

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ESTRUTURAS COM
CAMADAS VISCOELÁSTICAS AMORTECEDORAS

Flávio de Souza Barbosa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL

Aprovada por:

Prof. Ronaldo Carvalho Battista, Ph.D.

Prof. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, Ph.D.

Prof. Elson Magalhães Toledo, D. Sc.

Prof. Fernando Alves Rochinha, D. Sc.

Prof. José Luis Drummond Alves, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 2000

BARBOSA, FLÁVIO DE SOUZA

Modelagem Computacional de Estruturas
com Camadas Viscoelásticas Amortecedoras
[Rio de Janeiro] 2000

XXIII, 196 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
D.Sc., Engenharia Civil 2000)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE.

1. Materiais Viscoelásticos
 2. Estruturas Sanduíche
 3. Modelagem Dinâmica Computacional
 4. Dinâmica Estrutural
 5. Controle de Vibrações Estruturais
 6. Amortecimento Estrutural
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ESTRUTURAS COM CAMADAS VISCOELÁSTICAS AMORTECEDORAS

Flávio de Souza Barbosa

Fevereiro/2000

Orientador: Ronaldo Carvalho Battista

Programa: Engenharia Civil

Sistemas passivos de controle para a atenuação de vibrações em estruturas apresentam grande diversidade de concepções pois resultam de projetos criativos voltados para cada problema específico. Em geral, são mecanicamente robustos e se mostram como alternativas mais eficientes, sob o ponto de vista dinâmico estrutural, do que as técnicas usuais e conservadoras de enrijecimento da estrutura.

Dentre estes sistemas destacam-se aqui aqueles que utilizam materiais viscoelásticos como núcleo amortecedor, como por exemplo os sistemas tipo sanduíche. Estes materiais têm propriedades mecânicas dependentes da temperatura e, principalmente, da frequência de vibração, trazendo dificuldades adicionais às já complexas formulações teóricas do problema dinâmico no domínio do tempo.

O presente trabalho apresenta e discute uma formulação no domínio do tempo proposta na literatura para a modelagem numérica dos materiais viscoelásticos, bem como todos os passos necessários para a sua implementação computacional via método dos elementos finitos.

A formulação teórica e o método de solução implementado são avaliados criteriosamente por meio de comparações entre resultados teóricos, numérico-computacionais e experimentais, demonstrando o bom desempenho do modelo matemático-numérico proposto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

COMPUTATIONAL MODELING OF STRUCTURES WITH VISCOELASTIC DAMPING LAYERS

Flávio de Souza Barbosa

February/2000

Advisor: Ronaldo Carvalho Battista
Department: Civil Engineering

Passive control systems for attenuation of vibrations in structures show large diversity of conceptions as they result from creative designs towards each specific problem. In general, they are robust mechanisms and appear as alternatives much more efficient, under a structural dynamic point of view, than the usual and conservative structural stiffening techniques.

Among these systems, those that use viscoelastic materials as a damping core, as for example in the sandwich systems, are focused herein. These material mechanical properties are temperature and frequency dependent, so bringing additional difficulties to the already complex theoretical formulations of the time domain dynamic problem.

The present work presents and discusses a time domain formulation which has been proposed in the literature for numerical modeling of viscoelastic materials; moreover it presents all the necessary steps to implement it through a computational model within the framework of finite element method.

This theoretical formulation and the implemented solution method are thoroughly assessed by means of comparisons between the theoretical and numerical results and their experimental counterpart, demonstrating the favorable performance of the proposed mathematical-numerical model.

O desenvolvimento da ciência deve ser norteado para o bem estar da humanidade. Somente desta forma faz sentido pensar em novas tecnologias.

Dedicatória

Dedico este trabalho a um casal que é exemplo para todos aqueles que encontraram no amor a seus filhos o maior motivo para se viver:
MEUS PAIS.

Agradecimentos

- A Deus;
- Ao meu pai (Flávio), minha mãe (Janet) e a minha irmã (Luciana) pelo apoio incondicional e por tudo que me ensinaram ao longo destes quase 30 anos;
- À Michèle pelo amor e companheirismo que sempre me ajudam e incentivam, pela sua serenidade que se reflete na tranquilidade do nosso dia-a-dia, pelas dicas técnicas e pela revisão deste trabalho;
- Ao meu orientador, professor Ronaldo Battista, pelo qual tenho grande apreço e admiração, pela confiança em mim depositada ao longo destes 6 anos de convívio, pelos valiosos ensinamentos e pelos belos exemplos de comportamento ético profissional que tive o privilégio de presenciar;
- À Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro;
- Aos professores e funcionários do PEC, em especial aos professores José Alves, Roberto Oliveira e Carlos Magluta;
- À Renata Faisca pela cessão de alguns resultados experimentais e ao Ivan Menezes pela ajuda com o pós-processamento de resultados;
- Ao Departamento de Estruturas e ao Laboratório Integrado de Métodos Computacionais em Engenharia (LIMCE) da Faculdade de Engenharia da UFJF pelo apoio durante o período em que estive nesta instituição como professor substituto;
- À Tia Janir, Tio Abdo, Elias e Amine pela acolhida maravilhosa aqui no Rio de Janeiro;
- À Patricia Hallak, ao Roberto Souza, à Rosângela Santarem e ao Ricardo Franklin, amigos do Laboratório de Estruturas e que muito me ajudaram;
- Ao Maurício Pereira, ao Henrique Pizzo e ao Henrique Mesquita, amigos de sempre e que sempre me incentivaram;

- Aos amigos: Afonso Lemonge, Assis das Neves, Elson Toledo, Jean Marie Desir, Luis Paulo Barra e Rodrigo Evangelista pelas dicas técnicas, pelos bons momentos de descontração e pelas ajudas extras;
- À Vó Geralda, à Tia Virgínia e a todo o restante da minha família cuja grandeza e grandiosidade tornam impossível citar nominalmente cada um de seus integrantes;
- À Lúcia Farage, ao Tininho e à Dete e aos demais familiares da Michèle pelo carinho a mim dedicado, coisa tão rara nos dias de hoje;
- A todos que não estão mais convivendo conosco mas, com certeza, onde quer que se encontrem, torcem e contribuem pelo meu sucesso;
- A todos aqueles que me ajudaram e mereciam ser citados e por uma razão, que não me lembro, eu esqueci.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivação, Relevância e Objetivo	1
1.2	Breve Histórico e Relevância	2
1.3	Escopo	9
2	Modelagem de Materiais Viscoelásticos (MVE)	11
2.1	Conceitos Básicos sobre Amortecimento Estrutural	11
2.1.1	Amortecimento Viscoso	13
2.2	Modelos Viscoelásticos Unidimensionais	16
2.2.1	Modelo de Maxwell	17
2.2.2	Modelo de Voigt	18
2.2.3	Modelo Linear Padrão	19
2.2.4	Modelos Generalizados	20
2.3	Equações Constitutivas Para Modelos Viscoelásticos Unidimensionais	20
2.3.1	Relações Constitutivas no Domínio do Tempo (DT)	21
2.3.2	Relações Constitutivas no Domínio da Frequência (DF)	21
2.3.3	Relações Constitutivas no Domínio de Laplace (DL)	22
2.4	Considerações para Problemas Bi e Tri-Dimensionais	23
2.5	Determinação dos Parâmetros Experimentais	24

3	Método GHM - Formulação de MVE Utilizando o MEF	27
3.1	Introdução	27
3.2	Formulação Matemática	28
3.2.1	Representação Matemática do Módulo Complexo no Domínio de Laplace	28
3.2.2	Formulação para um Grau de Liberdade	28
3.2.3	Generalização para n Graus de Liberdade	32
3.3	Matrizes para Elemento Unidimensional	34
3.4	Matrizes para Elementos Quadriláteros	35
3.5	Matrizes para Elementos Hexaédricos	38
3.6	Matrizes para Elementos Quaisquer	41
3.7	Generalização para uma Malha de Elementos Finitos	41
4	Estudo Paramétrico das Propriedades dos MVE Modelados via GHM	43
4.1	Análise de Sensibilidade	46
4.1.1	Estudos Preliminares	46
4.1.2	Influência do Parâmetro ε	52
4.1.3	Influência do Parâmetro α	58
4.1.4	Influência dos Parâmetros β e δ	64
4.1.5	Resumo das Análises de Sensibilidade	74
4.2	Ajuste de Parâmetros	77
4.2.1	Espaço de Busca das Variáveis ε , α , β e δ	77
4.2.2	Busca por Varredura	79
4.2.3	Busca por Algoritmos Genéticos	80
4.3	Exemplo de Ajuste Paramétrico	83
5	Implementação Computacional do GHM	87
5.1	Características Gerais do Programa	87

5.2	Algoritmo e Fluxo do Programa	88
5.2.1	Detalhamento das Rotinas	89
5.3	Aspectos Relevantes da Implementação Computacional	95
5.3.1	Introdução dos GLs Dissipadores dos MVE	95
5.3.2	Numeração Nodal	102
5.4	Melhorias Futuras para o Programa	103
6	Exemplos e Aplicações	104
6.1	Viga Sanduíche	104
6.1.1	Descrição do Problema	105
6.1.2	Resultados Teóricos	106
6.1.3	Análise Experimental	107
6.1.4	Modelagem Computacional	109
6.1.5	Respostas no Domínio da Frequência	112
6.1.6	Respostas no Domínio do Tempo	116
6.1.7	Análises Complementares	116
6.2	Placa Sanduíche	122
6.2.1	Descrição do Problema	122
6.2.2	Modelagem Computacional	123
6.2.3	Respostas Dinâmicas da Placa Mista	130
6.2.4	Respostas Dinâmicas da Placa Sanduíche	131
7	Recomendações para Projeto e Verificação de Estruturas com MVE	133
7.1	Introdução	133
7.2	Vigas e Placas Sanduíche	135
7.2.1	Espessura do Núcleo Viscoelástico	135
7.2.2	Influência da Faixa de Frequência de Trabalho	136
7.2.3	Temperatura	139

7.2.4	Outros Fatores	139
7.3	Aplicação: Aspectos Gerais do Projeto de um Amortecedor Sanduíche com MVE	140
7.3.1	Escolha do MVE	141
7.3.2	Espessura das Camadas de MVE	143
7.3.3	Dimensionamento Final	144
7.3.4	Respostas Dinâmicas	145
8	Conclusões	147
A	Modelo Analítico de Viga Sanduíche	1
A.1	Introdução	1
A.2	Formulação Matemática	2
A.2.1	Equação Diferencial dos Deslocamentos Transversais	2
A.2.2	Soluções Especiais para Carregamento Harmônico	6
A.2.3	Condições de Contorno Possíveis para W	8
A.2.4	Ortogonalidade dos Modos Amortecidos	10
A.2.5	O Problema Geral de Vibrações Harmônicas Forçadas	12
A.3	Exemplo: Lâmina Engastada e Livre	13
A.3.1	Característica Gerais do Problema	13
A.3.2	Resposta para Carregamento Senoidal	15
A.3.3	Resposta para Varredura em Frequência	18
B	Geração de Malhas para o GHM	1
C	Tabelas de Valores Discretos	1
C.1	Resultados Experimentais	1
C.2	Resultados Numéricos	8

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de Amortecedor Viscoelástico Instalado numa Barra Diagonal de Travejamento de uma Estrutura Aporticada	3
1.2	Amortecedores Viscoelásticos Instalados nas Torres do World Trade Center	4
1.3	Amortecedores Viscoelásticos Instalados no Edifício Columbia SeaFirst	5
1.4	Amortecedores Viscoelásticos Instalados no Edifício Two Union Square	6
1.5	Sistema de Amortecimento do Tipo Sanduíche a ser aplicado na Ponte Rio-Niterói	8
2.1	Elipses que Relacionam Força de Amortecimento e Amplitude de Deslocamentos ou Elipses de Lissajoux	15
2.2	Modelo de Maxwell	17
2.3	Modelo de Voigt	18
2.4	Modelo Linear Padrão	19
2.5	Teste de Fluência e Relaxação para Modelos Básicos	20
2.6	Exemplos de Modelos Generalizados	20
2.7	Comparação entre curvas de dados obtidas através de três diferentes técnicas	26
3.1	Interpretação do GHM para 1 GL	32
3.2	Elemento de MVE Unidimensional	34
3.3	Elemento Quadrilátero	36
3.4	Elemento Hexaédrico	38
4.1	Exemplo de Material Viscoelástico: Variações de E' e η com a Frequência	44

4.2	Exemplo de Material Não-Viscoelástico: Variações de E' e η com a Freqüência	44
4.3	Exemplo de Material Elástico: Variações de E' e η com a Freqüência	45
4.4	Descrição do Exemplo Base	46
4.5	Testes ou Carregamentos Aplicados no Exemplo Base	48
4.6	Respostas no Domínio do Tempo para o Exemplo Base	49
4.7	Resposta no Domínio da Freqüência para o Exemplo Base	50
4.8	Ciclos de Histerese para o Exemplo Base	51
4.9	Materiais Usados para Análise da Influência do Fator ε	53
4.10	Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator ε	55
4.11	Respostas no Domínio da Freqüência para Variações do Fator ε	56
4.12	Ciclos Histeréticos para Variações do Fator ε	57
4.13	Materiais Usados para Análise da Influência do Fator α	59
4.14	Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator α	61
4.15	Respostas no Domínio da Freqüência para Variações do Fator α	62
4.16	Ciclos Histeréticos para Variações do Fator α	63
4.17	Materiais Usados para Análise da Influência do Fator β	65
4.18	Materiais Usados para Análise da Influência do Fator δ	66
4.19	Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator β	68
4.20	Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator δ	69
4.21	Respostas no Domínio da Freqüência para Variações do Fator β	71
4.22	Respostas no Domínio da Freqüência para Variações do Fator δ	71
4.23	Ciclos Histeréticos para Variações do Fator β	73
4.24	Ciclos Histeréticos para Variações do Fator δ	73
4.25	Variação da Taxa de Amortecimento de um MVE em Função dos Parâmetros Característicos ε , α , β e δ	74
4.26	Exemplo de um Conjunto com 6 Quadras Tentativa	82
4.27	Exemplo de Operador de Recombinação	82

4.28	Exemplo de Operador de Mutação	83
4.29	Esquema Representativo da Convergência dos Métodos de Ajuste Utilizados	84
4.30	Curvas Resultantes do Ajuste Paramétrico do Material X	86
5.1	Esquema de Armazenamento da Matriz Efetiva do Sistema e do Apon- tador <i>jdiag</i>	91
5.2	Elemento Unidimensional Linear com os Nós e GLs Dissipadores	96
5.3	Elemento Quadrilátero Linear com os Nós e GLs Dissipadores	96
5.4	Elemento Hexaédrico Linear com os Nós e GLs Dissipadores	96
5.5	Exemplo Constituído de 2 Elementos Hexaédricos	98
5.6	Matriz do Elemento Elástico	100
5.7	Matriz do Elemento Viscoelástico	101
5.8	Matriz Global	102
6.1	Foto da Viga Sanduíche	105
6.2	Detalhamento das Vigas Ensaçadas	105
6.3	Esquema do Sensoriamento das Vigas	108
6.4	Esquema de Aquisição de Sinais	108
6.5	Detalhes da Discretização das Vigas	109
6.6	Descrição da Força de Impacto Aplicada nas Vigas 1 e 2	110
6.7	Ajuste do Módulo de Elasticidade do Material VHB	111
6.8	Ajuste do Fator de Perda do Material VHB	111
6.9	Respostas no Domínio da Freqüência para a Viga 1 (Elástica)	115
6.10	Respostas no Domínio da Freqüência para a Viga 2 (Sanduíche)	115
6.11	Respostas no Domínio do Tempo da Viga 1 (Elástica)	117
6.12	Respostas no Domínio do Tempo da Viga 2 (Sanduíche)	117
6.13	Novo Ajuste do Módulo de Elasticidade do Material VHB	118
6.14	Novo Ajuste do Fator de Perda do Material VHB	118
6.15	Respostas Numéricas no Domínio da Freqüência	120

6.16	Respostas Numéricas no Domínio do Tempo	120
6.17	Respostas no Domínio da Frequência da Viga 2 para o Novo Ajuste Paramétrico	121
6.18	Respostas no Domínio do Tempo da Viga 2 para o Novo Ajuste Paramétrico	121
6.19	Descrição das Placas Analisadas	122
6.20	Descrição do Ponto de Excitação e dos Pontos Observados	123
6.21	Discretização das Placas Usadas na Calibração do Módulo de Elasticidade do Aço	125
6.22	Frequências Naturais e Modos de Vibração da Placa de Aço	127
6.23	Respostas no Domínio do Tempo da Placa de Aço	128
6.24	Força de Excitação	128
6.25	Respostas no Domínio do Tempo das Placas Mistas	130
6.26	Respostas no Domínio do Tempo das Placas Sanduíche e Mista	132
6.27	Respostas no Domínio da Frequência das Placas Sanduíche e Mista	132
7.1	Vista Lateral e Detalhe Esquemático do Tabuleiro Metálico do Vão Central da Ponte Rio-Niterói	134
7.2	Modelo Experimental do Vão Central da Ponte Rio-Niterói (Escala 1:1)	134
7.3	Exemplo de Estrutura Sanduíche	135
7.4	Amortecimento Estrutural em Função da Espessura do Sanduíche	136
7.5	Ajuste da Frequência de Trabalho da Estrutura à Região com Fatores de Perda mais Elevados	136
7.6	Curvas Características dos Materiais A e B	137
7.7	Respostas Dinâmicas dos Materiais A e B	138
7.8	Variação das Características Dinâmicas de um MVE em Função da Temperatura numa Frequência Constante	139
7.9	Estrutura com Problemas Dinâmicos: Viga Treliçada	140
7.10	Estrutura com Problemas Dinâmicos: Prédio	140
7.11	Detalhes dos Amortecedores Viscoelásticos	141

7.12	Curvas Características do Material M1	142
7.13	Curvas Características do Material M2	142
7.14	Curvas Características do Material M3	142
7.15	Dimensões Adotadas para o Amortecedor Viscoelástico	143
7.16	Relação entre o Alongamento Longitudinal u e a Distorção Angular γ	144
7.17	Alongamentos Longitudinais dos Amortecedores Viscoelásticos	145
7.18	Ciclos de Histerese dos Amortecedores Viscoelásticos	146
A.1	Exemplo de Viga Sanduíche	1
A.2	Características das Forças e da Geometria Envolvidas no Problema .	3
A.3	Descrição do Exemplo	14
A.4	Resposta do Sistema	19
A.5	Deslocamento Máximo da Extremidade Livre \times Freqüência	19
A.6	Quadros da Animação Gerada por uma Varredura em Freqüência . . .	20

Lista de Tabelas

2.1	Funções de Dissipação	23
4.1	Características Físicas e Geométricas da Barra do Exemplo Base	47
4.2	Características Viscoelásticas para Várias Freqüências de Excitação .	51
4.3	MVEs usados na análise do fator ε	52
4.4	Freqüência Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas	57
4.5	MVEs usados na análise do fator α	58
4.6	Valores Iniciais de Força no Teste de Relaxação	60
4.7	Freqüências Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas $\rightarrow mve_\alpha$	63
4.8	MVEs usados na análise do fator β	64
4.9	MVEs usados na análise do fator δ	64
4.10	Freqüências Naturais dos Sistemas - mve_β	70
4.11	Freqüências Naturais dos Sistemas - mve_δ	70
4.12	Freqüências Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas $\rightarrow mat_\beta$	72
4.13	Freqüências Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas $\rightarrow mve_\delta$	72
4.14	Resumo de Resultados Obtidos nas Análises de Sensibilidade	76
4.15	Resultados Experimentais (Hipotéticos) para o Material X	83
5.1	Dados Gerais da Topologia da Malha	99
5.2	Conectividades Nodais dos Elementos	99
5.3	Restrições Nodais	99
6.1	Características Físicas dos Materiais	106

6.2	Caracterização do material VHB via Ensaio Padrão ASTM [26]	109
6.3	Características das Malhas	109
6.4	Ajuste Paramétrico	110
6.5	Freqüências Naturais Teóricas	112
6.6	Freqüências Naturais da Viga 1 (elástica)	112
6.7	Freqüências Naturais da Viga 2 (sanduíche)	113
6.8	Novo Ajuste Paramétrico	118
6.9	Freqüências Naturais da Viga 2 para o Novo Ajuste Paramétrico	119
6.10	Características do Aço	124
6.11	Flechas para Placa da Figura 6.21 Devido a Ação de Peso Próprio	126
6.12	Características do Concreto	129
6.13	Características do Modelo e Esforço Computacionais da Placa Sanduíche	131

Lista de Variáveis

Letras Romanas Minúsculas:

- a → comprimento do lado associado à direção x da placa
- b → comprimento do lado associado à direção y da placa
- c , c_1 e c_2 → coeficientes de amortecimento
- e_1 e e_2 → eixos das elipses rotacionadas
- i → unidade imaginária
- h → função de dissipação
- k , k_1 e k_2 → rigezas de mola
- \bar{m} → massa equivalente de uma placa sanduíche
- q → deslocamento
- r_1 , r_2 e r_3 → cada uma das dimensões de um elemento finito
- s → variável do domínio de Laplace
- t → variável do domínio do tempo
- u → alongamento total
- u_e → alongamento elástico da mola
- u_v → alongamento do elemento viscoso
- x → deslocamento
- z → variável de dissipação

Letras Romanas Maiúsculas:

- A → área de seção transversal
- C → matriz de amortecimento global
- C^e → matriz elástica de amortecimento de elemento
- C^v → matriz viscoelástica de amortecimento de elemento
- E → módulo de elasticidade longitudinal
- E^* → valor discreto do módulo complexo
- E' → módulo de armazenamento longitudinal
- E'^* → valor discreto do módulo de armazenamento longitudinal
- E'' → módulo de perda longitudinal
- E^* → módulo complexo de elasticidade longitudinal
- \overline{EI} → rigidez equivalente de uma placa sanduíche
- $Dim(\dots)$ → dimensão de uma matriz (...)
- F → força de excitação
- F_0 → amplitude da força de excitação
- F_1 → força na mola 1
- F_2 → força na mola 2
- F_d → força de amortecimento
- F_e → força na mola elástica
- F_v → força no amortecedor viscoso
- \mathbf{F}_{efe} → vetor de forças efetivo
- G → módulo de elasticidade transversal
- G' → módulo de armazenamento transversal
- G'' → módulo de perda transversal
- G^* → módulo complexo de elasticidade transversal
- \mathbf{I} → matriz identidade

- \mathbf{K} → matriz de rigidez global
- \mathbf{K}^e → matriz elástica de rigidez normalizada com relação ao módulo de elasticidade
- \mathbf{K}^v → matriz viscoelástica de rigidez de elemento
- L → comprimento
- \mathbf{M} → matriz de massa global
- \mathbf{M}^e → matriz elástica de massa de elemento
- \mathbf{M}^v → matriz viscoelástica de massa de elemento
- \mathbf{M}_{efe} → matriz de massa efetiva
- P → força de excitação do exemplo base
- \mathbf{R}_e → matriz de autovetores de \mathbf{K}^e
- Ta → tempo de aplicação da força de excitação
- U → pico de energia potencial
- \mathbf{U} → vetor de deslocamentos
- U_0 → amplitude da resposta u
- X → amplitude da resposta x

Letras Gregas Minúsculas:

- $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ e ε → parâmetros característicos de um MVE
- $\alpha_o, \beta_o, \delta_o,$ e ε_o → parâmetros característicos do MVE usado no exemplo base
- ϵ → deformação longitudinal
- η → fator de perda
- $\theta = \varepsilon + \alpha$ → máximo valor de módulo de elasticidade que atinge um MVE
- κ → ângulo formado entre o eixo horizontal e a elipse rotacionada
- μ → termo relacionado com os elementos da matriz de massa
- ν → coeficiente de Poisson
- ξ → taxa de amortecimento

- $\rho \rightarrow$ massa específica
- $\sigma \rightarrow$ tensão longitudinal
- $\tau \rightarrow$ tensão cisalhante
- $\phi \rightarrow$ ângulo de fase
- $\omega \rightarrow$ frequência

Letras Gregas Maiúsculas:

- $\Gamma \rightarrow$ função objetivo do ajuste paramétrico
- $\Delta t \rightarrow$ intervalo de tempo de integração
- $\Lambda \rightarrow$ matriz de autovalores de \mathbf{K}^e
- $\Psi \rightarrow$ coeficiente de ponderação da função objetivo Γ

Outros Símbolos:

- $\mathcal{A} \rightarrow$ área da elipse
- $\mathcal{D} \rightarrow$ rigidez à flexão equivalente de uma placa
- $\mathcal{E} \rightarrow$ módulo de elasticidade no domínio de Laplace
- $\mathcal{K} \rightarrow$ rigidez normalizada com relação ao módulo de elasticidade no domínio de Laplace
- $\mathcal{M} \rightarrow$ massa no domínio de Laplace
- $\mathcal{R}\{\dots\} \rightarrow$ parte real de $\{\dots\}$
- $\mathcal{H} \rightarrow$ transformada inversa de Laplace de $q(s)h(s)$
- $\mathcal{J} \rightarrow$ funcional usado no ajuste paramétrico

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação, Relevância e Objetivo

A forte tendência de se projetarem estruturas cada vez mais leves e esbeltas tem levado as edificações modernas a diversos problemas dinâmicos. Em grande parte, esta tendência se deve a a fatores econômicos, fazendo com que esta característica dos projetos modernos seja cada vez mais acentuada.

Obviamente, estes projetos modernos, além de resultarem em menores custos de execução, devem atender aos critérios de segurança e de conforto de usuários [1]. As edificações modernas deverão ser esbeltas, porém não podem admitir vibrações excessivas.

De forma compatível com os conhecimentos atuais e visando otimizar a relação economia/segurança de uma edificação, os sistemas auxiliares de controle de vibração inseridos nas estruturas vêm sendo cada vez mais utilizados. Além de serem seguros e relativamente econômicos, estes sistemas de controle são soluções leves e tecnicamente mais eficientes na correção de problemas dinâmicos, o que vem fazendo com que soluções pesadas e conservadoras, como a costumeira técnica de enrijecimento estrutural, venham sendo cada vez menos usadas [2].

Tais controladores são de natureza ativa ou passiva e podem ser usados também em estruturas existentes. Nos dois casos é possível se obterem reduções consideráveis nas amplitudes de vibração de uma estrutura [1] e [3].

Dentre os sistemas de controle passivo, aqueles que fazem uso de materiais especiais com grandes propriedades amortecedoras, como os materiais viscoelásticos acoplados às estruturas, aparecem como alternativas bastante robustas na correção de problemas de vibrações excessivas.

Os materiais viscoelásticos têm como principal característica uma grande dissi-

pação de energia por ciclo de oscilação, fazendo com que o sistema acoplado aumente a sua taxa de amortecimento e proporcione reduções significativas das vibrações.

Como exemplos destes materiais pode-se citar: alguns tipos de borrachas; resinas e polímeros em geral.

A utilização de materiais viscoelásticos como redutores de vibrações estruturais é relativamente recente e, por este motivo, várias lacunas com relação à descrição de seu funcionamento ainda estão por serem preenchidas.

Faz-se neste trabalho um estudo, nos domínios do tempo e da frequência, sobre os materiais viscoelásticos utilizados como materiais dissipadores da energia de vibração de uma estrutura e, conseqüentemente, funcionando como parte de um sistema passivo de controle de vibrações estruturais que, por sua eficiência na redução de vibrações [4] e pelo seu relativo custo reduzido, tem despertado grande interesse, motivando diversos trabalhos sobre o tema, incluindo o presente.

1.2 Breve Histórico e Relevância

Os primeiros estudos sobre materiais viscoelásticos aplicados na redução de vibrações estruturais e acústicas datam da década de 50 através das técnicas de Oberst *et al* [5] (1952), as quais fundamentaram o modelo da *American Society for Testing and Material* (ASTM) utilizado nos dias de hoje, e dos trabalhos de Kervin [6] (1959) e Ross *et al* [7] (1959) sobre amortecimento com materiais viscoelásticos em lâminas submetidas a vibrações por flexão.

DiTaranto [8] (1965) e Mead *et al* [9] (1969) desenvolveram a equação diferencial para uma viga sanduíche, tendo um material viscoelástico como amortecedor de vibração. Nestes trabalhos a solução é obtida através de superposição de modos complexos de vibração. Este modelo analítico é amplamente descrito e discutido no apêndice A do presente trabalho.

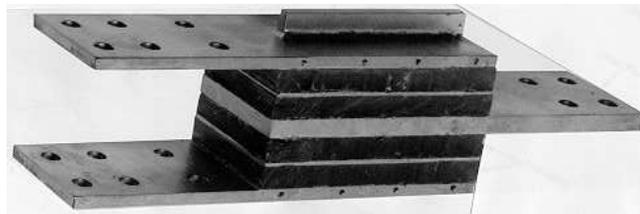
Como as propriedades de amortecimento de um material viscoelástico são fortemente dependentes da frequência, fica óbvio que uma análise no domínio do tempo, visando representar o comportamento deste material, apresenta maiores dificuldades.

Face a esta dificuldade, os trabalhos que apresentam formulações matemáticas para a modelagem de materiais viscoelásticos no domínio do tempo são bem menos numerosos. Dentre eles pode-se destacar o trabalho de Golla *et al* [10] (1985), que apresenta uma formulação para elementos finitos no domínio do tempo, e o de Gibson *et al* [11], que implementa nos software Matlab e Nastran o Método Golla- Hughes (GHM) apresentado em Golla *et al* [10]. As formulações usadas nestes trabalhos serão amplamente discutidas no capítulo 3.

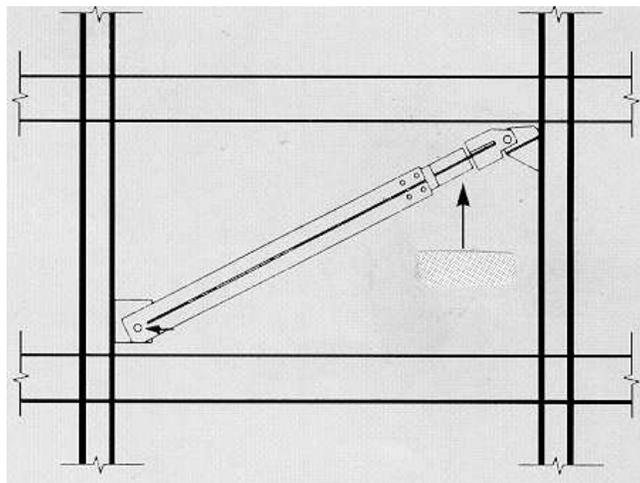
Yi *et alli* [13] e Qian *et al* [12] também apresentam formulações no domínio do tempo, voltadas para o uso do MEF no tratamento dos materiais viscoelásticos e também de materiais compósitos: Yi *et alli* [13] propõem uma formulação para análise dinâmica destes materiais na qual os procedimentos numéricos são baseados na visco-piezoelasticidade; Qian *et al* [12] obtêm as equações diferenciais de movimento através do princípio dos trabalhos virtuais e seus resultados obtidos por integração numérica são comparados com valores experimentais.

O uso de amortecedores viscoelásticos em edificações é relativamente recente e um dos primeiros casos que se tem notícia dentro da literatura são as torres do World Trade Center em Nova York EUA (1969) [14].

A figura 1.1(a) mostra um exemplo de amortecedor viscoelástico cuja estrutura e o funcionamento são simples: camadas de material viscoelástico coladas entre chapas de aço dissipam energia de vibração convertendo-a em calor. Isto se deve à grande propriedade amortecedora dos materiais viscoelásticos quando submetidos a ação de esforço cortante, que neste caso é proporcional à tração ou à compressão das barras onde estes dispositivos são instalados (ver figura 1.1(b)). O estudo do mecanismo de dissipação de energia destes dispositivos é abordado em Mahmoodi [15].



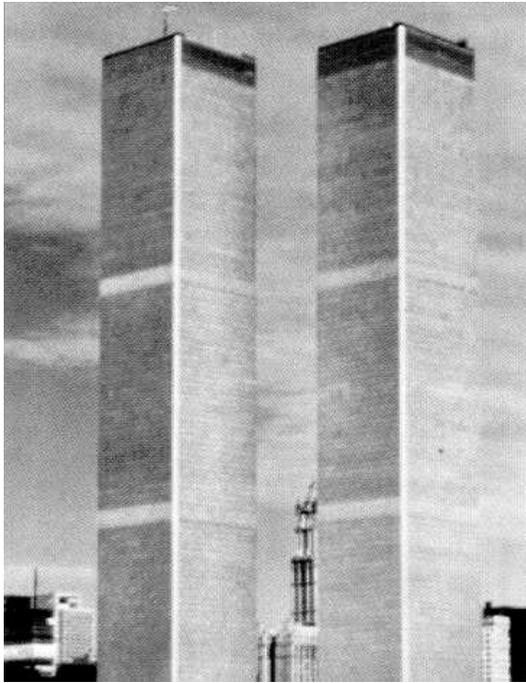
(a) Foto de um Amortecedor Viscoelástico



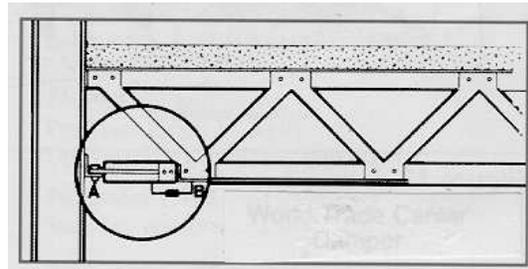
(b) Detalhe do Amortecedor Viscoelástico Instalado

Figura 1.1: Exemplo de Amortecedor Viscoelástico Instalado numa Barra Diagonal de Travejamento de uma Estrutura Aperticada

As torres do World Trade Center 1.2(a) têm 10000 amortecedores viscoelásticos semelhantes ao mostrado na figura 1.1(a). Eles estão localizados entre o décimo e o centésimo andar e instalados nos banzos inferiores das treliças de sustentação das lajes de piso como ilustrado na figura 1.2(b). O objetivo é o de atenuar vibrações provenientes de cargas de vento. Os amortecedores foram instalados em 1969 e seus desempenhos vem sendo monitorados desde então. A expectativa de vida útil de utilização destes amortecedores vai até o ano de 2015.



(a) Foto das Torres



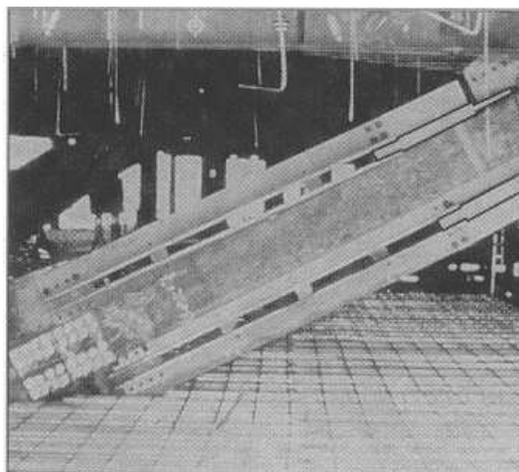
(b) Detalhe dos Amortecedores Instalados

Figura 1.2: Amortecedores Viscoelásticos Instalados nas Torres do World Trade Center

Em 1982, 260 amortecedores viscoelásticos foram instalados no edifício Columbia SeaFirst em Seattle EUA [14] (figura 1.3(a)). Neste caso amortecedores foram instalados em paralelo às barras diagonais principais de sustentação do prédio conforme mostra a foto da figura 1.3(b). O objetivo aqui também foi o de atenuar vibrações induzidas pela carga de vento com a instalação de 260 amortecedores. Atualmente, este é o prédio mais alto de Seattle com 76 andares e aproximadamente 291 m.



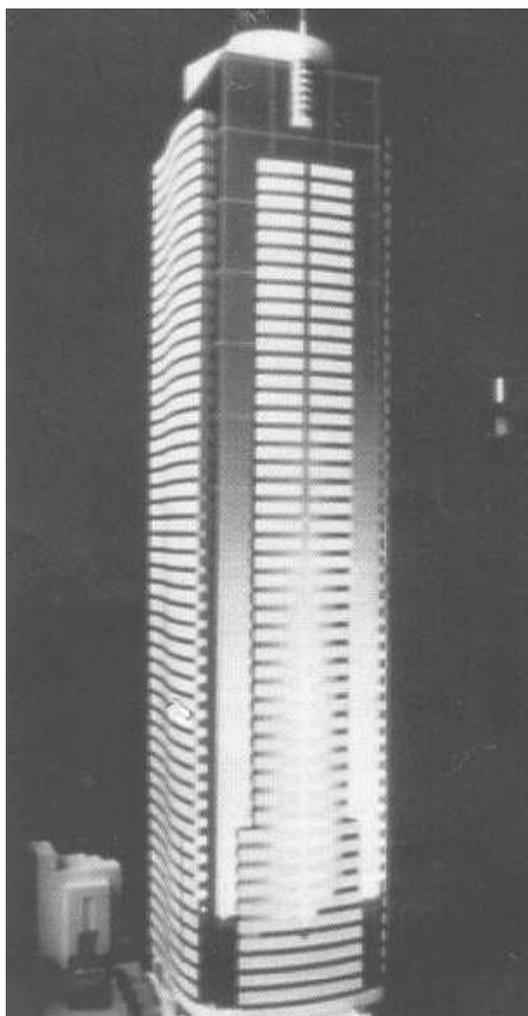
(a) Foto do Edifício



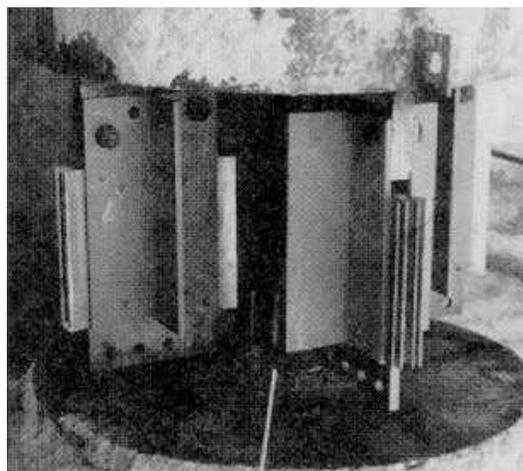
(b) Detalhe dos Amortecedores Instalados

Figura 1.3: Amortecedores Viscoelásticos Instalados no Edifício Columbia SeaFirst

Em 1988, dezesseis amortecedores viscoelásticos foram instalados em paralelo a quatro colunas de sustentação do primeiro andar do edifício Two Union Square em Washington EUA [14], conforme mostram as figuras 1.4. Neste caso o objetivo foi também de reduzir as vibrações provenientes da ação dos vento, mas a estratégia usada poderia ser voltada para reduzir os efeitos de sismos sobre a estrutura, visto que as bases dos pilares onde foram instalados os amortecedores viscoelásticos funcionam também como isoladores de vibrações. Foram instalados um total de 16 amortecedores (4 em cada pilar de sustentação). Atualmente este é o segundo prédio mais alto de Seattle com 56 andares e aproximadamente 270 m.



(a) Foto do Edifício



(b) Detalhe dos Amortecedores Instalados

Figura 1.4: Amortecedores Viscoelásticos Instalados no Edifício Two Union Square

No Programa de Engenharia Civil da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEC - COPPE/UFRJ) o primeiro trabalho aplicado ao controle de vibrações estruturais data de 1990 quando Battista *et al* [16] apresentaram o relatório técnico sobre a dinâmica estrutural do estádio do Maracanã. Até os dias de hoje, vários relatórios técnicos, publicações em congressos e periódicos especializados, teses de mestrado e doutorado foram apresentados dentro deste tema. Todos estes trabalhos estão inseridos na linha de pesquisa de controle de vibrações estruturais do PEC da COPPE.

A equipe chefiada pelo professor Ronaldo Battista do PEC da COPPE/UFRJ, em parceria com a Ponte S/A, está desenvolvendo um sistema passivo de controle de vibrações do tipo sanduíche com a utilização de MVE a ser aplicado no tabuleiro metálico da Ponte Rio-Niterói (figura 1.5(a)) e que é pioneiro num âmbito mundial. Assim como no amortecedor viscoelástico apresentado na figura 1.1, a idéia deste sistema de amortecimento está baseada na elevada capacidade de dissipação de energia de vibração dos materiais viscoelásticos quando submetidos a cisalhamento. A figura 1.5(b) mostra o detalhe do sistema de amortecimento, deixando claro que a estrutura quando submetida a flexão provoca tensões cisalhantes no núcleo viscoelástico, fazendo com que este último atenua as vibrações do sistema. Este assunto será novamente abordado no capítulo 7.

Dentre os trabalhos desenvolvidos no PEC da COPPE/UFRJ já citados, a tese de mestrado apresentada por Faisca [4] (1998) também merece ser destacada pela afinidade com o presente trabalho. Em sua dissertação, Faisca trabalhou diretamente com a caracterização experimental de um Material ViscoElástico (MVE) através de ensaios dinâmicos, visando sua utilização como amortecedor estrutural.

O presente trabalho, no âmbito do PEC da COPPE, é o primeiro a lidar com a modelagem dinâmica computacional dos MVEs via Método dos Elementos Finitos (MEF), abrindo portanto uma nova frente de estudos dentro da linha de pesquisa de controle de vibrações estruturais.

Por este trabalho estar inserido num contexto incipiente, boa parte do tempo despendido no seu desenvolvimento foi gasto na estruturação dos códigos computacionais implementados, visando facilitar a utilização/entendimento dos programas e as interfaces com pós e pré-processadores, viabilizando, desta forma, futuras implementações sobre estes códigos.

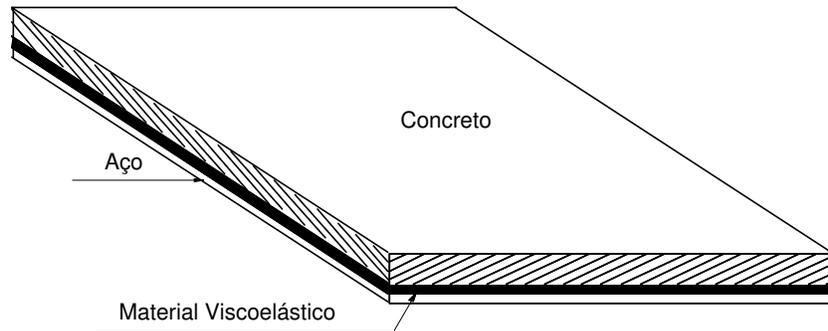
Assim sendo, o presente trabalho apresenta um código base no qual novos recursos voltados para a viscoelasticidade poderão ser implementados.

Além dos aspectos computacionais, também foi dada ênfase à modelagem teórica para MVE aqui utilizada, buscando-se verificar sua validade através de comparações com protótipos experimentais.



(a) Foto da Ponte

Trecho do Tabuleiro do Vão Central



Detalhe de Comportamento de Seções do Tabuleiro na Flexão



(b) Detalhe do Sistema de Amortecimento

Figura 1.5: Sistema de Amortecimento do Tipo Sanduíche a ser aplicado na Ponte Rio-Niterói

1.3 Escopo

O presente trabalho está dividido em 8 capítulos e 3 apêndices:

- **Capítulo 1 - Introdução**

Este capítulo procura fazer uma abordagem geral sobre o tema abordado, mostrando sua relevância no contexto atual, além de apresentar os objetivos que se desejam alcançar no desenrolar do trabalho.

Faz-se também um breve histórico sobre o tema, citando trabalhos de grande relevância.

- **Capítulo 2 - Modelagem de Materiais Viscoelásticos (MVE)**

Com base em modelos teóricos e dados experimentais, busca-se mostrar algumas formas de se caracterizar o MVE no intuito de avaliar seu comportamento quando submetido a ações dinâmicas.

Neste capítulo são apresentados também os conceitos básicos sobre amortecimento estrutural, classificação de e o tipo de amortecimento de um MVE.

- **Capítulo 3 - Método GHM - Formulação de MVE utilizando o MEF**

Este capítulo apresenta uma forma de se tratar via MEF, no domínio do tempo ou da frequência, as propriedades dependentes da frequência dos MVE.

- **Capítulo 4 - Estudo Paramétrico das Propriedades dos MVE Modelados via GHM**

Faz-se aqui uma análise da variação das propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos em função de parâmetros extraídos de dados experimentais.

- **Capítulo 5 - Implementação Computacional do GHM**

Este capítulo trata do detalhamento dos programas desenvolvidos, dos aspectos relevantes da programação e das melhorias que podem ser feitas nesses programas.

- **Capítulo 6 - Exemplos e Aplicações**

Aqui são apresentados dois exemplos de aplicação de estrutura sanduíche analisando seus desempenhos dinâmicos.

- **Capítulo 7 - Recomendações para Projeto e Verificação de Estruturas com MVE**

Este capítulo destaca os principais aspectos relacionados com o projeto e/ou verificação de estruturas sanduíche.

- **Capítulo 8 - Conclusões**

Comentários finais, propostas para futuros trabalhos e conclusões são aqui apresentados.

- **Apêndice A - Modelo Analítico de Viga Sanduíche**

Este apêndice apresenta um desenvolvimento teórico analítico das equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico de uma viga sanduíche.

- **Apêndice B - Geração de Malhas para o GHM**

Este apêndice mostra as principais dificuldades encontradas na geração das malhas de elementos finitos usadas nas modelagens via GHM e apresenta as programas de geração de malha que foram desenvolvidos.

- **Apêndice C - Tabelas de Valores Discretos**

Os principais gráficos deste trabalho são apresentados na forma de tabela de pontos discretos, visando facilitar a comparação futura de resultados com outros trabalhos.

Capítulo 2

Modelagem de Materiais Viscoelásticos (MVE)

Os MVE são utilizados neste trabalho essencialmente como amortecedores de vibrações estruturais. Por este motivo, faz-se inicialmente neste capítulo uma introdução com os conceitos básicos de amortecimento estrutural.

2.1 Conceitos Básicos sobre Amortecimento Estrutural

Amortecimento é um assunto largamente discutido na literatura sobre dinâmica estrutural. Dentre publicações que tratam do assunto pode-se destacar o livro “Vibration Damping of Structural Elements” dos autores Sun, C. T. e Lu, Y. P. [17], o livro “Flow Induced Vibrations” do autor Blevins [18] e o “Handbook of Shock and Vibrations” dos autores Harris e Crede [19].

O amortecimento é o resultado da energia dissipada durante a vibração. Este simples conceito de amortecimento, na realidade, retrata um fenômeno de grande complexidade.

O amortecimento em geral pode ser classificado de várias formas:

- **Amortecimento Viscoso**

Neste caso, tem-se as forças de amortecimento introduzidas através da interação com o meio fluido onde a estrutura experimenta vibrações. Estas forças são proporcionais ao quadrado da velocidade relativa entre partículas do fluido e a estrutura.

Um exemplo deste tipo de amortecimento pode ser observado numa estrutura

vibrando na água ou no ar. A estrutura vibrará mais facilmente - isto é, com maiores amplitudes iniciais em vibração livre e durante um maior intervalo de tempo até o repouso para a mesma magnitude de vibração - no ar do que na água, dado o maior valor da viscosidade cinemática do fluido água.

- **Amortecimento Histerético**

Este tipo de amortecimento é função dos deslocamentos e/ou deformações da estrutura, independentemente do meio onde ela se encontra oscilando.

Um exemplo deste tipo de amortecimento está presente no atrito interno entre as moléculas de um material, quando este está oscilando. As edificações apresentam, predominantemente, este tipo de amortecimento.

- **Amortecimento por Atrito**

Este tipo de amortecimento ocorre devido às forças de contato entre a estrutura em movimento e a superfície onde ela se apóia e desloca.

Um exemplo pode ser observado numa estrutura se locomovendo sobre uma superfície rugosa ou sobre uma superfície lisa. É claro perceber que sobre a superfície lisa a estrutura tem maior facilidade para se manter em movimento, pois as forças de amortecimento por atrito são neste caso menores.

Este tipo de amortecimento não será abordado por não estar diretamente ligado ao comportamento dos MVE. Maiores detalhes podem ser obtidos em Sun (1995) [17] e Louroza [20].

- **Amortecimento Estrutural**

Na prática, dificilmente uma estrutura estará submetida a somente um dos tipos de amortecimento anteriormente citados. O que acontece é uma predominância de um com relação ao outro. Por exemplo: para uma estrutura offshore, imersa em água, há o predomínio do amortecimento hidrodinâmico do tipo viscoso, proporcional ao quadrado da velocidade relativa entre as partículas d'água em movimento (ondas e correntes marinhas) e a estrutura também em movimento. Uma outra parcela importante de amortecimento em estrutura offshore é do tipo histerético, que se desenvolve com as variações de deformações (proporcionais aos deslocamentos e rotações). Num edifício, por estar imerso no ar, há por outro lado uma predominância do amortecimento histerético, apesar da interação com o ar possibilitar o amortecimento viscoso.

Em geral o amortecimento estrutural é definido [21] como sendo a soma das parcelas de amortecimento desenvolvidas numa estrutura vibrando num certo meio e interagindo com este.

Os materiais usados na engenharia sempre apresentam amortecimento histerético, dissipando energia durante o ciclo de vibração através de forças moleculares internas, sendo que materiais como borracha, plásticos, elastômeros e outros materiais viscoelásticos, dissipam muito mais energia que materiais de construção convencionais como o aço e o alumínio.

Qualquer que seja o material, o tratamento dado na modelagem do seu amortecimento, a rigor, deveria conter componentes que descrevessem o fenômeno no âmbito molecular, pelo próprio conceito de amortecimento histerético. Isso pode inviabilizar qualquer tipo de análise macro-estrutural. O que se faz são aproximações simplificadoras que, em alguns casos, utilizam formulações usadas para descrever o amortecimento viscoso. É o caso dos materiais viscoelásticos, que como próprio nome sugere, podem ser modelados por formulações usadas neste tipo de amortecimento amortecimento, motivando as abordagens do próximo item.

2.1.1 Amortecimento Viscoso

O amortecimento viscoso é função do quadrado da velocidade relativa entre a estrutura e o meio onde ocorre a vibração, e se deve à resistência do fluido durante a oscilação. Sua descrição matemática é em geral complicada, mas um modelo simplificado apresenta bons resultados para os problemas de engenharia. Este modelo linearizado considera a força de amortecimento (F_d) diretamente proporcional e com sentido oposto à velocidade de deslocamento da partícula relativa ao fluido:

$$F_d = -c \frac{dx}{dt} \quad (2.1)$$

onde c é a constante de proporcionalidade chamada de coeficiente de viscosidade e $\frac{dx}{dt}$ é a velocidade da partícula.

Visando simular o comportamento de algumas estruturas que apresentam domínio de amortecimento material (aço, concreto), muitos engenheiros utilizam esta formulação. Para tal, basta se determinar experimentalmente um coeficiente de viscosidade equivalente. Esta formulação apresenta bons resultados para estruturas com comportamento aproximadamente linear.

A energia dissipada por ciclo de oscilação (W_d), para um sistema com amortecimento viscoso, é dada pelo valor negativo do trabalho realizado pela força de amortecimento por ciclo:

$$W_d = - \oint F_d dx \quad (2.2)$$

De uma forma geral, W_d é uma função de vários fatores, tais como a frequência, amplitude e temperatura do meio.

Para um sistema massa-mola com amortecimento viscoso, submetido a uma força de excitação $F = F_0 \text{sen}(\omega t)$, a resposta permanente do movimento é:

$$x = X \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (2.3)$$

onde:

X é a amplitude da resposta;

ω é a frequência de excitação e

ϕ é o ângulo de fase entre a força de excitação e resposta.

A energia dissipada por ciclo de vibração pode ser obtida pelas equações (2.1), (2.2) e (2.3):

$$\begin{aligned} W_d &= -\oint F_d dx \\ &= \oint c \frac{dx}{dt} dx \\ &= \oint c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt \\ &= \oint c (X\omega \cos(\omega t - \phi))^2 dt \\ &= c\omega^2 X^2 \underbrace{\int_0^\tau \cos^2(\omega t - \phi) dt}_{\pi/\omega} \\ &= \pi c\omega X^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde:

$\tau = 2\pi/\omega$ é o período da oscilação forçada.

A equação (2.4) indica que a energia dissipada por ciclo de oscilação é proporcional à frequência de excitação e ao quadrado da amplitude da resposta.

Derivando a equação (2.3) obtém-se:

$$\frac{dx}{dt} = X\omega \cos(\omega t - \phi) \quad (2.5)$$

Levando a equação (2.5) a equação (2.1) chega-se a:

$$F_d = c \frac{dx}{dt} = cX\omega \cos(\omega t - \phi) \quad (2.6)$$

Mas, partindo-se da equação (2.3), através de relações trigonométricas triviais, pode-se escrever que $\cos(\omega t - \phi) = (\sqrt{X^2 - x^2})/X$, que levado à equação (2.6) fornece:

$$F_d = c\omega \sqrt{X^2 - x^2} \quad (2.7)$$

A equação (2.7) rearranjada fornece:

$$\left(\frac{F_d}{c\omega X} \right)^2 + \left(\frac{x}{X} \right)^2 = 1 \quad (2.8)$$

Num plano x versus F_d a equação (2.8) representa uma elipse (figura de Lissajoux) como a mostrada na figura 2.1(a).

