior com aquele medido durante do experimento

Conclusões

5.11 Ensaio de Flambagem

5.11.1 Introdução

As estruturas em geral, quando estão submetidas a carregamentos, podem falhar de várias formas, dependendo do material usado, das características da seção trasversal, do tipo de estrutura, das condições de apoio, entre outras considerações. Quando se projeta um elemento estrutural, é necessário que ele satisfaça requisitos específicos de tensão, deflexão e estabilidade.

Elementos esbeltos (área da seção transversal pequena em relação ao seu comprimento) sujeitos a uma força axial de compressão são chamados de colunas e a deflexão lateral que sofrem é chamada de flambagem. Em geral a flambagem leva a uma falha repentina e dramática da estrutura.

Denominamos Carga Crítica a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem - qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna.

5.11.2 Conceito de Estabilidade Elástica

Qualifica-se como estabilidade a propriedade do sistema de manter o seu estado inicial de equilíbrio nas condições de aplicação de carregamentos. Se um sistema não tem esta propriedade, ele é qualificado de instável.

Definem-se dois estados de equilíbrio:

- Equilíbrio estável: se um sistema sofre uma pequena perturbação, depois de eliminarmos as causas desta perturbação, o sistema volta ao seu estado inicial de equilíbrio.

- Equilíbrio instável: se um sistema sofre uma pequena perturbação, depois de eliminarmos as causas desta perturbação, o sistema não volta ao seu estado inicial.

A passagem do estado de equilíbrio estável para o instável, ocorre quando a força de compressão aplicada atinge um determinado valor que é chamado de Carga Crítica.

Nos dimensionamentos das estruturas é importante que este valor crítico não seja alcançado. Com isto, se garante, além da integridade, a estabilidade da estrutura.

5.11.3 Objetivo

O objetivo deste ensaio é comparar os valores de cargas críticas para colunas, de mesmo material e seção transversal, e comprimentos distintos; obtidas experimentalmente e através da Teoria da Resistência dos MAteriais, pela Curva de Euler.

O esquema da coluna posicionada no equipamento, com aplicação de carga através do anel dinamométrico, é mostrado na figura

5.11.4 Estudo teórico

Para determinar os carregamentos críticos correspondentes às formas defletidas para uma coluna real apoiada por pinos, usamos as equações diferenciais da curva de deflexão de uma viga. Essas equações são aplicáveis a uma coluna flambada porque a coluna flete como se fosse uma viga.

Tem-se a seguinte equação:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{88}$$

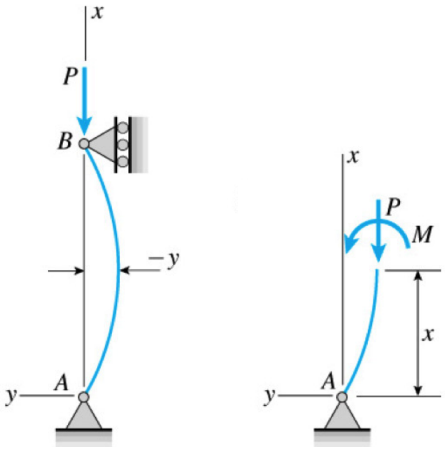


Figura 60: Modelo de Cálculo

sendo: $M = -Py$.

Logo, a equação diferencial da curva de deflexão se torna :

$$EIy'' + Py = 0 \tag{89}$$

Esta é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução geral é:

$$y = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

onde:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{90}$$

As duas constantes de integração são determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna.

Como $y(0) = 0$, então:

$$C_2 = 0;$$

;

Como $\nu = 0$ em $x = L$, então:

$$C_1 \sin(kL) = 0$$

A equação anterior é satisfeita se:

$$kL = n\pi$$

ou:

$$k^2L^2 = n^2\pi^2$$

Substituindo o valor de k^2 extraído da equação 90, vem:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2},\ n = 1, 2, 3, ... \tag{91}$$

O menor valor de P obtido quando $n = 1$, e a carga crítica para a coluna, é portanto:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

O comprimento L é denominado de comprimento de flambagem e é diferente para cada caso de condição de contorno, dependendo das condições dos apoios extremos.