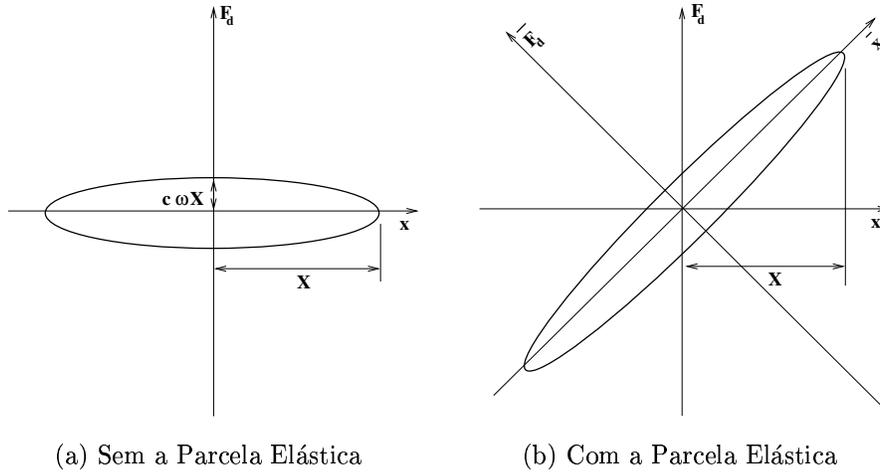


Figura 2.1: Elipses que Relacionam Força de Amortecimento e Amplitude de Deslocamentos ou Elipses de Lissajoux

A área delimitada por uma elipse pode ser calculada multiplicando-se π por seus semi-eixos. Assim sendo a área (\mathcal{A}) da elipse da figura 2.1(a) é:

$$\mathcal{A} = \pi c\omega X^2 \quad (2.9)$$

Observando as equações (2.4) e (2.9), conclui-se que a área delimitada pela elipse definida pela equação (2.8) representa a energia dissipada por ciclo de oscilação.

Se no entanto for adicionada a parcela relativa à parcela elástica da mola kx à força de amortecimento viscoso F_d , o gráfico resultante ($F_d + kx$) versus x resulta em uma elipse rotacionada conforme ilustra a figura 2.1(b)

Esta elipse pode ser obtida fazendo-se a adição de coordenadas F_d e kx para cada ponto das relações.

Chamando de (κ) o ângulo de rotação da elipse da figura 2.1(b) com relação ao eixo x , pode-se escrever:

$$\kappa = \arctan(k) \quad (2.10)$$

A área da elipse rotacionada $\overline{\mathcal{A}}$ pode ser obtida multiplicando-se π pelos valores dos semi-eixos no referencial $\overline{x} \times \overline{F}_d$. O semi-eixo maior e_1 e o menor e_2 da elipse rotacionada podem ser escritos em função de κ e dos semi-eixos no referencial $x \times F_d$, utilizando-se relações trigonométricas triviais:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{X}{\cos \kappa} = X\sqrt{1+k^2} \\ e_2 &= (c\omega X) \cos \kappa = \frac{c\omega X}{\sqrt{1+k^2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Logo, pode-se escrever a área da elipse rotacionada no sistema $\bar{x} \times \bar{F}_d$ como:

$$\bar{\mathcal{A}} = \pi e_1 e_2 = \pi c \omega X^2 \quad (2.12)$$

As equações (2.4), (2.9) e (2.12) permitem que se conclua que $W_d = \mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} = \pi c \omega X^2$ e, conseqüentemente, pode-se dizer que a energia dissipada para um sistema com amortecimento viscoso não depende de sua parcela elástica.

Para sistemas não lineares ou com amortecimento histerético, o gráfico F_d versus x é uma figura geométrica fechada, porém não mais uma elipse. Estas curvas, elípticas ou não, são chamadas ciclos de histerese. A área interna a este ciclo sempre representa W_d (energia dissipada por ciclo de oscilação).

O amortecimento também pode ser definido em termos da energia dissipada (W_d) e o pico de energia potencial (U) [17]:

$$\eta = \frac{W_d}{2\pi U} \quad (2.13)$$

onde η é chamado fator de perda, sendo $U = kx^2/2$. Fisicamente η é a razão entre a energia dissipada por radiano e o pico de energia potencial.

Outra forma de se caracterizar o amortecimento encontrada na literatura é através do coeficiente denominado taxa de amortecimento (ξ), sendo [22]:

$$\xi = \frac{W_d}{4\pi U} = \frac{\eta}{2} \quad (2.14)$$

2.2 Modelos Viscoelásticos Unidimensionais

O material viscoelástico é às vezes chamado de “material com memória”. Isso porque sua resposta depende do histórico do carregamento, não apenas do valor da carga no instante analisado.

Sua caracterização é feita basicamente através de integrais de convolução ou de leis constitutivas de modelos matemáticos que relacionam tensão deformação [23]. Esta última forma de caracterização de um material viscoelástico foi a adotada neste trabalho.

Os modelos que visam caracterizar o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos são obtidos através de associações entre mola(s) linear(es) e amortecedor(es) viscoso(s). A seguir são mostrados alguns destes modelos.

2.2.1 Modelo de Maxwell

Este modelo é definido por uma mola de constante k e um amortecedor de constante c associados em série conforme ilustra figura 2.2.



Figura 2.2: Modelo de Maxwell

Para uma força F é aplicada neste modelo, o alongamento total u é igual ao somatório do alongamento elástico da mola u_e com o alongamento do elemento viscoso u_v :

$$u = u_e + u_v \quad (2.15)$$

Derivando a equação (2.15) com relação ao tempo, obtém-se

$$\frac{du}{dt} = \frac{du_e}{dt} + \frac{du_v}{dt} \quad (2.16)$$

Sabendo-se que a força F é a mesma nos elementos elástico e viscoso e substituindo a equação constitutiva da mola ($F = ku$) e a equação (2.1) na equação (2.16), chega-se a:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{c} \quad (2.17)$$

A resposta u do modelo de Maxwell depende da força F aplicada. Se uma força F é aplicada instantaneamente no modelo de Maxwell e mantida constante, isto é, $F = F_0 H(t)$, o alongamento u pode ser determinado resolvendo a equação que segue:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{k} F_0 \delta(t) + \frac{1}{c} F_0 H(t) \quad (2.18)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac (pulso unitário) e $H(t)$ é a função unitária de Heaviside (função degrau).

Por integração da equação (2.18), aplicando a condição inicial $u(0) = 0$ obtém-se:

$$u(t) = F_0 \left(\frac{1}{k} + \frac{t}{c} \right) H(t) \quad (2.19)$$

A resposta de um modelo viscoelástico linear submetido a uma força constante é conhecida como Teste de Fluência.

Por outro lado, se um deslocamento $u = U_0 H(t)$ é aplicado e mantido constante, pode-se obter a força necessária para se manter este deslocamento substituindo $u = U_0 H(t)$ na equação (2.17), o que resulta:

$$U_0 \delta(t) = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{c} \quad (2.20)$$

A solução da equação acima pode ser obtida utilizando-se o método do fator de integração. Multiplicando-se os dois lados da equação (2.20) por $e^{kt/c}$ e efetuando-se a integração, obtém-se:

$$F(t) = U_0 k e^{-\frac{k}{c}t} H(t) \quad (2.21)$$

A resposta de um modelo viscoelástico linear submetido a um deslocamento constante é conhecida como Teste de Relaxação.

2.2.2 Modelo de Voigt

Este modelo é definido por uma mola de constante k e um amortecedor de constante c associados em paralelo conforme ilustra a figura 2.3.

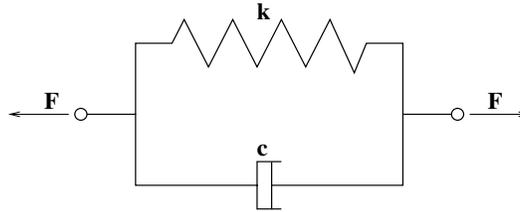


Figura 2.3: Modelo de Voigt

Quando uma força F é aplicada neste modelo, a soma da força F_e na mola e F_v no amortecedor é igual à força F aplicada:

$$F = F_e + F_v \quad (2.22)$$

Sabendo-se que os deslocamentos da mola e do amortecedor são iguais, chega-se à relação entre força e deslocamento, considerando a equação (2.22):

$$F = ku + c \frac{du}{dt} \quad (2.23)$$

Para o Teste de Fluência, ou seja, para uma força constante $F = F_0 H(t)$ aplicada instantaneamente num modelo de Voigt inicialmente indeformado, a equação (2.23) fornece a seguinte equação diferencial:

$$F_0 H(t) = ku + c \frac{du}{dt} \quad (2.24)$$

que pode ser resolvida usando o método do fator de integração fornecendo:

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{c}t}\right) H(t) \quad (2.25)$$

Para o teste de relaxação, ou seja, para um deslocamento constante $u = U_0 H(t)$ aplicado instantaneamente num modelo de Voigt inicialmente indeformado, a equação (2.23) fornece a seguinte solução para $F(t)$:

$$F(t) = [c\delta(t) + k] U_0 \quad (2.26)$$

2.2.3 Modelo Linear Padrão

Esse modelo é definido por duas molas de constantes k_1 e k_2 e um amortecedor de constante c_2 associados conforme ilustra a figura 2.4. O modelo linear padrão é a combinação de um modelo de Maxwell com uma mola linear conectados em paralelo.

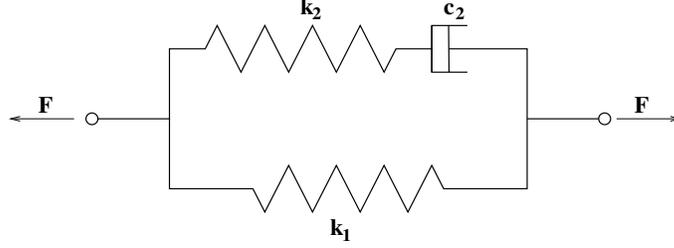


Figura 2.4: Modelo Linear Padrão

A equação diferencial para este modelo pode ser obtida considerando o equilíbrio:

$$F = F_1 + F_2 \quad (2.27)$$

onde F_1 é a força na mola e F_2 é a força no modelo de Maxwell.

Sabendo-se que as deformações na mola e no modelo de Maxwell são as mesmas, tem-se a relação na mola:

$$u = \frac{F_1}{k_1} \quad (2.28)$$

e substituindo-se as equações (2.27) e (2.28) no modelo de Maxwell (equação (2.17)), tem-se:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{k_2} \frac{dF_2}{dt} + \frac{F_2}{c_2} = \frac{1}{k_2} \left(\frac{dF}{dt} - k_1 \frac{du}{dt} \right) + \frac{1}{c_2} (F - k_1 u) \quad (2.29)$$

que, depois de rearranjada, fornece:

$$\frac{dF}{dt} + \frac{k_2}{c_2} F = (k_1 + k_2) \frac{du}{dt} + \frac{k_1 k_2}{c_2} u \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é a equação diferencial que relaciona força e deslocamento para o modelo linear padrão.

Para o teste de fluência tem-se a solução:

$$u(t) = \frac{F_0}{k_1} \left(1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} e^{-\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) c_2} t} \right) H(t) \quad (2.31)$$

e para o teste de relaxação:

$$F(t) = U_0 \left(k_1 + k_2 e^{-\frac{k_2}{c_2} t} \right) H(t) \quad (2.32)$$

As respostas para aplicação dos testes de fluência e relaxação, obtidas para os três modelos apresentados, estão mostradas graficamente nas figuras 2.5(a) e 2.5(b) respectivamente.

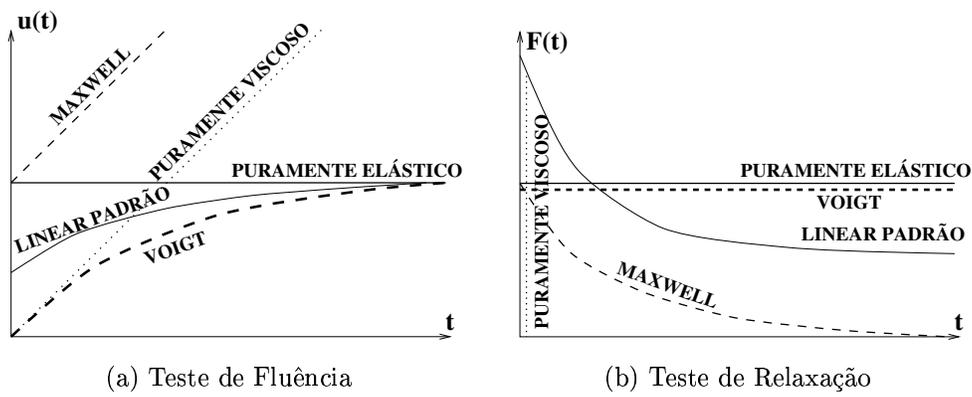


Figura 2.5: Teste de Fluência e Relaxação para Modelos Básicos

2.2.4 Modelos Generalizados

Os modelos generalizados são os obtidos por combinação dos modelos básicos de Maxwell, Voigt e Linear Padrão. A figura 2.6 mostra exemplos de modelos generalizados.

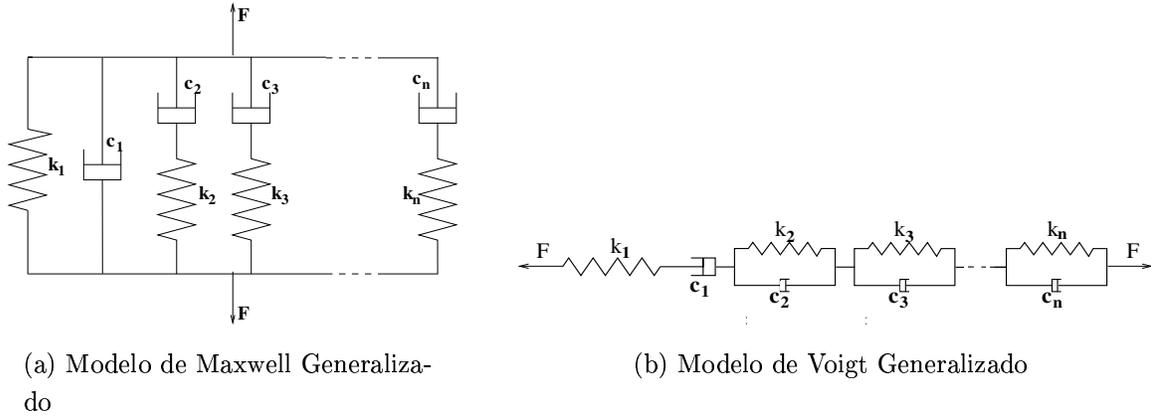


Figura 2.6: Exemplos de Modelos Generalizados

As expressões que relacionam forças e deslocamentos para este tipo de modelo são mais complexas e devem ser estudadas para cada caso específico, em face ao elevado número de possíveis combinações entre molas e amortecedores.

2.3 Equações Constitutivas Para Modelos Viscoelásticos Unidimensionais

As equações constitutivas que relacionam tensão com deformação podem ser obtidas aplicando-se uma tensão σ na extremidade de cada modelo ao invés de uma força F , considerando deformações ϵ ao invés de deslocamentos u , sendo:

$$\epsilon = \sigma/E \quad (2.33)$$

onde E é o módulo de elasticidade.

2.3.1 Relações Constitutivas no Domínio do Tempo (DT)

Para se obterem tais relações constitutivas aplicam-se tensões dependentes do tempo nas extremidades dos modelos, obtendo-se deformações também no domínio do tempo.

Matematicamente, este procedimento equivale a substituir F por σ e u por ϵ nas equações diferenciais que relacionam F com u , levando em conta a equação (2.33). Assim, a equação (2.30) por exemplo fica:

$$\sigma + a \frac{d\sigma}{dt} = E \left(\epsilon + b \frac{d\epsilon}{dt} \right) \quad (2.34)$$

onde E está associado com o termo k_1 , a com (c_2/k_2) e b com $[(k_1 + k_2)c_2/(k_1k_2)]$

2.3.2 Relações Constitutivas no Domínio da Frequência (DF)

De todas as maneiras usadas para descrever o comportamento dinâmico e reológico de materiais viscoelásticos, a representação por meio de módulos complexos talvez seja a mais comumente utilizada.

Utilizando módulos complexos, as relações constitutivas estarão expressas no domínio da frequência. Para demonstrar esta afirmação, basta aplicar um carregamento dependente do tempo na forma $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$ e a conseqüente deformação $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ nas equações constitutivas no domínio do tempo. Para estas expressões de tensão e deformação, a equação (2.34), por exemplo, fornece:

$$\sigma_0 = E\epsilon_0 \left(\frac{1 + i\omega b}{1 + i\omega a} \right) \quad (2.35)$$

onde σ_0 é a amplitude do carregamento; ϵ_0 a amplitude de resposta; ω a frequência de excitação e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

A equação (2.35) é independente do tempo e dependente da frequência de excitação e como relaciona tensão com deformação, pode-se então identificá-la como equação constitutiva no domínio da frequência.

A equação (2.35) pode ser escrita numa notação mais comumente usada:

$$\sigma = E^*(\omega)\epsilon = [E'(\omega) + iE''(\omega)]\epsilon \quad (2.36)$$

onde

$$E' = \frac{1 + \omega^2 ab}{1 + \omega^2 a^2} E \quad (2.37)$$

e

$$E'' = \frac{\omega(b - a)}{1 + \omega^2 a^2} E \quad (2.38)$$

Nas equações (2.37) e (2.38), E' e E'' são dependentes da frequência e chamados de módulo de armazenamento e módulo de perda respectivamente e suas caracterizações devem ser feitas experimentalmente para cada material.

Com a utilização de módulos complexos no DF, as equações do movimento também devem estar definidas no DF. Para se retornar ao DT, basta fazer a transformada inversa de Fourier.

O fator de perda η , que foi definido na equação (2.13), também pode ser escrito em função dos módulos de armazenamento e de perda como sendo [17]:

$$\eta = \frac{W_d}{2\pi U} = \frac{E''}{E'} \quad (2.39)$$

2.3.3 Relações Constitutivas no Domínio de Laplace (DL)

As relações constitutivas no DF são convertidas para o DL, e vice-versa, através de uma simples mudança de variável. Trocam-se as variáveis $i\omega$ no DF para s no DL. Desta forma a equação (2.36) pode ser reescrita na forma:

$$\sigma = \mathcal{E}(s)\epsilon \quad (2.40)$$

onde $s = i\omega$ é a variável de Laplace e \mathcal{E} é o módulo de elasticidade expresso no domínio de Laplace.

\mathcal{E} é função dos parâmetros de rigidez (k) e amortecimento (c) das molas e amortecedores do modelo adotado, bem como da maneira com que estes elementos são associados. De uma maneira geral, \mathcal{E} pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{E}(s) = \varepsilon + h(s) \quad (2.41)$$

onde ε relaciona a parcela elástica entre as tensões σ e a deformação ϵ e $h(s)$ é chamada de função de dissipação.

Vários autores propuseram alternativas para as funções de dissipação $h(s)$. A tabela 2.1, extraída da referência [10], mostra algumas destas propostas.

Os parâmetros que aparecem na tabela 2.1 são extraídos diretamente de curvas experimentais.

Uma boa representação do módulo complexo no domínio de Laplace é de fundamental importância para a modelagem de MVEs adotada no presente trabalho.

Tabela 2.1: Funções de Dissipação

função	Autor, ano
$h(s) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i s}{s+b_i}$	M. A. Biot, 1955
$h(s) = \frac{E_1 s^\alpha - E_0 b s^\beta}{1+b s^\beta}$ $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$	R. L. Bagley, P. J. Torvik, 1981
$h(s) = a s \int_0^\infty \frac{\gamma(p)}{s+p} dp$ $\gamma(p) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq p \leq b \\ 0, & \text{fora do intervalo} \end{cases}$	K. J. Buhariwala, 1982

2.4 Considerações para Problemas Bi e Tri-Dimensionais

As equações constitutivas até aqui apresentadas envolvem problemas unidimensionais. Equações constitutivas associadas a modelos bi e tridimensionais podem ser obtidas estendendo-se os conceitos unidimensionais básicos, considerando-se as deformações lineares e angulares nas demais direções.

Como os materiais viscoelásticos são homogêneos e isotrópicos [4], faz-se necessário determinar apenas dois parâmetros para se definir o estado de tensão em função das deformações:

- Módulo Complexo de Elasticidade Longitudinal: $E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega)$ e
- Módulo Complexo de Elasticidade Transversal: $G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$

As relações tensão/deformação da elasticidade clássica são levadas para o campo da viscoelasticidade no domínio da frequência, substituindo-se o parâmetro real pelo correspondente valor complexo, conforme equação (2.36). Desta forma tem-se:

$$\sigma = E^* \epsilon = (E' + iE'') \epsilon = E' (1 + i\eta_\epsilon) \epsilon \quad (2.42)$$

$$\tau = G^* \gamma = (G' + iG'') \gamma = G' (1 + i\eta_\gamma) \gamma \quad (2.43)$$

onde ϵ é a deformação longitudinal; γ é a deformação transversal devido ao cisalhamento ou distorção angular; η_ϵ é o fator de perda longitudinal e η_γ é o fator de perda transversal.

Também da elasticidade clássica sabe-se que as constantes E' e G' estão relacionadas segundo a expressão [24]:

$$G' = \frac{E'}{2(1 + \nu)} \quad (2.44)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

De posse do coeficiente de Poisson, que relaciona E' e G' para o material viscoelástico estudado, e sabendo-se que $\eta_\epsilon \approx \eta_\gamma = \eta$ [4], os parâmetros experimentais a serem determinados para se estabelecerem as relações constitutivas de materiais viscoelásticos, observando as equações (2.43), são:

- O Fator de perda: η e
- Um Módulo de armazenamento: E' ou G' .

Os módulos de armazenamento E' e G' estão diretamente relacionados com a parcela elástica do MVE. Por este motivo, o presente trabalho muitas vezes utiliza o termo “módulo de elasticidade” para se referir a um módulo de armazenamento. Além disso, caso não se tenha especificado a qual módulo de armazenamento se refere o termo “módulo de elasticidade”, fica subentendido que a intenção é de se denominar o módulo de armazenamento longitudinal.

Tanto o módulo de armazenamento como o fator de perda variam com fatores externos como frequência de excitação, amplitude de deformações, temperatura e pré-carga estática, aumentando a complexidade para obtê-los experimentalmente. A próxima seção traz alguns comentários sobre os ensaios experimentais que são usados para determinar estes parâmetros.

2.5 Determinação dos Parâmetros Experimentais

Esta seção é uma breve apresentação de métodos usados para a determinação das propriedades dinâmicas do material viscoelástico. Para maiores detalhes consultar referências [4], [17] e [25] :

Existem várias técnicas para se determinarem as propriedades dinâmicas de materiais amortecedores. As mais usadas são:

- Teste de Ressonância de Viga (BEAM);

- Analisador Mecânico Dinâmico (DMA) e
- Análise Reológica - Rheovibron (RHEO).

A *American Society for Testing and Material* (ASTM) apresenta um método denominado Método de Teste Padrão para Medição de Propriedades de Materiais Amortecedores de Vibração que é baseado no Teste de Ressonância de Viga [26].

Outra técnica, desenvolvida no Laboratório de Análise Dinâmica e Processamento de Imagens e Sinais, LADEPIS, do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, faz a determinação das propriedades dinâmicas dos MVE através de ensaios de rigidez com medição direta [4].

É importante observar que as propriedades de amortecimento de materiais viscoelásticos não são facilmente determinadas. É bastante comum observar variações consideráveis entre ensaios realizados com o mesmo material [25]. A figura 2.7, extraída da referência [27], mostra uma comparação entre curvas características de Módulos de Armazenamento, E' (Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade), e Fatores de Perda, η , obtidas através de três diferentes técnicas para o material viscoelástico fabricado pela empresa 3M chamado ISD-112 (*Industrial Scotchdamp-112*).

O ábaco da figura 2.7 é facilmente manuseado. Para se determinar, por exemplo, o Módulo de Young (Módulo de Elasticidade) e o Fator de Perda do material viscoelástico ISD-112 a uma temperatura de 67°F (19,4°C) e a uma frequência de 200 Hz deve-se:

1. Localizar o ponto de frequência 200 Hz no eixo da direita;
2. Traçar uma horizontal a partir deste ponto até a linha correspondente a 67°F;
3. Na interseção traçar uma linha vertical e
4. Ler os valores de E' e η nos respectivos eixos da esquerda no cruzamento entre a linha vertical e o gráfico apropriado. Neste exemplo obtém-se $E' = 600$ psi e $\eta = 1, 2$, ambos na curva BEAM.

A figura 2.7 mostra a falta de concordância entre os resultados nas diferentes técnicas usadas. Em altas frequências, por exemplo, as variações dos valores obtidos para E' chegam a extremos da ordem de 4000 %.

O próximo capítulo apresenta um método para se tratar e modelar as propriedades dependentes da frequência de um MVE no domínio do tempo com um enfoque voltado para o uso do MEF.

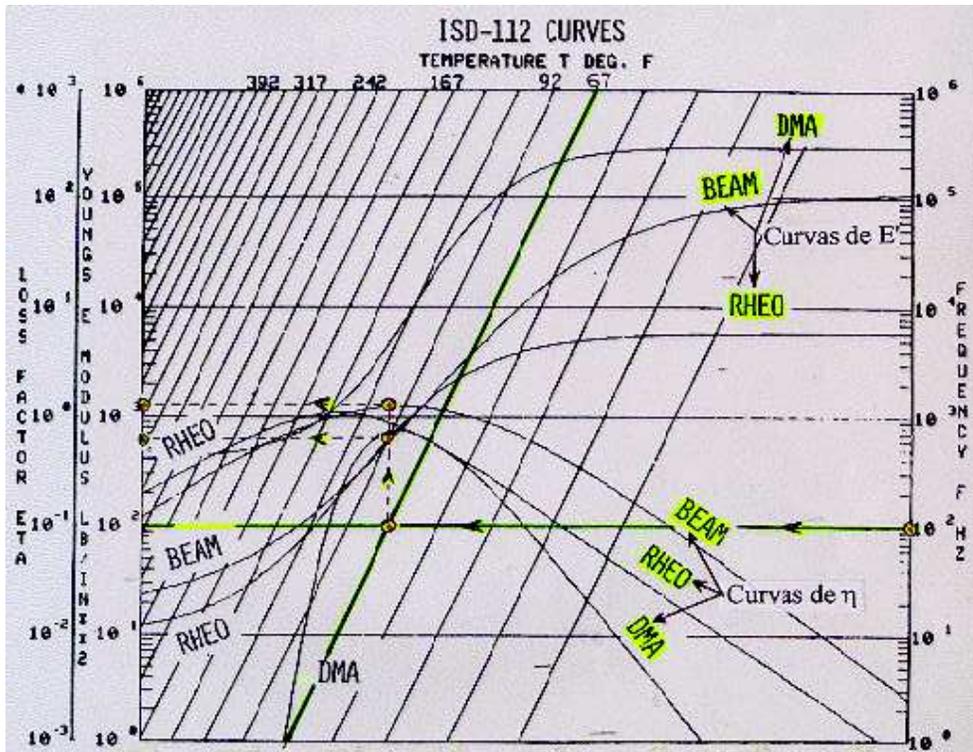


Figura 2.7: Comparação entre curvas de dados obtidas através de três diferentes técnicas

Capítulo 3

Método GHM - Formulação de MVE Utilizando o MEF

3.1 Introdução

A representação das propriedades dependentes da frequência de materiais viscoelásticos é difícil de ser feita, especialmente no domínio do tempo. O Método de Golla-Huges (GHM) apresenta uma solução para este problema através de um modelo para módulos complexos no domínio de Laplace.

Este método é bastante adequado a formulações de elementos finitos, pois suas equações de movimento de segunda ordem têm coeficientes constantes e geram matrizes simétricas.

O sistema de equações de movimento resultante da aplicação do MEF no GHM pode ser resolvido tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

O método consiste na determinação de um sistema dinâmico, expresso no domínio do tempo, equivalente a um problema envolvendo materiais viscoelásticos modelados no domínio de Laplace. Neste sistema equivalente as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são aumentadas por alguns Graus de Liberdade (GL) adicionais, chamados de *GLs de dissipação*.

As próximas seções visam a dar uma noção detalhada sobre o GHM, visto que as abordagens do tema feitas por Golla *et al* [10] e por Gibson *et al* [11] deixam algumas lacunas no que se refere às passagens matemáticas para a demonstração do método, não permitindo o seu total entendimento, o que é ainda agravado pelo jargão técnico de Engenharia Elétrica utilizado no texto da referência [10].

3.2 Formulação Matemática

3.2.1 Representação Matemática do Módulo Complexo no Domínio de Laplace

Um passo importante do GHM é a escolha da função de dissipação $h(s)$ (tabela 2.1) e conseqüentemente da aproximação matemática do módulo complexo no domínio de Laplace (item 2.3.3), lembrando que $\mathcal{E}(s) = \varepsilon + h(s)$ (equação (2.41)).

A função de dissipação $h(s)$ é a única propriedade do material viscoelástico cuja representação matemática deve ser escolhida. Para o presente trabalho, adota-se a representação usada por Biot (ver tabela 2.1), pois segundo Golla *et al* [10] a representação de Biot está de acordo com a teoria clássica de funções de transferência racionais no domínio de Laplace usada no GHM.

Desta maneira, tem-se para $h(s)$, com a utilização de dois termos da série :

$$h(s) = \frac{a_1 s}{s + b_1} + \frac{a_2 s}{s + b_2} \quad (3.1)$$

que também pode ser escrita na forma:

$$h(s) = \frac{\alpha s^2 + \gamma s}{s^2 + \beta s + \delta} \quad (3.2)$$

onde: $\alpha = a_1 + a_2$, $\gamma = a_1 b_2 + a_2 b_1$, $\beta = b_1 + b_2$ e $\delta = b_1 b_2$, sendo $(\alpha, \beta, \delta, \text{ e } \gamma) > 0$

3.2.2 Formulação para um Grau de Liberdade

Partindo da equação diferencial de movimento para um GL no domínio de Laplace:

$$\{s^2 \mathcal{M} + [\varepsilon + h(s)] \mathcal{K}\} q(s) = f(s) \quad (3.3)$$

tem-se por objetivo determinar sua transformada inversa e expressar a equação (3.3) no domínio do tempo, sendo: \mathcal{M} a massa do sistema; \mathcal{K} a rigidez do sistema normalizada com relação ao módulo de elasticidade; $f(s)$ a excitação e $q(s)$ o GL do sistema.

Para tal é necessário conhecer a Transformada Inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1}) de cada termo presente na equação (3.3). Com exceção do termo $h(s)q(s)$, todos os demais têm \mathcal{L}^{-1} bem simples. O GHM, ao invés de buscar a $\mathcal{L}^{-1}[h(s)q(s)]$ de uma forma clássica, admite que exista $\mathcal{H} = \mathcal{L}^{-1}[h(s)q(s)]$ e que pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} M & m \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} D & d \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} K & k \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{H} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

onde M , D , K , m , d e k são incógnitas e z é um GL adicional

Pode-se observar que a equação (3.4) é composta por matrizes simétricas, o que facilita utilização de pacotes de programas computacionais desenvolvidos para matrizes com esta característica.

Para atestar a adequação da forma da equação matricial (3.4) é necessário que sua primeira linha contenha uma equação que represente $\mathcal{L}^{-1}[h(s)q(s)] = \mathcal{H}$ e sua segunda linha represente uma identidade. Com este intuito, faz-se a expansão da equação (3.4), o que resulta:

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + m\ddot{z} + \beta D\dot{q} + \beta d\dot{z} + \delta Kq + \delta kz &= \mathcal{H} \\ m\ddot{q} + \ddot{z} + \beta d\dot{q} + \beta \dot{z} + \delta kq + \delta z &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Fazendo as transformadas dos termos das equações (3.5) vem:

$$\begin{aligned} Mq(s)s^2 + mz(s)s^2 + \beta Dq(s)s + \beta dz(s)s + \delta Kq(s) + \delta kz(s) &= h(s)q(s) \\ mq(s)s^2 + z(s)s^2 + \beta dq(s)s + \beta z(s)s + \delta kq(s) + \delta z(s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

e agrupando os termos em $q(s)$ e $z(s)$:

$$\begin{aligned} (Ms^2 + \beta Ds + \delta K)q(s) + (ms^2 + \beta ds + \delta k)z(s) &= h(s)q(s) \\ (ms^2 + \beta ds + \delta k)q(s) + (s^2 + \beta s + \delta)z(s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Isolando $z(s)$ na segunda equação (3.7), substituindo na primeira equação (3.7), lembrando que $h(s)$ é dada pela equação (3.2) e dividindo ambos os membros por $q(s)$ tem-se:

$$(Ms^2 + \beta Ds + \delta K) - \frac{(ms^2 + \beta ds + \delta k)^2}{s^2 + \beta s + \delta} = \frac{\alpha s^2 + \gamma s}{s^2 + \beta s + \delta} \quad (3.8)$$

Agrupando os coeficientes que acompanham cada potência de s na equação (3.8), pode-se chegar após algumas transformações a:

$$\begin{aligned} (M - m^2)s^4 + (M\beta + D\beta - 2md\beta)s^3 + \\ + (M\delta + D\beta^2 + K\delta - d^2\beta - 2mk\delta - \alpha)s^2 + \\ + (D\beta\delta + K\beta\delta - 2dk\beta\delta - \gamma)s + (K\delta^2 - k\delta^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para que a equação (3.9) seja satisfeita, cada coeficiente de s deverá se anular, o que resulta num conjunto de 5 equações algébricas:

$$\begin{aligned} M - m^2 &= 0 \\ M + D - 2md &= 0 \quad (\beta \neq 0) \\ M\delta + D\beta^2 + K\delta - d^2\beta^2 - 2mk\delta &= \alpha \\ D + K - 2dk &= \gamma/(\beta\delta) \quad (\beta\delta \neq 0) \\ K - k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Uma vez obedecidas as equações (3.10), o sistema equivalente a $\mathcal{L}^{-1}[h(s)q(s)]$ descrito na equação (3.4) fica satisfeito para valores em regime ($t > 0$). Para que o sistema equivalente represente corretamente $\mathcal{L}^{-1}[h(s)q(s)]$ também para valores iniciais (q_o, z_o) , deverá se ter $\mathcal{H}(q_o, z_o) = 0$, pois devido à função de dissipação $h(s)$ adotada, o sistema só passa a dissipar energia após o tempo $t = 0$. Para tal deve-se agregar as equações (3.11) que se seguem ao conjunto de equações (3.10).

$$\begin{aligned} M - m^2 &= 0 \\ D - d^2 &= 0 \\ m &= d \end{aligned} \tag{3.11}$$

A justificativa é: partindo de condições iniciais escolhidas de maneira que¹

$$\begin{aligned} z_o &= -dq_o \\ \dot{z}_o &= -d\dot{q}_o \\ \ddot{z}_o &= -d\ddot{q}_o \end{aligned} \tag{3.12}$$

e considerando as equações (3.11), é possível verificar por simples inspeção que apenas o terceiro produto matricial da equação (3.4) não se anulará resultando em:

$$\begin{aligned} Kq_o - dkq_o &= \frac{\mathcal{H}(q_o, z_o)}{\delta} \quad (\delta \neq 0) \\ kq_o - dq_o &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Levando a quinta equação (3.10) ($K = k^2$) na primeira equação (3.13), chega-se então a:

$$\begin{aligned} (k - d)q_o &= \frac{\mathcal{H}(q_o, z_o)}{\delta k} \quad (k \neq 0) \\ (k - d)q_o &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

que permite concluir que $\mathcal{H}(q_o, z_o) = 0$, conforme queríamos demonstrar.

Adicionando a segunda equação (3.11) às 5 equações (3.10), tem-se um sistema com 6 equações com 4 variáveis conhecidas (α, β, δ e γ) e seis desconhecidas (M, D, K, m, d e k). Após uma pequena manipulação algébrica este sistema fica:

$$\begin{aligned} M - m^2 &= 0 \\ D - d^2 &= 0 \\ K - k^2 &= 0 \\ M + D - 2md &= 0 \\ M + K - 2mk &= \alpha/\delta \\ D + K - 2dk &= \gamma/(\beta\delta) \end{aligned} \tag{3.15}$$

¹Até o final deste item poderá se concluir que a variável d das equações (3.12) pode ser arbitrada, permitindo assim qualquer configuração inicial

A solução do sistema de equações (3.15), deverá também satisfazer à terceira equação (3.11), lembrando que a primeira equação (3.11) é idêntica à primeira equação (3.15).

Eliminando M , D e K das três últimas equações (3.15), resulta:

$$\begin{aligned}(m - d)^2 &= 0 \\(m - k)^2 &= \alpha/\delta \\(d - k)^2 &= \gamma/(\beta\delta)\end{aligned}\tag{3.16}$$

A primeira equação (3.16) atesta que $m = d$, satisfazendo à terceira equação (3.11), conforme anteriormente salientado.

A solução final de (3.15) então fica: manipulando as equações (3.16) de forma a escrever a terceira equação em função dos parâmetros (α , β , δ e γ), conclui-se que a solução só existe para $\gamma = \alpha\beta$, embora esta condição não produza uma solução única. Uma das variáveis incógnitas pode ser escolhida arbitrariamente². Escolhendo $d = 0$ (variável de dissipação z partindo do repouso - equações (3.12)), a solução final do sistema das equações (3.15) fica³:

$$\begin{aligned}D &= 0 \\M &= 0 \\K &= \alpha/\delta \\d &= 0 \\m &= 0 \\k &= \sqrt{\alpha/\delta}\end{aligned}\tag{3.17}$$

e o sistema equivalente descrito na equação (3.4) fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \alpha/\delta & \sqrt{(\alpha/\delta)} \\ \sqrt{(\alpha/\delta)} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{H} \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{3.18}$$

A equação (3.18) pode ser reescrita numa forma mais elegante fazendo-se uma troca de variáveis: $\hat{z} = z\sqrt{\delta/\alpha}$, o que resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\hat{z}}\sqrt{\alpha/\delta} \end{Bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\hat{z}}\sqrt{\alpha/\delta} \end{Bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \alpha/\delta & \sqrt{\alpha/\delta} \\ \sqrt{\alpha/\delta} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \hat{z}\sqrt{\alpha/\delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{H} \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{3.19}$$

²Conforme afirmado anteriormente, a variável d , por exemplo, pode ser escolhida arbitrariamente

³Embora a segunda equação (3.16) admita um par de raízes, as soluções resultantes são fundamentalmente equivalentes

e após multiplicar a segunda relação da equação matricial (3.19) por $\sqrt{\alpha/\delta}$ e rearranjos chega-se a:

$$\alpha/\delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \frac{\alpha\beta}{\delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{H} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Voltando à equação (3.3) e escrevendo sua \mathcal{L}^{-1} vem:

$$\mathcal{M}\ddot{q}(t) + \varepsilon\mathcal{K}q(t) + \mathcal{K}\mathcal{H} = f(t) \quad (3.21)$$

Finalmente, a substituição do valor de \mathcal{H} da equação (3.20) na equação (3.21), após alguns agrupamentos matriciais e omissão da variável (t) fornece:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \alpha/\delta \mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta/\delta \mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon + \alpha)\mathcal{K} & \alpha\mathcal{K} \\ \alpha\mathcal{K} & \alpha\mathcal{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

A variável \hat{z} é chamada de *variável de dissipação* e uma interpretação para a mesma pode ser feita com a ilustração mecânica mostrada na figura 3.1, onde \hat{z} aparece como um deslocamento de um oscilador amortecido atuando em paralelo com a mola principal. Entretanto, esta analogia mecânica não deve ser interpretada literalmente, pois o GL adicionado não tem qualquer significado físico definido.

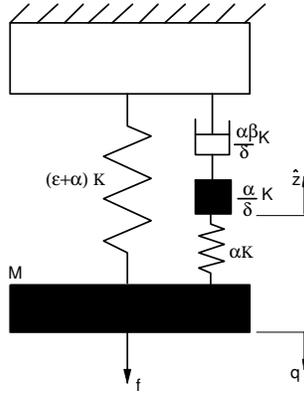


Figura 3.1: Interpretação do GHM para 1 GL

O sistema da figura 3.1 apresenta características semelhantes às dos modelos viscoelásticos apresentados na seção 2.2, ratificando que a associação de molas elásticas e amortecedores viscosos pode simular o comportamento dinâmico de MVEs.

3.2.3 Generalização para n Graus de Liberdade

Considerando agora o modelo estrutural:

$$[s^2\mathbf{M}^e + \varepsilon\mathbf{K}^e]\mathbf{q}(s) = \mathbf{f}(s) \quad (3.23)$$

onde

$$\mathcal{E} = [\varepsilon + h(s)] \quad (3.24)$$

$$h(s) = \frac{\alpha(s^2 + \beta s)}{s^2 + \beta s + \delta} \quad (3.25)$$

e \mathbf{M}^e e \mathbf{K}^e são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez relativas a um elemento de comportamento elástico, salientando que os termos da matriz \mathbf{K}^e não contêm o módulo de elasticidade. Este último está contido em \mathcal{E} .

Usando procedimento análogo ao usado no item anterior pode-se chegar a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^e & 0 \\ 0 & \alpha/\delta \mathbf{K}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta/\delta \mathbf{K}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon + \alpha)\mathbf{K}^e & \alpha\mathbf{K}^e \\ \alpha\mathbf{K}^e & \alpha\mathbf{K}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

A matriz \mathbf{K}^e inclui modos relativos a movimentos de corpo rígido (seis para um elemento tridimensional). Com isso, a equação (3.26) deve sofrer modificações para evitar incluir forças de amortecimento associadas a movimentos de corpo rígido. O procedimento de redução que se segue elimina estas forças.

Fatorando \mathbf{K}^e segundo sua decomposição espectral:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}_e \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}_e^T \quad (3.27)$$

onde:

$\mathbf{R}_e = [\mathbf{R}_r, \mathbf{R}_f]$ é a matriz cujas colunas são os autovetores de \mathbf{K}^e associados com os modos de corpo rígido (\mathbf{R}_r) e os autovetores associados com os modos do elemento flexível (\mathbf{R}_f)

$\mathbf{\Lambda} = \text{diagonal}[\mathbf{0}, \mathbf{\Lambda}_f]$ é uma matriz diagonal com os autovalores de \mathbf{K}^e associados com os modos de corpo rígido ($\mathbf{0}$ - matriz de elementos nulos) e os autovalores associados com os modos de deformação ($\mathbf{\Lambda}_f$)

Definindo

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_f \mathbf{\Lambda}_f^{1/2} \quad (3.28)$$

e fazendo a substituição

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{R} \mathbf{z} \quad (3.29)$$

a qual efetivamente elimina as coordenadas de dissipação associadas aos modos de corpo rígido, chega-se finalmente a equação:

$$\mathbf{M}^v \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \mathbf{C}^v \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \mathbf{K}^v \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

onde

$$\mathbf{M}^v = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^e & 0 \\ 0 & \alpha/\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{C}^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta/\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K}^v = \begin{bmatrix} (\varepsilon + \alpha)\mathbf{K}^e & \alpha\mathbf{R} \\ \alpha\mathbf{R}^T & \alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade.

Assim sendo, a dimensão das matrizes viscoelásticas de um elemento hexaédrico linear, por exemplo, será: 8 nós \times 3 GLs por nó - 6 GLs de corpo rígido = 18.

3.3 Matrizes para Elemento Unidimensional

Seja um elemento unidimensional, constituído de MVE e ilustrado na figura 3.2.



Figura 3.2: Elemento de MVE Unidimensional

As matrizes elásticas⁴ \mathbf{M}^e e \mathbf{K}^e do problema são:

$$\mathbf{M}^e = \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{K}^e = \chi^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

para

$$\mu = \rho AL/2 \quad e \quad \chi^2 = A/L$$

sendo ρ a massa por unidade de volume; A a área da seção transversal da barra e L o comprimento da barra.

Os autovalores de \mathbf{K}^e estão dispostos na matriz $\mathbf{\Lambda} = \text{diagonal} [\mathbf{0}, \mathbf{\Lambda}_f]$ que segue

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\chi^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

e seus autovetores nas colunas da matriz $\mathbf{R}^e = [\mathbf{R}_r, \mathbf{R}_f]$:

⁴Para matriz de massa discreta.

$$\mathbf{R}_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

sendo $\mathbf{R}_r = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{R}_f = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Substituindo os valores de \mathbf{R}_f e Λ_f na equação (3.28), tem-se para matriz \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_f \Lambda_f^{1/2} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [2\chi^2]^{1/2} = \chi \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Substituindo as matrizes \mathbf{R} , \mathbf{K}^e e \mathbf{M}^e nas equações (3.31), (3.32) e (3.33) chega-se às matrizes para um elemento viscoelástico unidimensional:

$$\mathbf{M}^v = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/\delta \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{C}^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta/\delta \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{K}^v = \begin{bmatrix} \theta\chi^2 & -\theta\chi^2 & -\alpha\chi \\ -\theta\chi^2 & \theta\chi^2 & \alpha\chi \\ -\alpha\chi & \alpha\chi & \alpha \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

onde $\theta = (\varepsilon + \alpha)$.

3.4 Matrizes para Elementos Quadriláteros

Nesta seção serão feitas considerações sobre as matrizes de massa, rigidez e amortecimento para um elemento quadrilátero linear em estado plano de tensões, ilustrado na figura 3.3.

A dimensão (*Dim*) das matrizes viscoelásticas é obtida a partir do número de GLs físicos do elemento e do número de possíveis movimentos de corpo rígido (ver item 3.2.3).

Assim sendo, para o elemento em questão tem-se:

$$Dim = 2 * (\text{número de GLs físicos}) - (\text{número de possíveis movimento de corpo rígido})$$

$$Dim = 2 * 8 - 3 = 13$$

Observando-se as equações (3.31), (3.32) as matrizes \mathbf{M}^v e \mathbf{C}^v para este elemento podem ser obtidas de forma trivial e ficam:

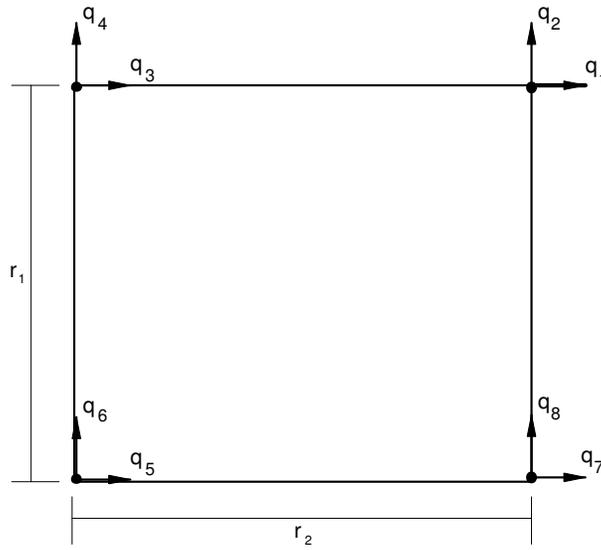


Figura 3.3: Elemento Quadrilátero

$$\mathbf{M}^v = \text{diagonal} \left[\underbrace{\mu, \mu, \dots, \mu}_{8 \text{ vezes}}, \underbrace{\alpha/\delta, \alpha/\delta, \dots, \alpha/\delta}_{5 \text{ vezes}} \right] \quad (3.41)$$

e

$$\mathbf{C}^v = \text{diagonal} \left[\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{8 \text{ vezes}}, \underbrace{\alpha\beta/\delta, \alpha\beta/\delta, \dots, \alpha\beta/\delta}_{5 \text{ vezes}} \right] \quad (3.42)$$

onde $\mu = \frac{1}{4} \rho A \phi$, sendo A a área do elemento, ρ a massa por unidade de volume e ϕ a espessura.

Já a matriz \mathbf{K}^v exige um desenvolvimento algébrico mais elaborado e complexo, diferentemente da \mathbf{K}^v obtida para a treliça do elemento unidimensional (seção 3.3). Isso é devido ao maior número de GLs agora envolvidos, o que dificulta a solução algébrica dos auto-valores e auto-vetores de \mathbf{K}^v .

Assim sendo, a determinação de \mathbf{K}^v neste caso é feita numericamente. Utiliza-se aqui o método de Jacobi na solução do problema de auto-valor e em seguida fazem-se as devidas substituições na equação (3.33) chegando-se à matriz \mathbf{K}^v .

A título de ilustração, para o elemento com a configuração descrita na figura 3.3, para $r_1/r_2 = 1$, $\nu = 0,25$ e espessura unitária, tem-se para a matriz de rigidez viscoelástica:

$$\mathbf{K}^v = \begin{bmatrix} 0,489\theta & 0,167\theta & -0,289\theta & -0,033\theta & -0,244\theta & -0,167\theta & 0,044\theta & 0,033\theta & -0,307\alpha & 0,168\alpha & 0,366\alpha & -0,256\alpha & 0,408\alpha \\ 0,167\theta & 0,489\theta & 0,033\theta & 0,044\theta & -0,167\theta & -0,244\theta & -0,033\theta & -0,289\theta & -0,168\alpha & -0,307\alpha & 0,256\alpha & 0,366\alpha & 0,408\alpha \\ -0,289\theta & 0,033\theta & 0,489\theta & -0,167\theta & 0,044\theta & -0,033\theta & -0,244\theta & 0,167\theta & 0,307\alpha & -0,168\alpha & 0,256\alpha & 0,366\alpha & -0,408\alpha \\ -0,033\theta & 0,044\theta & -0,167\theta & 0,489\theta & 0,033\theta & -0,289\theta & 0,167\theta & -0,244\theta & 0,168\alpha & 0,307\alpha & -0,366\alpha & 0,256\alpha & 0,408\alpha \\ -0,244\theta & -0,167\theta & 0,044\theta & 0,033\theta & 0,489\theta & 0,167\theta & -0,289\theta & -0,033\theta & -0,307\alpha & 0,168\alpha & -0,366\alpha & 0,256\alpha & -0,408\alpha \\ -0,167\theta & -0,244\theta & -0,033\theta & -0,289\theta & 0,167\theta & 0,489\theta & 0,033\theta & 0,044\theta & -0,168\alpha & -0,307\alpha & -0,256\alpha & -0,366\alpha & -0,408\alpha \\ 0,044\theta & -0,033\theta & -0,244\theta & 0,167\theta & -0,289\theta & 0,033\theta & 0,489\theta & 0,033\theta & 0,307\alpha & -0,168\alpha & -0,256\alpha & -0,366\alpha & 0,408\alpha \\ 0,033\theta & -0,289\theta & 0,167\theta & -0,244\theta & -0,033\theta & 0,044\theta & -0,167\theta & 0,489\theta & 0,168\alpha & 0,307\alpha & 0,366\alpha & -0,256\alpha & -0,408\alpha \\ -0,307\alpha & -0,168\alpha & 0,307\alpha & 0,168\alpha & -0,307\alpha & -0,168\alpha & 0,307\alpha & 0,168\alpha & 1,000\alpha & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,168\alpha & -0,307\alpha & -0,168\alpha & 0,307\alpha & 0,168\alpha & -0,307\alpha & -0,168\alpha & 0,307\alpha & 0,000 & 1,000\alpha & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,366\alpha & 0,256\alpha & 0,256\alpha & -0,366\alpha & -0,366\alpha & -0,256\alpha & -0,256\alpha & 0,366\alpha & 0,000 & 0,000 & 1,000\alpha & 0,000 & 0,000 \\ -0,256\alpha & 0,366\alpha & 0,366\alpha & 0,256\alpha & 0,256\alpha & -0,366\alpha & -0,366\alpha & -0,256\alpha & -0,256\alpha & 0,000 & 0,000 & 1,000\alpha & 0,000 \\ 0,408\alpha & 0,408\alpha & -0,408\alpha & 0,408\alpha & -0,408\alpha & -0,408\alpha & 0,408\alpha & -0,408\alpha & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 1,000\alpha \end{bmatrix}$$

(3.43)

onde $\theta = \varepsilon + \alpha$

A matriz elástica de elemento quadrilátero, necessária para a determinação da matriz \mathbf{K}^v da equação (3.43), pode ser obtida diretamente de textos clássicos em elementos finitos tais como as referências [29] e [30].

Convém ressaltar que a matriz \mathbf{K}^v da equação (3.43) foi escrita de forma que as linhas e colunas associadas aos seus GLs de dissipação (linhas e colunas de 9 à 13) estão dispostas em ordem crescente de seus auto-valores. Desta maneira, tem-se a nona coluna associada com o menor auto-valor, a décima com o segundo menor, e assim por diante.

3.5 Matrizes para Elementos Hexaédricos

As matrizes viscoelásticas são aqui obtidas considerando-se um elemento hexaédrico linear de oito nós conforme ilustra a figura 3.4.

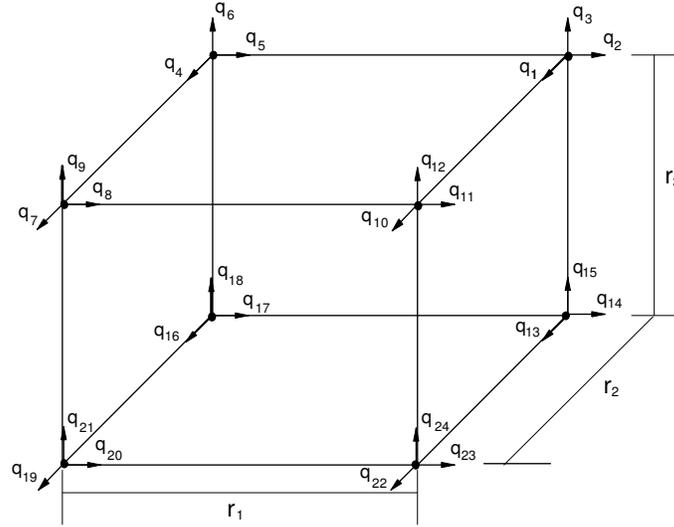


Figura 3.4: Elemento Hexaédrico

A dimensão (*Dim*) das matrizes viscoelásticas para o elemento em questão é:

$$Dim = 2 * (\text{número de GLs físicos}) - (\text{número de possíveis movimento de corpo rígido})$$

$$Dim = 2 * 24 - 6 = 42$$

Observando-se as equações (3.31), (3.32) as matrizes \mathbf{M}^v e \mathbf{C}^v para este elemento ficam:

$$\mathbf{M}^v = \text{diagonal} \left[\underbrace{\mu, \mu, \dots, \mu}_{24 \text{ vezes}}, \underbrace{\alpha/\delta, \alpha/\delta, \dots, \alpha/\delta}_{18 \text{ vezes}} \right] \quad (3.44)$$

e

$$\mathbf{C}^v = \text{diagonal} \left[\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{24 \text{ vezes}}, \underbrace{\alpha\beta/\delta, \alpha\beta/\delta, \dots, \alpha\beta/\delta}_{18 \text{ vezes}} \right] \quad (3.45)$$

onde $\mu = \frac{1}{8} \rho V$, sendo V o volume do elemento e ρ a massa por unidade de volume.

A matriz \mathbf{K}^v também é avaliada numericamente, tal como foi feito na seção anterior. Para um elemento com $r_1/r_2 = 1$, $r_2/r_3 = 1$ e $\nu = 0,25$, sua matriz de rigidez viscoelástica fica expressa segundo a equação (3.46) que segue:

$K^v =$ (columnas 1 a 21)

0,2220	-0,0670	-0,0670	0,0440	0,000	-0,0330	-0,0780	0,0670	0,000	-0,0890	0,000	0,000	0,0440	-0,0330	0,000	-0,0110	0,000	0,000	-0,0560	0,0330	0,0330
-0,0670	0,2220	0,0670	0,000	-0,0890	0,000	0,0670	-0,0780	0,000	0,000	0,0440	0,0330	-0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0780	-0,0670	0,0330	-0,0560	-0,0330
-0,0670	0,0670	0,2220	-0,0330	0,000	0,0440	0,000	0,000	-0,0110	0,000	0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0890	0,000	-0,0670	-0,0780	0,0330	-0,0330	-0,0560
0,0440	0,000	-0,0330	0,2220	0,0670	-0,0670	-0,0890	0,000	0,000	-0,0780	-0,0670	0,000	-0,0110	0,000	0,000	0,0440	0,0330	0,000	-0,0780	0,000	0,0670
0,000	-0,0890	0,000	0,0670	0,2220	-0,0670	0,000	0,0440	-0,0330	-0,0670	-0,0780	0,000	0,000	-0,0780	0,0670	0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0110	0,000
-0,0330	0,000	0,0440	-0,0670	-0,0670	0,2220	0,000	-0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0110	0,000	0,0670	-0,0780	0,000	0,000	-0,0890	0,0670	0,000	-0,0780
-0,0780	0,0670	0,000	-0,0890	0,000	0,000	0,2220	-0,0670	0,0670	0,0440	0,000	0,0330	-0,0560	0,0330	-0,0330	-0,0780	0,000	-0,0670	0,0440	-0,0330	0,000
0,0670	-0,0780	0,000	0,0440	0,000	-0,0330	-0,0670	0,2220	-0,0670	0,000	-0,0890	0,000	-0,0560	0,0330	0,000	-0,0110	0,000	-0,0330	0,0440	-0,0330	0,000
0,000	0,000	-0,0110	0,000	-0,0330	0,0440	0,0670	-0,0670	0,2220	0,0330	0,000	0,0440	-0,0330	0,0330	-0,0560	-0,0670	0,000	-0,0780	0,000	0,000	-0,0890
-0,0890	0,000	0,000	-0,0780	-0,0670	0,000	0,0440	0,000	0,0330	0,2220	0,0670	0,0670	-0,0780	0,000	-0,0670	-0,0560	-0,0330	-0,0330	-0,0110	0,000	0,000
0,000	0,0440	0,0330	-0,0670	-0,0780	0,000	0,000	-0,0890	0,000	0,0670	0,2220	0,0670	0,000	-0,0110	0,000	-0,0330	-0,0560	-0,0330	0,000	-0,0780	-0,0670
0,000	0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0110	0,0330	0,000	0,0440	0,0670	0,0670	0,2220	-0,0670	0,000	-0,0780	-0,0330	-0,0560	0,000	-0,0670	-0,0780	-0,0780
0,0440	-0,0330	0,000	-0,0110	0,000	0,000	-0,0560	0,0330	-0,0330	-0,0780	0,000	-0,0670	0,2220	-0,0670	0,0670	0,0440	0,000	0,0330	-0,0780	0,0670	0,000
-0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0780	0,0670	0,0330	-0,0560	0,0330	0,000	-0,0110	0,000	-0,0670	0,2220	-0,0670	0,000	-0,0890	0,000	0,0670	-0,0780	0,000
0,000	0,000	-0,0890	0,000	0,0670	-0,0780	-0,0330	0,0330	-0,0560	-0,0670	0,000	-0,0780	0,0670	-0,0670	0,2220	0,0330	0,000	0,0440	0,000	0,000	-0,0110
-0,0110	0,000	0,000	0,0440	0,0330	0,000	-0,0780	0,000	-0,0670	-0,0560	-0,0330	-0,0330	0,0440	0,000	0,0330	0,2220	0,0670	0,0670	-0,0890	0,000	0,000
0,000	-0,0780	-0,0670	0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0110	0,000	-0,0330	-0,0560	-0,0330	0,000	-0,0890	0,000	0,0670	0,2220	0,0670	0,000	0,0440	0,0330
0,000	-0,0670	-0,0780	0,000	0,000	-0,0890	-0,0670	0,000	-0,0780	-0,0330	-0,0330	-0,0560	0,0330	0,000	0,0440	0,0670	0,2220	0,000	0,0330	0,0440	0,000
-0,0560	0,0330	0,0330	-0,0780	0,000	0,0670	0,0440	-0,0330	0,000	-0,0110	0,000	0,000	-0,0780	0,0670	0,000	-0,0890	0,000	0,2220	-0,0670	-0,0670	-0,0670
0,0330	-0,0560	-0,0330	0,000	-0,0110	0,000	-0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0780	-0,0670	0,0670	-0,0780	0,000	0,000	0,0440	0,0330	-0,0670	0,2220	0,0670
0,0330	-0,0330	-0,0560	0,0670	0,000	-0,0780	0,000	0,000	-0,0890	0,000	-0,0670	-0,0780	0,000	0,000	-0,0110	0,000	0,0330	0,0440	-0,0670	0,0670	0,2220
-0,0780	0,000	0,0670	-0,0560	-0,0330	0,0330	-0,0110	0,000	0,000	0,0440	0,0330	0,000	-0,0890	0,000	0,000	-0,0780	-0,0670	0,000	0,0440	0,000	-0,0330
0,000	-0,0110	0,000	-0,0330	-0,0560	0,0330	0,000	-0,0780	0,0670	0,0330	0,0440	0,000	0,000	0,440	-0,0330	-0,0670	-0,0780	0,000	0,000	-0,0890	0,000
0,0670	0,000	-0,0780	0,0330	0,0330	-0,0560	0,000	0,0670	-0,0780	0,000	0,000	-0,0890	0,000	-0,0330	0,0440	0,000	0,000	-0,0110	-0,0330	0,000	0,0440
0,0250	-0,0480	0,0730	-0,0250	-0,0480	-0,0730	-0,0250	0,0480	0,0730	0,0250	0,0480	-0,0730	-0,0250	0,0480	0,0730	0,0250	0,0480	-0,0730	0,0250	-0,0480	0,0730
0,0700	0,0570	0,0140	-0,0700	0,0570	-0,0140	-0,0700	-0,0570	0,0140	0,0700	-0,0570	-0,0140	-0,0700	-0,0570	0,0140	0,0700	-0,0570	-0,0140	0,0700	0,0570	0,0140
0,0730	-0,0770	-0,0510	-0,0730	0,0770	0,0510	0,0730	-0,0770	-0,0510	-0,0730	0,0770	0,0510	-0,0730	0,0770	0,0510	0,0730	-0,0770	-0,0510	-0,0730	0,0770	0,0510
-0,0790	-0,0180	-0,0850	0,0790	0,0180	0,0850	-0,0790	-0,0180	-0,0850	0,0790	0,0180	0,0850	0,0790	0,0180	0,0850	-0,0790	-0,0180	-0,0850	0,0790	0,0180	0,0850
0,0480	0,0870	-0,0630	-0,0480	-0,0870	0,0630	0,0480	0,0870	-0,0630	-0,0480	-0,0870	0,0630	-0,0480	-0,0870	0,0630	0,0480	0,0870	-0,0630	-0,0480	-0,0870	0,0630
-0,0800	0,0230	-0,1030	0,1360	-0,0230	0,1130	-0,1360	-0,0330	0,1030	0,0800	0,0330	-0,1130	-0,1360	-0,0330	0,1030	0,0800	0,0330	-0,1130	-0,0800	0,0230	-0,1030
0,1330	0,0760	0,0570	0,0760	-0,0760	0,000	-0,0760	-0,1330	-0,0570	-0,1330	0,1330	0,000	-0,0760	-0,1330	-0,0570	-0,1330	0,1330	0,000	0,1330	0,0760	0,0570
-0,0320	-0,1370	0,1050	-0,0260	0,1370	0,1110	0,0260	-0,0790	-0,1050	0,0320	0,0790	-0,1110	0,0260	-0,0790	-0,1050	0,0320	0,0790	-0,1110	-0,0320	-0,1370	0,1050
0,1050	-0,1050	-0,1050	-0,1050	-0,1050	0,1050	-0,1050	-0,1050	-0,1050	0,1050	0,1050	0,1050	-0,1050	0,1050	-0,1050	0,1050	0,1050	0,1050	0,1050	-0,1050	-0,1050
-0,1520	-0,0270	-0,0130	0,0140	0,0270	-0,1790	-0,0140	-0,1650	0,0130	0,1520	0,1650	0,1790	-0,0140	-0,1650	0,0130	0,1520	0,1650	0,1790	-0,1520	-0,0270	-0,0130
0,0960	-0,0680	-0,2010	-0,1320	0,0680	0,0280	0,1320	-0,1040	0,2010	-0,0960	0,1040	-0,0280	0,1320	-0,1040	0,2010	-0,0960	0,1040	-0,0280	0,0960	-0,0680	-0,2010
-0,0960	0,1900	0,0360	-0,1550	-0,1900	0,0940	0,1550	-0,0610	-0,0360	0,0960	0,0610	-0,0940	0,1550	-0,0610	-0,0360	0,0960	0,0610	-0,0940	-0,0960	0,1900	0,0360
-0,0260	0,2380	-0,0390	0,1840	0,1310	-0,1970	-0,1700	-0,0790	-0,0540	-0,0400	0,0270	0,1050	-0,1700	0,0790	0,0540	0,0400	-0,0270	-0,1050	0,0260	-0,2380	0,0390
-0,2100	0,1090	0,1380	-0,0670	0,1010	-0,0670	-0,0720	-0,1760	-0,2100	-0,0340	-0,1380	0,0670	0,0720	0,1760	0,2100	0,0340	0,1380	0,1090	-0,1090	-0,1380	-0,1010
-0,1960	-0,1080	-0,1050	-0,1120	0,1160	-0,0300	0,2210	0,0320	-0,0040	0,1370	-0,1920	-0,0800	-0,2210	-0,0320	0,0040	-0,1370	0,1920	0,0800	0,1960	0,1080	0,1050
0,0090	0,0120	-0,1940	0,1070	-0,1690	0,0600	0,0260	-0,2660	0,0950	-0,0720	-0,0860	-0,1590	-0,0260	0,2660	-0,0950	0,0720	0,0860	0,1590	-0,0090	-0,0120	0,1940
0,0080	-0,0560	0,1170	0,1450	0,1380	0,1720	0,0210	0,0010	0,2010	-0,1160	-0,1930	0,1460	-0,0210	-0,0010	-0,2010	0,1160	0,1930	0,1460	-0,0080	0,0560	-0,1170
0,2040	-0,2040	-0,2040	0,2040	0,2040	-0,2040	-0,2040	0,2040	-0,2040	-0,2040	-0,2040	-0,2040	0,2040	-0,2040	-0,2040	0,2040	0,2040	0,2040	-0,2040	-0,2040	0,2040

$K^v =$ (colunas 22 a 42 - continuação)

-0,078θ	0,000	0,067θ	0,025α	0,070α	0,073α	-0,079α	0,048α	-0,080α	0,133α	-0,032α	0,105α	-0,152α	0,096α	-0,096α	-0,026α	-0,210α	-0,196α	0,009α	0,008α	0,204α
0,000	-0,011θ	0,000	-0,048α	0,057α	-0,077α	-0,018α	0,087α	0,023α	0,076α	-0,137α	-0,105α	-0,027α	-0,068α	0,190α	0,238α	0,109α	-0,108α	0,012α	-0,056α	-0,204α
0,067θ	0,000	-0,078θ	0,073α	0,014α	-0,051α	-0,085α	-0,063α	-0,103α	0,057α	0,105α	-0,105α	-0,013α	-0,201α	0,036α	-0,039α	0,138α	-0,105α	-0,194α	0,117α	-0,204α
-0,056θ	-0,033θ	0,033θ	-0,025α	-0,070α	-0,073α	0,079α	-0,048α	0,136α	0,076α	-0,026α	-0,105α	0,014α	-0,132α	-0,155α	0,184α	-0,067α	-0,112α	0,107α	0,145α	0,204α
-0,033θ	-0,056θ	0,033θ	-0,048α	0,057α	0,077α	0,018α	-0,087α	-0,023α	-0,076α	0,137α	-0,105α	0,027α	0,068α	-0,190α	0,131α	0,071α	0,116α	-0,169α	0,138α	0,204α
0,033θ	0,033θ	-0,056θ	-0,073α	-0,014α	0,051α	0,085α	0,063α	0,113α	0,000	0,111α	0,105α	-0,179α	0,028α	0,094α	-0,197α	0,101α	-0,030α	0,060α	0,172α	-0,204α
-0,011θ	0,000	0,000	-0,025α	-0,070α	0,073α	-0,079α	0,048α	-0,136α	-0,076α	0,026α	-0,105α	-0,014α	0,132α	0,155α	0,170α	-0,067α	0,221α	0,026α	0,021α	-0,204α
0,000	-0,078θ	0,067θ	0,048α	-0,057α	-0,077α	-0,018α	0,087α	-0,033α	-0,133α	-0,079α	0,105α	-0,165α	-0,104α	-0,061α	-0,079α	-0,072α	0,032α	-0,266α	0,001α	0,204α
0,000	0,067θ	-0,078θ	0,073α	0,014α	-0,051α	-0,085α	-0,063α	0,103α	-0,057α	-0,105α	-0,105α	0,013α	0,201α	-0,036α	-0,054α	-0,176α	-0,004α	0,095α	0,201α	-0,204α
0,044θ	0,033θ	0,000	0,025α	0,070α	-0,073α	0,079α	-0,048α	0,080α	-0,133α	0,032α	0,105α	0,152α	-0,096α	0,096α	-0,040α	-0,210α	0,137α	-0,072α	-0,116α	-0,204α
0,033θ	0,044θ	0,000	0,048α	-0,057α	0,077α	0,018α	-0,087α	0,033α	0,133α	0,079α	0,105α	0,165α	0,104α	0,061α	0,027α	-0,034α	-0,192α	-0,086α	-0,193α	-0,204α
0,000	0,000	-0,089θ	-0,073α	-0,014α	0,051α	0,085α	0,063α	-0,113α	0,000	-0,111α	0,105α	0,179α	-0,028α	-0,094α	0,105α	-0,138α	-0,080α	-0,159α	0,146α	-0,204α
-0,089θ	0,000	0,000	-0,025α	-0,070α	-0,073α	0,079α	-0,048α	-0,136α	-0,076α	0,026α	-0,105α	-0,014α	0,132α	0,155α	-0,170α	0,067α	-0,221α	-0,026α	-0,021α	-0,204α
0,000	0,044θ	-0,033θ	0,048α	-0,057α	0,077α	0,018α	-0,087α	-0,033α	-0,133α	-0,079α	0,105α	-0,165α	-0,104α	-0,061α	0,079α	0,072α	-0,032α	0,266α	-0,001α	-0,204α
0,000	-0,033θ	0,044θ	0,073α	0,014α	0,051α	0,085α	0,063α	0,103α	-0,057α	-0,105α	-0,105α	0,013α	0,201α	-0,036α	0,054α	0,176α	0,004α	-0,095α	-0,201α	0,204α
-0,078θ	-0,067θ	0,000	0,025α	0,070α	0,073α	-0,079α	0,048α	0,080α	-0,133α	0,032α	0,105α	0,152α	-0,096α	0,096α	0,040α	0,210α	-0,137α	0,072α	0,116α	-0,204α
-0,067θ	-0,078θ	0,000	0,048α	-0,057α	-0,077α	-0,018α	0,087α	0,033α	0,133α	0,079α	0,105α	0,165α	0,104α	0,061α	-0,027α	0,034α	0,192α	0,086α	0,193α	0,204α
0,000	0,000	-0,011θ	-0,073α	-0,014α	-0,051α	-0,085α	-0,063α	-0,113α	0,000	-0,111α	0,105α	0,179α	-0,028α	-0,094α	-0,105α	0,138α	0,080α	0,159α	-0,146α	0,204α
0,044θ	0,000	-0,033θ	0,070α	-0,073α	0,077α	0,018α	-0,087α	-0,080α	0,133α	-0,032α	0,105α	-0,152α	-0,096α	-0,096α	0,026α	0,210α	0,196α	-0,009α	-0,008α	-0,204α
0,000	-0,089θ	0,000	-0,048α	0,057α	0,077α	0,018α	-0,087α	0,023α	0,076α	-0,137α	-0,105α	-0,027α	-0,068α	0,190α	-0,238α	-0,109α	0,108α	-0,012α	0,056α	0,204α
-0,033θ	0,000	0,044θ	0,073α	0,014α	0,051α	0,085α	0,063α	-0,103α	0,057α	0,105α	-0,105α	-0,013α	-0,201α	0,036α	0,039α	-0,138α	0,105α	0,194α	-0,117α	0,204α
0,222θ	0,067θ	-0,067θ	-0,025α	-0,070α	0,073α	-0,079α	0,048α	0,136α	0,076α	-0,026α	-0,105α	0,014α	-0,132α	-0,155α	-0,184α	0,067α	0,112α	-0,107α	-0,145α	-0,204α
0,067θ	0,222θ	-0,067θ	-0,048α	0,057α	-0,077α	-0,018α	0,087α	-0,023α	-0,076α	0,137α	-0,105α	0,027α	0,068α	-0,190α	-0,131α	-0,071α	-0,116α	0,169α	-0,138α	-0,204α
-0,067θ	-0,067θ	0,222θ	-0,073α	-0,014α	-0,051α	-0,085α	-0,063α	0,113α	0,000	0,111α	0,105α	-0,179α	0,028α	0,094α	0,197α	-0,101α	0,030α	-0,060α	-0,172α	0,204α
-0,025θ	-0,048θ	-0,073θ	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,070θ	0,057θ	-0,014θ	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,073θ	-0,077θ	-0,051θ	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,079θ	-0,018θ	-0,085θ	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,048θ	0,087θ	-0,063θ	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,136θ	-0,023θ	0,113θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,076θ	-0,076θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,026θ	0,137θ	0,111θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,105θ	-0,105θ	0,105θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,014θ	0,027θ	-0,179θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,132θ	0,068θ	0,028θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,155θ	-0,190θ	0,094θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,184θ	-0,131θ	0,197θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,067θ	-0,071θ	-0,101θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000	0,000
0,112θ	-0,116θ	0,030θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000	0,000
-0,107θ	0,169θ	-0,060θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000	0,000
-0,145θ	-0,138θ	-0,172θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α	0,000
-0,204θ	-0,204θ	0,204θ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000α

As colunas 15 a 42 da matriz \mathbf{K}^v expressa na equação (3.46) também estão dispostas segundo uma ordem crescente de seus autovalores.

3.6 Matrizes para Elementos Quaisquer

Usando um procedimento análogo ao adotado nas seções 3.3, 3.4 e 3.5 é possível se determinarem as matrizes viscoelásticas de um elemento qualquer, partindo-se das matrizes elásticas dos mesmos e dos parâmetros (ε , α , β e δ).

3.7 Generalização para uma Malha de Elementos Finitos

A generalização para uma malha de elementos finitos baseada no método GHM é imediata, visto que o desenvolvimento matricial do método foi direcionado para o uso do MEF, o que resultou num conjunto de matrizes simétricas e de coeficientes constantes.

Para tal basta que se obtenha as matrizes elásticas ([29],[30]) e viscoelásticas (equações (3.31), (3.32) e (3.33)) envolvidas no problema e em seguida fazer o acoplamento clássico das matrizes de elementos nas matrizes globais do sistema:

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}^v \oplus \sum \mathbf{M}^e \quad \mathbf{C} = \sum \mathbf{C}^v \oplus \sum \mathbf{C}^e \quad e \quad \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}^v \oplus E \sum \mathbf{K}^e \quad (3.47)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, os superíndices (e) e (v) denotam, respectivamente, matrizes elásticas⁵ e viscoelásticas e os símbolos \sum e \oplus designam acoplamento.

As restrições a serem aplicadas nas matrizes do sistema deverão ser relacionadas apenas com as coordenadas físicas tal como é feito para o caso puramente elástico.

Os aspectos computacionais pertinentes ao acoplamento matricial descrito nas equações (3.47) merecem um destaque especial. Este assunto é tratado no capítulo 5 juntamente com outros detalhes de programação envolvidos na elaboração de um programa de elementos finitos com elementos viscoelásticos para análise dinâmica estrutural.

A solução de um problema dinâmico formulado no domínio do tempo via MEF envolvendo materiais viscoelásticos, após obtidas as matrizes globais do sistema,

⁵Lembrando que \mathbf{K}^e é matriz de rigidez normalizada com relação módulo de elasticidade E

passa pela integração numérica das equações de movimento:

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \mathbf{K} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Esta integração pode ser feita utilizando-se um método numérico. No presente trabalho foram utilizados os Métodos de Runge-Kutta [31] e de Newmark [29].

Por comodidade na notação, as variáveis relativas aos GLs dissipadores (\hat{z}) serão referidas a partir deste ponto do texto somente por (z).

Capítulo 4

Estudo Paramétrico das Propriedades dos MVE Modelados via GHM

As propriedades relativas ao módulo de elasticidade e ao fator de perda são de fundamental importância para uma boa modelagem de um MVE. Utilizou-se aqui uma representação baseada na função dissipativa de Biot com a restrição $\gamma = \alpha\beta$ (ver tabela 2.1 e solução do sistema de equações (3.16)). Dessa maneira, da equação (2.41) pode-se escrever:

$$\mathcal{E}(s) = \varepsilon + \frac{\alpha(s^2 + \beta s)}{s^2 + \beta s + \delta} \quad (4.1)$$

Para se obter uma expressão de $\mathcal{E}(s)$ em função da frequência, faz-se a transformação do domínio de Laplace para o domínio $i\omega$, sendo ($i = \sqrt{-1}$). Para tal, basta substituir o valor de s na equação (4.1) por $i\omega$. Tal procedimento fornece:

$$E^*(\omega) = \varepsilon + \frac{\alpha(-\omega^2 + i\beta\omega)}{-\omega^2 + i\beta\omega + \delta} \quad (4.2)$$

Conforme exposto no item 2.3.2, o módulo de armazenamento $E'(\omega)$ é a parte real de $E^*(\omega)$ e seu fator de perda $\eta(\omega)$ é a razão entre a parte imaginária e a parte real. Pode-se então chegar às expressões de E' e η , para E^* escrito conforme equação (4.2):

$$E' = \varepsilon + \frac{\alpha\omega^2(\omega^2 - \delta + \beta^2)}{(\delta - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \quad (4.3)$$

e

$$\eta = \frac{\alpha\beta\omega\delta}{(\delta - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \frac{1}{E'} \quad (4.4)$$

Dependendo do conjunto de parâmetros ε , α , β e δ , as equações (4.3) e (4.4) podem ou não caracterizar um MVE. A figura 4.1 foi obtida para o conjunto de

parâmetros $\varepsilon = 1$ MPa, $\alpha = 5$ MPa, $\beta = 6000$ s⁻¹ (s → segundos) e $\delta = 1200000$ s⁻², e a figura 4.2 para $\varepsilon = 1$ MPa, $\alpha = 5$ MPa, $\beta = 60$ s⁻¹ e $\delta = 1200000$ s⁻². Comparando os gráficos da figura 4.1 com as curvas características do MVE ISD - 112 (figura 2.7) pode-se observar características semelhantes entre eles. O mesmo não se verifica com relação aos gráficos da figura 4.2. Resumindo, nem todo conjunto de parâmetros (ε , α , β e δ) está associado à descrição de um MVE.

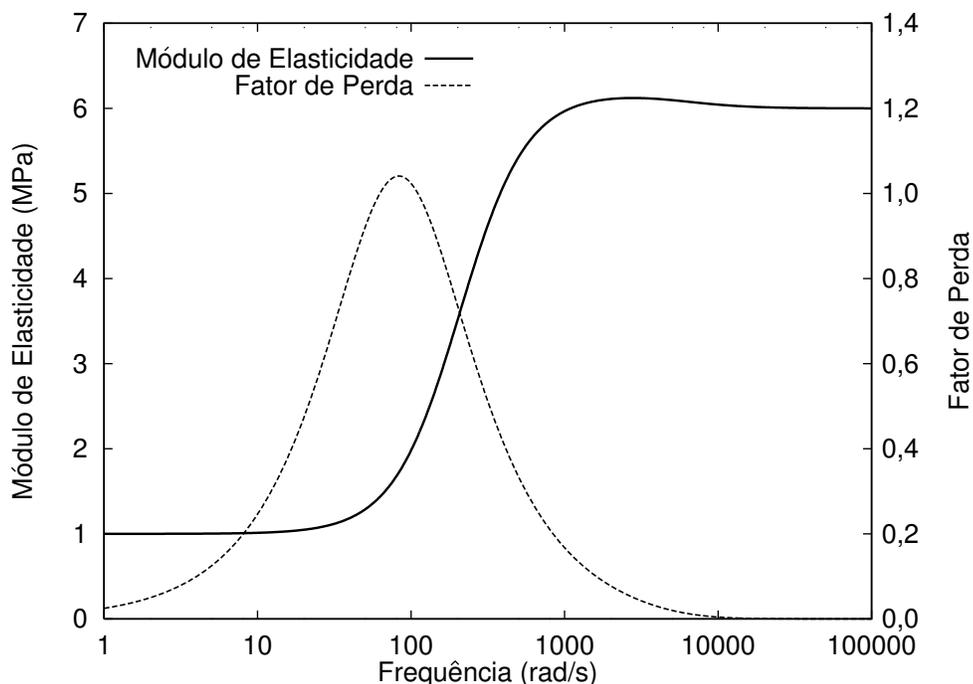


Figura 4.1: Exemplo de Material Viscoelástico: Variações de E' e η com a Frequência

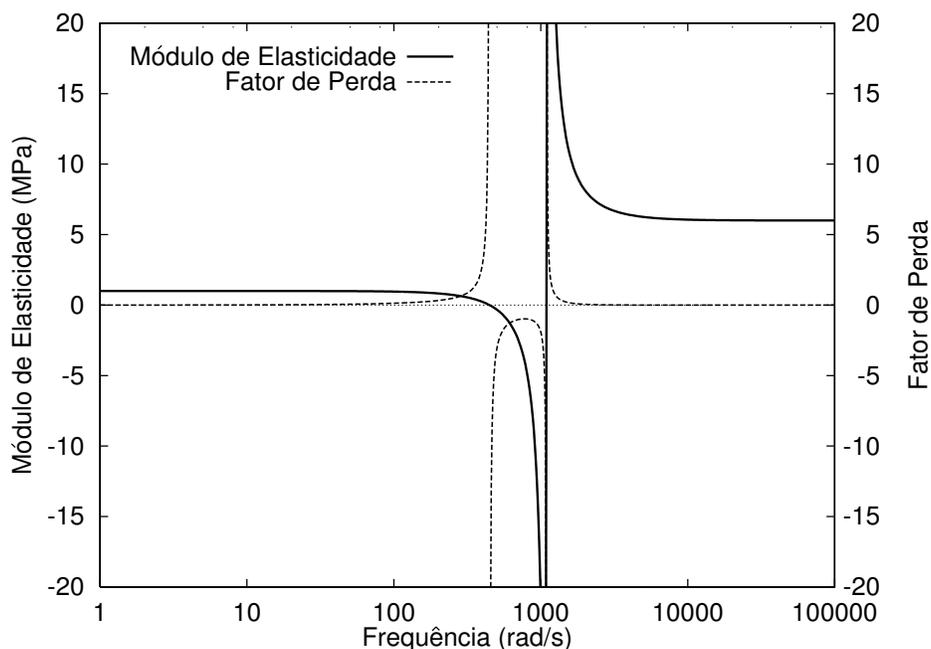


Figura 4.2: Exemplo de Material Não-Viscoelástico: Variações de E' e η com a Frequência

Cabe ressaltar que no decorrer dos próximos capítulo alguns gráficos, como os apresentados nas figuras 4.1 e 4.2, estarão com um ou os dois eixos cartesianos em escala logarítmica. A utilização deste recurso está condicionada à conveniência de cada situação que segue, procurando-se sempre adotar as escalas mais adequadas em cada representação gráfica.

A figura 4.3 apresenta as curvas características de um material puramente elástico com módulo de elasticidade $E' = \varepsilon = 1$ MPa. Como se pode observar, E' não varia com a freqüência e η é constante e igual a zero, ou seja, o material não dissipa energia.

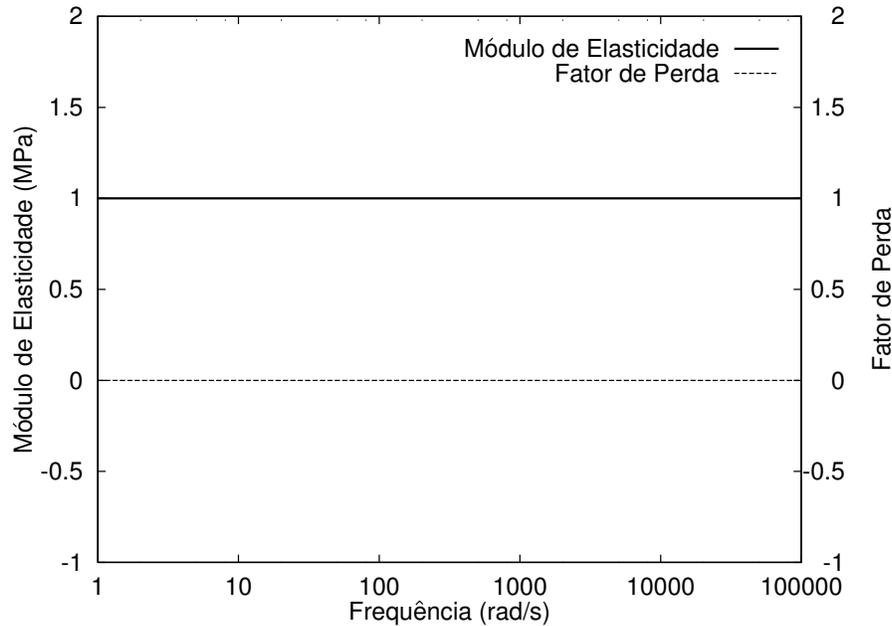


Figura 4.3: Exemplo de Material Elástico: Variações de E' e η com a Freqüência

Das figuras 4.1 e 4.3 pode-se observar que as características dependentes da freqüência do MVE, qualitativamente, aproximam-se das características de um material puramente elástico para as regiões de alta freqüência, ou seja, para $\omega \rightarrow \infty$, $E' \rightarrow$ *valor constante* e $\eta \rightarrow 0$. No caso da figura 4.1, este *valor constante* é de 6 MPa e pode ser obtido somando-se os parâmetros ε e α :

$$\text{valor constante} = \varepsilon + \alpha = 1 + 5 = 6 \text{ MPa} \quad (4.5)$$

O item 4.2.1 apresenta uma demonstração formal para a equação (4.5).

Na prática, curvas como as que aparecem nas figuras 2.7 e 4.1 são as informações sobre o MVE das quais o projetista dispõe. É preciso então saber extrair destas curvas obtidas experimentalmente os parâmetros ε , α , β e δ pois são eles que irão definir as características dependentes da freqüência do MVE em questão modelado via GHM.

Qualquer que seja o método utilizado para se fazer o ajuste dos parâmetros ε , α , β e δ às curvas experimentais, o engenheiro projetista deverá ter em mãos uma

pré-análise sobre a sensibilidade de um MVE a estes parâmetros característicos. Esta pré-análise de sensibilidade é feita na próxima seção e dá ao projetista uma idéia qualitativa e também quantitativa sobre a forma e a intensidade com que cada parâmetro influencia o comportamento de um MVE solicitado dinamicamente.

4.1 Análise de Sensibilidade

Faz-se aqui o estudo da influência dos parâmetros ε , α , β e δ na resposta dinâmica de um sistema de 1 GL constituído de MVE. No capítulo 6 algumas estruturas mais complexas serão também analisadas.

Todas as análises de sensibilidade a seguir são feitas considerando-se a temperatura constante. Esta simplificação é válida para problemas em que a estrutura está sujeita a pouca variação de temperatura, caso contrário, o estudo a seguir deverá ser feito para várias faixas de temperatura, visando determinar a situação mais desfavorável.

A análise de sensibilidade é feita de maneira que a influência de cada parâmetro característico (ε ou α ou β ou δ) é observada separadamente. Isto é feito observando-se as respostas dinâmicas do sistema frente a variações de um destes parâmetros, mantendo os demais constantes.

4.1.1 Estudos Preliminares

O sistema de 1 GL que servirá de base para as análises de sensibilidade é uma barra composta de MVE, modelada via GHM, com um GL q axial na sua extremidade, excitado por uma força P , conforme ilustra a figura 4.4.

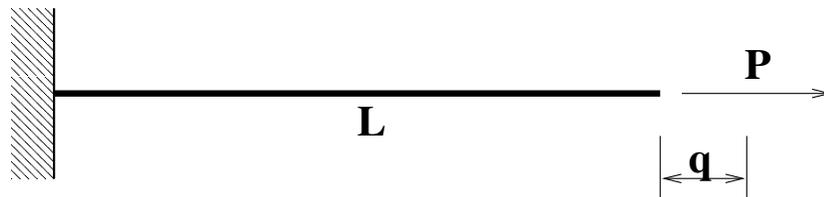


Figura 4.4: Descrição do Exemplo Base

As características físicas e geométricas da barra analisada são dadas na tabela 4.1 e as curvas mostradas na figura 4.1 serão adotadas como sendo as curvas experimentais características do MVE do exemplo base.

Tabela 4.1: Características Físicas e Geométricas da Barra do Exemplo Base

Característica	Variável Representativa	Valor
comprimento	L	0,5 m
área da seção transversal	A	0,0004 m ²
massa específica	ρ_{visco}	1102 kg/m ³
parâmetro ε	ε_o	1 MPa
parâmetro α	α_o	5 MPa
parâmetro β	β_o	6000 s ⁻¹
parâmetro δ	δ_o	1200000 s ⁻²

Resposta no Domínio do Tempo

Expandindo as equações (3.30) para as matrizes \mathbf{M}^v , \mathbf{C}^v e \mathbf{K}^v descritas conforme as equações (3.38, 3.39 e 3.40) respectivamente, já eliminando a primeira linha e a primeira coluna de cada matriz devido à imposição das condições de contorno (deslocamento nulo no engaste), resulta:

$$\begin{aligned} \mu \ddot{q} + (\alpha + \varepsilon) \chi^2 q + \alpha \chi z &= P \\ \frac{\alpha}{\delta} \ddot{z} + \frac{\alpha \beta}{\delta} \dot{z} + \alpha \chi q + \alpha z &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Numa análise estática, as derivadas com relação ao tempo, presentes no sistema de equações (4.6), anulam-se, fornecendo:

$$\begin{aligned} (\alpha + \varepsilon) \chi^2 q + \alpha \chi z &= P \\ \alpha \chi q + \alpha z &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

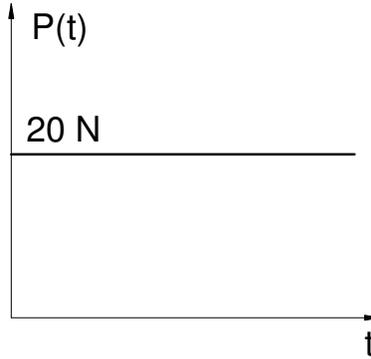
O sistema de equações algébricas (4.7) pode ser resolvido, resultando para q :

$$q = \frac{P}{\varepsilon \chi^2} = \frac{PL}{\varepsilon A} \quad (4.8)$$

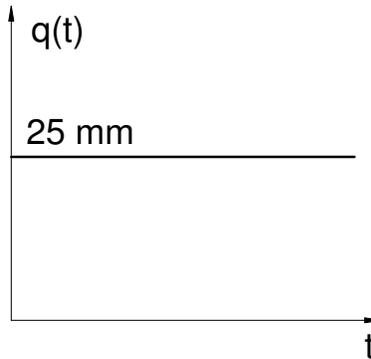
O valor de q na equação (4.8) é idêntico ao que seria obtido para uma análise estática linear de uma barra elástica com módulo de elasticidade ε . Por este motivo, pode-se chamar o parâmetro ε de Módulo de Elasticidade Estático.

O valor obtido para z no sistema de equações (4.7) não tem qualquer significado físico (ver final da seção 3.2.2 e figura 3.1) e portanto não foi calculado.

As figuras 4.6(a) e 4.6(b) apresentam, respectivamente, as respostas para o teste de fluência com $P = 20$ N e o teste de relaxação com $q = 25$ mm aplicados subitamente ao sistema base (ver figura 4.5) e comparados com a resposta obtida para cada teste efetuado numa barra puramente elástica com módulo de elasticidade $E' = \varepsilon$ (curvas características na figura 4.3). Pode-se ver claramente nestas figuras que o sistema viscoelástico possui uma característica amortecedora relevante.



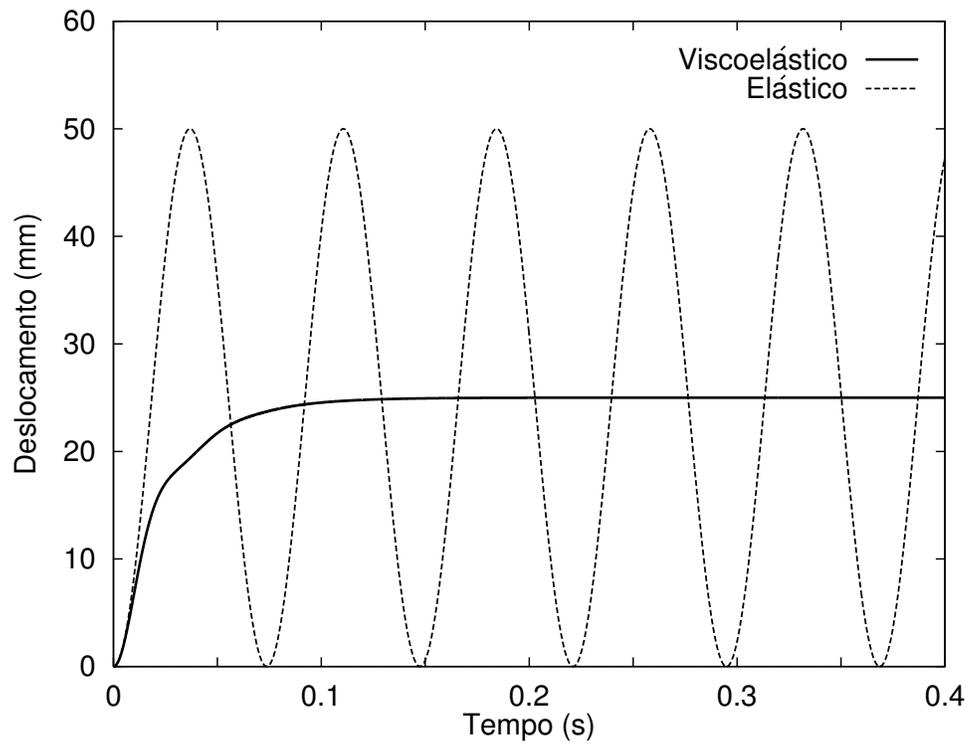
(a) Teste de Fluência



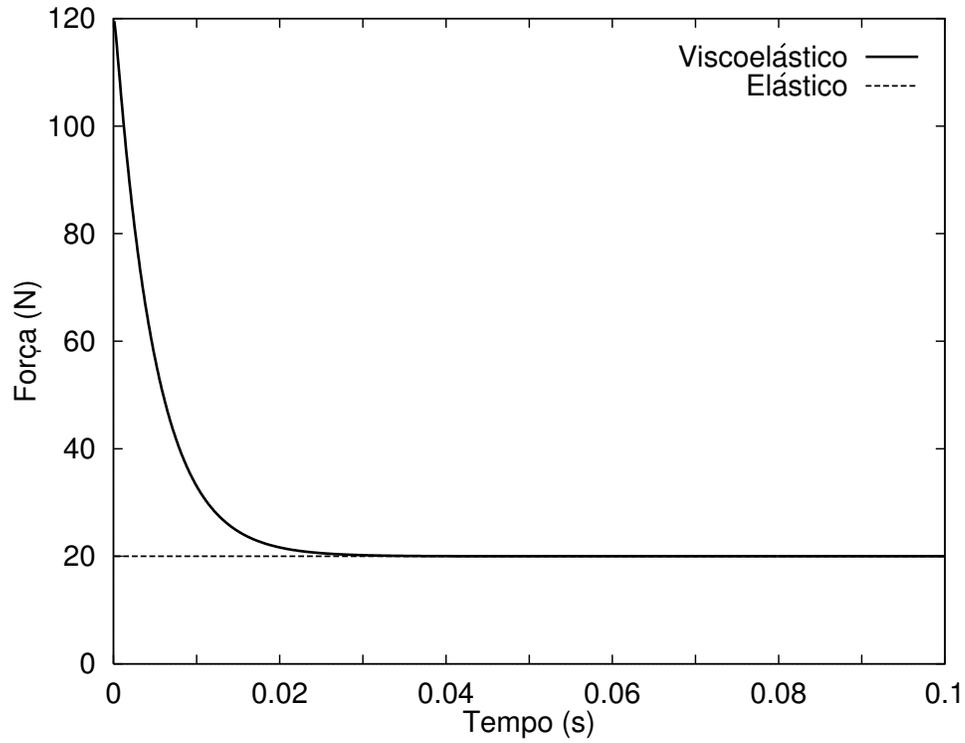
(b) Teste de Relaxação

Figura 4.5: Testes ou Carregamentos Aplicados no Exemplo Base

Os resultados obtidos para o MVE, além de terem uma boa afinidade qualitativa com os gráficos das figuras 2.5, tanto o teste de fluência quanto o teste de relaxação, apresentaram comportamento assintótico ao que seria obtido para uma análise estática, ou seja, quando o sistema caminha para o repouso as respostas tendem a satisfazer a equação (4.8).



(a) Teste de Fluência



(b) Teste de Relaxação

Figura 4.6: Respostas no Domínio do Tempo para o Exemplo Base

Resposta no Domínio da Frequência

A solução no domínio da frequência é apresentada numa formulação clássica e via GHM para que se possa melhor avaliar a precisão do método, visto que a formulação clássica no domínio da frequência apresenta uma solução fechada e conhecida para este caso [22].

A solução clássica no domínio da frequência para o problema em análise é:

$$q = [E^*(\omega)\frac{A}{L} - \omega^2\mu]^{-1}P \quad (4.9)$$

e a solução via GHM é

$$\begin{Bmatrix} q \\ z \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}^v + i\omega\mathbf{C}^v - \omega^2\mathbf{M}^v]^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Substituindo os valores de \mathbf{M}^v , \mathbf{C}^v e \mathbf{K}^v extraídos das equações (3.38), (3.39) e (3.40), respectivamente, na equação (4.10), já com as condições de contorno impostas, resulta em:

$$\begin{Bmatrix} q \\ z \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} (\varepsilon + \alpha)\chi^2 & -\alpha\chi \\ -\alpha\chi & \alpha \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta/\delta \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \alpha/\delta \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

As respostas no domínio da frequência do exemplo base, bem como de uma barra puramente elástica com módulo de elasticidade $E' = \varepsilon$, ambos sujeitos a um carregamento harmónico $P = 20\text{sen}(\omega t)$ (unidade de força em Newtons), são apresentadas na figura 4.7. Comparando-se a resposta via GHM com a clássica, verifica-se que ambas são coincidentes, o que demonstra a precisão do método.

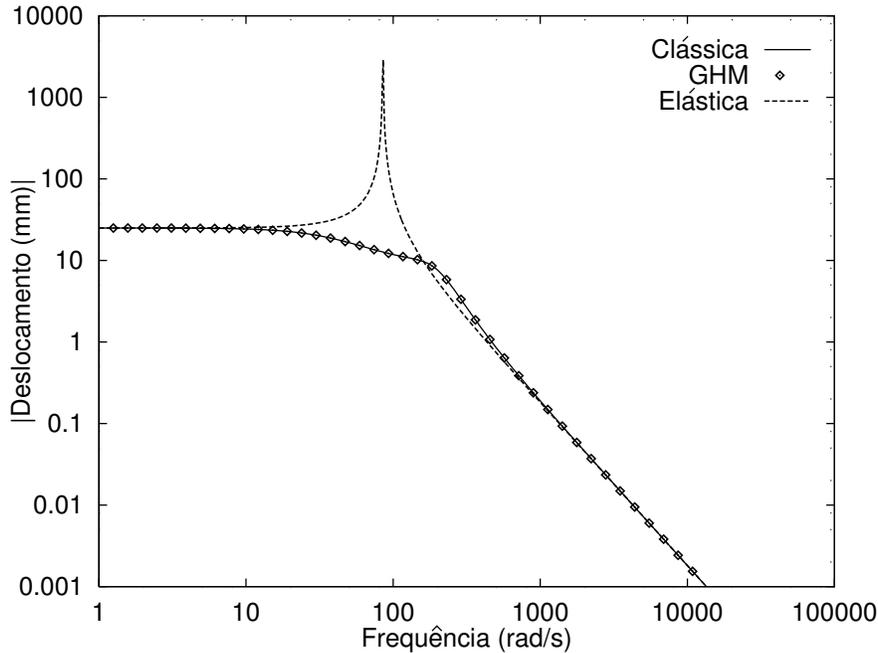


Figura 4.7: Resposta no Domínio da Frequência para o Exemplo Base

Ciclos de Histerese

Conforme definido nos primeiros parágrafos do capítulo 2, amortecimento é o resultado da energia dissipada durante a vibração. Este fenômeno pode ser bem observado através do ciclo de histerese do material (figura 2.1(a) e (b)).

Para o exemplo base adotado foram traçados os ciclos histeréticos contidos na figura 4.8 para excitações $P = 20\text{sen}(\omega t)$ (unidade de força em Newtons) em diversas frequências conforme descreve a tabela 4.2.

Tabela 4.2: Características Viscoelásticas para Várias Frequências de Excitação

ω (rad/s)	$E'(\omega)$ (MPa)	$\eta(\omega)$
1,0	1,00012	0,02500
10,0	1,01206	0,24645
15,0	1,02705	0,36322
70,0	1,53140	1,02548
136,5	2,57217	0,92493

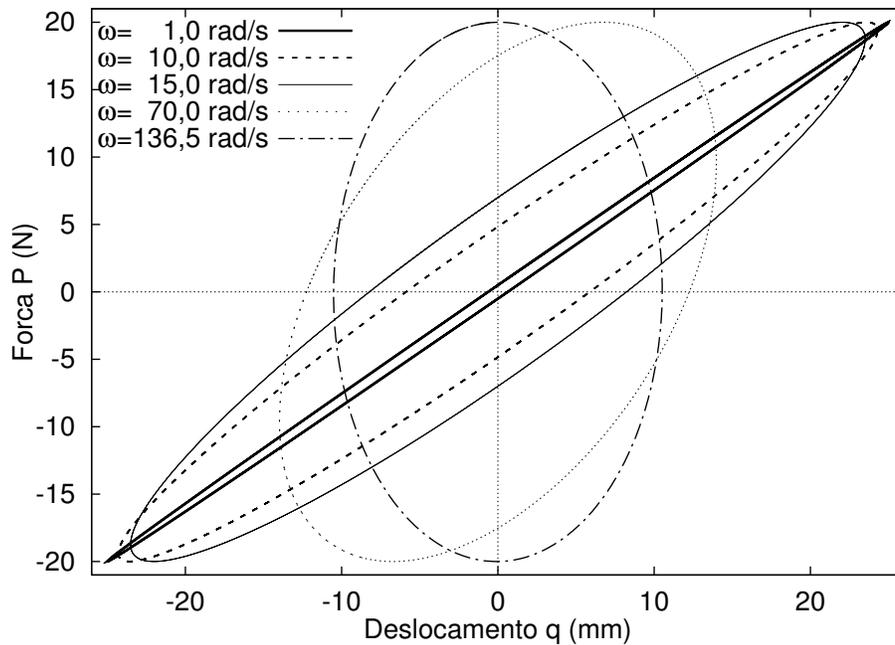


Figura 4.8: Ciclos de Histerese para o Exemplo Base

Quando a força de excitação está com um ângulo de fase de 90° com relação aos deslocamentos é porque a frequência de excitação desta força coincide com frequência natural do sistema. Isto ocasiona um ciclo de histerese com eixos de simetria coincidentes com os eixos cartesianos, conforme o ciclo de histerese obtido para $\omega = 136,5$ rad/s na figura 4.8. Esta forma de determinação da frequência natural do sistema é denominada Teste de Ressonância.

É interessante também observar na figura 4.8 que à medida que se diminui a frequência de excitação, a área da elipse também vai reduzindo. Quando ω tende para zero (análise estática) o sistema tende para resposta puramente elástica linear e o ciclo de histerese tende a se degenerar numa reta.

Outro comentário importante acerca da figura 4.8 é que a relação entre o amortecimento e a área do ciclo histerético, conforme descrito no item 2.1.1, não é direta neste caso. É necessário ponderar a variação de rigidez E' do MVE do sistema em função da frequência de excitação. Em suma, para se afirmar que o sistema que apresenta maior área de ciclo histerético apresenta também maior amortecimento é necessário que o módulo elástico seja constante, o que não ocorre com materiais viscoelásticos, pois suas propriedades mecânicas são essencialmente dependentes da frequência.

4.1.2 Influência do Parâmetro ε

Para a análise da influência do parâmetro ε no comportamento dinâmico de um MVE serão comparados cinco sistemas estruturais de 1GL, de dimensões idênticas às mostradas na figura 4.4 e apresentadas na tabela 4.1. Estes sistemas estruturais serão respectivamente compostos pelos MVEs cujas curvas características estão na figura 4.9. A tabela 4.3 resume os valores paramétricos adotados para cada material, deixando claro que todos os parâmetros, com exceção de ε , se mantêm constantes com relação ao exemplo base, permitindo que se avalie a influência isolada de ε no comportamento dinâmico de um MVE.