Condição dos Apoios	L
rótula / rótula	l
engaste / engaste	$l/2$
engaste / livre	$2l$
engaste / rótula	$0,7l$

5.11.5 Hipérbole de Euler

No caso de barras sujeitas a esforço de compressão, além da verificação da máxima tensão de compressão, torna-se necessário verificar a tensão de acordo com a previsão de ocorrência da flambagem. Para tal, utilizamos, em regime elástico linear ($\sigma < \sigma_p$), a hipérbole de Euler. Como a carga de Euler vale:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

pode-se obter o valor da tensão no instante da flambagem:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

onde $\lambda = \dfrac{L}{\rho}$ é denominado coeficiente de esbeltez da peça, e $\rho^2 = \dfrac{I}{A}$ o raio de giração e A a área da seção transversal da barra. A curva de pontos σ_{cr} x λ descreve uma hipérbole denominada Hipérbole de Euler, como mostrado na 61.

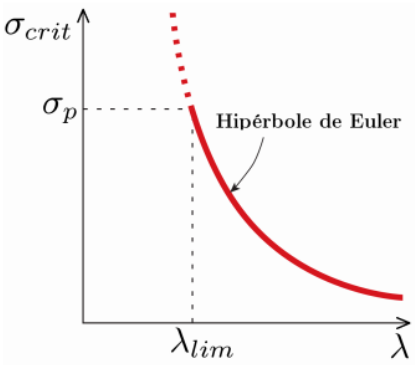


Figura 61: Hipérbole de Euler

5.11.6 O ensaio

Posiciona-se uma coluna de dimensões e módulo de elasticidade conhecidos no equipamento, de tal forma que as condições de contorno sejam atendidas pelo tipo de apoio das extremidades. O aparelho de aplicação de carga é zerado, e posteriormente a carga vai sendo aplicada até a ocorrência da flambagem.

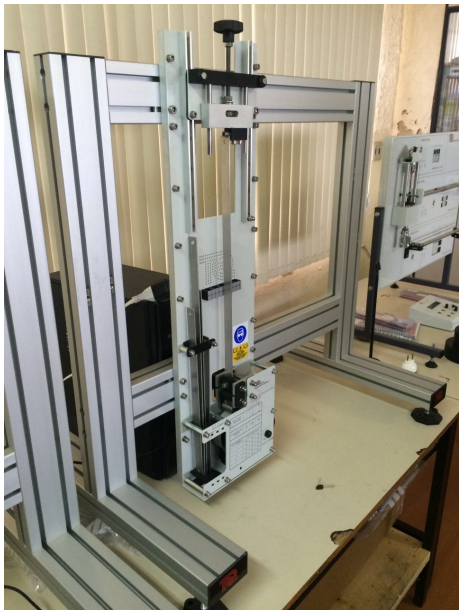


Figura 62: Equipamento - Ensaio de Flambagem

Após flambada, a coluna resiste somente a carga crítica, mesmo que seja aplicada nela uma carga maior. Esse valor de carga crítica deve então ser comparado com o obtido pela equação teórica $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{l_{fl}^2}$.

Figura 63: Coluna descarregada X Coluna Flambada

Relatório - Ensaio de Flambagem

Nome: _____

Matrícula: _____ Data: _____ Turma: _____

Introdução

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Cargas Críticas obtidas experimentalmente

Barra	L (m)	Carga Crítica (P_{cr})
1		
2		
3		
4		
5		

Cargas Críticas obtidas através da Teoria da Resistência dos Materiais

Barra	L (m)	l_{fl} (m)	Carga Crítica (P_{cr})
1			
2			
3			
4			
5			

Cálculos referentes às planilhas

Traçar um gráfico de carga crítica (P_{cr}) versus índice de esbeltez (λ)

Conclusões