Tabela 4.3: MVEs usados na análise do fator ε

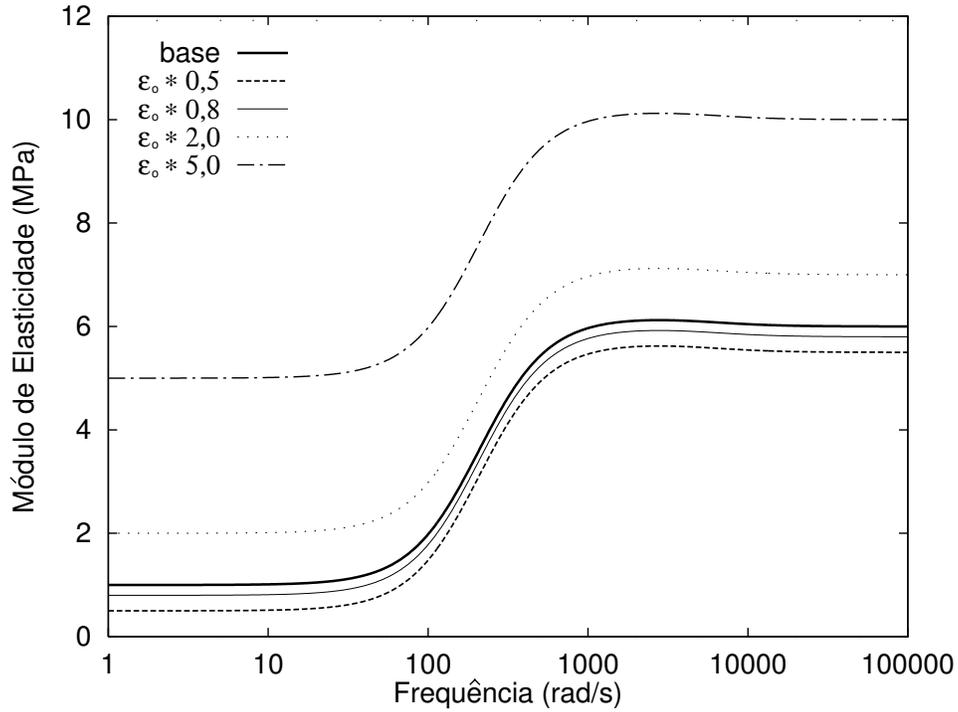
MVE	ε	α	β	δ
base	ε_o	α_o	β_o	δ_o
<i>mve</i> ε_1	$\varepsilon_1 = \varepsilon_o * 0,5$	α_o	β_o	δ_o
<i>mve</i> ε_2	$\varepsilon_2 = \varepsilon_o * 0,8$	α_o	β_o	δ_o
<i>mve</i> ε_3	$\varepsilon_3 = \varepsilon_o * 2,0$	α_o	β_o	δ_o
<i>mve</i> ε_4	$\varepsilon_4 = \varepsilon_o * 5,0$	α_o	β_o	δ_o

A figura 4.9(a) mostra que quanto maior o fator ε , maiores serão os valores do módulo de elasticidade e, conseqüentemente, mais rígido será o MVE.

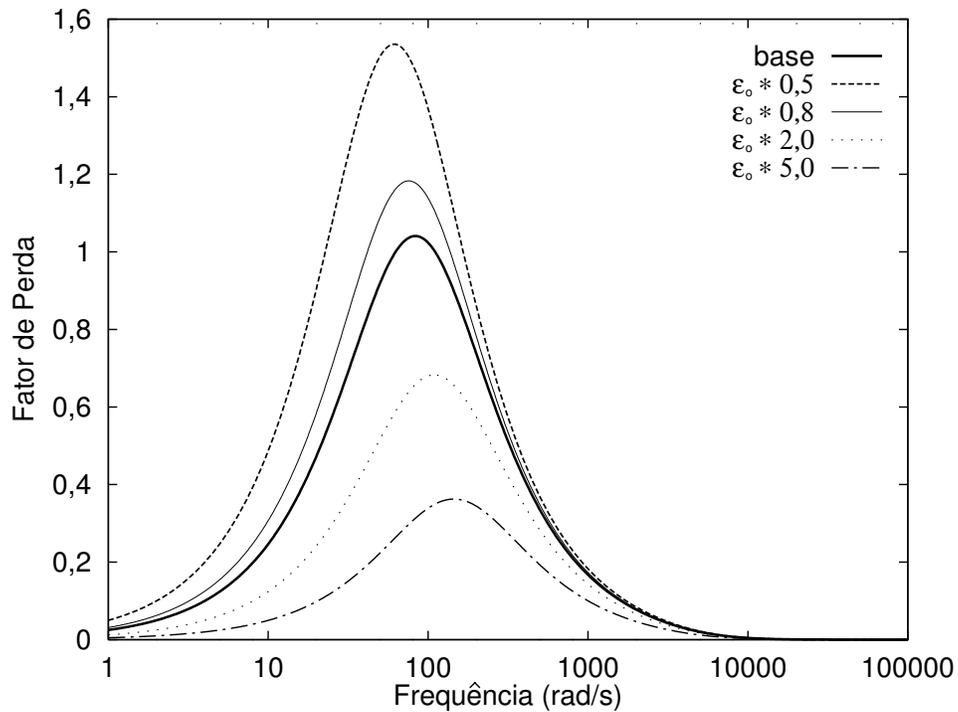
As diferenças entre as curvas dispostas na figura 4.9(a) estão por conta de translações verticais com as variações de ε , sendo que cada curva sempre toca o eixo vertical no ponto¹ $\omega \rightarrow 0$; $E' = \varepsilon_i$ ($i = 0, 1, \dots, 4$), ratificando que ε é o módulo de elasticidade estático do MVE.

¹Como a representação do eixo horizontal está em escala logarítmica, o primeiro valor possível para a representação gráfica de ω é $\omega = 1$. Por isso utilizou-se $\omega \rightarrow 0$ ao invés de $\omega = 0$ ao se referir a uma resposta estática (frequência nula)

Por outro lado, a figura 4.9(b) mostra uma proporcionalidade inversa entre o parâmetro ε e o fator de perda. As curvas que descrevem os fatores de perda dos MVEs analisados sofrem um achatamento à medida que se aumenta o valor de ε , ou seja, quanto maior ε menores serão as propriedades viscosas amortecedoras do MVE e, conseqüentemente, maiores as propriedades elásticas deste material.



(a) Módulo de Elasticidade



(b) Fator de Perda

Figura 4.9: Materiais Usados para Análise da Influência do Fator ε

Respostas no Domínio do Tempo

As respostas no domínio do tempo serão apresentadas para os mesmos testes de fluência e relaxação aplicados ao exemplo base.

A figura 4.10(a) também atesta que o comportamento elástico do MVE é crescente com o valor do parâmetro ε : com o aumento de ε , o sistema passa a vibrar, apresentando oscilações elásticas amortecidas.

As oscilações amortecidas da resposta no domínio do tempo do sistema constituído do material mat_{ε_4} apresentadas na figura 4.10(a) permitiu que se calculasse a taxa de amortecimento do sistema através da técnica do decaimento logarítmico:

$$\xi = \frac{1}{2\pi N} \ln \frac{q_i}{q_f} \quad (4.12)$$

onde N é o número de oscilações consideradas, q_i e q_f são as amplitudes tomadas em cristas, ou vales, distantes entre si de N oscilações.

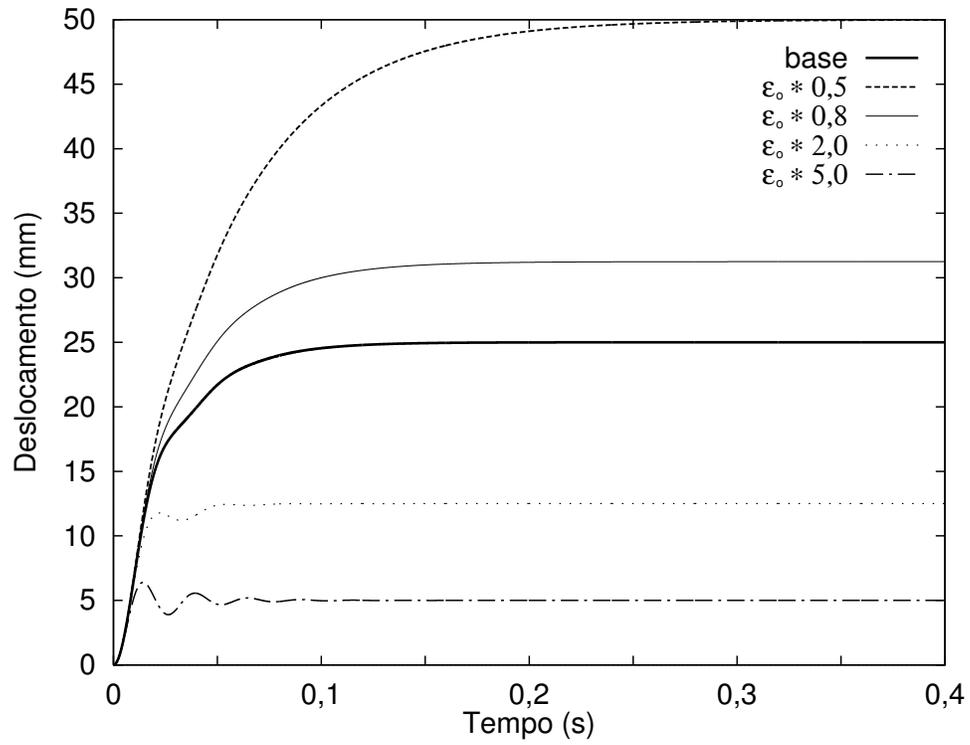
Para o material mat_{ε_4} , considerando a equação (4.12) e figura 4.10(a), tem-se $\xi = 17\%$

A proporcionalidade entre a rigidez do MVE e o parâmetro ε também pode ser observada na figura 4.10(a). Os valores assintóticos dos deslocamentos, que podem ser obtidos através da equação (4.8), são inversamente proporcionais aos valores de ε .

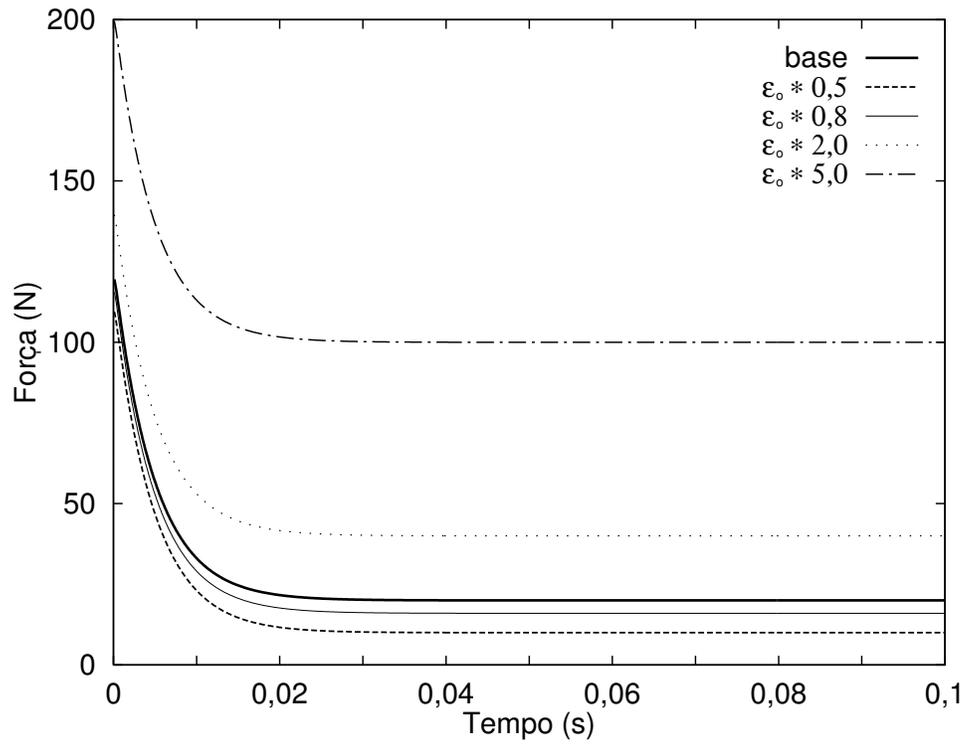
O teste de relaxação mostrado na figura 4.10(b) apresenta um comportamento bem semelhante para todos os casos. A diferença fica por conta de translações dos gráficos na direção vertical. Isto mostra que o parâmetro ε influencia apenas nos valores finais e iniciais de força no teste de relaxação e não na forma com que ela decai no tempo. Os pontos onde os testes de relaxação da figura 4.10(b) interceptam o eixo vertical são os correspondentes a $t = 0$ e:

$$P = \frac{\theta_i A}{L} q, \quad (i = 0, 1, \dots, 4) \quad (4.13)$$

onde $\theta_i = \varepsilon_i + \alpha$. Isso é devido à imposição do deslocamento $q = 25$ mm subitamente ao sistema, fazendo com que nos instantes iniciais (transientes), com predomínio de altas frequências, o comportamento do MVE se assemelhe ao de um material elástico, fazendo valer a equação (4.13), que nada mais é que a relação elástica entre força e deslocamento para uma barra de comprimento L , seção transversal A (ver figura 4.4 e tabela 4.1) e módulo elasticidade $\theta_i = \varepsilon_i + \alpha$. Já os valores assintóticos de P da figura 4.10(b) podem ser obtidos diretamente da equação (4.8).



(a) Teste de Fluência



(b) Teste de Relaxação

Figura 4.10: Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator ϵ

Respostas no Domínio da Freqüência

As respostas no domínio da freqüência são aqui obtidas para os sistemas de 1 GL estudados (figura 4.4) sujeitos ao mesmo carregamento harmônico do exemplo base: $P = 20\text{sen}(\omega t)$ (unidade de força em Newtons).

Devido às características amortecedoras do MVE, a resposta no domínio da freqüência somente apresentou pico de ressonância para o sistema constituído do material $mve_{\mathcal{E}_4} \rightarrow \varepsilon_o * 5,0$, sendo que a freqüência natural de vibração associada a este pico de ressonância foi $\omega = 242 \text{ rad/s}$.

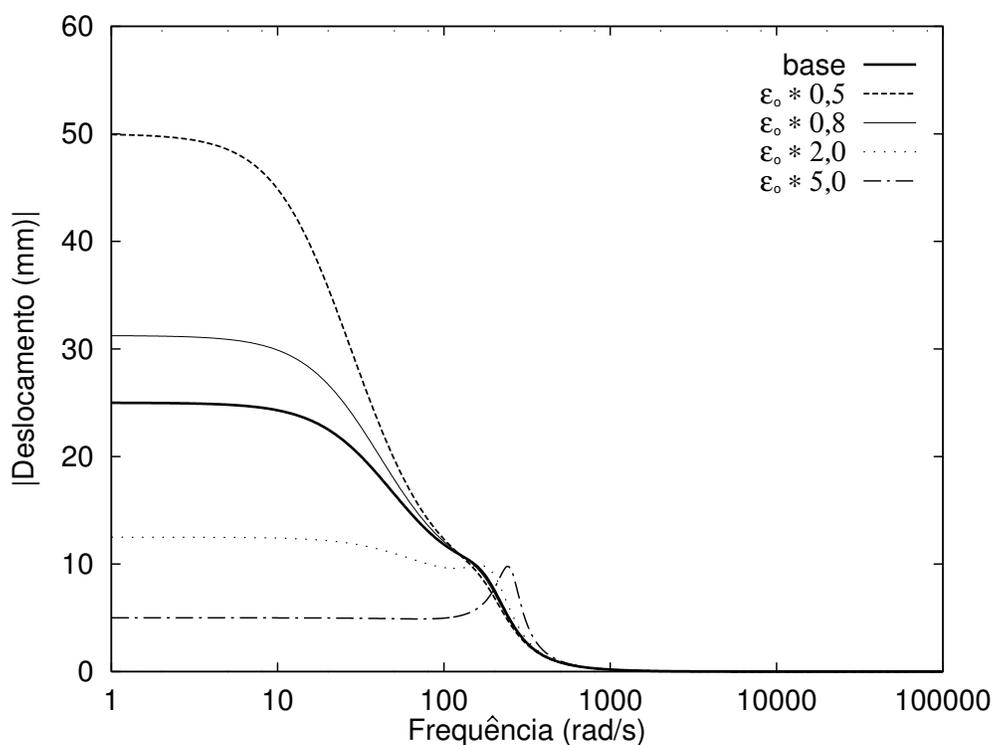


Figura 4.11: Respostas no Domínio da Freqüência para Variações do Fator ε

Ciclos de Histerese

Conforme descrito no item anterior, quando os ciclos de histerese têm uma defasagem de 90° entre a força e deslocamento, a frequência de excitação está em ressonância com a frequência natural do sistema e as elipses de histerese ficam com os eixos coincidentes com os eixos cartesianos. Assim sendo, após um processo de tentativa e erro na avaliação da frequência de excitação, chegou-se ao conjunto de ciclos histeréticos apresentado na figura 4.12 relativos às frequências naturais dos sistemas analisados. Estes ciclos histeréticos foram determinados através de uma excitação do tipo $P = 20\text{sen}(\omega t)$ (unidade de força em Newtons). As frequências ω correspondentes, bem como as respectivas taxas de amortecimento calculadas segundo equação (2.14), estão dispostas na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Frequência Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas

MVE	Frequência Natural ou de Excitação (rad/s)	Taxas de Amortecimento (%)
base	136,5	46,3
$mve_{\varepsilon_1} \rightarrow \varepsilon_o * 0,5$	109,5	66,4
$mve_{\varepsilon_2} \rightarrow \varepsilon_o * 0,8$	126,5	52,1
$mve_{\varepsilon_3} \rightarrow \varepsilon_o * 2,0$	175,0	30,8
$mve_{\varepsilon_4} \rightarrow \varepsilon_o * 5,0$	240,5	16,0

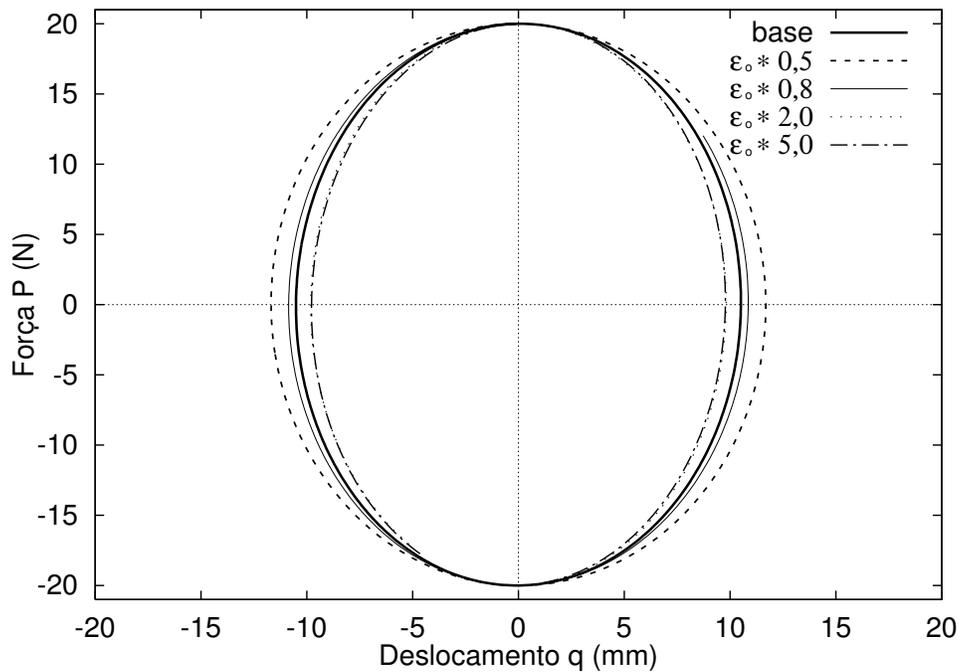


Figura 4.12: Ciclos Histeréticos para Variações do Fator ε

4.1.3 Influência do Parâmetro α

Para a análise da influência do parâmetro α no comportamento dinâmico de um MVE foram comparados cinco sistemas estruturais de 1GL, de dimensões idênticas às descritas na figura 4.4 e tabela 4.1. Estes sistemas estruturais serão respectivamente compostos pelos MVEs cujas curvas características estão na figura 4.13. A tabela 4.5 resume os valores paramétricos adotados para cada material, deixando claro que todos os parâmetros, com exceção de α , se mantêm constantes com relação ao exemplo base, permitindo que se avalie a influência isolada de α no comportamento dinâmico de um MVE.

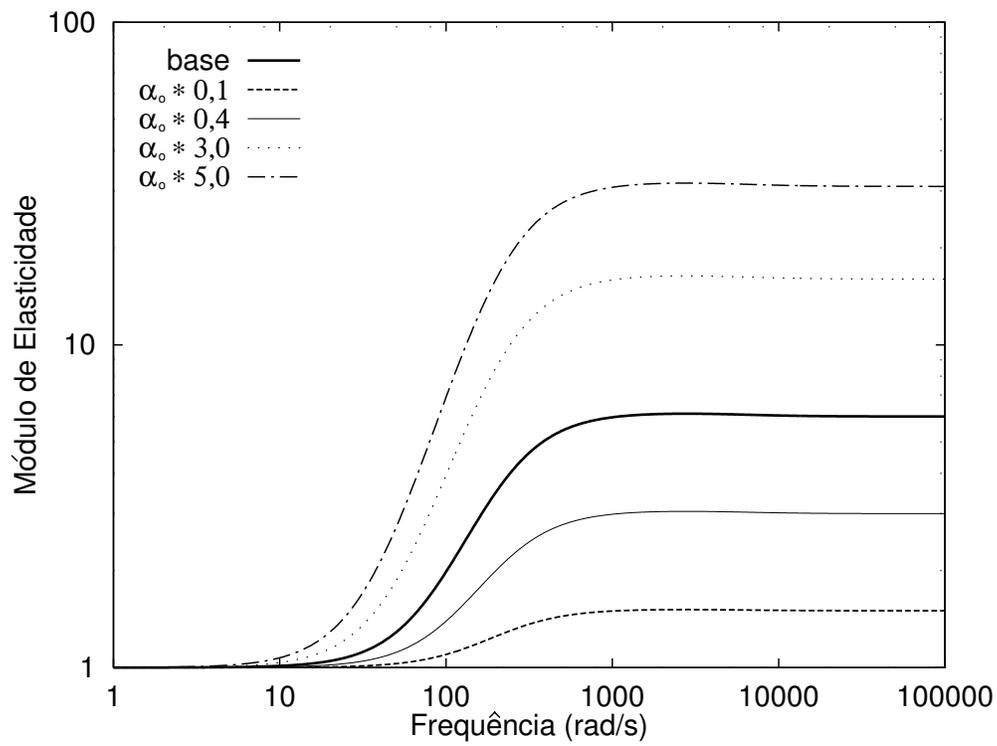
Tabela 4.5: MVEs usados na análise do fator α

MVE	ε	α	β	δ
base	ε_o	α_o	β_o	δ_o
<i>mve_</i> α_1	ε_o	$\alpha_1 = \alpha_o * 0,1$	β_o	δ_o
<i>mve_</i> α_2	ε_o	$\alpha_2 = \alpha_o * 0,4$	β_o	δ_o
<i>mve_</i> α_3	ε_o	$\alpha_3 = \alpha_o * 3,0$	β_o	δ_o
<i>mve_</i> α_4	ε_o	$\alpha_4 = \alpha_o * 5,0$	β_o	δ_o

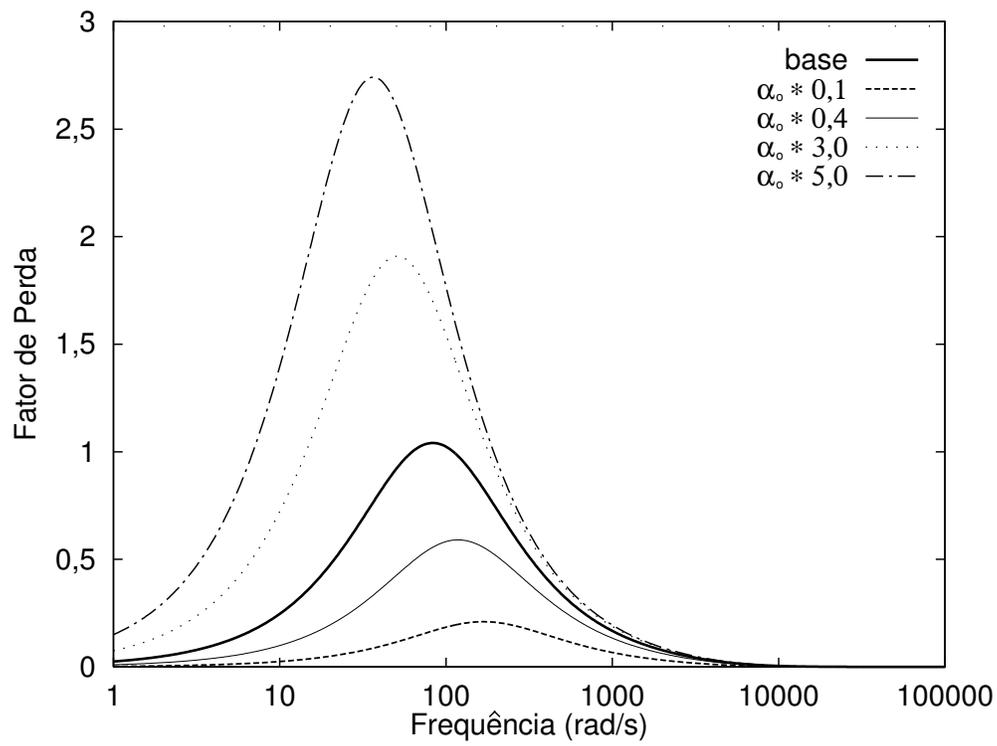
A figura 4.13(a) mostra que o parâmetro α é determinante nos valores finais (relativos as frequências mais altas) dos módulos de elasticidade. Conforme equação (4.5), o parâmetro α influencia diretamente o valor assintótico para altas frequências ($\varepsilon + \alpha$) do módulo de elasticidade, o que pode ser verificado nesta figura.

A figura 4.13(b) mostra que quanto maior o parâmetro α , maiores serão os valores obtidos para o fator de perda e, conseqüentemente, maior o caráter viscoso/amortecedor do MVE. A figura 4.13(b) também mostra que o aumento do parâmetro α faz com que os picos das curvas dos fatores de perda se desloquem para uma região de mais baixa frequência. Este último fato é importante sobretudo na fase de projeto de estruturas viscoelásticas, conforme será abordado no capítulo 7.

Ainda sobre as figura 4.13 observa-se que para $\alpha \rightarrow 0$, tem-se $E' \rightarrow \varepsilon$ (constante) e $\eta \rightarrow 0$ (constante), o que representaria um material puramente elástico (ver figura 4.3). O parâmetro α pode então ser chamado de Módulo Viscoso do material viscoelástico.



(a) Módulo de Elasticidade



(b) Fator de Perda

Figura 4.13: Materiais Usados para Análise da Influência do Fator α

Respostas no Domínio do Tempo

As respostas no domínio do tempo serão apresentadas para os mesmos testes de fluência e relaxação aplicados ao exemplo base.

As respostas dinâmicas para os testes de fluência mostradas na figura 4.14(a) confirmam as observações feitas no item anterior sobre o módulo viscoso (parâmetro α): as tendências de oscilações elásticas são inversamente proporcionais a α e o comportamento viscoso/amortecedor do MVE tem uma proporcionalidade direta com este fator.

As oscilações amortecidas da resposta no domínio tempo do sistema constituído do material mve_a_1 apresentadas na figura 4.10(a) permite que se calcule a taxa de amortecimento do sistema através da técnica do decaimento logarítmico (equação (4.12)), que para este caso resulta: $\xi = 9,3\%$

À medida que o sistema tende para o repouso, as respostas dinâmicas mostradas na figura 4.14(a) tendem para um valor constante de deslocamento $q = 25$ mm, que representa o alongamento estático de uma barra de dimensões idênticas às dos sistemas dinâmicos de 1GL estudados neste capítulo, sujeita a mesma carga $P = 20$ N aplicada para o teste de fluência e com módulo de elasticidade igual a ε_o (ver equação (4.8)): $q = (PL)/(\varepsilon_o A) = (20 * 0,5)/(10^6 * 0,0004) = 25\text{mm}$

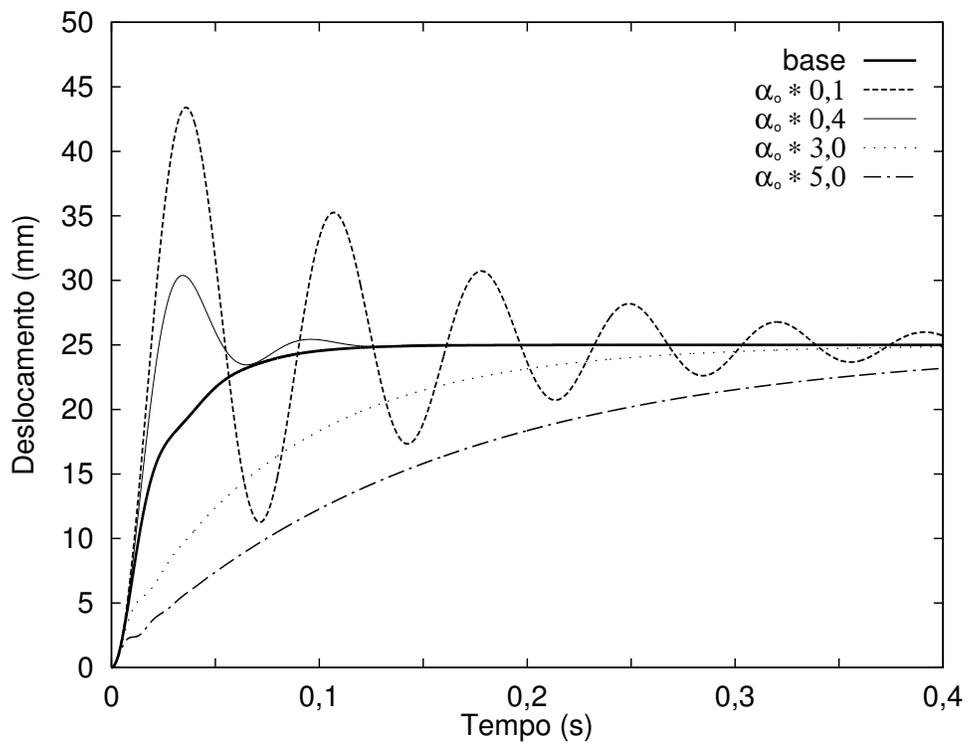
As curvas apresentadas na figura 4.14(b) mostram os resultados obtidos para os teste de relaxação aplicados aos sistemas de 1 GL utilizados para analisar a influência do parâmetro α no comportamento dinâmico de um MVE. Todas as curvas apresentadas nesta figura convergem assintoticamente para uma força constante no tempo e igual a 20 N, pois os módulos de elasticidade estáticos dos MVEs aqui usados são idênticos (iguais a ε_o).

Os valores iniciais de força obtidos nos testes de relaxação apresentados na figura 4.14(b) atendem à equação (4.13) e estão expressos numericamente na tabela 4.6, pois a faixa de variação usada na apresentação gráfica² da figura 4.14(b) não cobriu os valores relativos aos sistemas constituídos dos materiais $mve_a_3 \rightarrow \alpha_o * 3,0$ e $mve_a_4 \rightarrow \alpha_o * 5,0$.

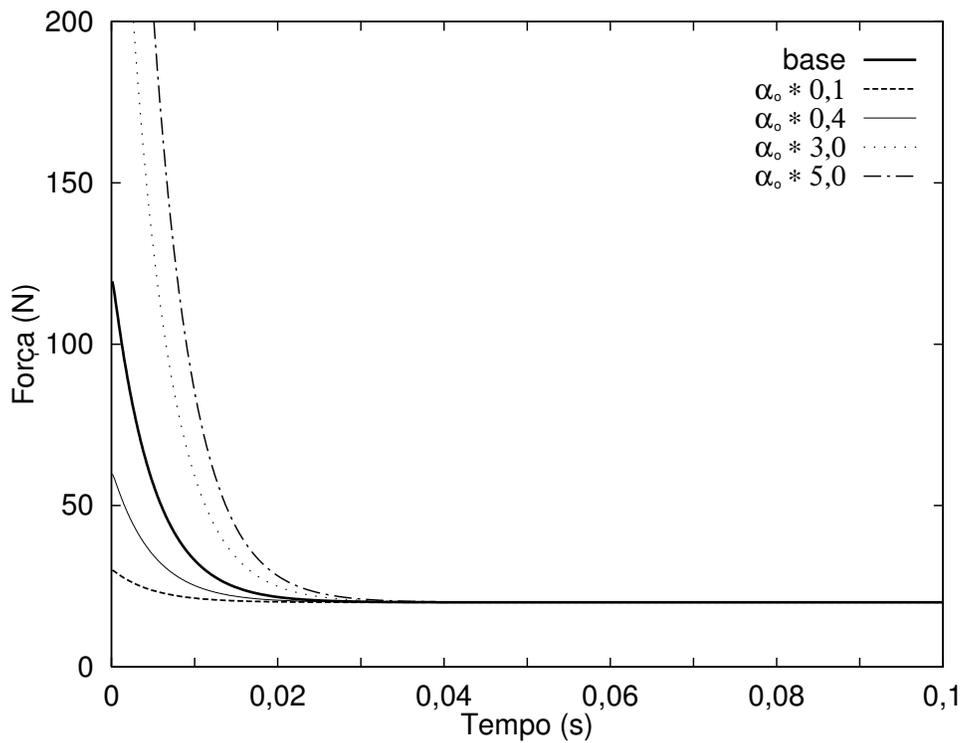
Tabela 4.6: Valores Iniciais de Força no Teste de Relaxação

MVE	α	Valor Inicial de Força (N)
base	α_o	120
mve_a_1	$\alpha_1 = \alpha_o * 0,1$	30
mve_a_2	$\alpha_2 = \alpha_o * 0,4$	60
mve_a_3	$\alpha_3 = \alpha_o * 3,0$	320
mve_a_4	$\alpha_4 = \alpha_o * 5,0$	520

²A faixa de variação das forças adotada na figura 4.14(b) não cobre todos valores iniciais de força por motivos gráficos de visualização. Uma faixa maior daria uma ilusão gráfica de que a curva relativa ao material $mve_a_1 \rightarrow \alpha_o * 0,1$ é uma reta horizontal



(a) Teste de Fluência



(b) Teste de Relaxação

Figura 4.14: Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator α

Respostas no Domínio da Frequência

As respostas no domínio da frequência são obtidas para os sistemas de 1 GL da figura 4.4 sujeitos ao mesmo carregamento harmônico do exemplo base: $P = 20\text{sen}(\omega t)$ (unidade de força em Newtons).

Os gráficos apresentados na figura 4.15 mostram as respostas obtidas no domínio da frequência. Apenas a curva referente ao sistema constituído do material $mve_{\alpha_1} \rightarrow \alpha_o * 0,1$ apresentou pico de ressonância, correspondendo a uma frequência natural de 88 rad/s. Isso se deve às altas taxas de amortecimento dos sistemas analisados, o que provocou um achatamento dos demais picos de ressonância.

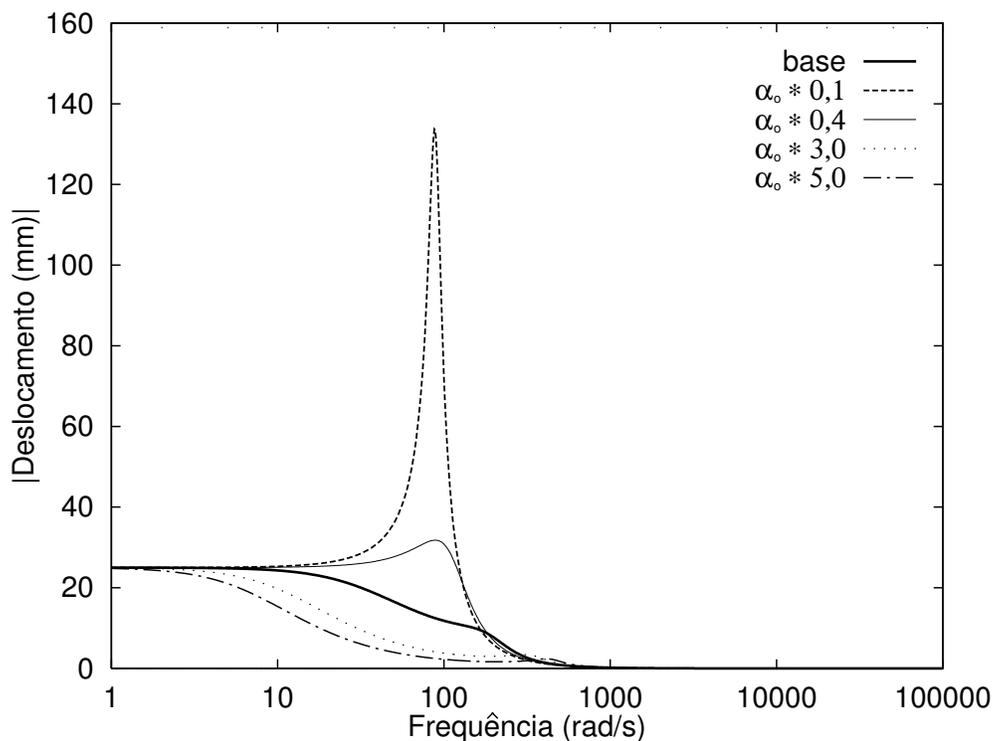


Figura 4.15: Respostas no Domínio da Frequência para Variações do Fator α

Ciclos de Histerese

Os ciclos de histerese que são aqui apresentados tiveram como objetivo a determinação das frequências naturais dos sistemas envolvidos na análise do parâmetro α . Este procedimento é análogo ao adotado no subitem Ciclos de Histerese, referente à análise do parâmetro ε (item 4.1.2).

Assim sendo, apresenta-se a tabela 4.7 com as frequências naturais e taxas de amortecimento obtidas para cada sistema, bem como a figura 4.16 que mostra os respectivos ciclos histeréticos.

Tabela 4.7: Frequências Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas $\rightarrow mve_\alpha$

MVE	Frequência Natural ou de Excitação (rad/s)	Taxa de Amortecimento (%)
base	136,5	46,3
$mve_{\alpha_1} \rightarrow \alpha_o * 0,1$	88,5	8,7
$mve_{\alpha_2} \rightarrow \alpha_o * 0,4$	100,5	29,0
$mve_{\alpha_3} \rightarrow \alpha_o * 3,0$	285,0	33,0
$mve_{\alpha_4} \rightarrow \alpha_o * 5,0$	393,0	25,0

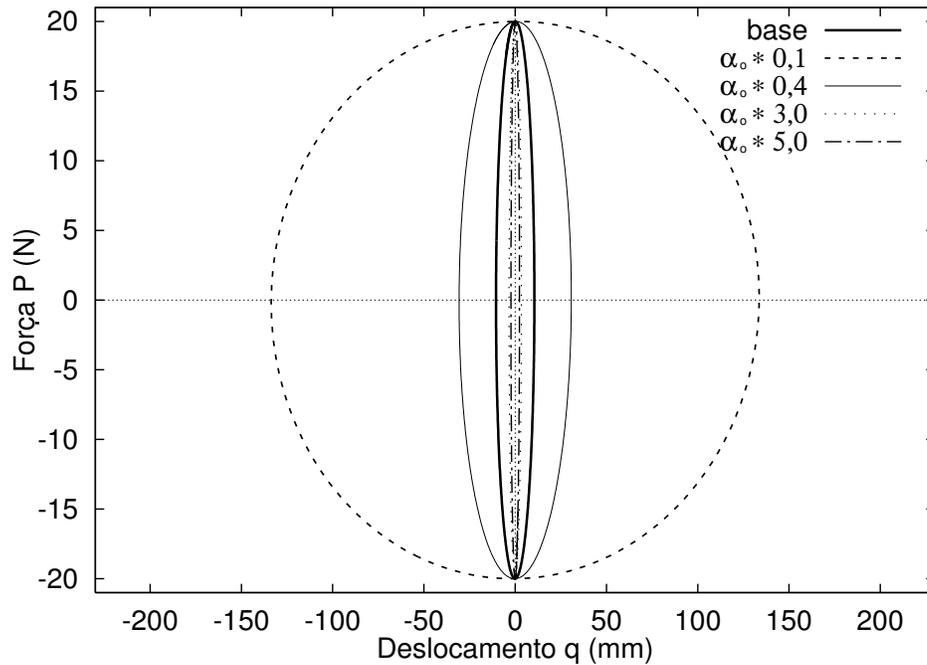


Figura 4.16: Ciclos Histeréticos para Variações do Fator α

4.1.4 Influência dos Parâmetros β e δ

Os parâmetros β e δ possuem características afins e por isso serão estudados num mesmo item.

Para a análise da influência dos parâmetros β e δ no comportamento dinâmico de um MVE serão comparados nove sistemas com as características do exemplo base (figura 4.4) e compostos de materiais³ cujas curvas características estão descritas nas figuras 4.17 e 4.18. As tabelas 4.8 e 4.9 visam explicitar os valores paramétricos adotados para cada material.

Tabela 4.8: MVEs usados na análise do fator β

MVE	ε	α	β	δ
base	ε_o	α_o	β_o	δ_o
<i>mve-β_1</i>	ε_o	α_o	$\beta_1 = \beta_o * 0,2$	δ_o
<i>mve-β_2</i>	ε_o	α_o	$\beta_2 = \beta_o * 0,5$	δ_o
<i>mve-β_3</i>	ε_o	α_o	$\beta_3 = \beta_o * 2,0$	δ_o
<i>mve-β_4</i>	ε_o	α_o	$\beta_4 = \beta_o * 4,5$	δ_o

Tabela 4.9: MVEs usados na análise do fator δ

MVE	ε	α	β	δ
base	ε_o	α_o	β_o	δ_o
<i>mve-δ_1</i>	ε_o	α_o	β_o	$\delta_1 = \delta_o * 0,2$
<i>mve-δ_2</i>	ε_o	α_o	β_o	$\delta_2 = \delta_o * 0,5$
<i>mve-δ_3</i>	ε_o	α_o	β_o	$\delta_3 = \delta_o * 2,0$
<i>mve-δ_4</i>	ε_o	α_o	β_o	$\delta_4 = \delta_o * 4,5$

O conjunto de parâmetros β e δ determina a curvatura dos gráficos que caracterizam o módulo de Elasticidade do MVE, conforme pode ser observado nas figuras 4.17(a) e 4.18(a).

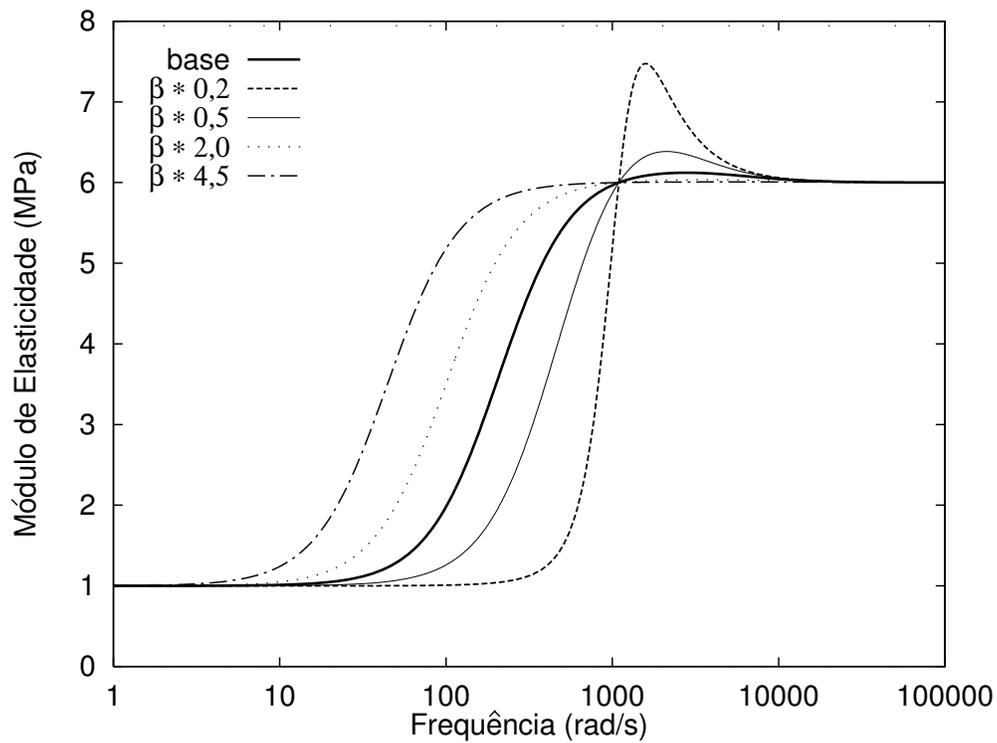
As figuras 4.17(a) e 4.18(a) mostram também que os parâmetros β e δ têm características inversas: a figura 4.17(a) atesta que maiores valores de β fazem com que o módulo de elasticidade assumam valores superiores a ε_o em frequências mais baixas; já a figura 4.18(a) por sua vez atesta a mesma característica para o módulo de elasticidade porém para os menores valores de δ .

Esta característica inversa também pode ser verificada quando se observam as variações dos fatores de perda: na figura 4.17(b) tem-se para maiores valores de β o pico de η atingido para frequências mais baixas; já para figura 4.18(b) isto ocorre para menores valores de δ .

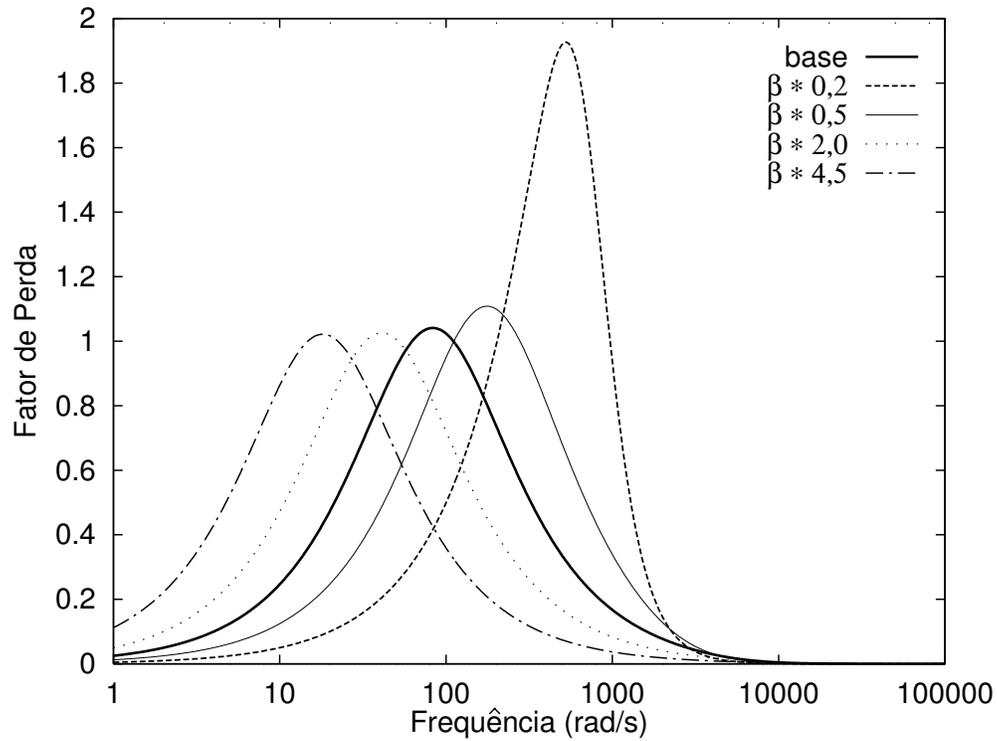
Entretanto, não existe uma relação entre β e δ que viabilize uma combinação destes parâmetros no intuito de se reduzir o número de variáveis do problema. As

³O material definido como base aparece nas duas figuras, o que poderia levar o leitor a pensar que é dez e não nove o número de materiais comparados

características de acoplamento e não-linearidade da equação (4.3) confirmam a veracidade desta afirmação.

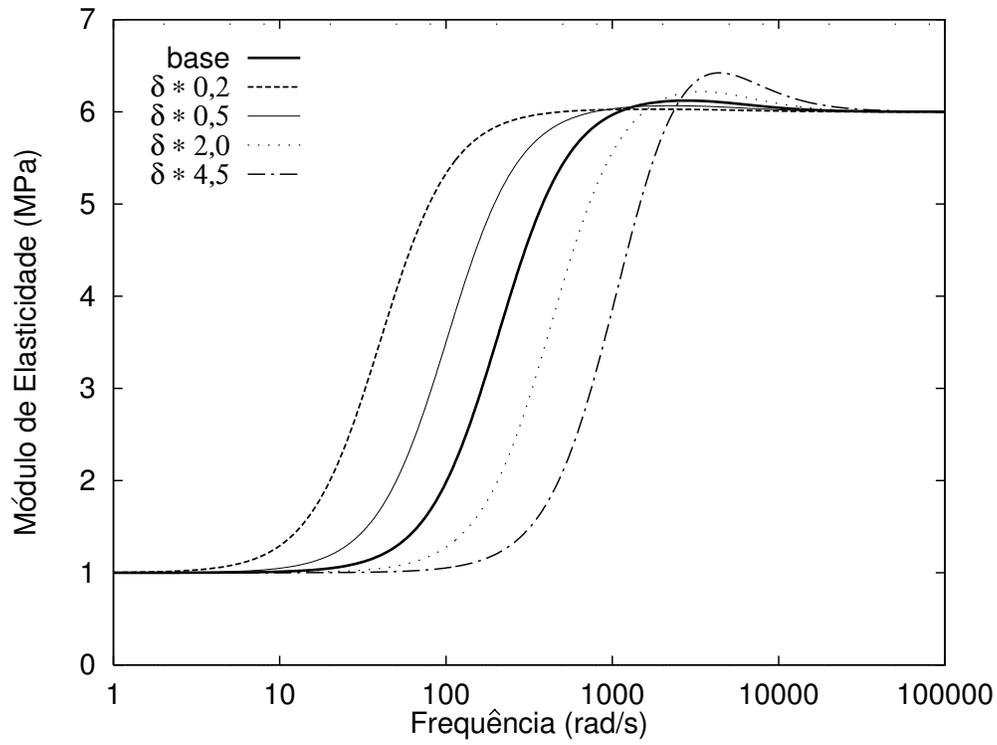


(a) Módulo de Elasticidade

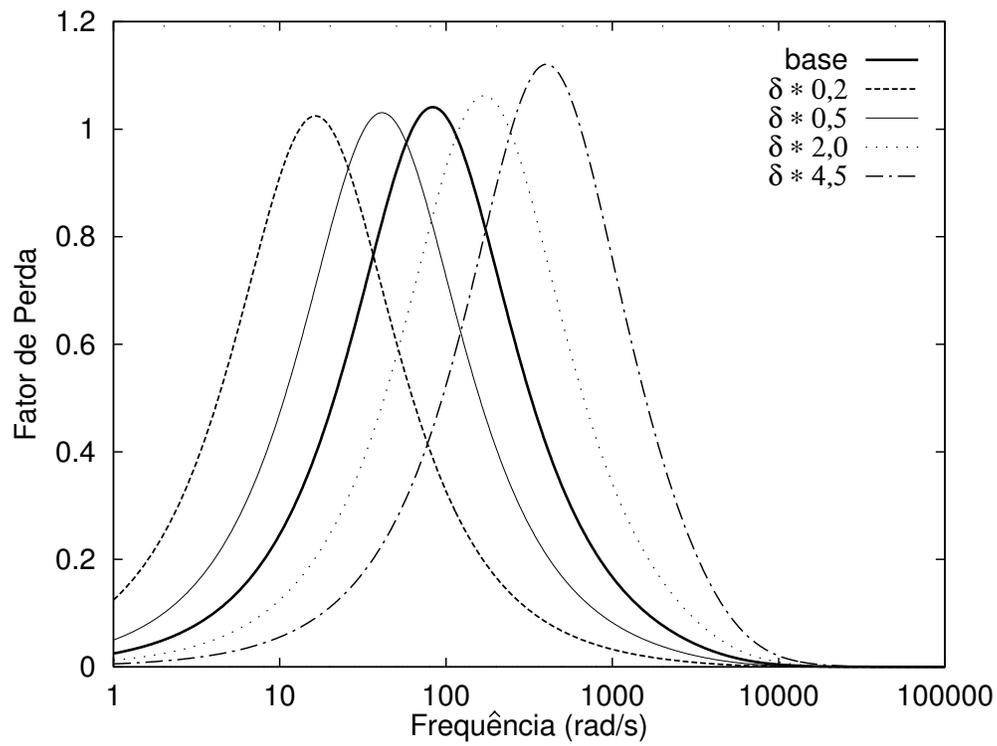


(b) Fator de Perda

Figura 4.17: Materiais Usados para Análise da Influência do Fator β



(a) Módulo de Elasticidade



(b) Fator de Perda

Figura 4.18: Materiais Usados para Análise da Influência do Fator δ

Os parâmetros β e δ adotados podem resultar em perturbações não próprias de MVEs nas curvas características do módulo de elasticidade. Isso pode ser observado, sobretudo, nas séries associadas aos materiais $mve_{\beta_1} \rightarrow \beta_o * 0,2$ e $mve_{\delta_4} \rightarrow \delta_o * 4,5$ nas figuras 4.17(a) e 4.18(a) respectivamente. Estas perturbações aparecem em frequências mais elevadas e, conseqüentemente, só irão influenciar no comportamento dinâmico estrutural do sistema quando a faixa de frequências que envolve o problema analisado contenha a região onde estão estas perturbações. O item 7.2.2 do capítulo 7 tratará de forma mais abrangente o assunto relacionado com a faixa de frequência a qual a estrutura está submetida e o ajuste paramétrico das curvas características dos MVEs.

Respostas no Domínio do Tempo

As respostas no domínio do tempo serão apresentadas para os mesmos testes de fluência e relaxação aplicados ao exemplo base.

As respostas obtidas para os testes de fluência apresentadas nas figuras 4.19(a) e 4.20(a) mostram que a parcela elástica do MVE está ligada com o aumento do parâmetro δ ou com a redução do parâmetro β , ocorrendo o inverso com relação à parcela viscosa. Estes resultados confirmam as observações relacionadas com características inversas entre os parâmetros β e δ feitas no item anterior.

As curvas associadas aos materiais $mve_{\beta_1} \rightarrow \beta_o * 0,2$ e $mve_{\delta_4} \rightarrow \delta_o * 4,5$ mostradas nas figuras 4.19(a) e 4.20(a) respectivamente, permitem que se calculem as taxas de amortecimentos dos seus respectivos sistemas de 1 GL pela técnica do decaimento logarítmico, resultando:

$$\begin{aligned}\xi(mve_{\beta_1} \rightarrow \beta_o * 0,2) &= 22,0\% \\ \xi(mve_{\delta_4} \rightarrow \delta_o * 4,5) &= 24,1\%\end{aligned}$$

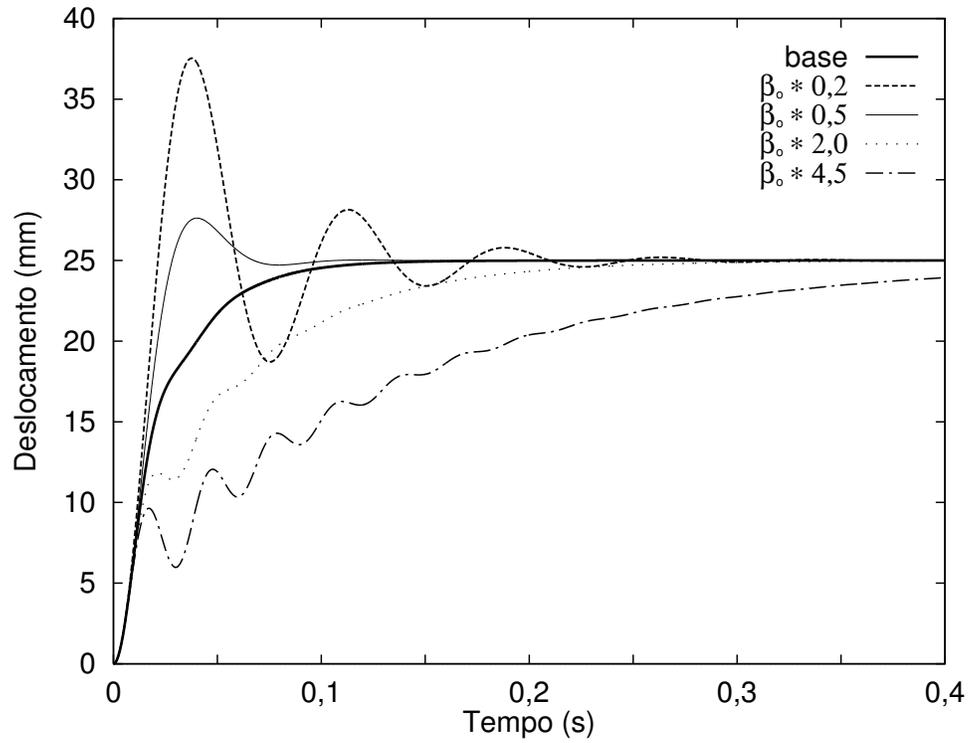
Os testes de relaxação aplicados resultaram nas curvas das figuras 4.19(b) e 4.20(b). Os valores iniciais e finais de força em ambos os testes são idênticos, pois como já observado, estes valores estão relacionados com os fatores ε e α que permaneceram inalterados nestas análises. Já a velocidade do decaimento da força está ligada ao grau de elasticidade ou viscosidade do sistema:

Maior elasticidade (decrecente com β ou crescente com δ) \rightarrow Maior velocidade de decaimento da força.

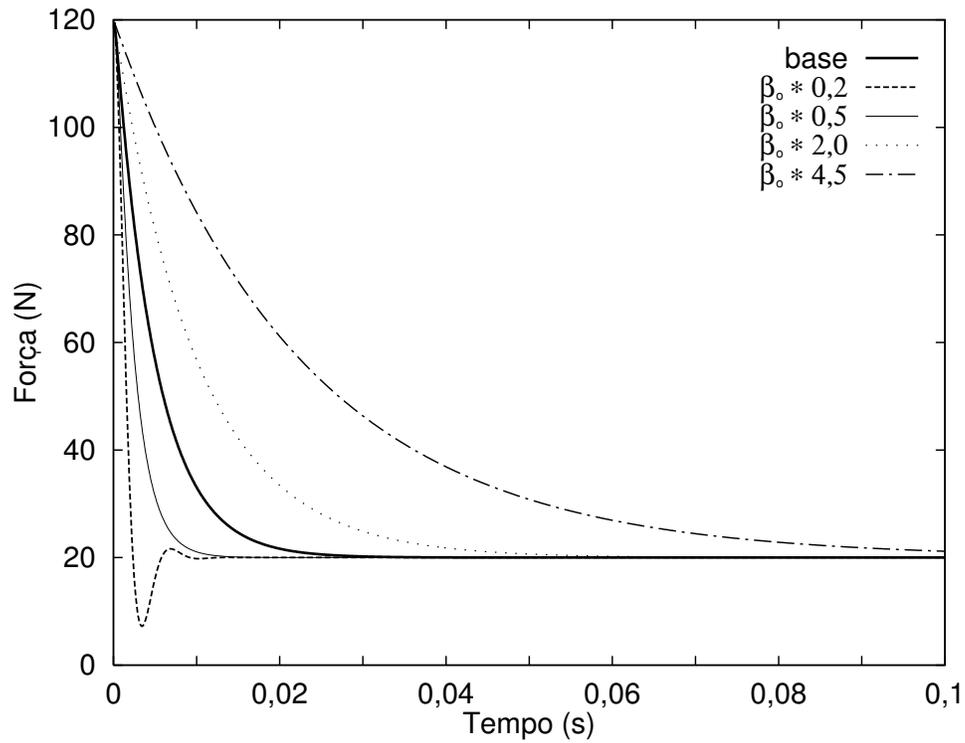
Maior viscosidade (crescente com β ou decrecente com δ) \rightarrow Menor velocidade de decaimento da força.

O teste de relaxação associado ao material $mve_{\beta_1} \rightarrow \beta_o * 0,2$ e mostrado na figura 4.19(b) apresentou oscilações nos instantes iniciais. Isto é devido às maiores

propriedades elásticas deste material com relação aos demais analisados neste item.

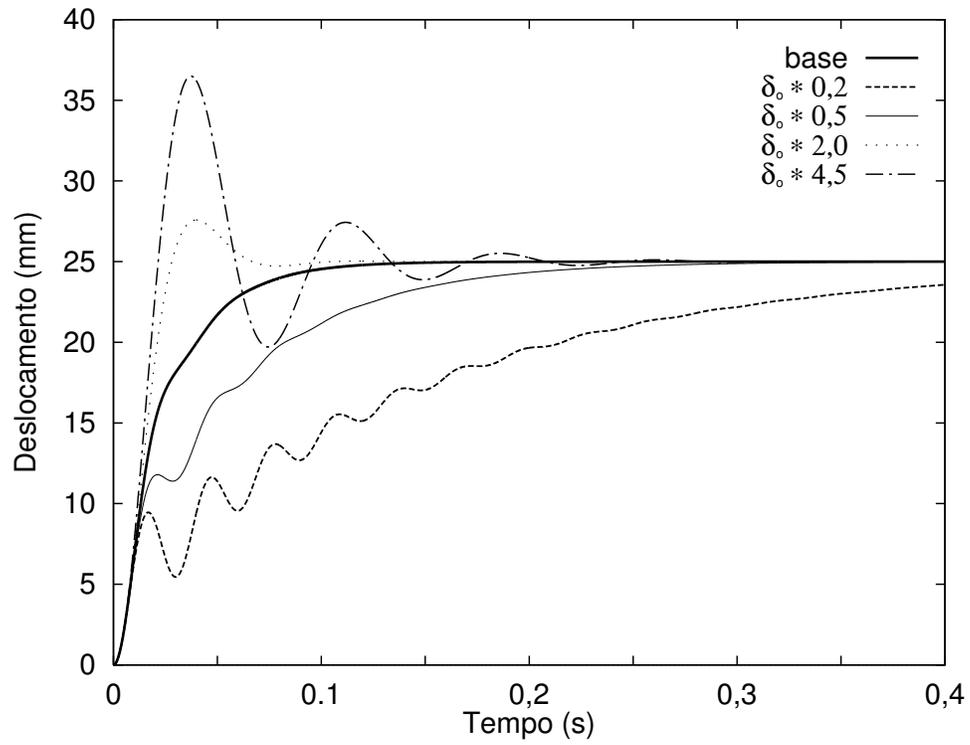


(a) Teste de Fluência

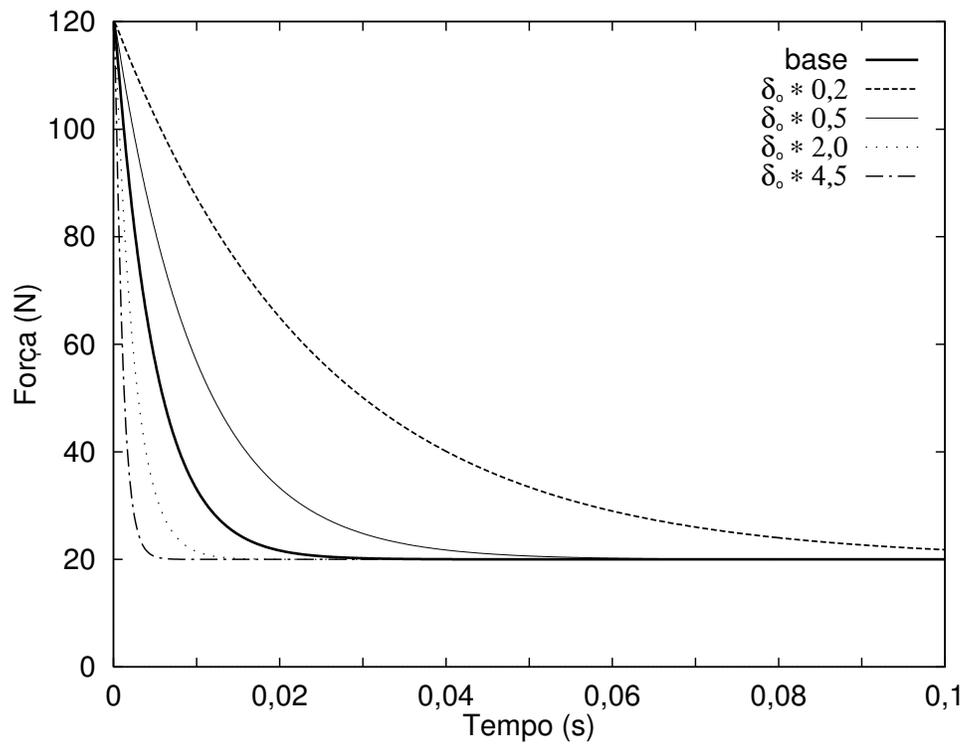


(b) Teste de Relaxação

Figura 4.19: Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator β



(a) Teste de Fluência



(b) Teste de Relaxação

Figura 4.20: Respostas no Domínio do Tempo para Variações do Fator δ

Respostas no Domínio da Frequência

As respostas no domínio da frequência são aqui obtidas para os sistemas de 1 GL estudados (figura 4.4) sujeitos ao mesmo carregamento harmônico do exemplo base: $P = 20\text{sen}(\omega t)$ (unidade de força em Newtons).

As figuras 4.21 e 4.22 mostram as respostas no domínio da frequência relativas aos parâmetros β e δ respectivamente. Nestas figuras, verifica-se a tendência observada durante toda as análises sobre parâmetros β e δ , ou seja, os gráficos têm características que variam de uma mesma forma para o aumento de um fator ou para a redução do outro.

Assim como aconteceu nas análises relativas aos parâmetros ε e α , devido às altas taxas de amortecimentos dos sistemas, nem todas as curvas apresentadas nas figuras 4.21 e 4.22 apresentaram picos de ressonância. As tabelas 4.10 e 4.11 resumem as frequências naturais que podem ser extraídas das figuras 4.21 e 4.22, respectivamente.

Tabela 4.10: Frequências Naturais dos Sistemas - mve_β

MVE	Frequência Natural (rad/s)
$mve_{\beta_1} \rightarrow (\beta_o * 0, 2)$	82
$mve_{\beta_3} \rightarrow (\beta_o * 2, 0)$	195
$mve_{\beta_4} \rightarrow (\beta_o * 4, 5)$	206

Tabela 4.11: Frequências Naturais dos Sistemas - mve_δ

MVE	Frequência Natural (rad/s)
$mve_{\delta_1} \rightarrow (\delta_o * 0, 2)$	207
$mve_{\delta_2} \rightarrow (\delta_o * 0, 5)$	196
$mve_{\delta_4} \rightarrow (\delta_o * 4, 5)$	82

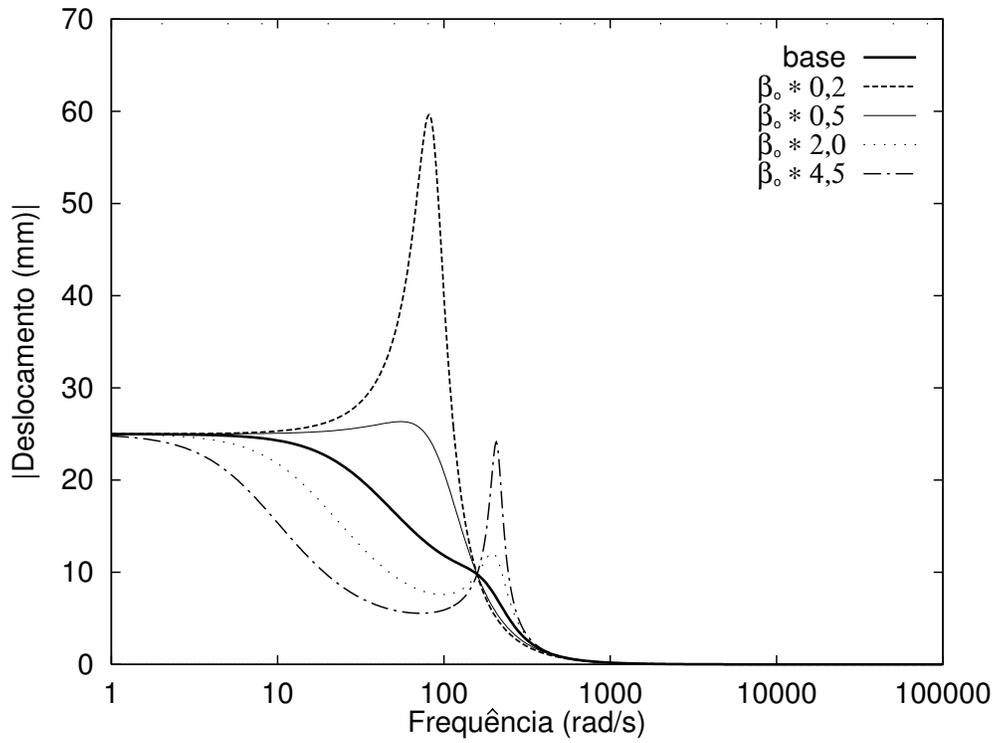


Figura 4.21: Respostas no Domínio da Frequência para Variações do Fator β

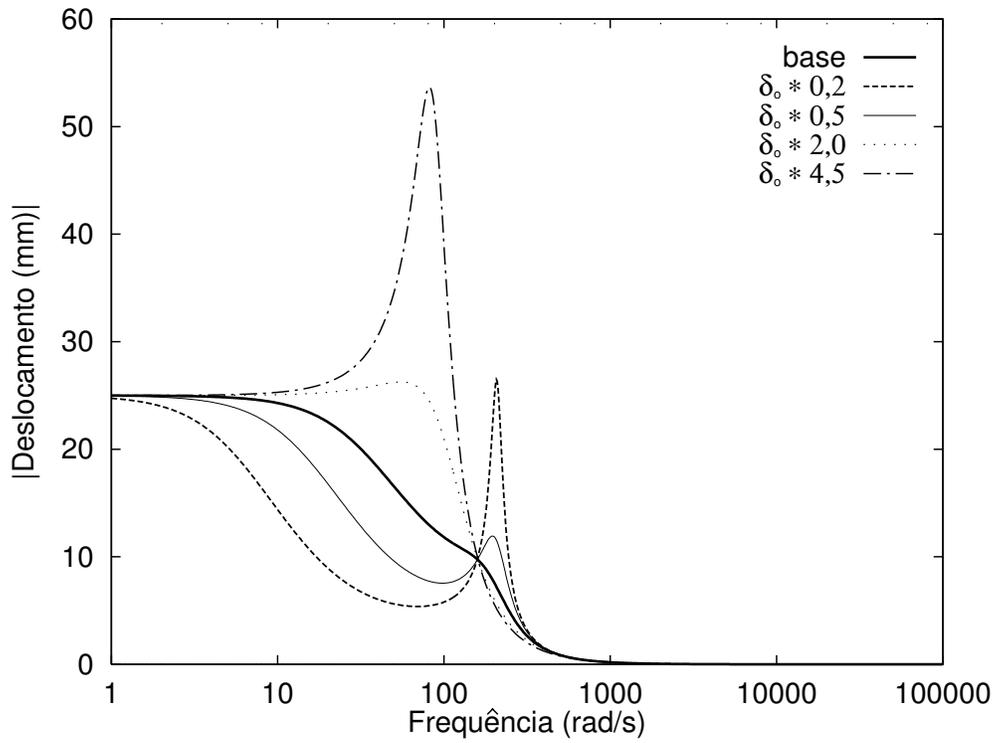


Figura 4.22: Respostas no Domínio da Frequência para Variações do Fator δ

Ciclos de Histerese

Com procedimentos análogos aos realizados acerca dos ciclos histeréticos relativos aos parâmetros ε e α , pode-se chegar aos gráficos das figuras 4.23 e 4.12 que mostram os ciclos de histerese relativos aos parâmetros β e δ , respectivamente.

As tabelas 4.12 e 4.13 resumem as frequências naturais e taxas de amortecimento obtidas para cada sistema estudado neste item.

Tabela 4.12: Frequências Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas $\rightarrow mat_{\beta}$

MVE	Frequência Natural ou de Excitação (rad/s)	Taxa de Amortecimento (%)
base	136,5	46,3
$mve_{\beta_1} \rightarrow \beta_o * 0,2$	85,5	21,5
$mve_{\beta_2} \rightarrow \beta_o * 0,5$	95,5	46,6
$mve_{\beta_3} \rightarrow \beta_o * 2,0$	189,5	21,2
$mve_{\beta_4} \rightarrow \beta_o * 4,5$	204,5	9,0

Tabela 4.13: Frequências Naturais e Taxas de Amortecimento dos Sistemas $\rightarrow mve_{\delta}$

MVE	Frequência Natural ou de Excitação (rad/s)	Taxa de Amortecimento (%)
base	136,5	46,3
$mve_{\delta_1} \rightarrow \delta_o * 0,2$	206,5	8,1
$mve_{\delta_2} \rightarrow \delta_o * 0,5$	190,5	21,3
$mve_{\delta_3} \rightarrow \delta_o * 2,0$	95,5	45,5
$mve_{\delta_4} \rightarrow \delta_o * 4,5$	87,0	23,1

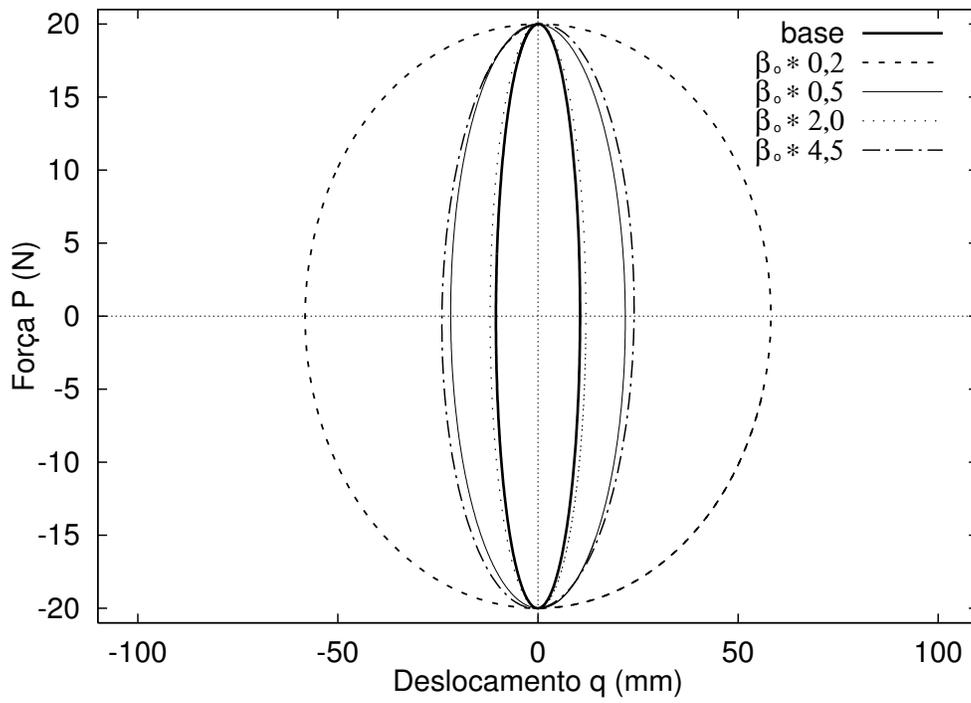


Figura 4.23: Ciclos Histeréticos para Variações do Fator β

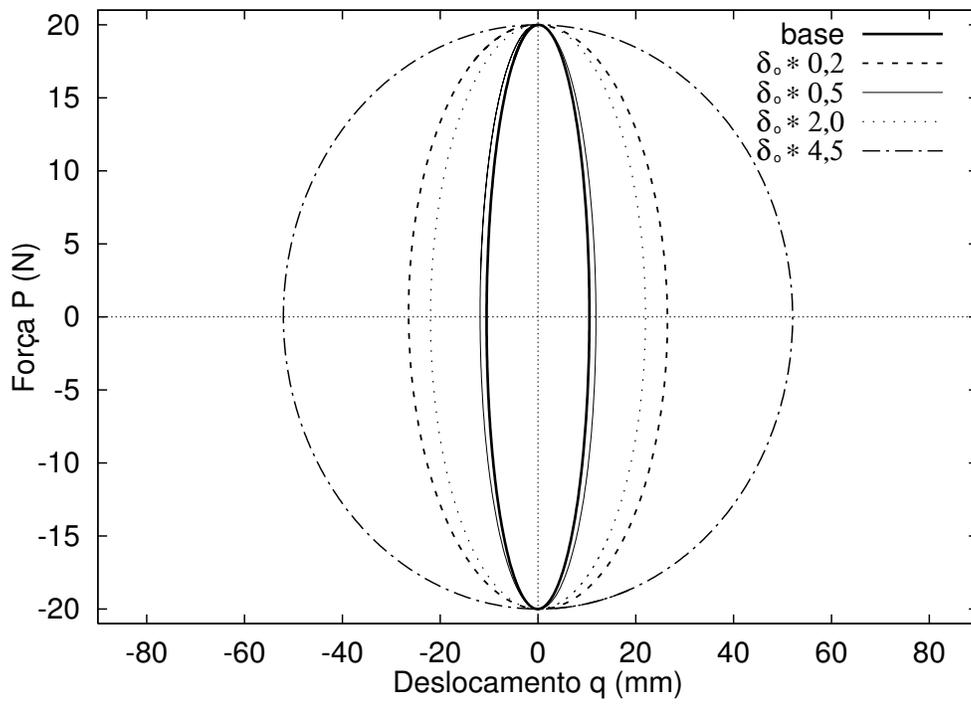


Figura 4.24: Ciclos Histeréticos para Variações do Fator δ

4.1.5 Resumo das Análises de Sensibilidade

As principais características dinâmicas a serem analisadas num MVE estão ligadas à taxa de amortecimento destes materiais. Assim sendo, as figuras 4.25 apresentam um resumo das taxas de amortecimento calculadas através da equação (4.4), tomando por base os gráficos dos Fatores de Perda das figuras 4.9(b), 4.13(b), 4.17(b) e 4.18(b) obtidos para cada MVE usado ao longo da análise de sensibilidade. As taxas de amortecimento obtidas foram tomadas em três frequências discretas: $\omega = 10, 100$ e 500 rad/s.

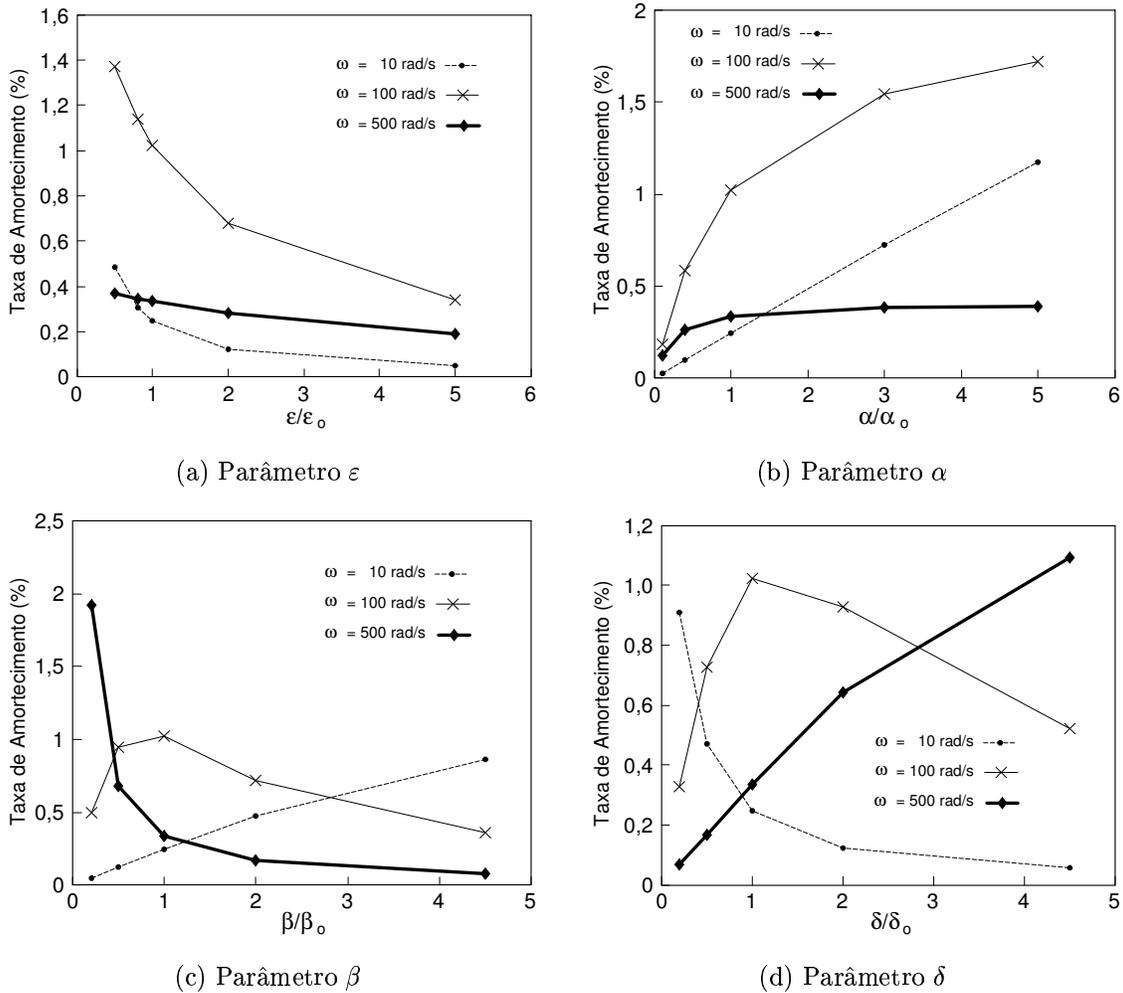


Figura 4.25: Variação da Taxa de Amortecimento de um MVE em Função dos Parâmetros Característicos ε , α , β e δ

A figura 4.25(a) mostra que a taxa de amortecimento de um MVE é inversamente proporcional ao parâmetro ε ; já a figura 4.25(b) mostra que a relação entre a taxa de amortecimento MVE e o parâmetro α é uma proporção direta. Em ambos os casos, a variação da frequência afetou as curvaturas dos gráficos apresentados nas figuras 4.25(a) e (b), mas não inverteu as relações de proporcionalidade entre os parâmetros α e β e a taxa de amortecimento do MVE, resultando em curvas sempre crescentes (parâmetro ε - figura 4.25(a) ou sempre decrescentes (parâmetro α - figura 4.25(b)).

A taxa de amortecimento de um MVE em função do parâmetro β por sua vez, tem um comportamento ora crescente e ora decrescente, dependendo da frequência, conforme mostra a figura 4.25(c): para $\omega = 10$ rad/s, o comportamento da taxa de amortecimento é decrescente com os valores de β ; para $\omega = 100$ rad/s a taxa de amortecimento cresce até um certo valor e decresce em seguida; e para $\omega = 500$ rad/s a variação da taxa de amortecimento é sempre crescente com os valores de β .

Com relação ao fator δ (figura 4.25(d)), nas frequências de 10 e 500 rad/s, as conclusões sobre a relação entre a taxa de amortecimento e este fator são inversas às do fator β , ou seja, para $\omega = 10$ rad/s, o comportamento da taxa de amortecimento é crescente com os valores de δ e para $\omega = 500$ rad/s a variação da taxa de amortecimento é sempre decrescente com os valores de δ . Já para a frequência de $\omega = 100$ rad/s, a variação da taxa de amortecimento em função de δ segue a mesma tendência observada para parâmetro β .

As análises das figuras 4.25 dão uma boa idéia da influência de cada parâmetro na taxa de amortecimento de um MVE.

Fazendo-se um resumo dos resultados alcançados para as frequências naturais e taxas de amortecimentos obtidas ao longo da análise de sensibilidade, monta-se a tabela 4.1.5.

Os resultados apresentados na tabela 4.1.5, tanto para as frequências naturais (colunas 1 e 2) quanto para as taxas de amortecimento (colunas 3, 4 e 5), têm valores próximos entre si, independentemente da técnica usada. Isso mostra uma boa coerência nas análises de sensibilidade.

Tão importante quanto entender a influência dos parâmetros ε , α , β e δ no comportamento dinâmico de MVEs é saber extraí-los das curvas experimentais dos materiais. Este procedimento é feito por meio de um ajuste de curvas e é tratado na próxima seção.

Tabela 4.14: Resumo de Resultados Obtidos nas Análises de Sensibilidade

Material	$\omega \{1\}$ (rad/s)	$\omega \{2\}$ (rad/s)	$\xi \{3\}$ (%)	$\xi \{4\}$ (%)	$\eta \rightarrow \xi \{5\}$ $\eta \rightarrow \xi \{5\}$
base	136,5	-	46,3	-	0,925 $\rightarrow \xi = 46,3 \%$
$mve_{\mathcal{E}_1}$	109,5	-	66,4	-	1,319 $\rightarrow \xi = 66,0 \%$
$mve_{\mathcal{E}_2}$	126,5	-	52,1	-	1,042 $\rightarrow \xi = 52,1 \%$
$mve_{\mathcal{E}_3}$	175,0	-	30,8	-	0,616 $\rightarrow \xi = 30,8 \%$
$mve_{\mathcal{E}_4}$	240,5	242	16,0	17,0	0,321 $\rightarrow \xi = 16,1 \%$
mve_{α_1}	88,5	88	8,7	9,3	0,173 $\rightarrow \xi = 8,7 \%$
mve_{α_2}	100,5	-	29,1	-	0,583 $\rightarrow \xi = 29,0 \%$
mve_{α_3}	285,0	-	33,0	-	0,660 $\rightarrow \xi = 33,0 \%$
mve_{α_4}	393,0	-	25,0	-	0,499 $\rightarrow \xi = 25,0 \%$
mve_{β_1}	85,5	82	21,5	22,0	0,427 $\rightarrow \xi = 21,4 \%$
mve_{β_2}	95,5	-	46,6	-	0,921 $\rightarrow \xi = 46,1 \%$
mve_{β_3}	189,5	195	21,2	-	0,425 $\rightarrow \xi = 21,3 \%$
mve_{β_4}	204,5	206	9,0	-	0,180 $\rightarrow \xi = 9,0 \%$
mve_{δ_1}	206,5	207	8,1	-	0,162 $\rightarrow \xi = 8,1 \%$
mve_{δ_2}	190,5	196	21,3	-	0,428 $\rightarrow \xi = 21,4 \%$
mve_{δ_3}	95,5	-	45,5	-	0,907 $\rightarrow \xi = 45,4 \%$
mve_{δ_4}	87	82	23,1	24,1	0,461 $\rightarrow \xi = 23,1 \%$

Legenda:

Coluna {1} Frequências Naturais Obtidas para os Sistemas via Teste de Ressonância (Ciclo Histerético)

Coluna {2} Frequências Naturais Obtidas para os Sistemas via Resposta em Frequência

Coluna {3} Taxas de Amortecimento Obtidas para os Sistemas via Ciclo Histerético (Equação (2.14))

Coluna {4} Taxas de Amortecimento Obtidas para os Sistemas via Resposta no Tempo (Decaimento Logarítmico Aplicado ao Teste de Fluência - Equação (4.12))

Coluna {5} Fatores de Perda e Correspondentes Taxas de Amortecimento para Cada Sistema Obtidos Através da Equação (4.4) para ω expresso segundo coluna {1}

4.2 Ajuste de Parâmetros

Além de uma idéia qualitativa e quantitativa dos valores a serem adotados para cada parâmetro, que possa ser obtida através de um procedimento semelhante ao descrito na seção anterior, é interessante observar algumas características das funções que definem E' (equação (4.3)) e η (equação (4.4)) e estabelecer um espaço viável de busca das variáveis ε , α , β e δ no intuito de ajustá-los às curvas experimentais.

4.2.1 Espaço de Busca das Variáveis ε , α , β e δ

Tomando-se o limite quando $\omega \rightarrow 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty$ na equação (4.3) pode-se escrever:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} E'(\omega) = E'(0) = \varepsilon \quad (4.14)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} E'(\omega) = E'(\infty) = \varepsilon + \alpha \quad (4.15)$$

Pode-se então concluir que ε é o módulo de armazenamento ou simplesmente módulo de elasticidade para a frequência mais baixa e α é a diferença entre os módulos de armazenamento para a maior e a menor frequência (ω_{max} e ω_{min} respectivamente) consideradas para um espectro de frequências suficientemente extenso.

Logo, observando as curvas (2.7) nas quais tem-se E' sempre crescente e as equações (4.14) e (4.15) pode-se dizer que:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq E'_{min} \\ \alpha &\geq E'_{max} - \varepsilon \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $E'_{min} = E'(\omega_{min})$ e $E'_{max} = E'(\omega_{max})$.

Outras restrições atribuídas ao espaço viável de busca dos parâmetros ε , α , β e δ podem ser obtidas observando-se que:

$$\begin{aligned} E' &> 0, \quad \forall \omega \quad e \\ \eta &> 0, \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (4.17)$$

A equação (4.3), quando levada à primeira restrição (4.17), fornece:

$$\varepsilon + \frac{\alpha\omega^2(\omega^2 - \delta + \beta^2)}{(\delta - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} > 0, \quad \forall \omega \quad (4.18)$$

O denominador da equação (4.18) é um somatório de termos quadráticos e portanto sempre maior que zero. Para então assegurar que a equação (4.18) sempre será

satisfeita, o numerador dessa equação deverá ser sempre positivo já que o primeiro termo da equação está contido no intervalo aberto: $0 < \varepsilon < \infty$. Isto produz:

$$\alpha\omega^2(\omega^2 - \delta + \beta^2) > 0, \quad \forall\omega \quad (4.19)$$

O fator $\alpha\omega^2$ da equação (4.19) representa o produto de um termo positivo por definição (ver equação (3.2)) e um termo quadrático obviamente também positivo. Conseqüentemente, faz-se necessário que

$$(\omega^2 + \beta^2) > \delta, \quad \forall\omega \quad (4.20)$$

Lembrando-se que ω está compreendido entre ω_{min} e ω_{max} , pode-se então escrever a partir da equação (4.20):

$$\begin{aligned} (\omega_{min}^2 + \beta^2) > \delta &\rightarrow \beta^2 > \delta - \omega_{min}^2 \\ (\omega_{max}^2 + \beta^2) > \delta &\rightarrow \beta^2 > \delta - \omega_{max}^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como $\omega_{max} > \omega_{min}$, as inequações (4.21) ficam englobadas pela primeira inequação (4.21) que apresenta como conjunto solução um único intervalo de valores β positivos:

$$\beta > \sqrt{\delta - \omega_{min}^2} \quad (4.22)$$

sendo que o radicando da inequação (4.22) deverá atender à relação:

$$\delta - \omega_{min}^2 \geq 0 \quad (4.23)$$

Uma vez assegurado que $E' > 0$, a restrição expressa na segunda equação (4.17) fica automaticamente satisfeita. Partindo-se da equação (4.4) e da definição dos parâmetros α , β e δ (ver equação (3.2)) esta demonstração fica trivial.

Outras restrições poderão ser obtidas através de considerações de projeto visando, por exemplo, aproximar E' ou η somente numa determinada faixa de freqüência. Este tipo de análise será abordado no capítulo 7.

Resumidamente, a região de busca ora obtida para o conjunto de variáveis ε , α , β e δ pode ser escrita como o conjunto das quadras ordenadas (ε , α , β e δ) que atendem às restrições:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq E'_{min} \\ \alpha &\geq E'_{max} - \varepsilon \\ \beta &> \sqrt{\delta - \omega_{min}^2} \\ \delta &\geq \omega_{min}^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

O ajuste experimental dos parâmetros pode ser feito através de qualquer ferramenta de busca. Gibson *et al* [11] faz este ajuste através da minimização do funcional (\mathcal{J}):

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} [E^*(\omega) - E_t^*(\omega)]^2 d\Omega \quad (4.25)$$

onde Ω é o domínio do espaço de busca; $E^*(\omega)$ é valor exato do módulo complexo extraído diretamente das curvas experimentais e $E_t^*(\omega)$ é um valor tentativa função da quadra ordenada também tentativa (ε_t , α_t , β_t e δ_t)

A proposta de ajuste de Gibson *et al* [11] é uma aplicação direta do método dos mínimos quadrados [31].

Outras maneiras de se ajustarem os parâmetros ε_t , α_t , β_t e δ_t são: algoritmos iterativos (Newton-Raphson) [32]; busca por varredura [33]; algoritmos genéticos [34]; otimizadores (goal program) [35], etc.

No presente trabalho foram utilizadas 2 formas de busca: Busca por Varredura e Busca via Algoritmos Genéticos. Em todos os casos os resultados foram satisfatórios.

4.2.2 Busca por Varredura

A busca por varredura aqui adotada está acoplada com o Método dos Mínimos Quadrados e de uma forma geral apresenta uma implementação bastante simples como ilustra o algoritmo que segue:

Início

NG = 10^{10} (número suficientemente grande)

para $\varepsilon_t = \varepsilon_{inicial}$ até ε_{final} passo $\Delta\varepsilon$ faça

Para $\alpha_t = \alpha_{inicial}$ até α_{final} passo $\Delta\alpha$ faça

Para $\beta_t = \beta_{inicial}$ até β_{final} passo $\Delta\beta$ faça

Para $\delta_t = \delta_{inicial}$ até δ_{final} passo $\Delta\delta$ faça

Se $\Gamma(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t) < NG$ Então

NG = $\Gamma(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t)$

Fim do Se

Fim do Para

Fim do Para

Fim do Para

Fim do Para

Fim

onde $\Gamma(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \Psi_1 [E'^*(\omega_i) - E_t'^*(\omega_i)]^2 + \Psi_2 [\eta^*(\omega_i) - \eta_t^*(\omega_i)]^2 \right\}$, sendo N o número de pontos discretos $[\omega_i, E'^*(\omega_i)]$ e $[\omega_i, \eta^*(\omega_i)]$ ($i = 1, \dots, N$) extraídos diretamente das curvas experimentais; Ψ_1 e Ψ_2 coeficientes de ponderação;

$E_t'^*$ e η_t^* os valores tentativa obtidos através das expressões (4.3) e (4.4) respectivamente, em função de $(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t)$.

Os intervalos de busca de $(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t)$ são definidos de forma que as equações de restrição (4.24) sejam atendidas.

Já o passo destas variáveis é definido de maneira que se obtenha um grau de refinamento maior à medida que se aproxima da solução. Isto pode ser feito através de sucessivas análises de resultados provenientes da execução do algoritmo de busca anteriormente descrito. Através deste procedimento, é possível também estreitar a região de busca, acelerando a convergência do processo.

4.2.3 Busca por Algoritmos Genéticos

A busca por Algoritmos Genéticos (AG) [34] e [36] aqui adotada também está acoplada ao Método dos Mínimos Quadrados no que se refere às avaliações das quadras ordenadas tentativas $(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t)$.

Utiliza-se neste caso o seguinte algoritmo:

Início

Inicie um conjunto de n quadras ordenadas $(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t)$

Para $i=1$ até número de execuções faça

Avalie o conjunto das n quadras $(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t)$

Selecione as quadras que produzem melhores resultados

Faça alterações nas quadras selecionadas

Gere novo conjunto de quadras

Fim do para

Fim

A seguir será abordado de forma bem sucinta, cada passo deste algoritmo de busca.

Iniciação das Quadras Tentativas

O processo de iniciação das quadras tentativas é puramente aleatório.

Avaliação das Quadras Tentativas

A avaliação das quadras é feita a partir de uma função objetivo Γ , que no caso foi adotada como sendo:

$$\Gamma(\varepsilon_t, \alpha_t, \beta_t, \delta_t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \Psi_1 [E_t'^*(\omega_i) - E_t^*(\omega_i)]^2 + \Psi_2 [\eta^*(\omega_i) - \eta_t^*(\omega_i)]^2 \right\} \quad (4.26)$$

onde as quantidades envolvidas foram definidas no item anterior.

As melhores quadras são as que produzem os maiores valores de $1/\Gamma$.

Seleção das Quadras Tentativas

A seleção das quadras tentativas é feita tomando-se as quadras melhor avaliadas segundo um certo critério de seleção. Os critérios de seleção utilizados foram:

- Método da Roleta

Este método faz uma avaliação ponderada do conjunto de quadras tentativas, atribuindo notas de 0 (zero) a 1 (um) para cada i -ésima quadra dentre as N existentes segundo a expressão:

$$Nota_i = \frac{1/\Gamma_i}{\sum_{i=1}^N 1/\Gamma_i} \quad (4.27)$$

A probabilidade de seleção da i -ésima quadra é diretamente proporcional a sua $Nota_i$.

Com este critério o conjunto de quadras tentativas tende a rapidamente convergir para a vizinhança de uma das quadras que possui uma nota relativamente maior que as demais, mesmo estando longe de uma boa solução. A convergência prematura associada à falta de diversidade do conjunto de quadras tentativas, características deste método de seleção [34], acarretou em grandes erros e, conseqüentemente, não apresentou bons resultados.

- Método do Torneio

Este critério também atribui uma nota para cada quadra tentativa segundo a equação (4.27), porém seu critério de seleção é o de escolher aleatoriamente 2 quadras dentro do conjunto de quadras tentativas e selecionar a que possuir melhor nota.

Este critério apresentou bons resultados pois aumentou a diversidade do conjunto tentativa reduzindo as chances de convergência prematura.

Alteração e Geração de um Novo Conjunto de Quadras

Cada elemento do conjunto tentativa é representado de forma seqüencial segundo numa cadeia binária, cujos valores decimais correspondem a uma quadra (ε , α , β , δ) conforme sugere a figura 4.26.

A geração do novo conjunto de quadras tentativas é feita segundo alterações no conjunto tentativa do passo anterior aplicadas à suas respectivas representações binárias.

quadra tentativa 1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	Representação Binária ←
quadra tentativa 2	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	
quadra tentativa 3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	
quadra tentativa 4	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	
quadra tentativa 5	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	
quadra tentativa 6	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	
	ϵ	α		β		δ							
	5	5		1		2							
	6	6		2		1							
	1	5		3		2		Representação Decimal ←					
	6	4		0		3							
	3	3		5		1							
	5	1		2		5							

Figura 4.26: Exemplo de um Conjunto com 6 Quadras Tentativa

Existe uma grande quantidade de operadores deste tipo, sendo que neste trabalho foram utilizados:

- Operador de Recombinação

Este operador seleciona duas quadras segundo um certo critério (roleta, torneio, etc) e escolhe aleatoriamente trechos da representação binária de cada uma das quadra selecionadas que serão trocados entre elas, gerando uma nova quadra tentativa, conforme descreve a figura 4.27.

quadra 1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
quadra 2	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
Nova Quadra	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
	parcela da quadra 1						parcela da quadra 2					

Figura 4.27: Exemplo de Operador de Recombinação

- Operador de Mutação

Este operador escolhe aleatoriamente um ponto de uma quadra selecionada e faz a inversão de seu valor binário, tornando 0 quando o bit tiver valor 1 e vice-versa, conforme sugere a figura 4.28.

Os parâmetro relativos às probabilidades de ocorrência de cada operador de alteração são dados do programa. Cabe ressaltar que a probabilidade de ocorrência

quadra tentativa

1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Nova quadra tentativa

1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Figura 4.28: Exemplo de Operador de Mutação

do operador mutação não poderá ser muito alta pois pode tornar a busca totalmente aleatória. Neste trabalho foi adotado: probabilidade de combinação igual a 0,85 e probabilidade de mutação igual a 0,1, que segundo às referências [34] e [36] são parâmetros que produzem bons resultados para os tipos de operadores utilizados.

4.3 Exemplo de Ajuste Paramétrico

O exemplo a seguir visa a abordar um procedimento de ajuste dos parâmetros ε , α , β e δ , partindo de uma situação inicial na qual tem-se de antemão os resultados experimentais relacionando Módulos de Armazenamento e Fatores de Perda de um MVE com frequências discretas.

Para tal, faz-se a seguir o ajuste paramétrico de um material X (hipotético) que apresenta como resultados experimentais os dados mostrados na tabela 4.15.

Tabela 4.15: Resultados Experimentais (Hipotéticos) para o Material X

Frequência rad/s	Módulo de Armazenamento (MPa)	Fator de Perda
10	2,1	0,47
30	2,8	0,98
50	4,0	1,00
100	7,0	0,72
200	10,0	0,40
500	11,7	0,17
1000	12,0	0,08

O ajuste por varredura produz resultados bastante precisos mas seu custo computacional é bem elevado em virtude das muitas avaliações de quadras tentativas (ε_t , α_t , β_t e δ_t). Observando o algoritmo descrito no item 4.2.2, verifica-se que este número de avaliações é igual ao produto $\mathcal{N}_\varepsilon * \mathcal{N}_\alpha * \mathcal{N}_\beta * \mathcal{N}_\delta$, onde os termos \mathcal{N}_ε , \mathcal{N}_α , \mathcal{N}_β e \mathcal{N}_δ são, respectivamente, o número de valores ε_t , α_t , β_t e δ_t usados na varredura.

Já o ajuste por algoritmos genéticos tem um custo computacional mais baixo pois o número de avaliações de quadras tentativas (ε_t , α_t , β_t e δ_t) é bem menor que numa busca por varredura, mas sua convergência para soluções mais precisas, às

vezes, torna-se mais complicada [34]. No ajuste via algoritmos genéticos o número de avaliações de quadras tentativas (ε_t , α_t , β_t e δ_t), de acordo com o algoritmo descrito no item 4.2.3, é $n * \mathcal{N}_{exec}$, onde n é o número de quadras tentativas adotadas (usualmente entre 30 e 80 [36]) e \mathcal{N}_{exec} é o número de execuções do algoritmo (adotada pelo engenheiro em função da precisão da solução almejada).

A figura 4.29 faz uma comparação qualitativa entre os dois métodos, mostrando que o ajuste via algoritmos genéticos rapidamente se aproxima da solução, tendendo a se estabilizar próximo à resposta (em muitos casos o método converge para solução); já a busca por varredura caminha mais lentamente para solução, atingindo a convergência com um esforço computacional bem maior.

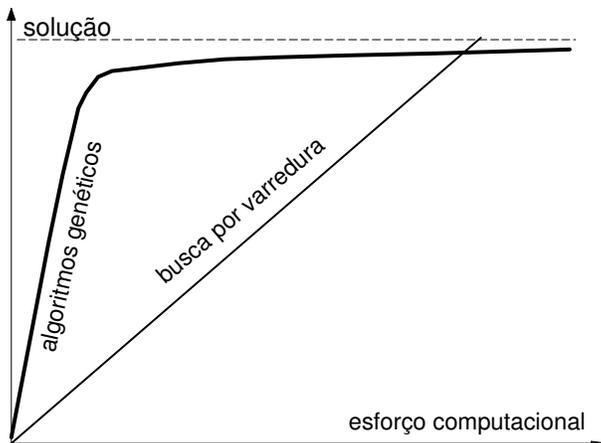


Figura 4.29: Esquema Representativo da Convergência dos Métodos de Ajuste Utilizados

Em alguns casos, o esforço computacional a ser dispendido para que se alcance um resultado satisfatório via busca por varredura inviabiliza a análise por este método. São as situações para as quais se têm poucas informações paramétricas sobre o MVE a ser estudado, fazendo com que se estendam os intervalos de busca dos parâmetros ε , α , β e δ e, conseqüentemente, eleve exponencialmente o esforço computacional.

No presente exemplo adotou-se uma estratégia mista: utiliza-se o ajuste via algoritmos genéticos para se estimar os valores paramétricos iniciais e em seguida faz-se uma busca por varredura na vizinhança destes parâmetros.

Os valores obtidos para os parâmetros ε , α , β e δ no ajuste dos dados experimentais da tabela 4.15 foram:

- Via algoritmos genéticos:
 - $\varepsilon = 1,96$ MPa
 - $\alpha = 10,12$ MPa

$$- \beta = 1,13 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$$

$$- \delta = 1,15 \times 10^9 \text{ s}^{-2}$$

- Via busca mista:

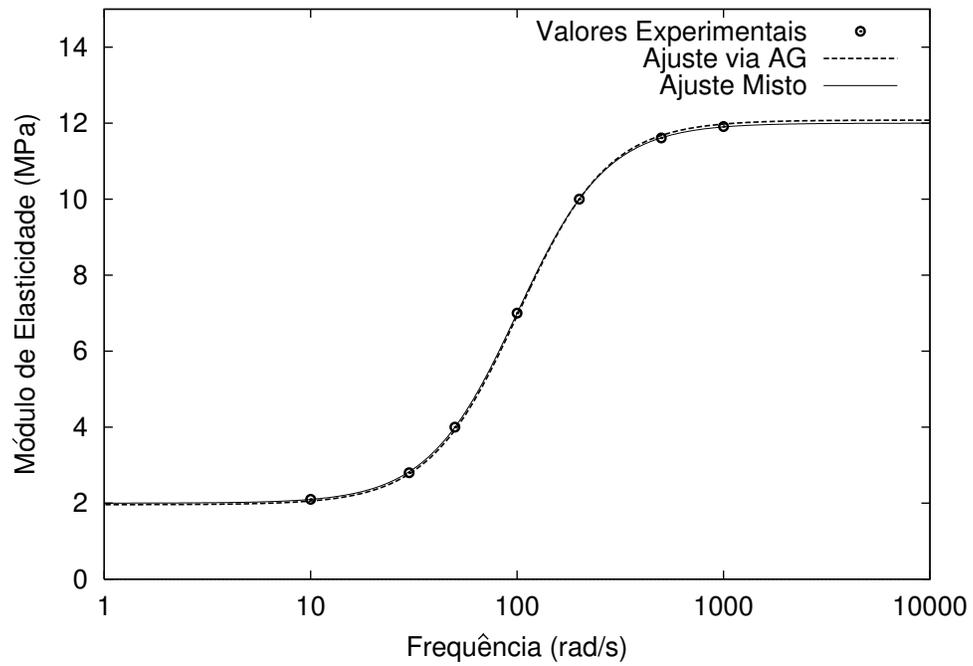
$$- \varepsilon = 2,00 \text{ MPa}$$

$$- \alpha = 10,00 \text{ MPa}$$

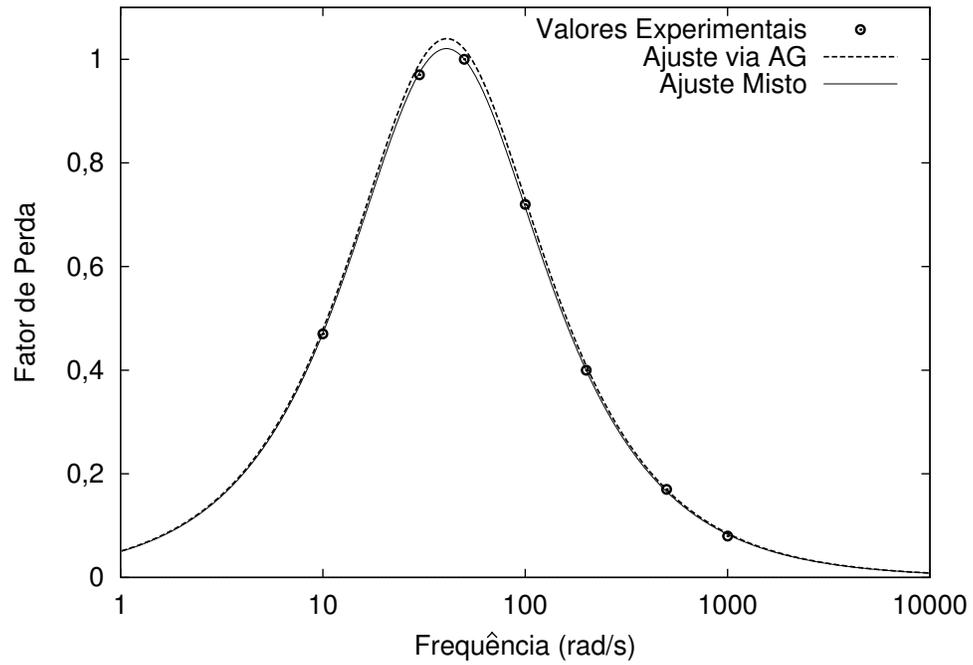
$$- \beta = 1,09 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$$

$$- \delta = 1,09 \times 10^9 \text{ s}^{-2}$$

As figuras(4.30 apresentam os valores experimentais do material X (tabela 4.15) bem como os ajustes paramétricos obtidos via AG e via busca mista, mostrando que os procedimentos de busca adotados produzem resultados satisfatórios, sendo que o ajuste misto apresentou curvas um pouco melhor ajustadas que as apresentadas pelo ajuste via AG.



(a) Módulo de Elasticidade



(b) Fator de Perda

Figura 4.30: Curvas Resultantes do Ajuste Paramétrico do Material X

Capítulo 5

Implementação Computacional do GHM

Com o intuito de simular computacionalmente o comportamento de MVEs, foram desenvolvidos 3 programas de elementos finitos, utilizando a linguagem FORTRAN. Os programas desenvolvidos estão sucintamente descritos a seguir com seus respectivos elementos disponíveis para modelagem.

- `ghm1d.for`: Programa para análise de problemas a uma dimensão, com elemento de treliça;
- `ghm2d.for`: Programa para análise de problemas a duas dimensões, com elemento retangular linear em estado plano de tensão e
- `ghm3d.for`: Programa para análise de problemas a três dimensões com elemento linear hexaédrico.

Dos três programas, o último, por abranger uma variedade maior de problemas, foi elaborado com mais recursos computacionais e é baseado nele que as próximas seções sobre as implementações numéricas serão abordadas. Todos os procedimentos utilizados nos demais programas estão contidos em `ghm3d.for`.

Após concluído o detalhamento da implementação numérica, serão feitas as observações pertinentes à modelagem e à discretização.

5.1 Características Gerais do Programa

De uma forma geral, as características do programa `ghm3d.for` são:

- Determina deslocamentos, velocidades e acelerações de um problema 3D composto de material elástico e/ou viscoelástico;
- Calcula o estado triaxial de tensões do elemento e compara com os critérios de ruptura de von Mises e Mohr-Coulomb;
- Biblioteca de elementos composta por elementos hexaédricos lineares elásticos e viscoelásticos;
- Utiliza o GHM para determinar as matrizes de elementos do material viscoelástico;
- Possui rotina interna (subrotina `jacobi.for` [29]) para a solução do problema de auto-valor da matriz elástica e conseqüente determinação das matrizes viscoelásticas
- Monta matriz global do sistema e armazena-a em um perfil *skyline*;
- Utiliza *solver* direto (subrotina `colsol.for` [29]) para solução do sistema de equações lineares via método de Gauss;
- Integra as equações de movimento utilizando o método de Newmark;
- Calcula forças nodais equivalentes resultantes de peso próprio;
- Gera diversos arquivos de saída para visualização.

5.2 Algoritmo e Fluxo do Programa

O pseudo-código que segue dá uma idéia do fluxo do programa. As rotinas principais estão assinaladas com um asterisco (*) e serão detalhadas *a posteriori*. As demais rotinas são consideradas de compreensão trivial e, portanto, apenas citadas.

Programa Principal: `ghm3d.for`

Início

Estabelece a característica da base de dados e

inicia o gerenciamento de memória - `setdb.for*`

Abre os arquivos de entrada e saída - `abert_arq.for`

Gerencia o processamento numérico - `controle.for*`

Fecha todos os Arquivos - `fecha_arq.for`

Fim

5.2.1 Detalhamento das Rotinas

Rotina `setdb.for`

Esta rotina é composta de um conjunto de subrotinas usadas no gerenciamento da memória (alocação dinâmica das matrizes envolvidas no problema). O uso deste pacote de subrotinas é simples e facilita o trabalho de programação. Para maiores informações ver referência [37]

Rotina `controle.for`

Esta rotina é responsável por gerenciar o processamento numérico relativo à implementação do GHM via MEF, constituindo-se na principal rotina do programa. O algoritmo desta rotina é descrito a seguir e, como já comentado, as rotinas que estão assinaladas com um asterisco (*) serão detalhadas *a posteriori*.

Início

Faz leitura das variáveis do problema - `rdata.for*`

Numera as equações em função dos GLs sem restrição - `numeq.for*`

Determina as características do perfil *skyline* - `profil.for*`

Calcula vetor de carga externa e devido ao peso próprio - `pload.for*`

Para i de 1 até número de elementos

 Identifica o tipo de elemento

 Calcula a matriz de elemento - `elemento.for*`

 Faz o acoplamento das matrizes de elemento na matriz global - `addelemento.for*`

Fim do laço em i

Imprime as matrizes globais em arquivo para análise modal - `saida_modal.for*`

Monta matriz efetiva do sistema para integração via Método de Newmark

 (\mathbf{M}_{efe}) - `matriz_efetiva.for*`

Fatora \mathbf{M}_{efe} - `colsol.for*`

Faça enquanto t (tempo) menor ou igual ao tempo máximo de integração

 Calcula vetor de força efetivo do sistema (\mathbf{F}_{efe}) - `carga_efetiva.for*`

 Calcula os deslocamentos $\mathbf{U} = \mathbf{M}_{efe}^{-1} \mathbf{F}_{efe}$ com \mathbf{M}_{efe} já fatorada - `colsol.for*`

 Atualiza velocidades e acelerações em função de \mathbf{U} - `atualiza_vel_ace.for*`

 Se $flag$ de impressão de deslocamentos for verdadeiro Então

 Imprime \mathbf{U} - `pos_out1.for`

 Fim do Se

 Se $flag$ de impressão de tensões for verdadeiro Então

 Calcula tensões nos elementos σ_{ele} - `calcula_tensao.for*`

 Imprime σ_{ele} - `pos_out2.for`

 Fim do Se

 Incrementa $t \Rightarrow t = t + \Delta t$ (Δt - intervalo de tempo de integração)

Fim do laço em t

Fim

Rotina rdata.for

Esta rotina é responsável pela leitura dos dados relativos ao problema. Tais dados são comuns em qualquer programa de elementos finitos. São eles:

- Coordenadas nodais;
- Restrições nodais;
- Tipo de material e conectividades dos elementos;
- Características dos materiais que compõem o problema;
- Dados do carregamento e
- Dados relativos à integração numérica.

À medida que é feita a leitura do arquivo de dados é gerado um arquivo de saída contendo as leituras que foram efetuadas.

Rotina numeq.for

Esta rotina renumera os GLs do problema, introduzindo as condições de contorno do problema. O procedimento é clássico em programas que utilizam MEF e segue de forma esquemática:

Início

$j = 0$

Para i de 1 até número total de GLs do sistema

Se (GL(i) é liberado) Então

$j=j+1$

GL(i)= j

Senão

GL(i)= 0

Fim do Se

Fim do Para

Fim

Desta maneira é possível reduzir o número total de GLs do sistema para j GLs e montar as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do problema somente em função dos j GLs não-restritos, reduzindo o esforço computacional em etapas posteriores.

Esta técnica tem a vantagem de não introduzir erros numéricos na imposição das condições de contorno, coisa que em outras técnicas (ver [38]) pode ocorrer.

Na prática, a rotina admite que o grau de liberdade é livre quando $GL(i)=0$ (zero) e restrito quando $GL(i)=1$ (um).

Rotina `profil.for`

Esta rotina determina o perfil da matriz efetiva do sistema o qual fica bem caracterizada pelo vetor apontador da diagonal principal (*jdiag*). O algoritmo para a determinação deste perfil é (de forma esquemática):

Início

$$jdiag(1) = 1$$

$$jdiag(2) = 2$$

Para i de 3 até GLs do sistema

Localiza os GLs conectados fisicamente ao GL i

Dentre cada j GL selecionado, localiza o que produz a maior diferença $|i - j|$

$$jdiag(i) = jdiag(i - 1) + |i - j| + 1$$

Fim do Para

Fim

O perfil *skyline* da matriz efetiva do sistema é orientado da diagonal para o topo da matriz conforme sugere figura 5.1.

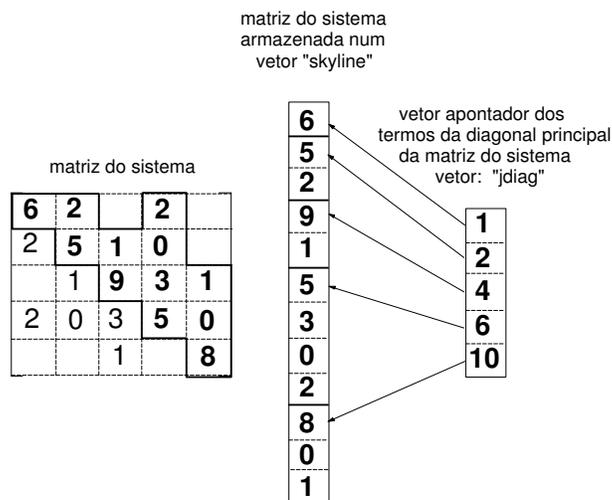


Figura 5.1: Esquema de Armazenamento da Matriz Efetiva do Sistema e do Apontador *jdiag*

Rotina `pload.for`

Esta rotina determina o vetor de cargas aplicadas na estrutura. Existe aqui a possibilidade de se incluir ou não o peso próprio:

Início

Se flag de consideração de peso próprio for verdadeiro Então

Para $i=1$ até número de elementos

Calcula o peso do elemento i

Atualiza o vetor de forças

Fim do Para

Fim do Se

Fim

As parcelas de carregamento relativas às forças externas são incluídas no vetor de carga à medida que são lidas na rotina `rdata.for`.

A rotina `pload.for` faz também um rearranjo do vetor de força considerando a renumeração dos GLs feito na rotina `numeq.for`

Rotina `elemento.for`

Esta rotina, após identificar o tipo de elemento em questão (elástico ou viscoelástico), monta os arranjos locais correspondentes.

Para o caso de elemento elástico os arranjos locais serão determinados a partir de uma biblioteca de elementos elásticos¹, apesar do presente programa contar apenas com o elemento hexaédrico.

Ainda com relação aos elementos elásticos, adota-se aqui uma matriz de massa discreta e uma matriz de amortecimento proporcional à massa ou à rigidez ou a ambas.

Já para o caso de elementos viscoelásticos tem-se um procedimento especial, já que não é possível se montar uma biblioteca destes tipos de elementos, exceto para alguns casos mais simples como o descrito na seção 3.3 (elemento unidimensional), pois a determinação das matrizes envolvidas no problema formulado via GHM passa pela solução de um problema de auto-valor e auto-vetor que raramente possui uma solução analítica de relativo grau de simplicidade.

Assim sendo, seguindo os procedimentos descritos na seção 3.6 para determinação das matrizes viscoelástica, tem-se os passos:

¹este procedimento visa a facilitar a introdução de outros tipos de elementos

- Determinação da matriz rigidez normalizada com relação ao módulo de elasticidade;
- Determinação dos auto-valores e auto-vetores desta matriz. Utiliza-se aqui o método de Jacobi;
- Exclusão dos modos relativos a movimento de corpo rígido (auto-valores nulos) e
- Aplicação das equações (3.31), (3.33) e (3.32) para determinação das respectivas matrizes de massa, rigidez e amortecimento do elemento.

Rotina `addelemento.for`

A rotina `addelemento.for` faz o acoplamento dos arranjos locais às matrizes globais da estrutura, conforme sugere equação (3.47).

Rotina `saida_modal.for`

Esta rotina tem a função de imprimir as matrizes de massa (diagonal) e de rigidez (armazenada em vetor *skyline* - figura 5.1) do problema em arquivo que é usado como entrada de dados para o programa `modal.for`.

O programa `modal.for` resolve o problema de vibrações livres não-amortecidas, determinando os modos e as frequências naturais do sistema. Ele utiliza o método de Interação de Subespaços para selecionar os modos e frequências desejados, acoplado ao algoritmo de Jacobi para solução do problema de auto-valor.

Esta estratégia foi adotada para aumentar a portabilidade do programa `modal.for`. Desta maneira, qualquer problema de auto-valor, com matrizes análogas às envolvidas neste problema, pode ser resolvido sem alteração do código.

Rotinas `matriz_efetiva.for`, `carga_efetiva.for` e `atualiza_vel_ace.for`

As rotinas `matriz_efetiva.for`, `carga_efetiva.for` e `atualiza_vel_ace.for` respectivamente efetuam: cálculo da matriz efetiva \mathbf{M}_{efe} dos sistema; cálculo do vetor de carga efetivo \mathbf{F}_{efe} do sistema e atualização das velocidades $\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ e acelerações $\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$ na integração numérica das equações de equilíbrio dinâmico pelo Método de Newmark. Estes procedimentos estão bem detalhados na referência [29] e estão resumidamente transcritos a seguir:

$$\mathbf{M}_{efe} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$$

$$\mathbf{F}_{efe}^{t+\Delta t} = F^{t+\Delta t} + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{U}^t + a_2 \dot{\mathbf{U}}^t + a_3 \ddot{\mathbf{U}}^t) + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{U}^t + a_4 \dot{\mathbf{U}}^t + a_5 \ddot{\mathbf{U}}^t)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = a_0(\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t) - a_2 \dot{\mathbf{U}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{U}}^t$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + a_6 \ddot{\mathbf{U}}^t + a_7 \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$$

onde a_0, a_1, \dots, a_7 são coeficientes determinados a partir dos parâmetros de integração do método de Newmark que é aqui utilizado e \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} as matrizes de rigidez, massa e amortecimento do sistema, respectivamente.

Rotina colsol.for

Esta rotina foi extraída da referência [29] e possui basicamente duas funções:

- Fatorar a matriz efetiva: $\mathbf{M}_{efe} = \mathbf{LGL}^t$ (flag = 1)
onde \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior e \mathbf{G} uma matriz diagonal.
- Resolver o sistema de equações lineares $\mathbf{M}_{efe} \mathbf{U} = \mathbf{F}_{efe}$ (flag = 2).

Após a matriz \mathbf{M}_{efe} ser fatorada, a solução \mathbf{U} do sistema de equações lineares torna-se mais simples e pode ser obtida por retro-substituição. Todo o processo de triangularização (fatoração) e retrossubstituição é baseado no processo de eliminação de Gauss.

Cabe salientar que a matriz \mathbf{M}_{efe} é constante no tempo e portanto sua fatoração é efetuada somente uma vez. As variações temporais ficam por conta do vetor \mathbf{F}_{efe} . Desta maneira, a solução no tempo das equações de equilíbrio dinâmico é obtida resolvendo-se o sistema linear $\mathbf{LGL}^t \mathbf{U} = \mathbf{F}_{efe}$ para cada passo de tempo.

Rotina calcula_tensao.for

Esta rotina calcula as seis componentes de tensão no interior dos elementos e um fator de referência que fornece a razão entre a tensão efetiva no elemento segundo um dado critério de ruptura e a tensão máxima admissível para o dado critério. Foram implementados no programa os critérios de von Mises e de Mohr-Coulomb [39].

A operação matemática que determina as seis componentes de tensão nos elementos é:

$$\sigma_{ele} = \mathbf{DBU}$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva e B é a matriz que relaciona os deslocamentos com as deformações.

De posse da expressão anterior, a determinação das tensões nos elementos de características elásticas fica simples pois o módulo de elasticidade é constante e conseqüentemente a matriz constitutiva fica bem definida, o que não acontece com os elementos com características viscoelásticas. O procedimento adotado no presente trabalho foi o de aproximar o valor do módulo de elasticidade dos elementos viscoelásticos para cálculo de tensões por um módulo médio:

$$E_{med} = \frac{\varepsilon + (\varepsilon + \alpha)}{2}$$

A seção 5.4 propõe uma alternativa para esta aproximação de modo a se obterem resultados mais precisos.

5.3 Aspectos Relevantes da Implementação Computacional

Como o código guarda as características básicas de um programa de elementos finitos, várias rotinas utilizadas têm seus algoritmos contidos na literatura o que facilita a implementação computacional. As maiores dificuldades ficam então por conta da implementação do próprio GHM.

Outro aspecto importante de relativa complexidade é a determinação de um modelo computacional que apresente bons resultados com um custo computacional não muito elevado. É bom lembrar que o GHM aumenta o número de GLs do sistema e, conseqüentemente, eleva o custo computacional da análise.

Os próximos itens fazem uma síntese sobre cada estratégia adotada no intuito de contornar as maiores dificuldades encontradas ao longo da implementação computacional.

5.3.1 Introdução dos GLs Dissipadores dos MVE

Num programa de engenharia estrutural que utiliza o MEF, os GLs estão associados a incógnitas nodais (deslocamentos, esforços internos, etc). Assim sendo, para se introduzirem no sistema os GLs dissipadores provenientes da implementação do GHM, será necessária a adição de novos nós denominados *nós dissipadores*. Cada GL dissipador estará associado a um nó dissipador fictício que não possui coordenadas físicas.

Com relação à quantidade de nós dissipadores, a estratégia adotada foi a de estabelecer um nó dissipador por elemento viscoelástico. As figuras 5.2, 5.3 e 5.4 ilustram

uma abstração da representação gráfica dos elementos unidimensional, quadrilátero e hexaédrico lineares, com seus nós e GLs dissipadores, respectivamente.

Referencial: (não é válido para os
x GLs do nó 3)



Nó dissipador: nó 3

GL dissipador: q_3

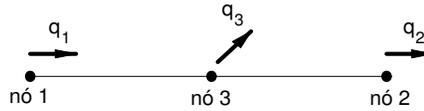


Figura 5.2: Elemento Unidimensional Linear com os Nós e GLs Dissipadores

Referencial: (não é válido para os
y GLs do nó 5)



Nó dissipador: nó 5

GLs dissipadores: q_9 a q_{13}

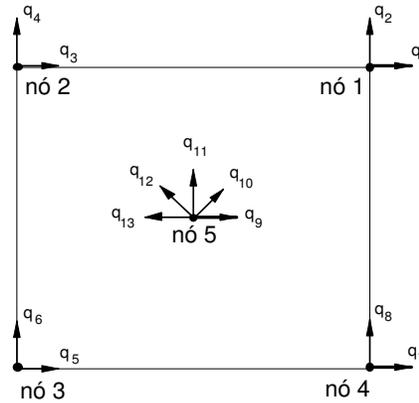
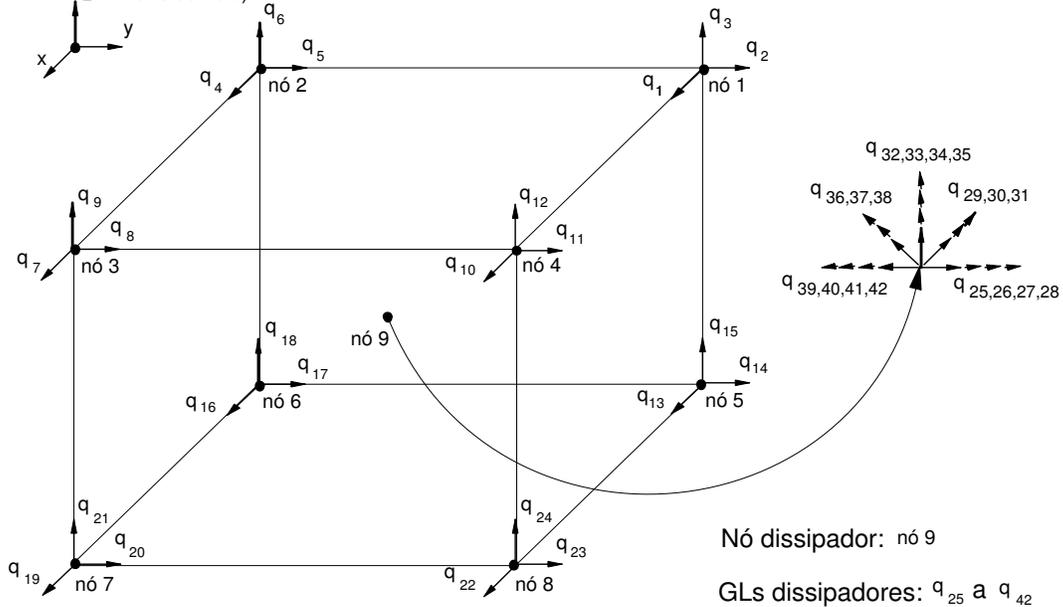


Figura 5.3: Elemento Quadrilátero Linear com os Nós e GLs Dissipadores

Referencial: (não é válido para os
z GLs do nó 9)



Nó dissipador: nó 9

GLs dissipadores: q_{25} a q_{42}

Figura 5.4: Elemento Hexaédrico Linear com os Nós e GLs Dissipadores

Os problemas agora são:

- Como tratar nós de um mesmo tipo de elemento dotados de diferentes quantidades de GLs?

O nó dissipador de um elemento quadrilátero linear, por exemplo, teria cinco GLs e os demais nós teriam apenas dois.

- Como tratar um mesmo tipo de elemento dotado de quantidades diferentes de nós?

Um elemento quadrilátero linear, por exemplo, teria quatro ou cinco nós caso o material que o compusesse fosse elástico ou viscoelástico, respectivamente.

Uma maneira de solucionar tais questões seria a adoção de duas estruturas de dados auxiliares: uma que contivesse para cada nó o seu respectivo número de GLs e outra que contivesse para cada elemento seu respectivo número de nós. Esta alternativa não foi utilizada por se entender que este tipo de informação, tomadas para cada nó e para cada elemento não é típico de um programa de elementos finitos, o que dificultaria a utilização de malhas já existentes.

A solução empregada foi a utilização do número de GLs por nó de um tipo de elemento como sendo o número de GLs dissipadores e a adoção do número de nós de um certo tipo de elemento, elástico ou viscoelástico, como sendo o número de nós físicos mais 1 (um). Os GLs excedentes serão restringidos. O exemplo a seguir ilustra este procedimento aplicado ao elemento quadrilátero². O exemplo é constituído de dois elementos quadriláteros sendo um com características puramente elásticas (elemento 1) e outro com características de um MVE (elemento 2), conforme ilustra a figura 5.5. Nesta figura, os GLs assinalados com linha tracejada estão restringidos: uns devido às restrições físicas do problema (apoios) e outros por imposição da estratégia adotada no tratamento dos GLs dissipadores.

A fim de se reduzir o número de dados a serem inseridos no programa, pode-se adotar o ponto 0 (zero), de antemão já inserido no código e totalmente restringido, como sendo o ponto extra dos elementos elásticos, conforme sugere figura 5.5.

²Este procedimento é válido para todos os casos implementados: 1D - treliça (`ghm1d.for`), 2D - elemento quadrilátero (`ghm2d.for`) e 3D - elemento hexaédrico (`ghm3d.for`)

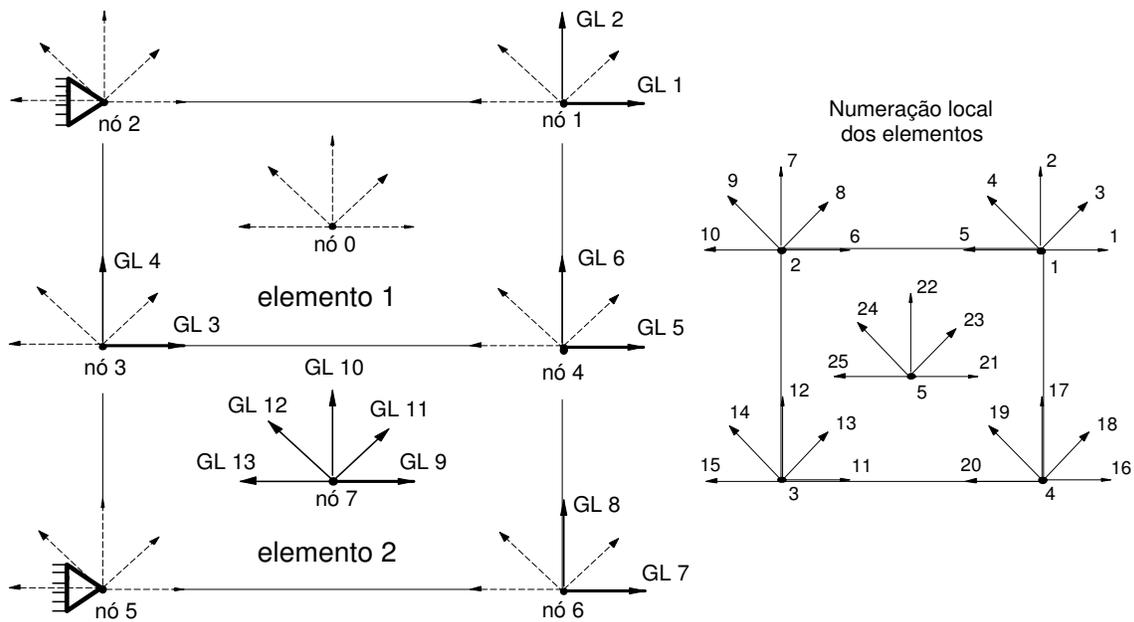


Figura 5.5: Exemplo Constituído de 2 Elementos Hexaédricos

Desta forma, excluindo-se o nó 0 (zero), pode-se escrever para este exemplo:

- **Número total de nós** = número de nós físicos + número de nós dissipadores = $6 + 1 = 7$
- **Número de nós por elemento** = número de nós físicos do elemento + 1 = $4 + 1 = 5$
- **Número de GLs por nó** = número de GLs dissipadores = 5
- **Número total de restrições** = restrições físicas + restrições fictícias = $4 + (6 \times 3) = 22$
- **Número total de GLs** = número total de nós x número de GLs por nó - restrições = $7 \times 5 - 22 = 13$

A seqüência da numeração local dos nós dos elementos e dos GLs dos nós também aparece na figura 5.5.

As restrições nodais são neste caso numeradas de 1 (um) a 5 (cinco). Para um nó não dissipativo as duas primeiras posições são relativas aos GLs reais e as demais deverão estar restringidas. Já para um nó dissipativo, todas as posições são relativas aos GLs dissipadores do elemento que contém este nó, logo deverão ser liberadas (conter zeros), a menos que se queira fazer alguma análise aproximada utilizando-se menos GLs dissipadores por nó.

As tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam as partes do arquivo de dados para este exemplo relativas aos dados topológicos da estrutura.

Tabela 5.1: Dados Gerais da Topologia da Malha

Número total de nós	7
Número de elementos elásticos	1
Número de elementos viscoelásticos	1
Número de nós por elemento	5
Número de GLs por nó	5

Tabela 5.2: Conectividades Nodais dos Elementos

Elemento	Conectividades
1	1 2 3 4 0
2	4 3 5 6 7

Tabela 5.3: Restrições Nodais

Nó	Coordenada x	Coordenada y	Restrições
1	1,0	2,0	0 0 1 1 1
2	0,0	2,0	1 1 1 1 1
3	0,0	1,0	0 0 1 1 1
4	1,0	1,0	0 0 1 1 1
5	0,0	0,0	1 1 1 1 1
6	1,0	0,0	0 0 1 1 1
7	0,0	0,0	0 0 0 0 0

As figuras 5.6 e 5.7 mostram, de forma qualitativa, as matrizes de elementos do exemplo analisado, e a figura 5.8 a matriz global do problema, também escrita de forma qualitativa.

Figura 5.6: Matriz do Elemento Elástico

Numeração Local																								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
×	×	□	□	□	✖	✖	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	□	□	□	□	□
×	×	□	□	□	✖	✖	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
✖	✖	□	□	□	✖	✖	□	□	□	✖	✖	□	□	□	✖	✖	□	□	□	□	□	□	□	□
✖	✖	□	□	□	✖	✖	□	□	□	✖	✖	□	□	□	✖	✖	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
×	×	□	□	□	✖	✖	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	□	□	□	□	□
×	×	□	□	□	✖	✖	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	2	-	-	-	-	-	-	-	-	3	4	-	-	-	5	6	-	-	-	-	-	-	-	-
Numeração Global																								

Legenda:

- ×
 -
 - ✖
- Termo diferente de zero
 → Termo eliminado devido a uma restrição não física
 → Termo eliminado devido a uma restrição física

Observação:

As linhas duplas separam os GLs de um mesmo nó do elemento

Figura 5.7: Matriz do Elemento Viscelástico

Numeração Local																								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	×	×	×
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	×	×	×
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	×	×	×
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	×	×	×
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
✱	✱	□	□	□	✱	✱	□	□	□	✱	✱	□	□	□	✱	✱	□	□	□	✱	✱	✱	✱	✱
✱	✱	□	□	□	✱	✱	□	□	□	✱	✱	□	□	□	✱	✱	□	□	□	✱	✱	✱	✱	✱
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	×	×	×
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	×	×	×	×	×
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	×	o	o	o	o
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	o	×	o	o	o
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	o	o	×	o	o
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	o	o	o	×	o
×	×	□	□	□	×	×	□	□	□	✱	✱	□	□	□	×	×	□	□	□	o	o	o	o	×
5	6	-	-	-	3	4	-	-	-	-	-	-	-	-	7	8	-	-	-	9	10	11	12	13

Legenda:

- ×
 - o
 -
 - ✱
- Termo diferente de zero
 → Termo igual a zero
 → Termo eliminado devido a uma restrição não física
 → Termo eliminado devido a uma restrição física

Observação:

As linhas duplas separam os GLs de um mesmo nó do elemento

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
×	×	×	×	×	×	o	o	o	o	o	o	o
×	×	×	×	×	×	o	o	o	o	o	o	o
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
o	o	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
o	o	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
o	o	×	×	×	×	×	×	×	o	o	o	o
o	o	×	×	×	×	×	×	o	×	o	o	o
o	o	×	×	×	×	×	×	o	o	×	o	o
o	o	×	×	×	×	×	×	o	o	o	×	o
o	o	×	×	×	×	×	×	o	o	o	o	×

Legenda:

- ×
 - o
- × - Termo diferente de zero (não nulo)
 o - Termo igual a zero (nulo)

Figura 5.8: Matriz Global

5.3.2 Numeração Nodal

Como em todo programa de elementos finitos, a numeração nodal deve ser sempre bem pensada de forma a reduzir a largura de banda das matrizes envolvidas no problema e, em alguns casos, viabilizar soluções em problemas de maior porte, caso o método de solução adotado não faça um tratamento adequado da esparsidade.

Além das recomendações para numeração de malha de elementos finitos presentes na literatura ([29],[30]), o caso específico do MEF aplicado ao GHM tem uma particularidade que deverá ser sempre observada durante o processo de numeração nodal: os GLs dissipadores só têm conectividade com nós do mesmo elemento ao qual ele pertence. Isto sugere que, para se reduzir a largura de banda das matrizes envolvidas no problema, cada nó dissipador tenha uma numeração próxima à dos demais nós do elemento a que o mesmo pertença. Esta estratégia de numeração nodal foi aqui utilizada, adotando-se para cada nó dissipador, dentro da medida do possível, uma numeração igual a uma unidade superior à do maior nó presente no elemento no qual este nó dissipador está inserido.

O aumento da largura de banda devido a numerações nodais inadequadas é ainda mais acentuado para o caso de estruturas com elevado número de elementos e/ou estruturas tridimensionais. Nestes casos, além de se seguir o critério de numeração apresentado, recomenda-se a utilização de um pré-processador para se otimizar a numeração nodal.

Devido às particularidades das malhas de elementos finitos a serem usadas nos programas 1D, 2D e 3D, a utilização de geradores de malha convencionais deve ser cautelosa e os detalhes anteriormente descritos devem ser observados. Por este motivo, os programas `ghm2for` e `ghm3d.for` possuem pré-processadores que geram malhas de elementos finitos de forma otimizada e compatível ou adaptam malhas já prontas. O apêndice B trata deste assunto: Geração de Malhas para o GHM.

5.4 Melhorias Futuras para o Programa

Para o futuro, algumas melhorias deverão ser incluídas no programa. Dentre elas podemos citar:

- Expansão da biblioteca de elementos com a introdução de elemento de pórtico espacial e de cascas;
- Utilização de elementos isoparamétricos de maior ordem;
- Implementação de uma rotina de pré-processamento para otimizar a numeração nodal;
- Utilização da técnica elemento por elemento [40] na qual as matrizes globais do sistema não são montadas, o que aumenta a capacidade do programa de resolver problemas com elevado número de GLs e
- Paralelização e vetorização do procedimento também visando a aumentar a capacidade de processamento.
- Utilização de métodos iterativos (Newton-Raphson) para reduzir o desequilíbrio de forças internas/externas, visando a melhorar a qualidade dos resultados, principalmente na que diz respeito à determinação do estado de tensões dos MVE.
- Utilização de outras estratégias de solução para os sistemas de equações lineares em problemas de grande porte.

Capítulo 6

Exemplos e Aplicações

6.1 Viga Sanduíche

Este exemplo é bastante interessante pois tem como principal característica a comparação dos resultados obtidos através de simulações numéricas feitas com o programa `ghm2d.for` com as respostas experimentais obtidas por Faisca [4], o que permite um enriquecimento das análises, dando maior confiabilidade aos resultados numéricos.

A comparação dos resultados numéricos com os experimentais na dinâmica estrutural nem sempre é possível, quer seja pela escassez de ensaios, quer seja pela falta de trabalhos que disponibilizem as respostas sob a forma de tabelas de valores discretos das amplitudes e respectivos tempos e/ou frequências, além dos tradicionais gráficos. As tabelas de valores discretos permitem uma melhor comparação de resultados e, por este motivo, os principais gráficos deste trabalho são apresentados no apêndice C na forma de pontos discretos. Além disso, muitos trabalhos não deixam claro quais as reais condições de contorno e ambientes dos ensaios, da instrumentação e das propriedades dos materiais, dentre outros dados relevantes.

As comparações numéricas-experimentais neste exemplo deixam clara a importância de se desenvolverem trabalhos tanto teóricos, com resultados computacionais, quanto experimentais como os que são desenvolvidos na COPPE - UFRJ. Cabe ainda destacar que as respostas experimentais usadas foram fornecidas na forma de sinais digitalizados de aquisição, isto é, valores discretos, facilitando as comparações e valorizando as análises pois são eliminados erros relativos a procedimentos extras de digitalização de pontos.

6.1.1 Descrição do Problema

Trata-se da análise comparativa das respostas dinâmicas numéricas e experimentais de duas vigas biapoiada sujeitas a carga de impacto. A foto da figura 6.1, mostra uma destas vigas ensaiadas.



Figura 6.1: Foto da Viga Sanduíche

As vigas analisadas estão mostradas na figura 6.2 e descritas a seguir:

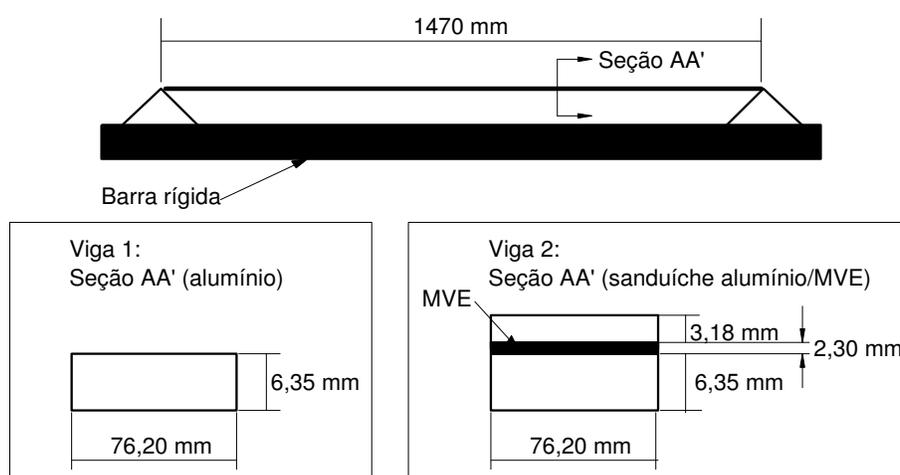


Figura 6.2: Detalhamento das Vigas Ensaçadas

- Viga 1 - Viga biapoiada constituída somente de alumínio (material elástico)
- Viga 2 - Viga biapoiada sanduíche (alumínio com o material viscoelástico)

A tabela 6.1 a seguir traz um resumo de algumas características físicas dos materiais envolvidos no problema.

Tabela 6.1: Características Físicas dos Materiais

	Alumínio	MVE
Módulo de Elasticidade (MPa)	68700	*
Fator de Perda	$\eta = 0,03 \rightarrow \xi = 1,5 \%$	*
Coefficiente de Poisson	0,33	0,25
Massa Específica (Kg/m ³)	2690	795

* Valores dependentes da frequência e que serão apresentados no item 6.1.3.

6.1.2 Resultados Teóricos

As frequências naturais (ω_n) relativas às vigas 1 e 2 podem ser determinadas por expressões analíticas encontradas na literatura.

Para a viga 1 (elástica), as frequências naturais são [22]:

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 42,31 \text{ rad/s (6,73 Hz)} \\ \omega_2 = 169,24 \text{ rad/s (26,94 Hz)} \\ \omega_3 = 380,80 \text{ rad/s (60,61 Hz)} \end{cases} \quad (6.1)$$

onde: E e ρ são, respectivamente, o módulo de elasticidade e a massa específica do material elástico (alumínio); I é o momento de inércia da seção transversal de área A e L é o comprimento da viga.

Já para a viga 2 (sanduíche), as frequências naturais ω_n podem ser calculadas segundo as equações de Ross-Kerwin-Ungar [25]:

$$\omega_n = p_n^2 \sqrt{\frac{\overline{EI}}{\overline{m}}} \quad (6.2)$$

onde:

$$p_n = n \frac{\pi}{L}$$

$$\begin{aligned} \overline{EI} = \mathcal{R} \left\{ E_1 \frac{H_1^3}{12} + E_2 \frac{H_2^3}{12} + E_3 \frac{H_3^3}{12} - E_2 \frac{H_2^2}{12} \left(\frac{H_{31} - D}{1 + \overline{g}} \right) \right. \\ \left. + E_1 H_1 D^2 + E_2 H_2 (H_{21} - D)^2 + E_3 H_3 (H_{31} - D)^2 \right. \\ \left. - \left[\frac{E_2 H_2}{2} (H_{21} - D) + E_3 H_3 (H_{31} - D) \right] \left(\frac{H_{31} - D}{1 + \overline{g}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$D = \frac{E_2^* H_2 (H_{21} - H_{31}/2) + \bar{g} (E_2^* H_2 H_{21} + E_3^* H_3 H_{31})}{E_1^* H_1 + E_2 H_2/2 + \bar{g} (E_1^* H_1 + E_2^* H_2 + E_3^* H_3)};$$

$$H_{31} = \frac{H_1 + H_3}{2} + H_2;$$

$$H_{21} = \frac{H_1 + H_2}{2};$$

$$\bar{g} = \frac{G_2^*}{E_3 H_3 H_2 \rho_n^2}; \quad \text{e}$$

$$\bar{m} = \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + \rho_3 H_4$$

sendo que: $\mathcal{R}\{\dots\}$ se refere à parte real do termo entre colchetes; o índice 1 está associado à camada inferior de alumínio (ver figura 6.2), o índice 2 à camada intermediária de MVE e o índice 3 à camada superior de alumínio; E^* e G^* são, respectivamente, os módulos complexos de elasticidade longitudinal e transversal (ver seção 2.4); H é a espessura de cada camada; e ρ é a massa específica de cada material;

Na prática, como E_1^* e E_3^* (alumínio) têm um fator de perda (η) bastante inferior a E_2^* (MVE), faz-se a aproximação $\eta_1 \approx \eta_3 \approx 0$ e, conseqüentemente, $E_1^* \approx E_1'$ e $E_3^* \approx E_3'$, onde E' é o módulo de armazenamento.

As frequências naturais da viga 2 (sanduíche) são dependentes dos resultados obtidos experimentalmente para o módulo de elasticidade e o fator de perda do MVE. Por este motivo, estas frequências naturais serão calculadas posteriormente, após a apresentação das análises experimentais relativas à caracterização do MVE utilizado.

6.1.3 Análise Experimental

Este item apresenta os resultados obtidos experimentalmente, bem como sintetiza os procedimentos realizados nos ensaios, sem entrar em detalhes não pertinentes ao objetivo do presente trabalho.

As vigas ensaiadas foram instrumentadas com três acelerômetros, conforme mostra a figura 6.3, sendo que as respostas apresentadas foram relativas às acelerações

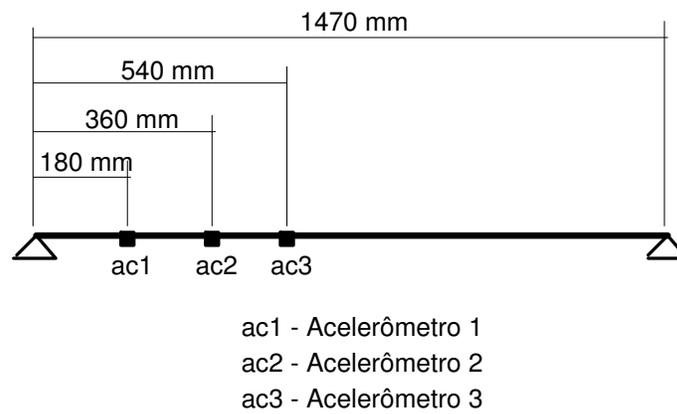


Figura 6.3: Esquema do Sensoriamento das Vigas

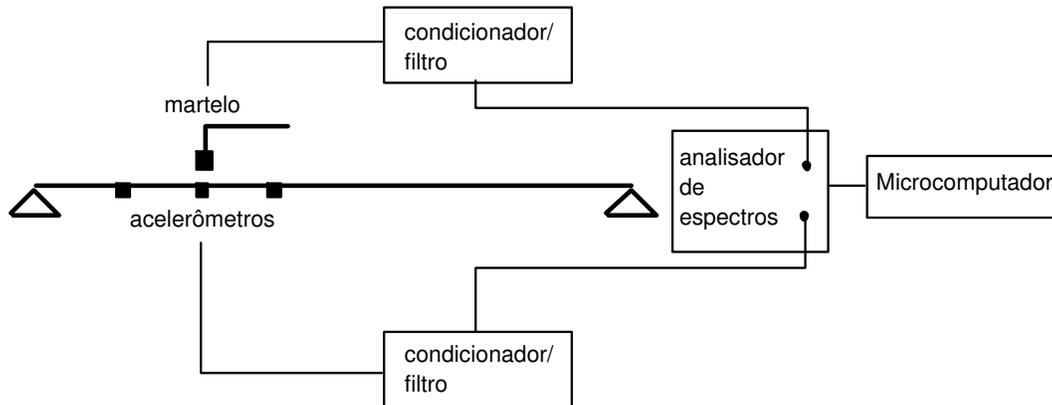


Figura 6.4: Esquema de Aquisição de Sinais

verticais do acelerômetro ac2. O esquema de aquisição dos dados utilizado é apresentado na figura 6.4.

As respostas foram obtidas com acelerômetros resistivos e filtradas em 100 Hz, eliminando as frequências mais altas.

As estruturas foram excitadas através de impactos verticais de um martelo nas superfícies superiores de cada viga, sobre o acelerômetro ac2 como sugere figura 6.4. O sinal temporal representativo da força de excitação não foi apresentado na referência [4].

A temperatura durante os ensaios ficou entre 20 e 25° C, não implicando desta forma em variações significativas das características do MVE.

O MVE utilizado [4] na estrutura sanduíche da figura 6.1 foi o VHB¹ (*Very-High-Bond*), o qual foi ensaiado pelo método padrão da ASTM [26] (ver seção 2.5) que padroniza as relações geométricas das vigas sanduíche a serem ensaiadas. No caso foram ensaiadas 3 vigas distintas denominadas: Vigas A, B e C, fornecendo os valores de E' (módulo de elasticidade) e η (fator de perda) mostrados na tabela 6.2.

¹Fabricado pela empresa 3M

Tabela 6.2: Caracterização do material VHB via Ensaio Padrão ASTM [26]

Viga	Frequência	Módulo de Elasticidade	Fator de Perda
A	207,97 rad/s (33,10 Hz)	3,11 ± 0,01 MPa	0,57 ± 0,01
	1277,40 rad/s (203,31 Hz)	9,29 ± 0,24 MPa	0,48 ± 0,01
	3540,60 rad/s (563,51 Hz)	27,06 ± 2,24 MPa	0,30 ± 0,01
B	131,88 rad/s (20,99 Hz)	6,23 ± 0,72 MPa	0,38 ± 0,03
	942,54 rad/s (150,01 Hz)	9,07 ± 1,01 MPa	0,47 ± 0,03
	2714,80 rad/s (432,08 Hz)	20,0 ± 0,21 MPa	0,48 ± 0,02
C	31,79 rad/s (5,06 Hz)	3,90 ± 0,65 MPa	0,44 ± 0,07
	199,49 rad/s (31,75 Hz)	7,67 ± 0,28 MPa	0,40 ± 0,01
	558,89 rad/s (88,95 Hz)	9,44 ± 0,21 MPa	0,28 ± 0,03

6.1.4 Modelagem Computacional

As vigas ensaiadas foram modeladas computacionalmente através de elementos quadriláteros de estado plano de tensão (programa `ghm2d.for`). As malhas de elementos finitos usadas nas modelagens computacionais estão ilustradas na figura 6.5 e suas características principais estão dadas na tabela 6.3.

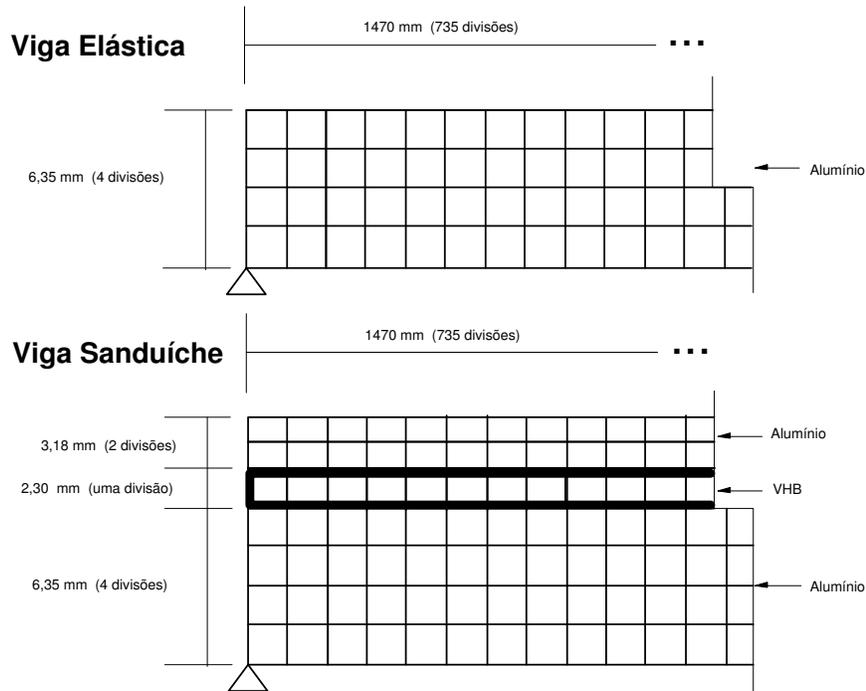


Figura 6.5: Detalhes da Discretização das Vigas

Tabela 6.3: Características das Malhas

Malha	Número de Nós	Número de Elementos	Número de GLs
Viga 1 - Elástica	3680	2940	7357
Viga 2 - Sanduíche	6623	5145	15448

O GL vertical observado obviamente coincide com a posição do acelerômetro ac2, assim como o GL excitado coincide com a posição e direção dos impactos do martelo (ver figuras 6.3 e 6.4).

A modelagem da força de excitação de impacto do martelo foi feita através da função no tempo descrita na figura 6.6, visto não ter sido apresentado em [4] o sinal sensoriado correspondente a esta força. O valor de $P_{max} = 30$ N, bem como o seu tempo de aplicação igual a 0,01 s, ambos indicados na figura 6.6, foram calibrados de maneira a aproximar ao máximo a resposta numérica no domínio da frequência da viga 1 (viga elástica) da sua respectiva resposta experimental. Este carregamento foi então mantido na análise numérica da viga 2 (viga sanduíche).

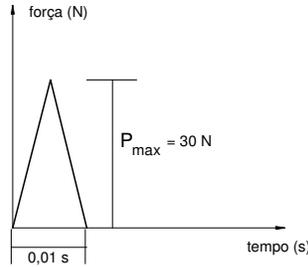


Figura 6.6: Descrição da Força de Impacto Aplicada nas Vigas 1 e 2

O procedimento de ajuste de parâmetros deverá levar em conta o fato de que o problema aqui analisado envolve frequências de até 100 Hz (≈ 628 rad/s), já que o sinal foi filtrado em torno desta frequência. Desta forma, o ajuste das curvas paramétricas aos valores experimentais apresentados na tabela 6.2 será feito, a princípio, com os valores de módulo de elasticidade e fator de perda obtidos para a Viga C (ver tabela 6.2), pois o conjunto de frequências relativo a esta viga é o único que esta totalmente contido no intervalo de 0 a 100 Hz (≈ 628 rad/s).

Assim sendo, foi feito um procedimento análogo ao apresentado na seção 4.3 para se ajustarem os parâmetros característicos (ε , α , β e δ) do material VHB aos valores experimentais médios da Viga C (ver tabela 6.2). Tal procedimento, denominado busca mista, consiste em se obter um conjunto de valores iniciais ε , α , β e δ por ajuste via algoritmos genéticos (item 4.2.3), e em seguida fazer uma busca por varredura (item 4.2.2) em torno destes valores. Os conjuntos de parâmetros ε , α , β e δ então obtidos estão dispostos na tabela 6.4.

Tabela 6.4: Ajuste Paramétrico

	ε MPa	α MPa	β s ⁻¹	δ s ⁻²
via Algoritmos Genéticos	3,20	7,60	$1,25 \times 10^7$	$1,77 \times 10^9$
via Busca Mista	3,22	7,26	$1,13 \times 10^7$	$1,68 \times 10^9$

As figuras 6.7 e 6.8 mostram, respectivamente, a comparação entre os valores máximos e mínimos para o módulo de elasticidade e o fator de perda do materi-

al VHB obtidos experimentalmente para a Viga C, conforme disposto na tabela 6.2, com as curvas ajustadas numericamente. Os resultados dos ajustes foram considerados a princípio satisfatórios, pois apresentam uma boa concordância com os resultados experimentais.

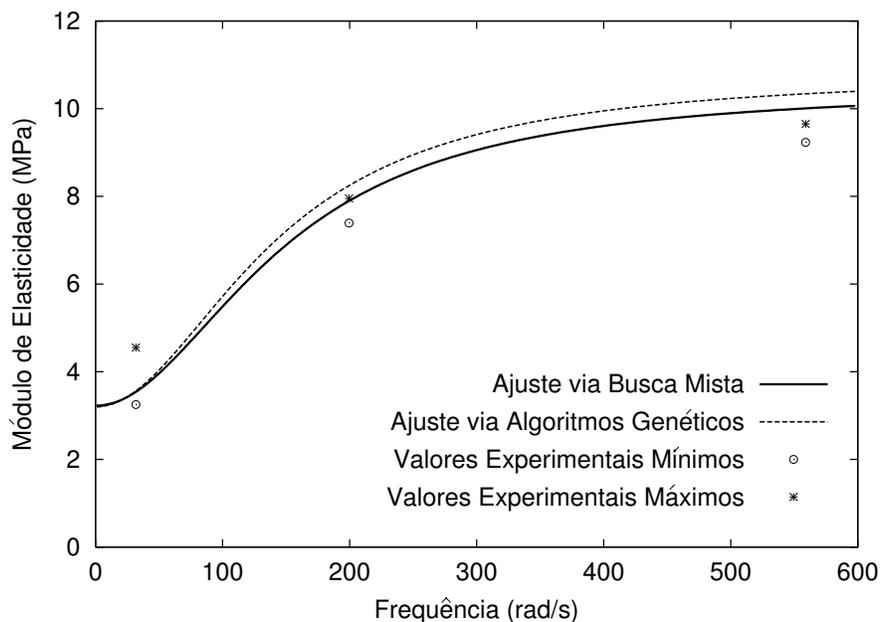


Figura 6.7: Ajuste do Módulo de Elasticidade do Material VHB

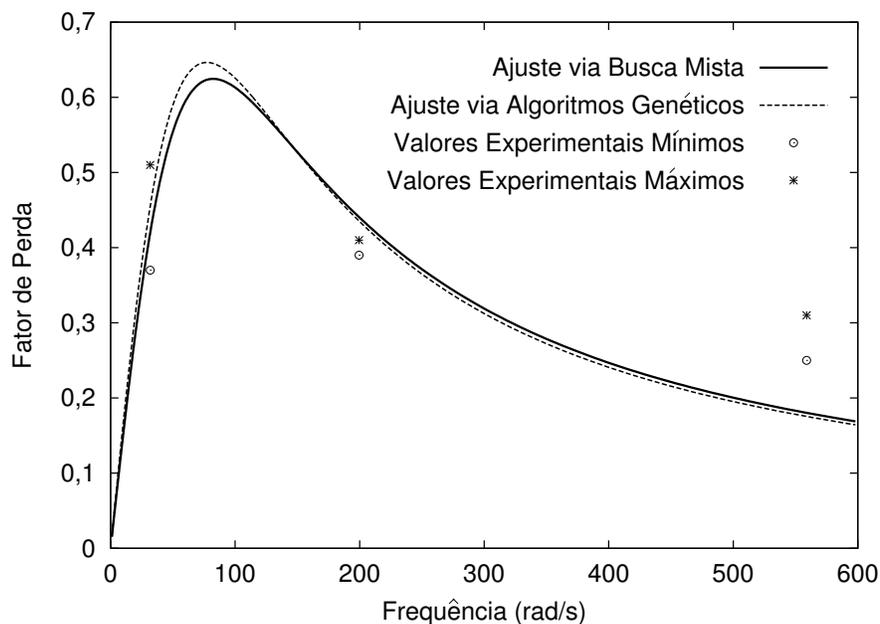


Figura 6.8: Ajuste do Fator de Perda do Material VHB

Como as curvas relativas aos parâmetros ε , α , β e δ obtidos via busca mista estão ligeiramente mais ajustadas aos valores experimentais que aquelas obtidas via algoritmos genéticos, as respostas que serão apresentados a seguir tomaram por base os valores de ε , α , β e δ resultantes da busca mista.

Uma vez concluído o ajuste paramétrico, pode-se calcular as frequências naturais teóricas da viga 2 (sanduíche). Estas frequências são calculadas segundo a equação (6.2) e obtidas de tal forma que se tenha:

$$\omega_n = f[E'(\omega_n), \eta(\omega_n)] \quad (6.3)$$

onde f representa uma função composta dependente de $E'(\omega_n)$ escrito conforme equação (4.3), e de $\eta(\omega_n)$ escrito de acordo com equação (4.4), para o conjunto de parâmetros ε , α , β e δ resultantes da busca mista. Obviamente a função f é idêntica ao segundo membro da equação (6.2).

A tabela 6.5 traz as três primeiras frequências naturais teóricas com seus respectivos módulos de elasticidade e fatores de perda obtidos para a viga 2.

Tabela 6.5: Frequências Naturais Teóricas

Frequência Natural	Módulo de Elasticidade (MPa)	Fator de Perda
$\omega_1 = 67,29 \text{ rad/s (10,71 Hz)}$	4,60	0,64
$\omega_2 = 230,59 \text{ rad/s (36,70 Hz)}$	8,74	0,39
$\omega_3 = 451,38 \text{ rad/s (71,84 Hz)}$	10,12	0,21

6.1.5 Respostas no Domínio da Frequência

As tabelas 6.6 e 6.7 mostram as frequências naturais para as viga 1 e 2 (viga elástica e sanduíche, respectivamente)

Tabela 6.6: Frequências Naturais da Viga 1 (elástica)

Frequência ou Modo	Valores Teóricos	Valores Experimentais	Diferença(*) Percentual	Valores Numéricos	Diferença(*) Percentual
1	42,31 rad/s (6,73 Hz)	44,23 rad/s (7,04 Hz)	-4,54 %	42,95 rad/s (6,84 Hz)	1,51 %
2	169,24 rad/s (26,94 Hz)	154,82 rad/s (24,64 Hz)	8,52 %	171,80 rad/s (27,34 Hz)	-1,51%
3	380,80 rad/s (60,61 Hz)	362,79 rad/s (57,74 Hz)	4,73 %	368,15 rad/s (58,59 Hz)	3,32 %

(*) As diferenças percentuais são sempre relativas aos resultados teóricos:

Diferença Percentual = (Valor Teórico - Valor Experimental ou Numérico)/Valor Teórico

Tabela 6.7: Freqüências Naturais da Viga 2 (sanduíche)

Freqüência ou Modo	Valores Teóricos	Valores Experimentais	Diferença(*) Percentual	Valores Numéricos	Diferença(*) Percentual
1	67,29 rad/s (10,71 Hz)	56,86 rad/s (9,05 Hz)	15,50 %	67,50 rad/s (10,74 Hz)	-0,31 %
2	230,59 rad/s (36,70 Hz)	163,43 rad/s (26,01 Hz)	29,12 %	233,16 rad/s (37,11 Hz)	-1,11%
3	451,38 rad/s (71,84 Hz)	365,93 rad/s (58,24 Hz)	18,93 %	435,65 rad/s (69,34 Hz)	3,48 %

(*) As diferenças percentuais são sempre relativas aos resultados teóricos:

Diferença Percentual = (Valor Teórico - Valor Experimental ou Numérico)/Valor Teórico

Os resultados obtidos experimental e numericamente para as três primeiras freqüências naturais da viga 1 (elástica) estão relativamente próximos aos seus respectivos valores teóricos (maior diferença percentual menor que 9 % e diferença percentual média igual a 3,05 %) e, conseqüentemente, próximos entre si. Isto é um indicativo de que o modelo computacional usado na simulação numérica do ensaio da viga 1 está bem calibrado.

As diferenças entre as freqüências naturais obtidas experimentalmente para a viga 1 e os respectivos valores teóricos são, em grande parte, devido às incertezas acerca da viga ensaiada. Dentre estas incertezas pode-se destacar:

- As dimensões da viga, principalmente sua espessura.

Qualquer variação na espessura da viga altera sua massa (numa proporção linear) e sua rigidez (numa proporção cúbica) e, conseqüentemente, suas freqüências naturais. Como a viga analisada é bastante fina (ver foto da figura 6.1), qualquer variação milimétrica de espessura ao longo do comprimento da viga pode ser bastante significativa.

- Massa específica e módulo de elasticidade adotados.

Como em toda medida experimental, estes valores têm um certo grau de incerteza, o que contribui para que a redução da afinidade entre os resultados teóricos e os experimentais.

Além das incertezas relativas à viga 1 ensaiada, também contribui para as diferenças entre os valores teóricos e os valores experimentais obtidos para esta viga, o aparelho de apoio usado no ensaio. Conforme pode ser observado na foto da figura 6.1, a viga ensaiada é acoplada num pino em sua extremidade que faz o papel de apoio rotulado. Este pino possui uma massa não desprezível, já que a viga não é muito espessa, o que reduz as freqüências naturais da viga, principalmente as mais

altas, correspondentes aos modos com maior rotação nas extremidades.

Já as frequências naturais obtidas para a viga 2 (sanduíche) apresentaram duas características principais:

- Boa concordância entre os resultados numéricos e os valores teóricos (diferença percentual máxima de $\approx 3,5$ %):

Este fato mostra que as equações teóricas de Ross-Kerwin-Ungar [25] (equações (6.2)) e a formulação via GHM usada na implementação computacional estão em conformidade. É bom lembrar que em ambos os casos as aproximações adotadas para o cálculo do módulo de elasticidade (equação (4.3)) e do fator de perda (equação (4.4)) foram as mesmas, o que contribuiu significativamente para a conformidade dos resultados teóricos/numéricos.

- Diferença percentual mais significativa dos resultados experimentais com relação aos valores teóricos e, conseqüentemente, com relação aos resultados numéricos.

Este fato é indicativo de que os valores paramétricos ε , α , β e δ adotados podem estar mal avaliados e, por conseguinte, as frequências naturais determinadas teórica e numericamente, por dependerem diretamente destes parâmetros, apresentam uma diferença mais significativa das obtidas experimentalmente.

Outro fato que contribui para as diferenças entre os resultados teóricos e os experimentais da viga 2 são as mesmas incertezas já citadas nas análises correspondentes a viga 1. No caso da viga 2, estas incertezas são ainda maiores visto que a espessura da camada viscoelástica dificilmente se mantém constante, pois o processo de fabricação da bi-lâmina não possui aperto totalmente uniforme e/ou gabarito. Isto sem falar no comportamento resiliente do material viscoelástico que dificulta ainda mais se manter constante a espessura do sanduíche.

As figuras 6.9 e 6.10 mostram, respectivamente, as Funções de Resposta em Frequência (FRF) para as vigas 1 e 2 analisadas. Estas figuras confirmam as análises anteriores acerca das frequências naturais destas vigas: as respostas no domínio da frequência obtidas numericamente estão bem próximas das experimentais para a viga 1 (elástica), e as respostas apresentadas para a viga 2 (sanduíche) apresentam uma diferença mais significativa apesar de estarem relativamente próximas.

As diferenças entre as magnitudes dos picos de ressonância entre a resposta experimental e a numérica da viga 1 (figura 6.9) são, em parte, devido à impossibilidade de se assegurar com precisão a posição do carregamento feito através de impactos com um martelo (ver figura 6.3), o que causa alterações nas magnitudes das FRFs, principalmente dos modos mais excitados (segundo e terceiro). A indisponibilidade do sinal sensoriado da força de excitação também contribui para estas diferenças.

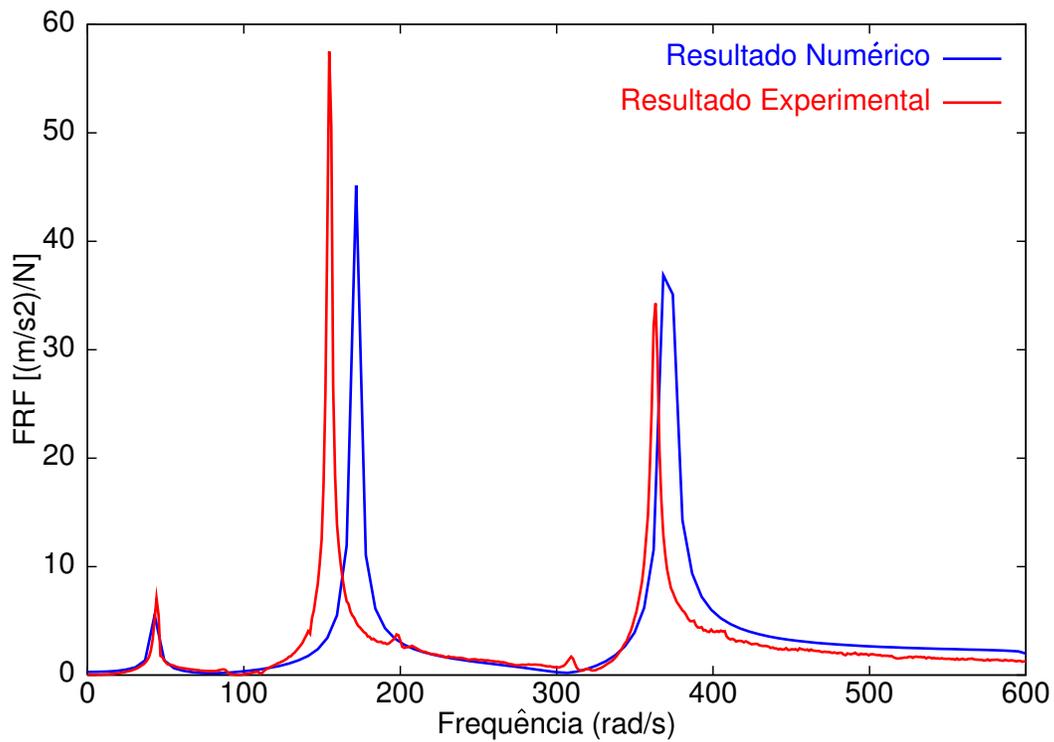


Figura 6.9: Respostas no Domínio da Frequência para a Viga 1 (Elástica)

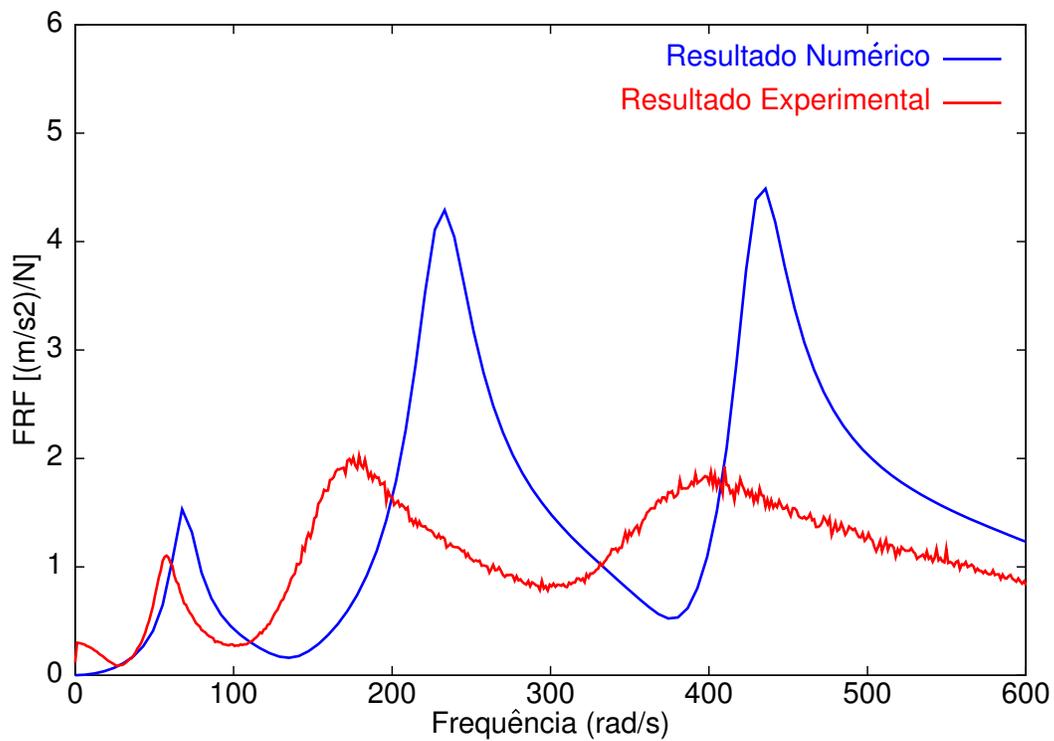


Figura 6.10: Respostas no Domínio da Frequência para a Viga 2 (Sanduíche)

6.1.6 Respostas no Domínio do Tempo

As respostas dependentes do tempo das vigas 1 e 2 analisadas estão apresentadas nas figuras 6.11 e 6.12. As comparações numéricas/experimentais destas figuras mostram que, dependendo do grau de precisão que se deseja da solução, as respostas temporais obtidas numericamente para as duas vigas podem ser consideradas bem próximas às respectivas respostas experimentais.

As pequenas diferenças entre as respostas temporais da viga 2 apresentadas na figura 6.12 vêm fortalecer o argumento de que os parâmetros ε , α , β e δ não estão avaliados com muita precisão. O maior número de oscilações que acontece na resposta numérica mostra que a taxa de amortecimento do modelo computacional está menor que a da viga ensaiada, indicando que o fator de perda está sub-avaliado nas frequências destas oscilações.

O alto grau de amortecimento do sistema sanduíche fica evidente quando se compara a figura 6.11 com a figura 6.12. Tanto na simulação numérica quanto nos resultados experimentais pode-se verificar que as oscilações das acelerações tendem a cessar bem mais rápido na viga 2 (sanduíche) que na viga 1 (elástica).

O próximo item faz algumas análises complementares, buscando aumentar a precisão das respostas numéricas através de um novo ajuste de parâmetros para o material VHB.

6.1.7 Análises Complementares

A primeira estratégia usada para o ajuste dos parâmetros ε , α , β e δ do material VHB foi a utilização dos algoritmos de busca tomando-se por base os valores de módulos de elasticidade e fatores de perda obtidos experimentalmente para a viga C (ver tabela 6.2), o que resultou nos conjuntos de parâmetros mostrados na tabela 6.4.

Faz-se agora um segundo ajuste dos parâmetros ε , α , β e δ , apresentando os consequentes resultados teóricos/numéricos no domínio do tempo e da frequência para a viga 2 (sanduíche).

A nova estratégia de ajuste é a de utilizar todos os valores de módulos de elasticidade e fatores de perda obtidos experimentalmente para as vigas A, B e C (ver tabela 6.2), que estejam numa faixa de frequência abaixo de 150 Hz.

Aplicando o algoritmo de busca mista ao conjunto de valores experimentais especificados no parágrafo anterior, chega-se ao conjunto de parâmetros ε , α , β e δ da tabela 6.8.

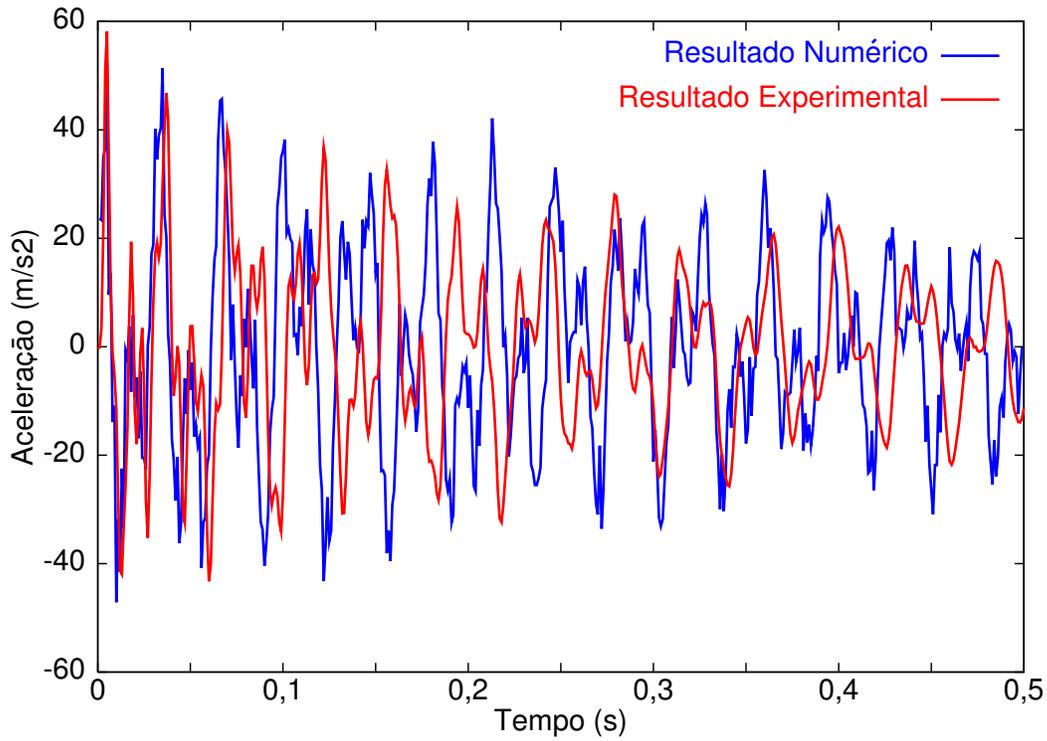


Figura 6.11: Respostas no Domínio do Tempo da Viga 1 (Elástica)

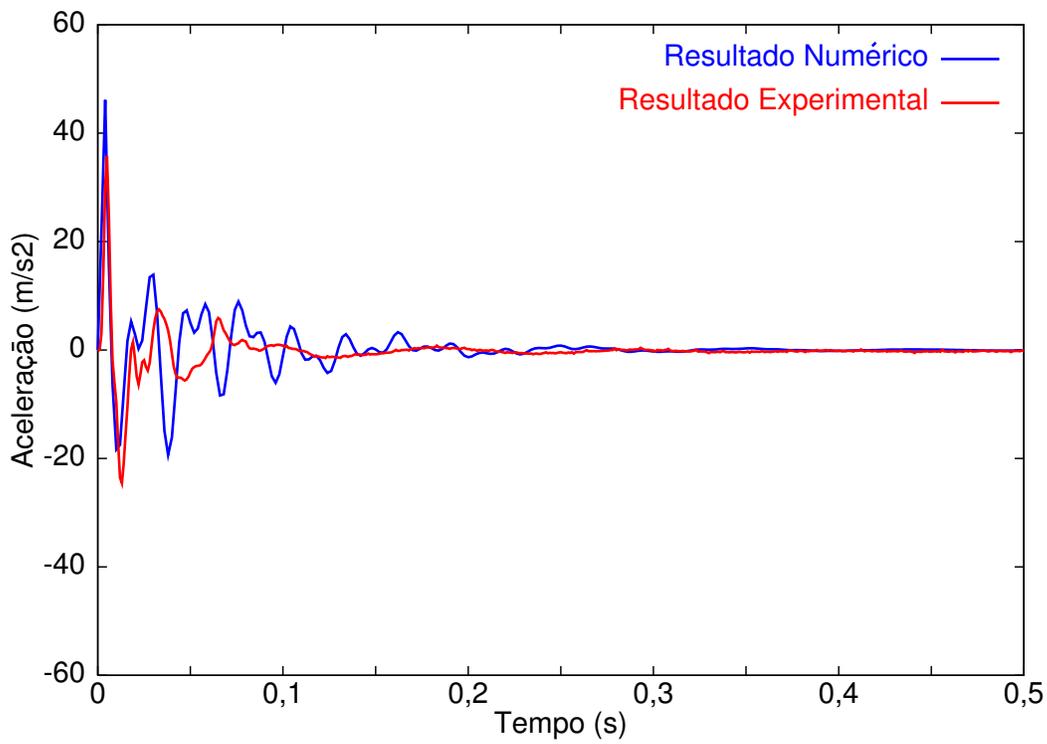


Figura 6.12: Respostas no Domínio do Tempo da Viga 2 (Sanduíche)

Tabela 6.8: Novo Ajuste Paramétrico

	ε MPa	α MPa	β s ⁻¹	δ s ⁻²
via Busca Mista	3,30	7,00	$4,07 \times 10^6$	$1,60 \times 10^9$

As figuras 6.13 e 6.14 mostram os valores experimentais discretos usados nos novos ajustes do módulo de elasticidade e do fator de perda do material VHB, respectivamente, bem como as correspondentes curvas ajustadas. Com o objetivo de posterior comparação, apresenta-se também nestas figuras as curvas inicialmente ajustadas via busca mista que foram obtidas no item 6.1.4.

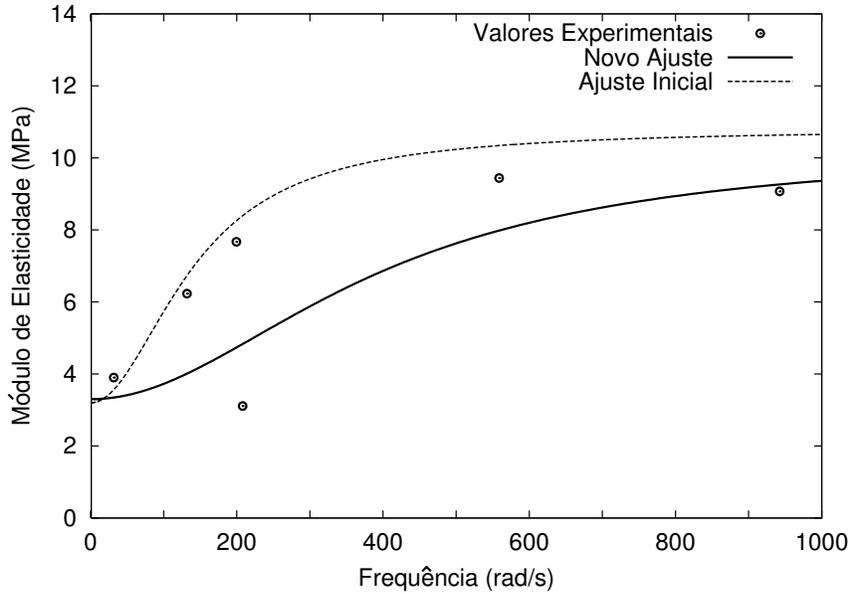


Figura 6.13: Novo Ajuste do Módulo de Elasticidade do Material VHB

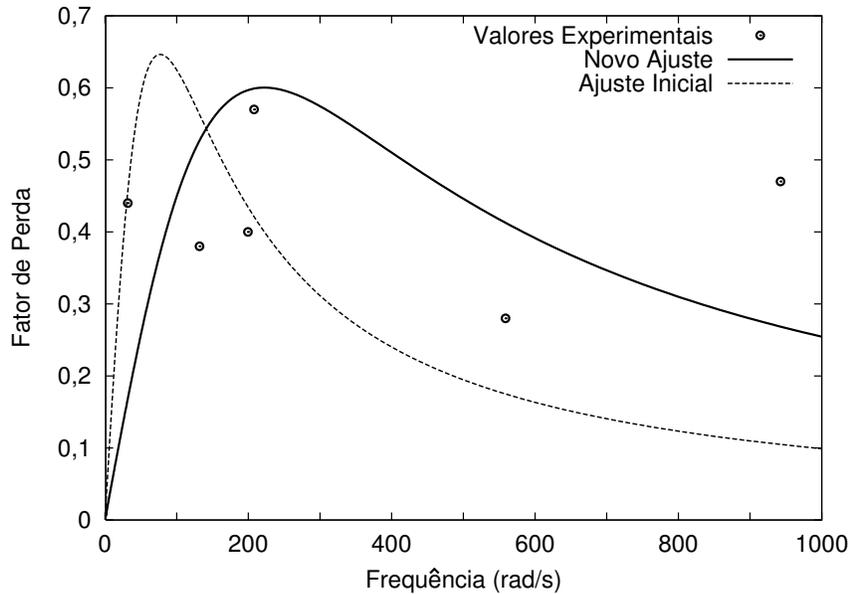


Figura 6.14: Novo Ajuste do Fator de Perda do Material VHB

A tabela 6.9 corresponde à tabela 6.7 reescrita para o novo ajuste paramétrico utilizado. Comparando os resultados obtidos no novo ajuste paramétrico (tabela 6.8) com os obtidos no ajuste inicial (tabela 6.4), pode-se concluir dois fatos relevantes:

- As diferenças percentuais entre os valores teóricos e os resultados numéricos para o novo ajuste paramétrico (tabela 6.8) se mantiveram pequenas, mostrando, mais uma vez, que as equações de Ross-Kerwin-Ungar [25] (equação (6.2)) produzem resultados semelhantes à modelagem computacional via GHM.
- As diferenças percentuais entre os valores teóricos obtidos para o novo ajuste paramétrico (tabela 6.8) e os resultados experimentais caíram significativamente (mais de 30% em média). Isto é mais um indicativo de que o ajuste paramétrico inicial não estava corretamente associado ao comportamento dependente da frequência do material VHB.

Tabela 6.9: Frequências Naturais da Viga 2 para o Novo Ajuste Paramétrico

Frequência ou Modo	Valores Teóricos	Valores Experimentais	Diferença(*) Percentual	Valores Numéricos	Diferença(*) Percentual
1	62,77 rad/s (9,99 Hz)	56,86 rad/s (9,05 Hz)	9,41 %	61,35 rad/s (9,76 Hz)	2,26 %
2	206,25 rad/s (32,83 Hz)	163,43 rad/s (26,01 Hz)	20,77 %	214,76 rad/s (34,18 Hz)	-4,13 %
3	424,49 rad/s (67,56 Hz)	365,93 rad/s (58,24 Hz)	13,80 %	423,40 rad/s (67,56 Hz)	0,26 %

(*) As diferenças percentuais são sempre relativas aos resultados teóricos:

Diferença Percentual = (Valor Teórico - Valor Experimental ou Numérico)/Valor Teórico

O amortecimento mais acentuado da viga sanduíche (viga 2) com relação ao da viga elástica (viga 1) pode ser observado nas figuras 6.15 e 6.16, que mostram as respostas numéricas obtidas para a viga sanduíche no segundo ajuste e os resultados numéricos da viga elástica, no domínio da frequência e do tempo, respectivamente.

As respostas dinâmicas no domínio do tempo (figura 6.17) e da frequência (6.18) para a viga 2 obtidas para o segundo ajuste e comparadas com as correspondentes respostas experimentais, reforçam a tese de que o primeiro ajuste paramétrico usado sub-avaliou os fatores de perda, reduzindo a taxa de amortecimento do modelo computacional:

- Comparando a figuras 6.12 (relativa ao primeiro ajuste) com a figura 6.18 (relativa ao segundo ajuste), pode-se perceber que houve um achatamento dos picos de

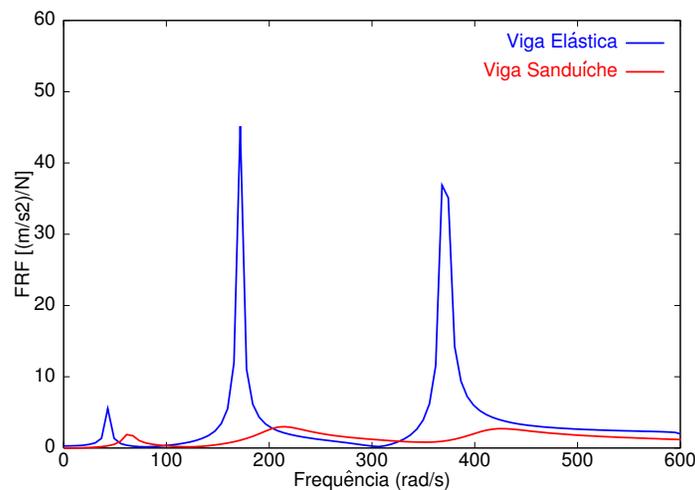


Figura 6.15: Respostas Numéricas no Domínio da Frequência

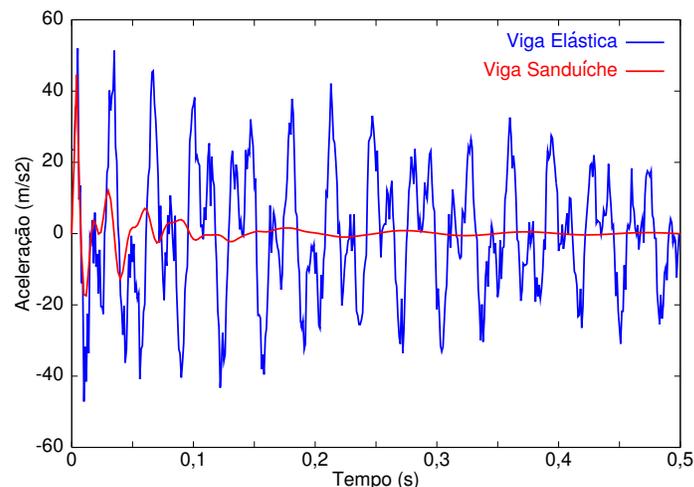


Figura 6.16: Respostas Numéricas no Domínio do Tempo

ressonância, o que demonstra a maior taxa de amortecimento do modelo computacional correspondente ao segundo ajuste paramétrico, e, conseqüentemente, uma aproximação entre as respostas numéricas/experimentais.

- Comparando-se agora a figura 6.12 (relativa ao primeiro ajuste) com a figura 6.18 (relativa ao segundo ajuste), percebe-se que a resposta numérica aproximou-se significativamente da resposta experimental. O maior número de oscilações que aparece na resposta numérica temporal correspondente ao primeiro ajuste (figura 6.12), não aparece na figura 6.18. Isto ocorre devido aos maiores fatores de perda, principalmente nas frequências mais altas, que são obtidos através do segundo ajuste paramétrico, conforme se verifica observando a figura 6.14.

Considerando as possíveis dispersões e incertezas que podem ocorrer em ensaios que caracterizam os MVE, pode-se dizer que os resultados obtidos numericamente são bastante razoáveis, pois apresentam uma boa proximidade dos resultados experimentais, conforme pôde ser observado ao longo deste exemplo.

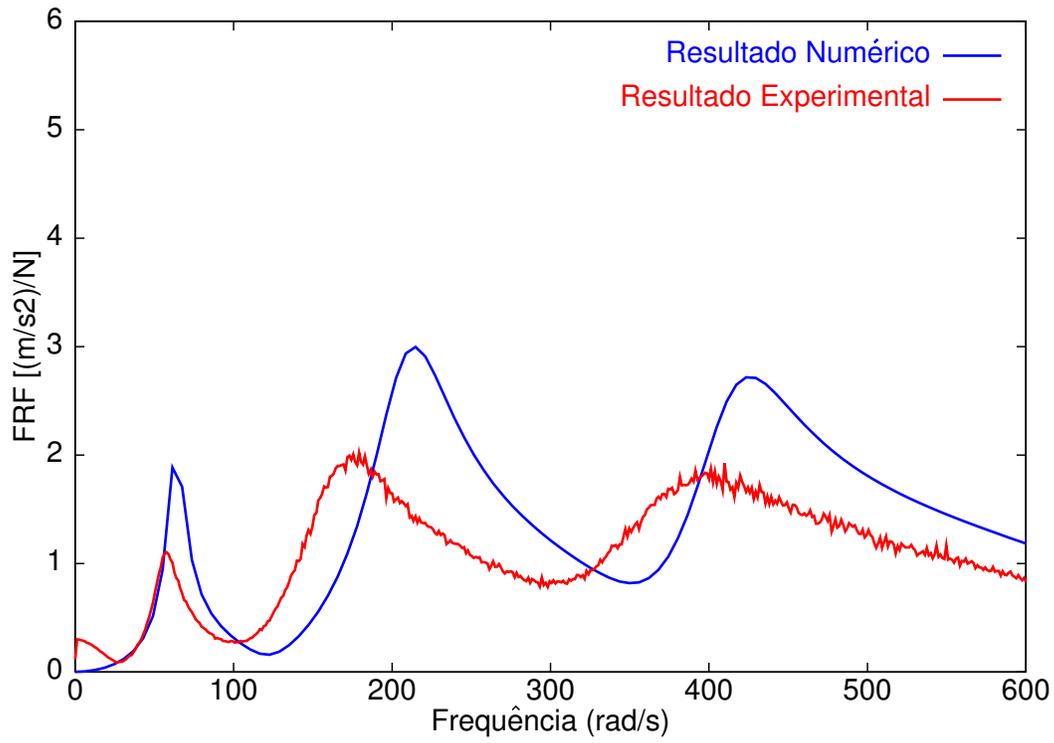


Figura 6.17: Respostas no Domínio da Frequência da Viga 2 para o Novo Ajuste Paramétrico

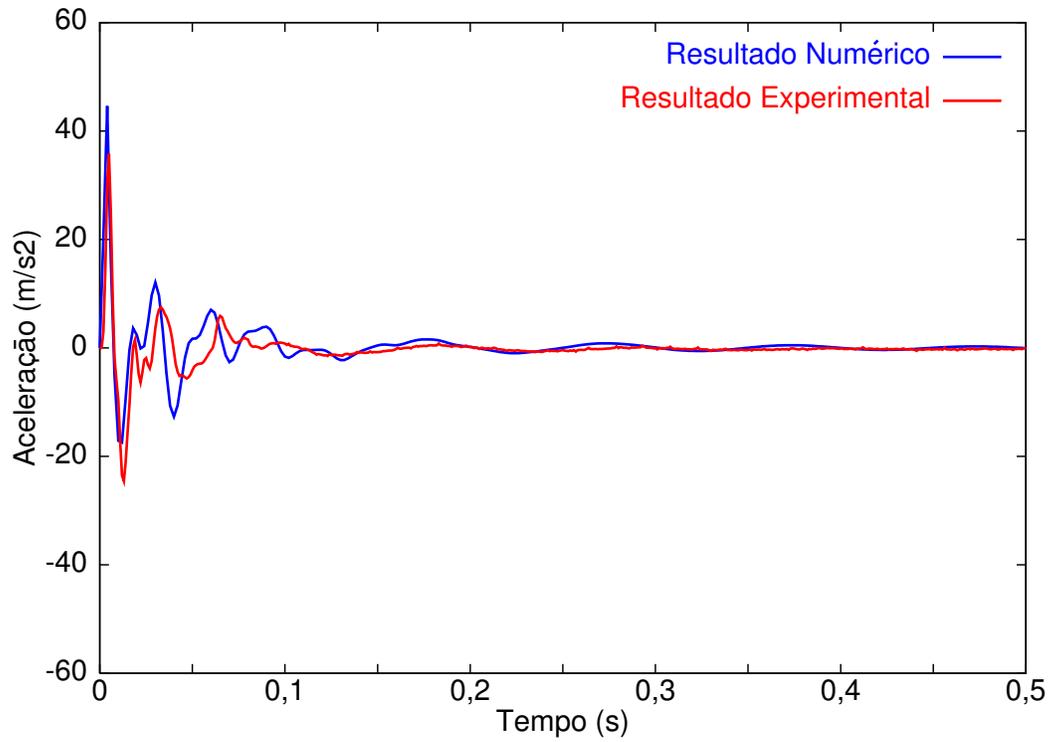


Figura 6.18: Respostas no Domínio do Tempo da Viga 2 para o Novo Ajuste Paramétrico

6.2 Placa Sanduíche

Este exemplo visa mostrar a eficiência de estruturas do tipo placa sanduíche na redução e/ou controle de vibrações através de simulações numéricas com o programa `ghm3d.for`. O comportamento elástico do modelo computacional usado nas análises dinâmicas foi calibrado com o auxílio de resultados teóricos (extraídos da teoria de placas) e computacionais, utilizando-se o programa SAP2000©[41].

6.2.1 Descrição do Problema

As estruturas analisadas neste exemplo são, basicamente, duas placas retangulares apoiadas nas quatro bordas, sendo uma placa mista constituída de aço e concreto e uma placa sanduíche, conforme ilustra a figura 6.19.

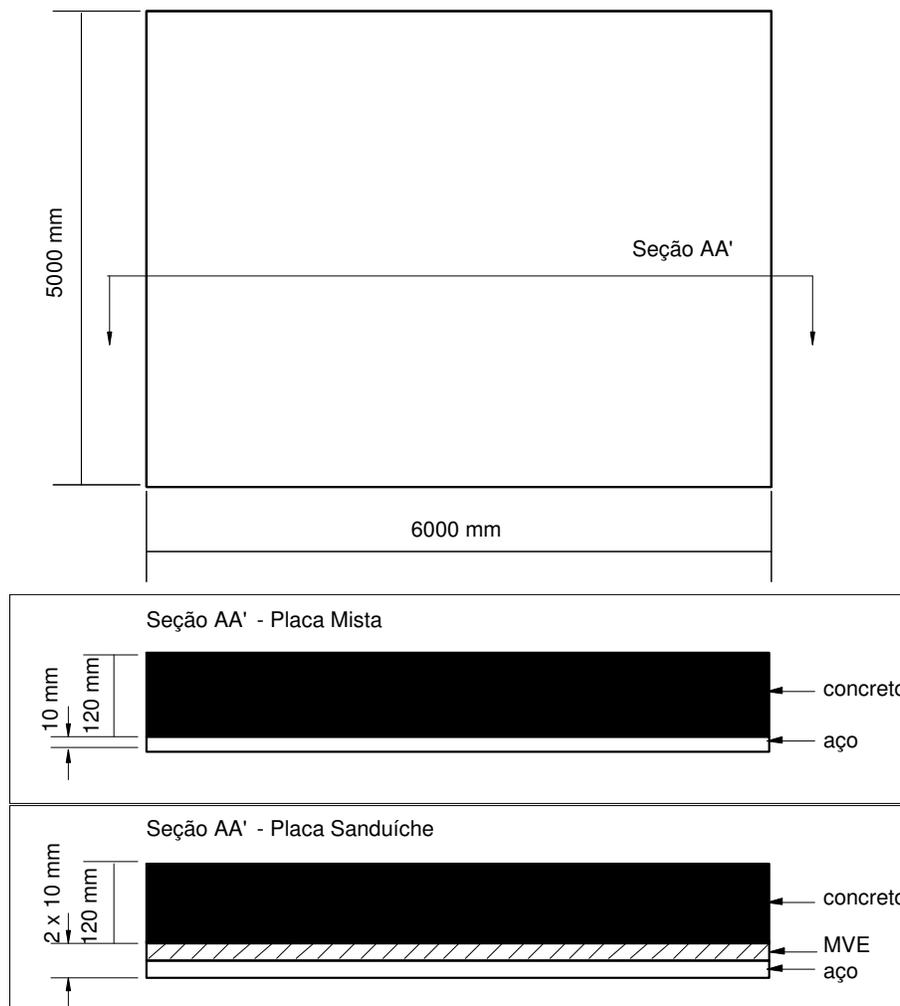


Figura 6.19: Descrição das Placas Analisadas

As placas foram submetidas a um carregamento de impacto e as suas respostas foram tomadas em 9 pontos conforme é mostrado na figura 6.20.

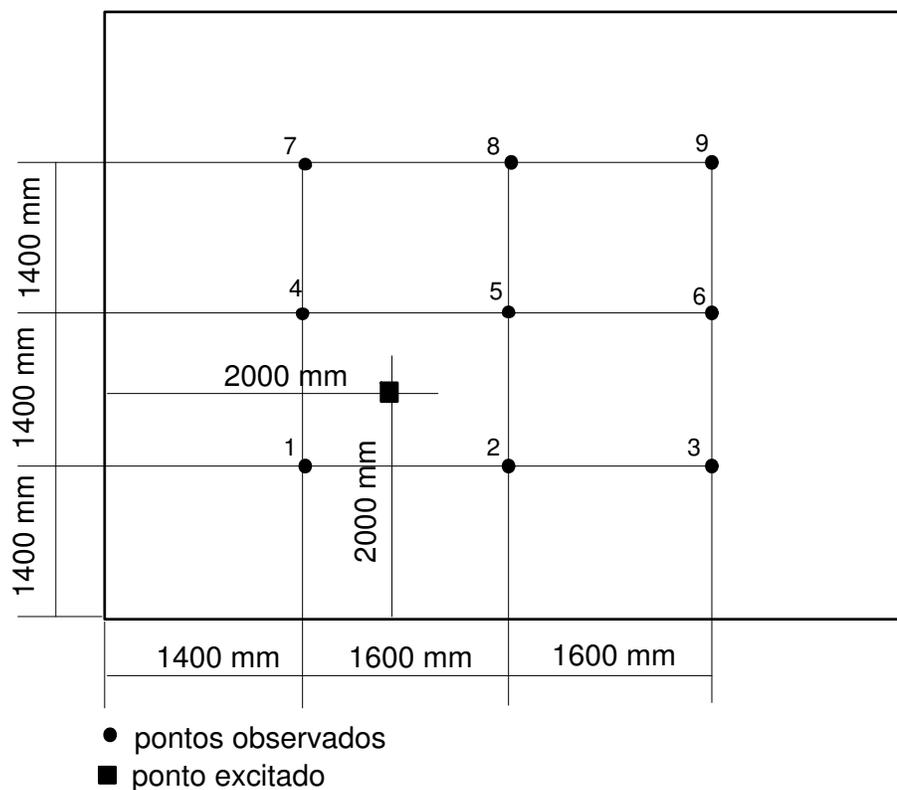


Figura 6.20: Descrição do Ponto de Excitação e dos Pontos Observados

6.2.2 Modelagem Computacional

Dos programas computacionais desenvolvidos neste trabalho, utiliza-se aqui o `ghm3d.for` com elementos hexaédricos lineares (ver capítulo 5) para análises estruturais.

A utilização de elementos sólidos lineares na modelagem de estruturas sujeitas a deformações predominantemente de flexão introduz erros significativos nas respostas, pois estes elementos são muito rígidos, não admitindo um campo de deslocamentos que permita flexão no interior do elemento, diferentemente dos elementos de placas e cascas.

Neste caso, a solução mais adequada para ajustar o modelo computacional de modo que as respostas obtidas via `ghm3d.for` se aproximem ao máximo dos valores teóricos seria aumentar o grau de refinamento da malha de elementos finitos. Porém, este procedimento, dentro dos recursos computacionais utilizados e com a estrutura atual do código do programa `ghm3d.for` (sem paralelização/vetorização), inviabiliza as análises pois o tempo de processamento e a quantidade de memória

computacional, que aumentam significativamente com o número de GLs, atingem valores inviáveis, como pôde ser verificado em estudos preliminares.

Uma outra maneira de se de atenuar o problema de excesso de rigidez dos elementos hexaédricos lineares é a calibração do módulo de elasticidade através do ajuste de respostas estáticas e/ou dinâmicas do modelo que se deseja ajustar a curvas referências, como é feito a seguir.

Como as estruturas analisadas possuem mais de um material, é necessário que se ajuste cada um dos módulos de elasticidade envolvidos.

O procedimento de calibração foi realizado através de uma análise estática comparativa entre valores de flecha extraídos da teoria de placas com os resultados numéricos obtidos via SAP2000, com uma modelagem feita por elementos de casca, e via `ghm3d.for`, com uma modelagem feita por elementos hexaédricos.

Calibração do Módulo de Elasticidade do Material - Aço

A calibração foi feita através de uma estrutura auxiliar composta apenas de aço correspondente à parte inferior das placas descritas na figura 6.19.

As malhas de elementos finitos usadas na calibração do aço estão mostradas na figura 6.21.

As características físicas adotadas para o aço estão mostradas na tabela 6.10.

Tabela 6.10: Características do Aço

Módulo de Elasticidade (MPa)	200000
Massa Específica (kg/m ³)	7827
Peso Específico (kN/m ³)	76,81
Coefficiente de Poisson	0,3
Taxa de Amortecimento (%)	0,0

A flecha $w(x, y)$ ao longo de uma placa retangular apoiada nas bordas e sujeita à ação de peso próprio pode ser calculada através da equação de Navier ([42]), que é escrita na forma:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 \mathcal{D}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi x}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (6.4)$$

onde:

$$\mathcal{D} = \frac{E}{12(1 - \nu^2)}$$

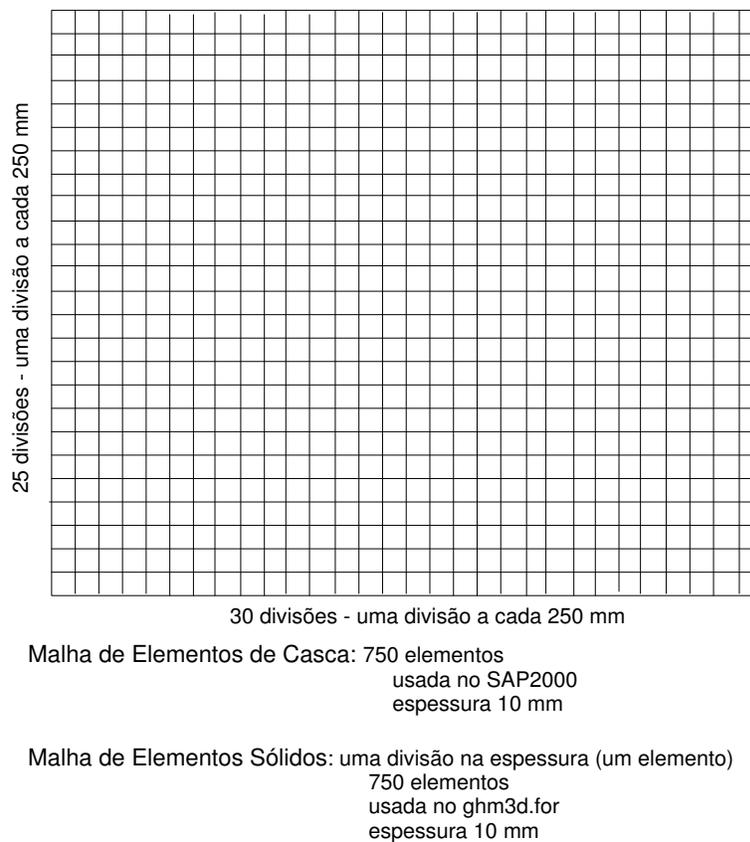


Figura 6.21: Discretização das Placas Usadas na Calibração do Módulo de Elasticidade do Aço

sendo E e ν , respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material que constitui a placa; q_o o peso por unidade de área; a e b os comprimentos relativos às direções x e y , respectivamente.

Para a placa auxiliar mostrada na figura 6.21 e submetida à ação do peso próprio, tem-se o conjunto de flechas apresentado na tabela 6.11.

Os valores de flecha obtidos tanto via SAP2000 quanto via ghm3d.for, que foram apresentados na tabela 6.11, estão bastante próximos dos valores teóricos, indicando que os modelos computacionais usados estão bem calibrados.

Cabe salientar que os resultados obtidos pelo programa ghm3d.for, para a malha de elementos finitos possível, foram ajustados através de um relaxamento do módulo de elasticidade que neste caso foi adotado como 77 vezes menor que o valor apresentado na tabela 6.10.

As 5 primeiras freqüências e modos naturais de vibração da placa de aço modelada via elementos hexaédricos (ghm3d.for) e via elementos de casca (SAP2000) são apresentados na figura 6.22, juntamente com os valores teóricos obtidos através da expressão teórica que segue [25]:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho_o}} \quad (6.5)$$

onde m e n representam o número de meias ondas nas direções a e b , respectivamente; ρ_o é a quantidade de massa por unidade de área.

Tabela 6.11: Flechas para Placa da Figura 6.21 Devido a Ação de Peso Próprio

Local	Valor Teórico	via SAP2000	Diferença Percentual (*)	via ghm3d.for	Diferença Percentual (*)
Ponto 1	71,85 mm	71,82 mm	0,04 %	72,25 mm	-0,56 %
Ponto 2	103,26 mm	103,23 mm	0,03 %	105,32 mm	-1,99 %
Ponto 3	71,85 mm	71,82 mm	0,04 %	72,25 mm	-0,56 %
Ponto 4	102,48 mm	102,45 mm	0,03 %	104,01 mm	-1,49 %
Ponto 5	147,85 mm	147,84 mm	0,01 %	152,29 mm	-3,00 %
Ponto 6	102,48 mm	102,45 mm	0,03 %	104,01mm	-1,49 %
Ponto 7	75,85 mm	71,82 mm	0,04 %	72,25 mm	-0,56 %
Ponto 8	103,26 mm	103,23 mm	0,03 %	105,32 mm	-1,99 %
Ponto 9	71,85 mm	71,82 mm	0,04 %	72,25 mm	-0,56 %

(*) As diferenças percentuais são sempre relativas aos resultados teóricos:

Diferença Percentual = (Valor Teórico - Valor via SAP2000 ou via ghm3d.for)/Valor Teórico

Os modos de vibração obtidos foram idênticos. As frequências naturais apresentaram boa concordância com variações um pouco maiores para o terceiro e quinto modos.

Figura 6.22: Freqüências Naturais e Modos de Vibração da Placa de Aço

A figura 6.23 contém uma comparação entre as respostas dinâmicas obtidas numericamente nos programas SAP2000 e ghm.for para a carga de impacto descrita na figura 6.24 com $T_a = 0,05$ s, aplicada no ponto de excitação e observada no ponto 5 (ver figura 6.20), mostrando uma boa concordância.

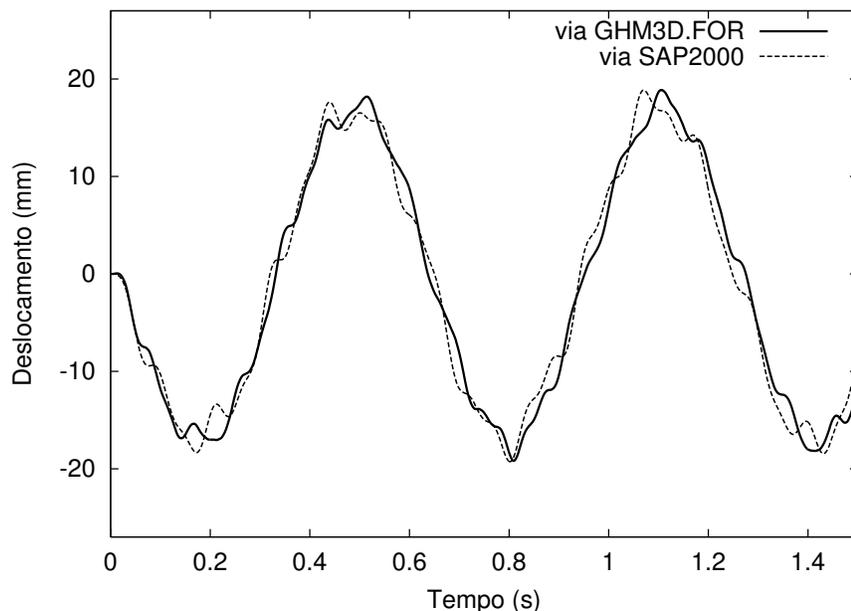


Figura 6.23: Respostas no Domínio do Tempo da Placa de Aço

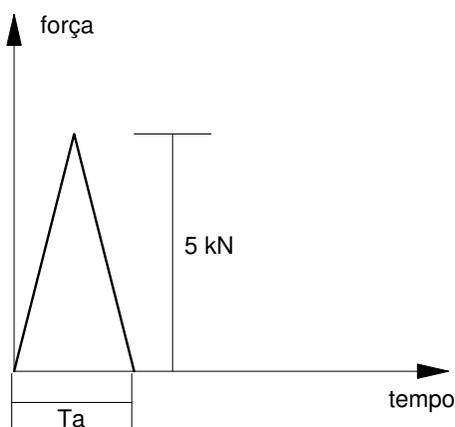


Figura 6.24: Força de Excitação

Desta maneira tem-se o modelo discretizado em elementos hexaédricos ajustado às curvas referenciais, estática e dinamicamente.

Uma discretização com maior número de elementos obviamente reduziria as diferenças entre o modelos, mas isso aumentaria significativamente o esforço computacional, podendo até inviabilizar a análise conforme será visto posteriormente.

Calibração do Módulo de Elasticidade do Material - Concreto

O módulo de elasticidade do concreto foi calibrado de forma análoga à adotada na calibração do módulo de elasticidade do aço.

A calibração do concreto é feita através de uma estrutura auxiliar composta apenas de concreto correspondente à parte superior das placas descritas na figura 6.19.

As malhas de elementos finitos usadas na calibração do concreto têm as mesmas características que as mostradas na figura 6.21, exceto no que se refere à espessura, que para este caso foi tomada no valor de 120 mm (espessura do concreto das placas da figura 6.19).

As características físicas adotadas para o concreto estão mostradas na tabela 6.12.

Tabela 6.12: Características do Concreto

Módulo de Elasticidade	25000 MPa
Massa Específica	2400 kg/m ³
Peso Específico	23,55 kN/m ³
Coefficiente de Poisson	0,2
Taxa de Amortecimento	0,0 %

Através de um teste estático idêntico ao efetuado para a placa de aço, obtém-se o valor do módulo de elasticidade de concreto que ajusta deslocamentos verticais obtidos via `ghm3d.for` com os valores teóricos (equação (6.4)). Os erros relativos obtidos foram da mesma ordem de grandeza dos obtidos para a placa de aço, sendo que o do módulo de elasticidade do concreto na modelagem por elementos hexaédricos foi dividido por 2,8.

A análise modal, bem como as respostas no domínio do tempo para a placa de concreto, também fornecem resultados comparativos com erros relativos semelhantes aos obtidos para o aço.

Calibração do Material Viscoelástico

O módulo de elasticidade de um MVE é sempre muito menor² que dos materiais elásticos que com ele compõem uma estrutura sanduíche, fazendo com que sua rigidez à flexão praticamente não contribua para a rigidez da estrutura. Sendo assim, a redução do módulo de elasticidade do MVE em função do tipo de elemento finito

² ≈ 5000 vezes menos rígido que o concreto e $\approx \times 10^4$ vezes menor que do aço

adotado pouco irá influenciar na análise dos deslocamentos, dispensando assim sua calibração.

O MVE usado nestas análises é o mesmo que foi tomado como base dos estudos paramétricos do capítulo 4.

6.2.3 Respostas Dinâmicas da Placa Mista

Após calibrado o modelo computacional através do ajuste do módulo de elasticidade de cada material, faz-se agora a análise da placa mista (ver figura 6.19).

As malhas de elementos finitos usadas na modelagem da placa mista têm o mesmo grau de refinamento das mostradas na figura 6.21. A diferença é que na estrutura mista tem-se duas camadas de elementos na espessura: uma de aço; outra de concreto.

As respostas dinâmicas das placas mistas observadas no ponto 5 da figura 6.20 sujeitas à carga de impacto descrita na figura 6.24 com tempo de aplicação $T_a = 0,005$ s, aplicada no ponto de excitação, são mostradas na figura 6.25.

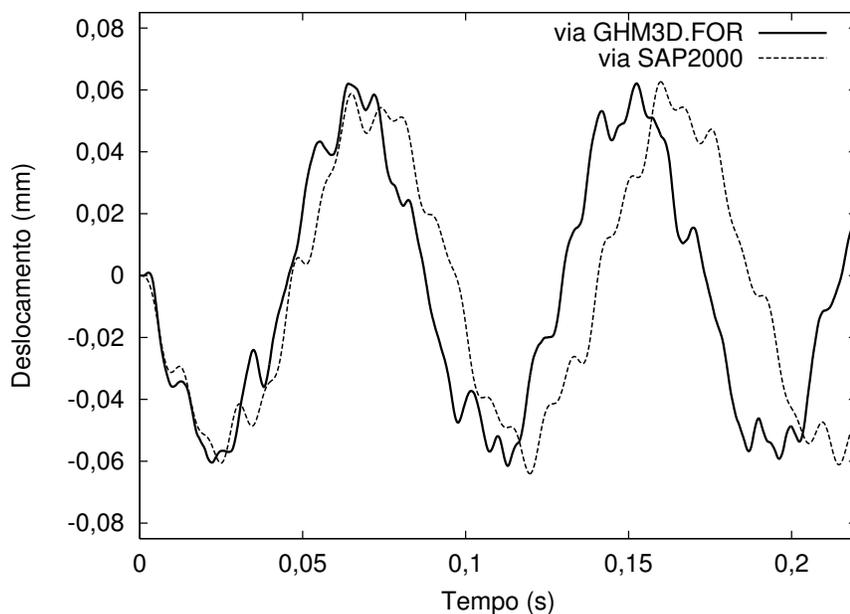


Figura 6.25: Respostas no Domínio do Tempo das Placas Mistas

As respostas numéricas mostradas na figura 6.25 são semelhantes, porém apresentam defasagens em função das pequenas diferenças entre as freqüências naturais da placa mista obtidas em cada programa que, por sua vez, são conseqüências do nível de refinamento usado nas malhas de elementos finitos hexaédricos do `ghm3d.for`. Todavia, num problema onde não se exige uma alta precisão de resultados, estas defasagens não invalidam as análises numéricas do programa `ghm3d.for`, já que as diferenças obtidas nos sinais temporais são visivelmente pequenas.

6.2.4 Respostas Dinâmicas da Placa Sanduíche

A modelagem adotada para a placa sanduíche segue o mesmo grau de refinamento das malhas anteriores (ver figura 6.21), porém agora com três camadas de elementos na espessura: uma de aço; uma de concreto; outra de MVE.

A tabela 6.13 apresenta um resumo contendo algumas características acerca do modelo e esforço computacionais, usados na modelagem da placa sanduíche.

Tabela 6.13: Características do Modelo e Esforço Computacionais da Placa Sanduíche

Número de GLs	Número de Termos da Matriz Efetiva	Largura Média de Banda	Tempo de Processamento (*)
22.842	17.787.681	778	≈ 16 horas (**)

(*) Para um PC Pentium II 400 MHz, 256 MBytes de memória RAM, 2 GBytes livres de HD

(**) Para se obter uma resposta no tempo com 2000 passos de tempo

Os valores apresentados na tabela 6.13 deixam claro que um refinamento maior da malha de elementos finitos inviabiliza as análises computacionais, conforme foi destacado anteriormente.

Os programas comerciais disponíveis no PEC da COPPE - UFRJ tratam o comportamento reológico de um MVE, mas não fazem sua análise dinâmica no domínio do tempo. Por este motivo as repostas obtidas para a placa sanduíche mostradas nas figuras 6.26 e 6.27 não apresentam comparação com outro programa comercial. Gibson *et al* [11] mostram resultados dinâmicos obtidos através da inserção do elemento hexaédricos viscoelástico no programa NASTRAN, porém a forma resumida com que foram apresentados os dados pertinentes às análises impossibilitaram qualquer comparação de resultados.

As figuras 6.26 e 6.27 comparam as respostas dinâmicas no domínio do tempo e da frequência, respectivamente, obtidas para a placa sanduíche com as obtidas para a placa mista, deixando claro o caráter amortecedor dos MVE, sobretudo nas altas frequências.

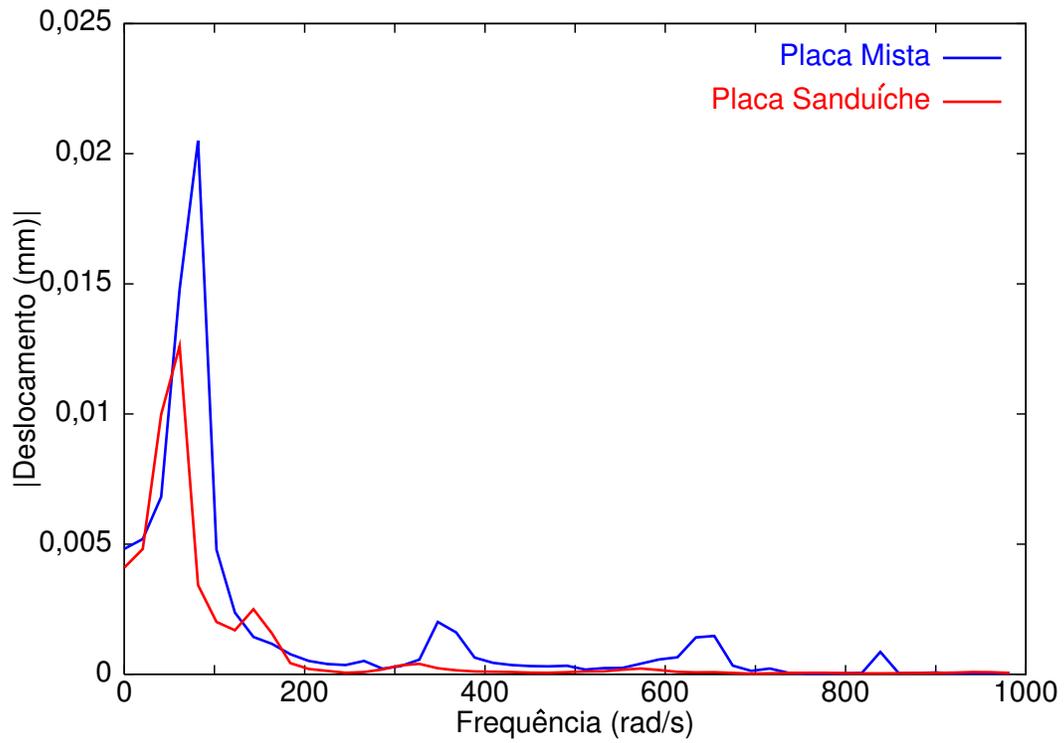


Figura 6.26: Repostas no Domínio do Tempo das Placas Sanduíche e Mista

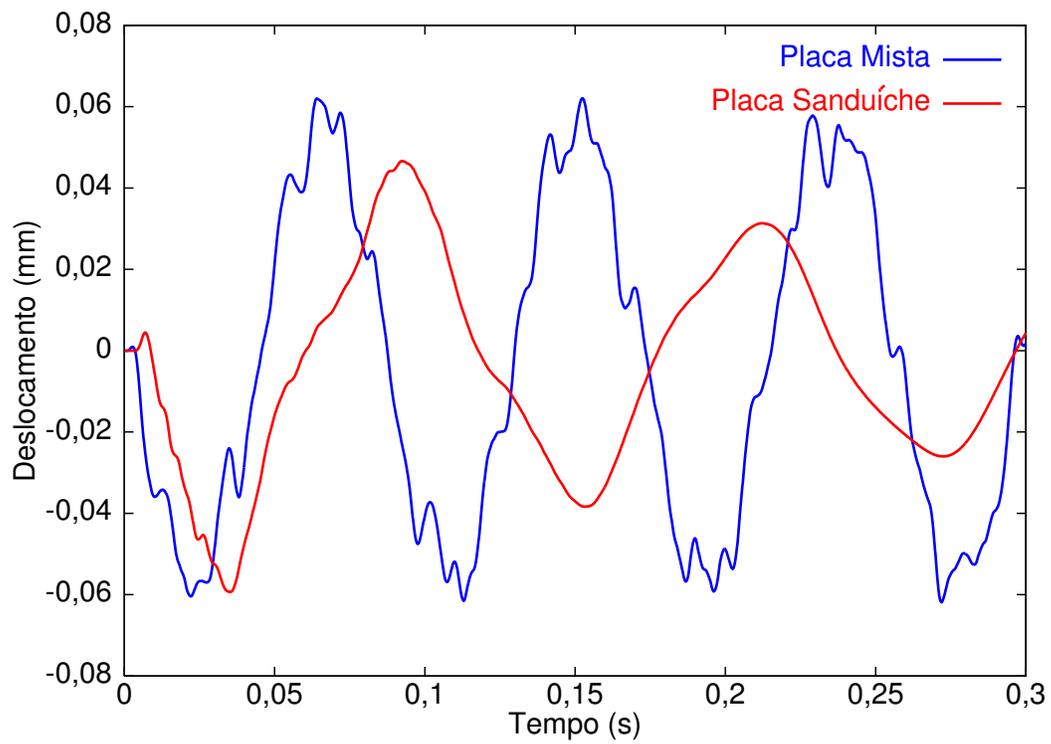


Figura 6.27: Repostas no Domínio da Frequência das Placas Sanduíche e Mista

Capítulo 7

Recomendações para Projeto e Verificação de Estruturas com MVE

Os aspectos envolvidos no projeto e na verificação de qualquer estrutura suscitam várias questões de ordem prática que fogem ao objetivo do presente trabalho. Tais questões estão ligadas à análise dos projetos, detalhes construtivos e à metodologia de execução e até mesmo ao estudo de viabilidade econômica, os quais são entregues ao encargo de especialistas.

Além de todas estas questões há as de ordem técnico-científica que envolvem a teoria de amortecimento estrutural, da composição e comportamento reológico e dinâmico dos MVEs. São estas questões que este capítulo visa abordar.

7.1 Introdução

A utilização de MVE amortecedores em estruturas civis é uma tecnologia ainda bastante incipiente como já destacado no capítulo 1. Recentemente, a equipe chefiada pelo Prof. Ronaldo Battista do PEC da COPPE - UFRJ, em parceria com a Ponte S/A, vem desenvolvendo um sistema passivo de controle de vibrações com a utilização de MVE para ser aplicado no tabuleiro ortotrópico metálico dos vãos centrais da Ponte Rio-Niterói (figura 7.1(a)). Num âmbito mundial, este é o primeiro projeto de aplicação de MVE como amortecedor estrutural num tabuleiro de ponte rodoviária.

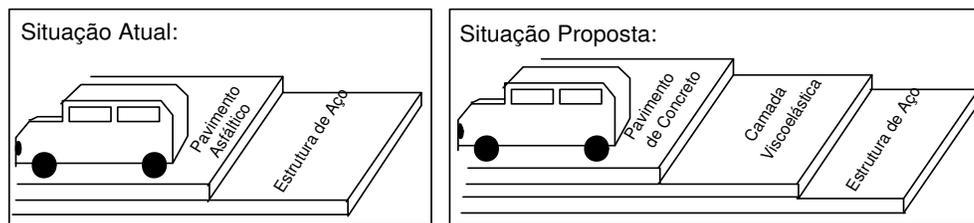
O sistema passivo de absorção de vibrações consiste na aplicação de uma película de MVE sobre a superfície metálica dos tabuleiros ortotrópicos e em seguida o recobrimento com uma camada de concreto armado conforme ilustra a figura 7.1(b). O conjunto aço-MVE-concreto funciona como uma estrutura sanduíche, dissipando energia de vibração através do núcleo viscoelástico. Testes realizados num modelo experimental em escala 1:1, cuja foto está mostrada na figura 7.2, atestam a eficiência do sistema do tipo sanduíche adotado para atenuação de vibrações numa

faixa de frequências mais altas associadas aos vários modos de vibração excitados pela interação veículos-pavimento-estrutura.

Os sistemas de vigas e placas sanduíche são em seguida estudados em face à comprovada eficiência na redução de vibrações com um enfoque voltado para o projeto de estruturas com sistemas passivos/viscoelásticos de atenuação dinâmica [44]. As considerações feitas a seguir acerca das vigas e placas sanduíche são também válidas para outros tipos de amortecedores viscoelásticos.



(a) Foto do Vão Central Metálico



(b) Esquema do Revestimento do Tabuleiro do Vão Central

Figura 7.1: Vista Lateral e Detalhe Esquemático do Tabuleiro Metálico do Vão Central da Ponte Rio-Niterói



Figura 7.2: Modelo Experimental do Vão Central da Ponte Rio-Niterói (Escala 1:1)

7.2 Vigas e Placas Sanduíche

De uma forma geral uma estrutura sanduíche apresenta uma configuração semelhante à apresentada na figura 7.3, sendo que o número de camadas viscoelásticas e de restrições podem variar.

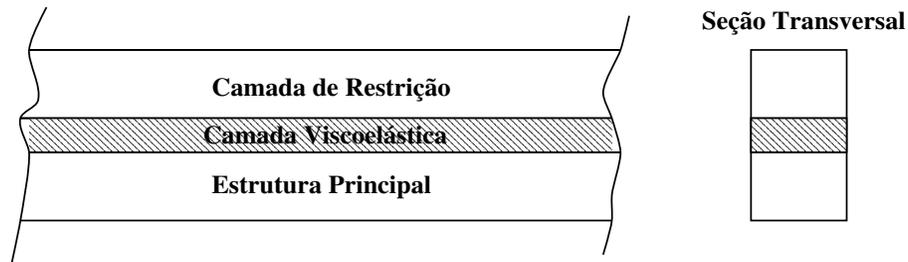


Figura 7.3: Exemplo de Estrutura Sanduíche

Uma viga ou uma placa sanduíche desenvolve maiores amortecimentos na flexão que outra viga ou placa de dimensões respectivamente idênticas, constituída apenas do material elástico da camada de restrição. Isto é conseqüência da maior dissipação de energia de vibração através das deformações cisalhantes nos núcleos viscoelásticos devido às solicitações de flexão do laminado sanduíche. Conforme a referência [17], se os núcleos fossem muito flexíveis, haveria grandes deformações devido ao cortante para pequenas tensões cisalhantes e, conseqüentemente, pouca dissipação de energia¹. Se os núcleos fossem muito rígidos, haveria pequenas deformações devido ao cortante e, mais uma vez, ter-se-ia pouca dissipação de energia. Para núcleos com características intermediárias, como é o caso dos MVE, haverá deformações moderadas com o surgimento de tensões também moderadas, levando a dissipação de energia a valores mais elevados.

Fica claro que praticamente toda a energia de vibração dissipada numa estrutura sanduíche se dá no núcleo viscoelástico. As próximas seções fazem um resumo sobre alguns aspectos que devem ser considerados acerca do material viscoelástico para a concepção e projeto de uma estrutura sanduíche.

7.2.1 Espessura do Núcleo Viscoelástico

A espessura da camada viscoelástica está ligada ao nível de amortecimento que se deseja obter da estrutura sanduíche: quanto mais espessa, maior a taxa de amortecimento.

É importante salientar que a taxa de amortecimento da estrutura sanduíche nunca é superior a do MVE tomado isoladamente. A figura 7.4 mostra, de forma

¹A dissipação de energia de uma estrutura sanduíche é diretamente proporcional às deformações e às tensões no núcleo [17]

qualitativa, a relação entre a espessura do núcleo e a taxa de amortecimento do sistema sanduíche ilustrado na figura 7.3. Pode-se perceber da figura 7.4 que a taxa de amortecimento do sistema tem inicialmente uma variação praticamente linear com a espessura e em seguida começa a apresentar um comportamento assintótico, tendendo para um valor máximo que coincide com a taxa de amortecimento do material viscoelástico tomado isoladamente [25].

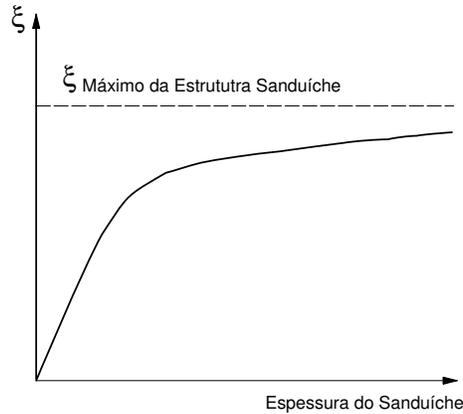


Figura 7.4: Amortecimento Estrutural em Função da Espessura do Sanduíche

7.2.2 Influência da Faixa de Frequência de Trabalho

Este fator é de fundamental importância para o projeto de sistemas sanduíche. É preciso ter, com relativa precisão, a faixa de frequências a que a estrutura a ser projetada vai ser submetida.

A estratégia para se obter o melhor desempenho em termos de amortecimento é situar a região onde o MVE apresenta os valores de η mais elevados na faixa de frequência de trabalho da estrutura, conforme ilustra a figura 7.5. Numa situação otimizada, deve-se ter a frequência média de trabalho correspondendo com o pico do módulo de perda η . A equação (4.4), que exprime uma aproximação para η ,

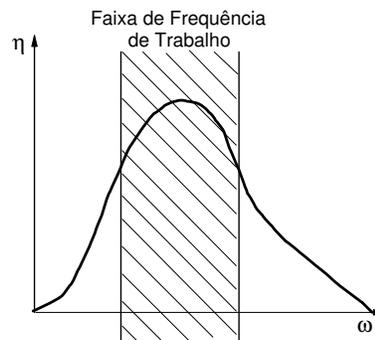


Figura 7.5: Ajuste da Frequência de Trabalho da Estrutura à Região com Fatores de Perda mais Elevados

bem como sua derivada, podem auxiliar na busca do MVE ideal para a faixa de frequências na qual a estrutura irá trabalhar/responder. Pode-se até mesmo predefinir as características dinâmicas ideais desejadas para um certo MVE, bem como suas características físico-químicas, conforme descritas em Leite [43], e encomendá-lo junto às indústrias fabricantes deste tipo de material.

A fase de projeto relativa ao ajuste de parâmetros deverá ser diretamente influenciada pela faixa de frequências de trabalho. Para demonstrar esta afirmação, foram realizadas simulações numéricas para dois MVEs distintos - Material A e Material B - submetidos a três diferentes frequências de excitação - $\omega_1 = 5$ rad/s, $\omega_2 = 10$ rad/s e $\omega_3 = 100$ rad/s. Os materiais A e B têm suas curvas características apresentadas na figura 7.6.

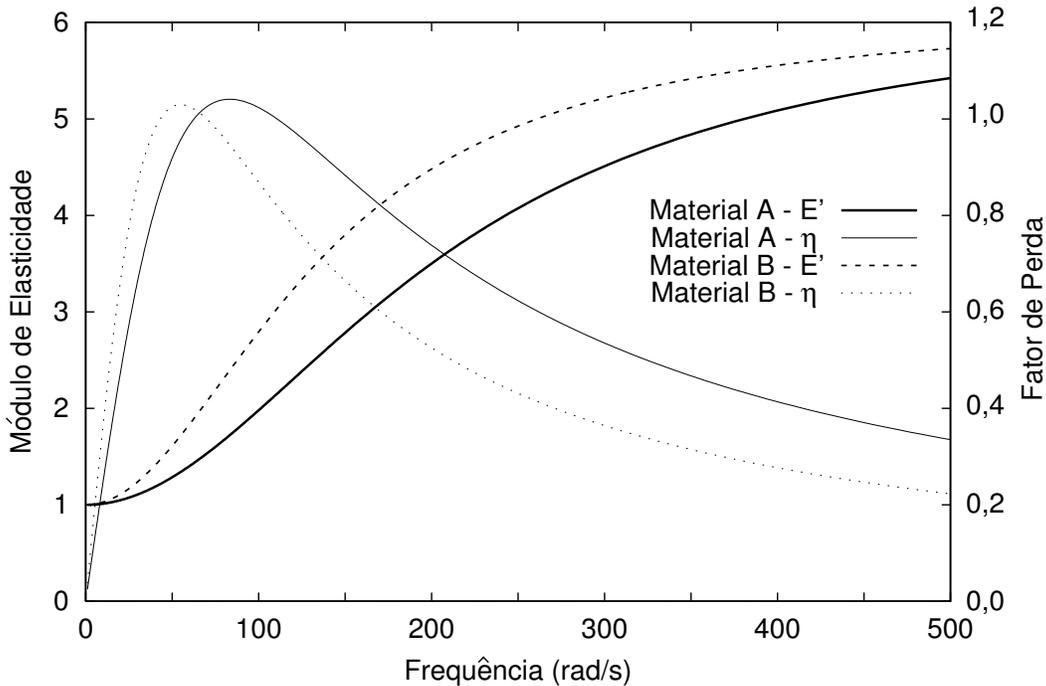


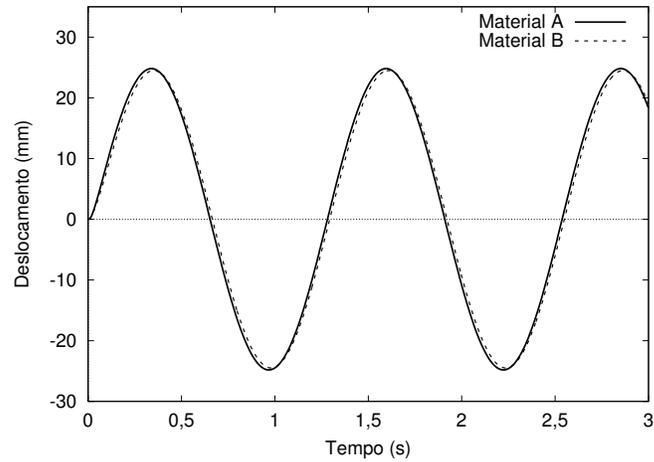
Figura 7.6: Curvas Características dos Materiais A e B

O exemplo analisado são duas barras como a descrita no exemplo base do capítulo 4, figura 4.4, sendo uma barra constituída do Material A e a outra do Material B.

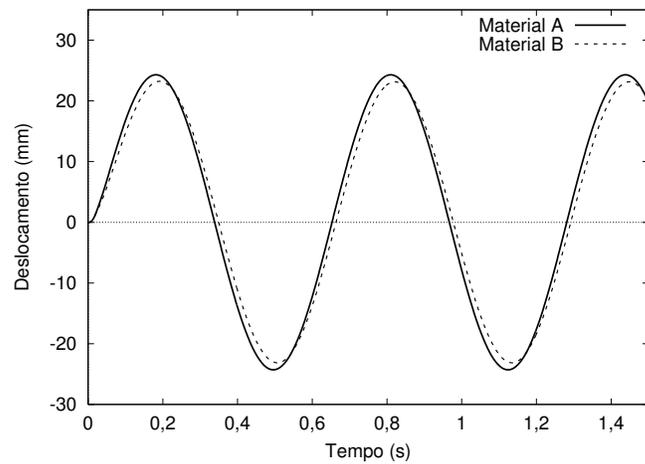
As análises são feitas para uma carga expressa em Newtons por $P = 20\text{sen}(\omega_i t)$, $i = 1, 2, 3$ (ver figura 4.4) e as respostas dinâmicas consideradas são os deslocamentos q no extremo das barras.

A figura 7.7 apresenta as respostas para cada uma das barras analisadas e para cada frequência de excitação considerada. Estas figuras deixam claro que à medida que frequência de excitação se afasta da região onde os Materiais A e B têm uma boa concordância nas suas curvas características (ver figura 7.6), as respostas dinâmicas de cada material para uma mesma frequência de excitação tendem a se afastar,

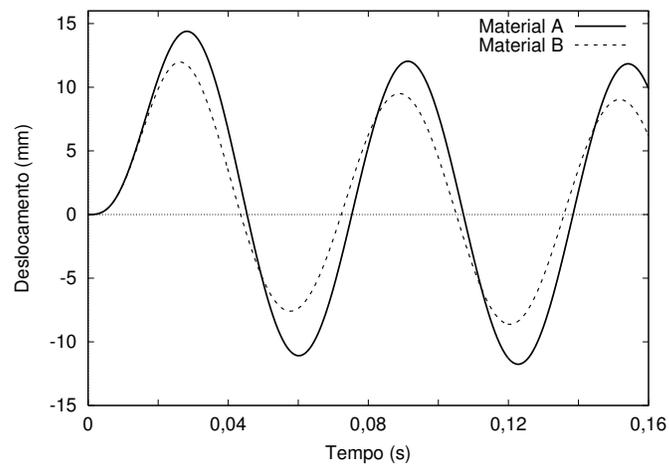
deixando claro que o ajuste de parâmetros deverá sempre considerar a faixa de frequência de trabalho da estrutura.



(a) Frequência de Excitação $\omega_1 = 5$ rad/s



(b) Frequência de Excitação $\omega_2 = 10$ rad/s



(c) Frequência de Excitação $\omega_3 = 100$ rad/s

Figura 7.7: Respostas Dinâmicas dos Materiais A e B

7.2.3 Temperatura

Todas as análises realizadas neste trabalho supõem uma temperatura constante. Porém, a temperatura influencia diretamente as curvas características dos MVEs, como mostra a figura 7.8.

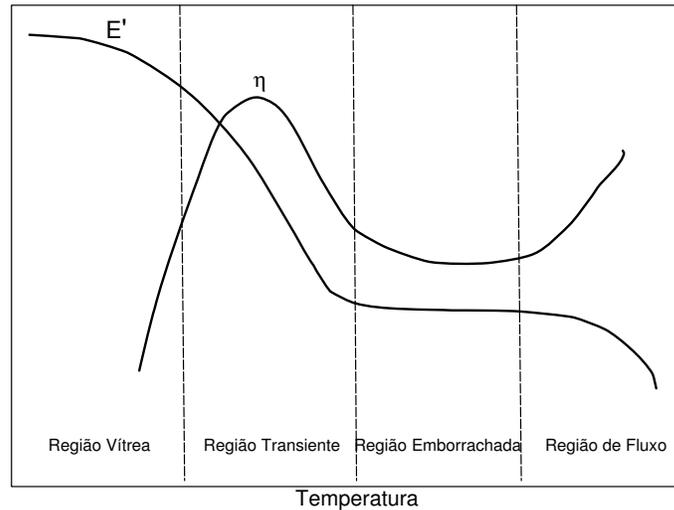


Figura 7.8: Variação das Características Dinâmicas de um MVE em Função da Temperatura numa Freqüência Constante

Para o caso em que a estrutura sanduíche em questão estiver sujeita a variações significativas de temperatura, serão necessárias análises para vários valores de temperatura, a fim de se determinar a situação mais desfavorável.

A melhor temperatura de utilização dos MVEs é relativa à Região Transiente (figura 7.8), pois é aí que o fator de perda atinge maiores valores.

Uma estratégia para se reduzir os efeitos da temperatura nas estruturas sanduíches é a utilização de mais de um MVE entre várias camadas de restrição. Os MVEs usados deverão apresentar características amortecedoras mais elevadas em faixas distintas de temperaturas, aumentando desta forma a faixa de utilização da estrutura frente ao efeito da temperatura.

7.2.4 Outros Fatores

Existem outros fatores que também influenciam no comportamento dinâmico de um MVE. Dentre eles podemos citar:

- Pré-carga estática e
- Técnicas de colagem do MVE.

Estes fatores estão relacionados com detalhes construtivos e não serão aqui abordados. Para maiores informações ver referências [4] e [25].

7.3 Aplicação: Aspectos Gerais do Projeto de um Amortecedor Sanduíche com MVE

Esta seção aborda de uma maneira mais prática os conceitos relativos ao projeto e à verificação de estruturas com MVE vistos neste capítulo.

Assim sendo, supõe-se que duas estruturas hipotéticas mostradas nas figuras 7.9(a) e 7.10(a) estejam com problemas de vibrações estruturais excessivas. Para atenuar estes problemas dinâmicos, optou-se pela instalação de amortecedores sanduíches com MVE em pontos estratégicos destas estruturas, conforme descrevem as figuras 7.9(b) e 7.10(b). Os detalhes dos amortecedores sanduíches a serem instalados estão mostrados nas figuras 7.11.

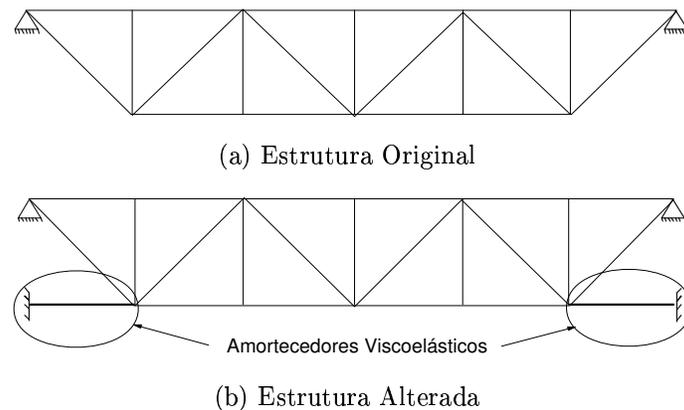


Figura 7.9: Estrutura com Problemas Dinâmicos: Viga Treliçada

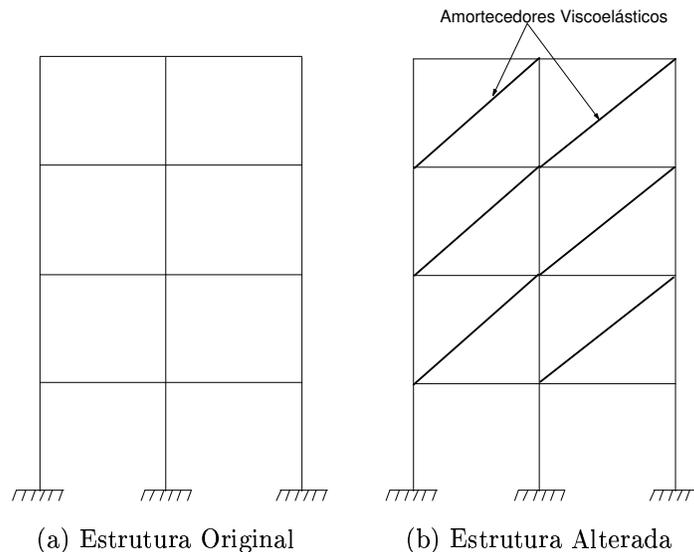


Figura 7.10: Estrutura com Problemas Dinâmicos: Prédio

As soluções apresentadas nas figura 7.9(b) e 7.10(b) são semelhantes às adotadas nas torres do World Trade Center e no edifício Columbia SeaFirst (ver figuras 1.2 e

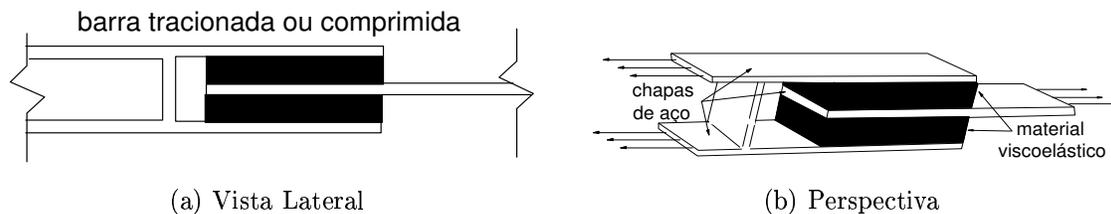


Figura 7.11: Detalhes dos Amortecedores Viscoelásticos

1.3), respectivamente. Em ambos os casos, a redução das amplitudes de vibração se dá pela dissipação de energia no núcleo viscoelástico, que é solicitado por esforços cisalhantes à medida que as barras onde os amortecedores estão instalados sofrem variação de comprimento. Na figura 7.9(b), à medida que a viga sofre flexão, os amortecedores viscoelásticos situado no banzo inferior da treliça são alongados ou encurtados. Já na figura 7.10(b) as variações nos comprimentos das diagonais onde estão instalados os amortecedores viscoelásticos são provocadas sempre que o prédio é solicitado por cargas laterais (carga de vento por exemplo).

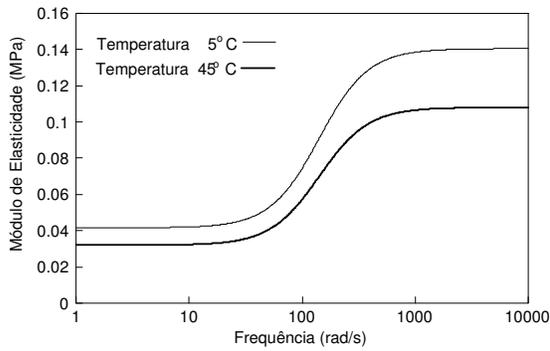
Impõe-se como condição de projeto que os amortecedores sanduíches deverão atenuar com maior eficiência os modos de vibrações correspondentes a frequências de $24 \text{ Hz} \approx 150 \text{ rad/s}$ de ambas as estruturas, sendo que as mesmas estão submetidas a uma faixa de temperatura compreendida entre 5 e 45° C

7.3.1 Escolha do MVE

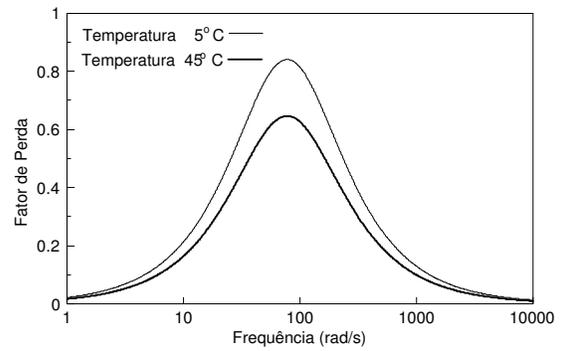
A escolha do MVE a ser adotado deverá estar condicionada basicamente a:

- **Módulo de elasticidade:** Deve-se adotar o MVE que tiver o maior valor do módulo de elasticidade possível, pois quanto mais rígido é o amortecedor, menores serão as amplitudes de deslocamentos. Obviamente, este fator não deve ser analisado isoladamente pois, como já observado nos estudos paramétricos (capítulo 4), o aumento do módulo de elasticidade está ligado à redução da taxa de amortecimento.
- **Faixas de frequência e temperatura de trabalho:** Para os casos em questão deseja-se reduzir principalmente as amplitudes modais de vibração relativas ao modo de vibração correspondente a $24 \text{ Hz} \approx 150 \text{ rad/s}$. Logo, o MVE adotado deverá apresentar maiores taxas de amortecimento em torno da frequência de 150 rad/s para a faixa de temperatura à qual as estruturas estarão submetidas.

Supõe-se que estejam disponíveis para o projetista três MVEs (M1, M2 e M3), cujas envoltórias de curvas características para 5 e 45° C estão dispostas nas figuras 7.12, 7.13 e 7.14, respectivamente.

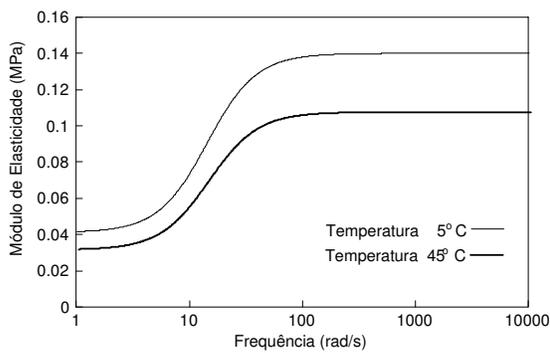


(a) Módulo de Elasticidade

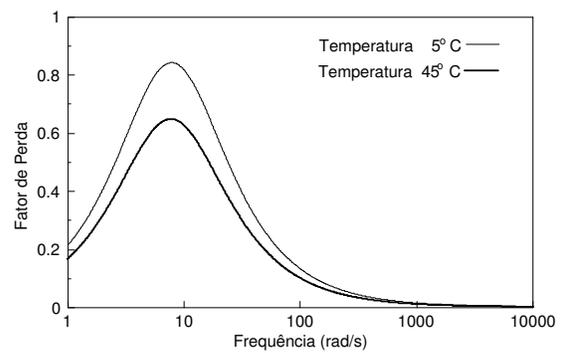


(b) Fator de Perda

Figura 7.12: Curvas Características do Material M1

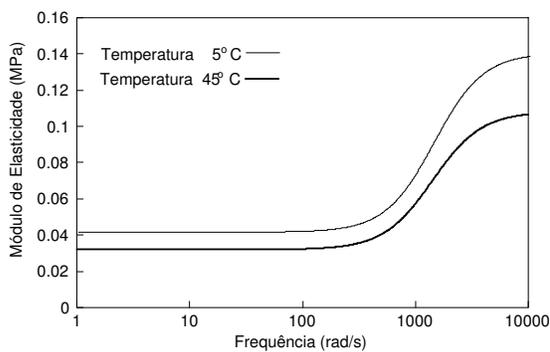


(a) Módulo de Elasticidade

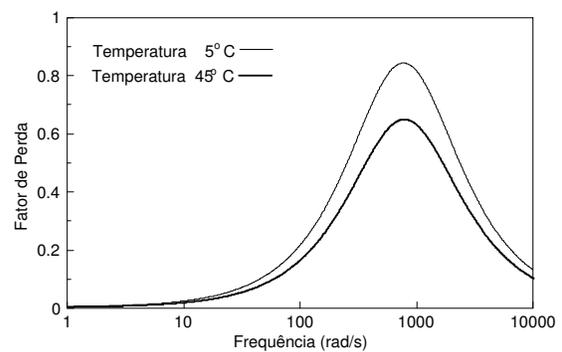


(b) Fator de Perda

Figura 7.13: Curvas Características do Material M2



(a) Módulo de Elasticidade



(b) Fator de Perda

Figura 7.14: Curvas Características do Material M3

Qual dos três é o mais recomendável para os casos em questão? De acordo com as considerações até aqui feitas, o MVE M1 é o mais adequado pois apresenta nas faixas de frequência e temperatura de trabalho solicitadas no projeto valores elevados de fator de perda com um módulo de elasticidade relativamente alto.

O MVE M1 adotado, na temperatura mais desfavorável (45° C), apresenta o seguinte conjunto de parâmetros experimentais:

$$\varepsilon = 32000 \text{ Pa}, \alpha = 76000 \text{ Pa}, \beta = 1,25 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \text{ e } \delta = 1,77 \times 10^9 \text{ s}^{-2}.$$

7.3.2 Espessura das Camadas de MVE

A espessura das camadas de MVE está diretamente ligada ao nível de amortecimento que se deseja obter, ou seja, mais espessas as camadas, maiores as taxas amortecimento da estrutura.

Esta última consideração, tomada isoladamente, leva a crer que quanto mais espessa a camada, melhor será o desempenho do amortecedor. Porém, camadas espessas demais podem deixar os amortecedores muito flexíveis.

Admitindo que as dimensões a serem adotadas para os amortecedores sejam as apresentadas na figura 7.15 e que a força P máxima a que estes últimos serão submetidos seja de 125 N, fazem-se a seguir algumas análises estáticas.

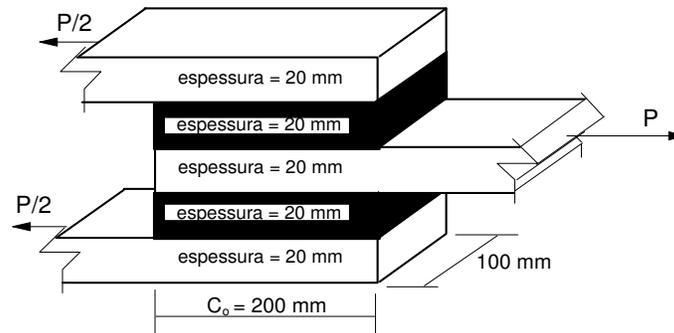


Figura 7.15: Dimensões Adotadas para o Amortecedor Viscoelástico

O Módulo de Elasticidade Transversal Estático (g) relaciona-se com o Módulo de Elasticidade Longitudinal Estático (parâmetro ε) através de equações básicas da elasticidade (equação (2.44)). Para $\nu = 0,25$ tem-se então:

$$g = \frac{\varepsilon}{2(1 + \nu)} = \frac{32000}{2(1 + 0,25)} = 12800 \text{ Pa} \quad (7.1)$$

Considerando uma distribuição uniforme das tensões cisalhantes (τ) nas ligações entre o aço e o MVE e chamando de A cada área de corte nestas ligações pode-se escrever:

$$\tau = \frac{P/2}{A} = \frac{125/2}{0,2 \times 0,1} = 3125 \text{ Pa} \quad (7.2)$$

A deformação angular (γ) pode ser escrita considerando uma relação linear com tensões cisalhantes τ . Levando em conta os valores de g e τ obtidos nas equações (7.1) e (7.2), respectivamente, chega-se a:

$$\gamma = \frac{\tau}{g} = \frac{3125}{12800} \approx 0,24 \text{ rad} \quad (7.3)$$

Partindo-se da hipótese de que haverá pequenos deslocamentos e deformações nos amortecedores, considerando o valor de γ obtido na equação (7.3) e observando a figura 7.16 pode-se escrever:

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{u}{20} \rightarrow u = 20 \times 0,24 = 4,8 \text{ mm} \quad (7.4)$$

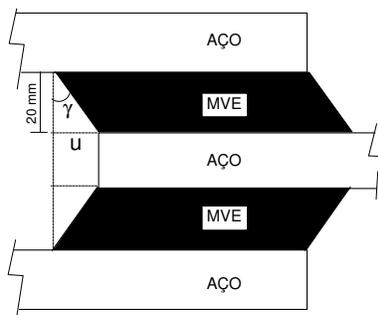


Figura 7.16: Relação entre o Alongamento Longitudinal u e a Distorção Angular γ

O valor de u na equação (7.4) é o encurtamento/alongamento estático máximo do amortecedor viscoelástico composto pelo MVE M1 adotado e sujeito a uma carga P máxima de 125 N, desprezando o alongamento/encurtamento do aço. Caso este valor seja excessivo, dever-se-á se adotar uma espessura mais fina para as camadas viscoelásticas; ou aumentar o comprimento C_o do amortecedor (ver figura 7.15); ou adotar um MVE mais rígido.

7.3.3 Dimensionamento Final

O dimensionamento final do amortecedor viscoelástico deverá ainda ponderar outros fatores que não foram aqui abordados. Tais fatores são relativos a:

- Massa da estrutura na qual serão instalados os amortecedores.

Dependendo da massa da estrutura, o comprimento C_o (ver figura 7.11) poderá aumentar pois será preciso maior quantidade de MVE para dissipar a energia de vibração proveniente das forças inerciais da estrutura.

- Relação entre freqüências naturais da estrutura e dos amortecedores.

Os sistemas de controle passivos precisam de uma boa calibração entre a freqüência da estrutura e a freqüência do amortecedor. Alguns autores [2]

e [45] propõe uma razão entre a frequência do amortecedor e a frequência da estrutura que se deseja controlar aproximadamente igual 0,9. O amortecedor adotado admite esta relação de frequências com a estrutura como será mostrado na próxima seção. Como a espessura das camadas viscoelásticas também influencia na rigidez e, obviamente, na frequência natural do amortecedor, esta última também deverá ser considerada nesta calibração de frequências.

- Verificação das frequências naturais da estrutura com os amortecedores instalados.

A introdução de amortecedores altera a massa e a rigidez da estrutura, podendo aumentar ou reduzir suas frequências naturais, alterando a faixa de frequência de trabalho usada na fase de projeto.

7.3.4 Respostas Dinâmicas

A figura 7.17 apresenta as respostas dinâmicas no domínio do tempo associadas aos alongamentos longitudinais de três amortecedores viscoelásticos cujas camadas sanduíches são constituídas de MVE M1, MVE M2 e MVE M3, respectivamente, visando simular o comportamento dos amortecedores viscoelásticos adotados para as estruturas das 7.9 e 7.10 As dimensões destes amortecedores são mostradas na figura 7.15 e a carga P longitudinal atuante foi $P = 125$ N aplicada subitamente (ver figura 7.11).

A figura 7.17 mostra que o amortecedor sanduíche associado ao MVE M1 amorteceu a resposta dinâmica com maior eficiência. Em todos os casos, os deslocamentos dinâmicos tendem a cessar, convergindo para a resposta estática determinada na equação (7.4).

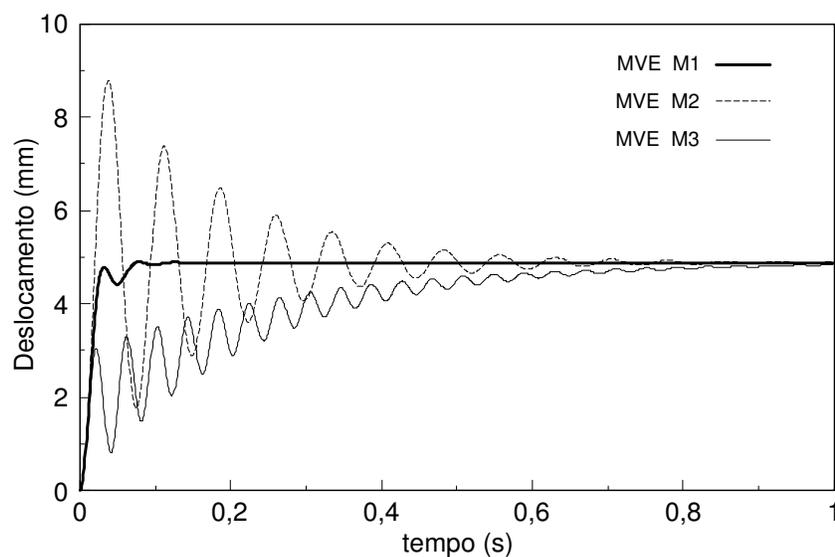


Figura 7.17: Alongamentos Longitudinais dos Amortecedores Viscoelásticos

A figura 7.18 apresenta os ciclos de histerese obtidos para os três amortecedores anteriormente descritos, para uma carga $P = 12,5 \sin(\omega t)$ (unidade de força em kN), sendo para $\omega = 142$ rad/s. A frequência de excitação aplicada nos amortecedores coincide com a frequência natural do amortecedor associado ao MVE M1, pois esta elipse de histerese tem os eixos principais coincidentes com os eixos cartesianos, o que não acontece com as outras elipses. Para $\omega = 142$ rad/s tem-se a relação de frequência de 0,9, ou seja, frequência do amortecedor igual a 90 % da frequência da estrutura, conforme sugere a literatura.

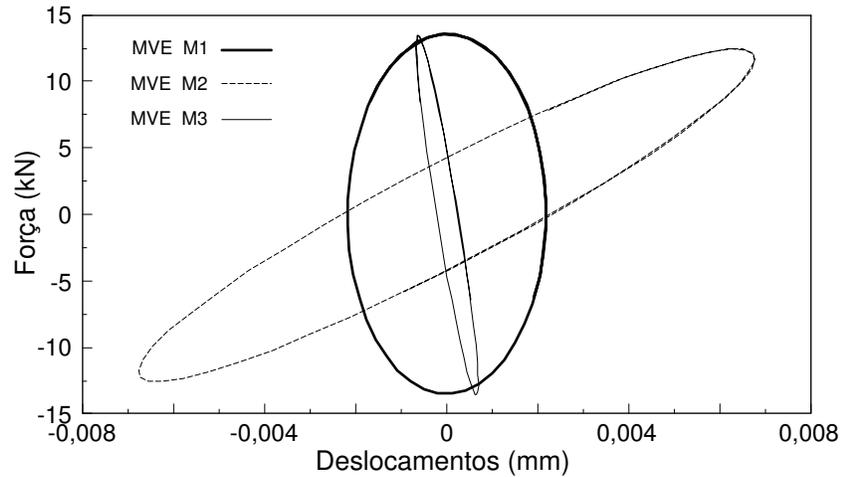


Figura 7.18: Ciclos de Histerese dos Amortecedores Viscoelásticos

Capítulo 8

Conclusões

Todas as conclusões relativas ao exemplo da viga sanduíche são muito importantes pois este exemplo põe frente a frente resultados teóricos, numéricos e experimentais. Ressalta-se a importância de comparar tais resultados, principalmente quando se objetiva validar um tipo de modelagem, como é o caso do GHM.

Este exemplo mostrou que a modelagem de MVEs via GHM fornece frequências naturais em conformidade com os valores teóricos estabelecidos pela equação de Ross-Kerwin-Ungar [25] (equação (6.2)), indicando que o GHM é um método preciso para se simular computacionalmente problemas dinâmicos que envolvem MVEs.

A boa concordância entre as respostas dinâmicas obtidas numericamente com as respectivas respostas experimentais no exemplo da viga sanduíche é outro indicativo de que a modelagem dinâmica de MVE via GHM é eficiente e fornece bons resultados.

Obviamente, a precisão do GHM está diretamente ligada com uma boa representação do módulo de elasticidade e do fator de perda do MVE em questão, isto é, deve-se ter um conjunto de parâmetros ε , α , β e δ associados a funções $E'(\varepsilon, \alpha, \beta, \delta, \omega)$ (equação (4.3)) e $\eta(\varepsilon, \alpha, \beta, \delta, \omega)$ (equação (4.4)) bem ajustadas às curvas experimentais.

A influência do ajuste de parâmetros ε , α , β e δ pôde ser observada no exemplo da viga sanduíche. A medida que se melhorou o ajuste, as respostas numéricas se aproximaram das respostas experimentais.

O exemplo da placa sanduíche esbarra em problemas de ordem computacional. Como o `ghm3d.for` (programa usado nas análises deste exemplo) é dotado apenas de elementos hexaédricos lineares de 8 nós, a modelagem da parte elástica da estrutura fica comprometida, pois este tipo de elemento não admite deslocamentos de pontos internos e, conseqüentemente, não permite flexão no âmbito do elemento, tornando-o muito rígido e exigindo um grande refinamento da malha para se obterem resultados satisfatórios. Este problema pode ser reduzido incrementando-se a qualidade dos elementos, por exemplo, utilizando-se elementos hexaédricos com funções quadráticas

de interpolação.

Além dos problemas relativos à qualidade do elemento finito usado nas análises tridimensionais, ainda existem aqueles relacionados com o mal condicionamento das matrizes do problema devido a pequena espessura dos elementos se comparada com as demais direções.

Outro fator que contribui para o mal condicionamento das matrizes relativas à modelagem via GHM de estruturas sanduíche é a grande diferença entre os módulos de elasticidade dos materiais envolvidos no problema, que, dependendo dos materiais que constituem o sanduíche, pode ultrapassar 5000%. Neste caso, a melhor estratégia para se contornar este problema é a utilização de pré-condicionadores no tratamento das matrizes mal condicionadas.

O exemplo da placa sanduíche deixa claro que análise dinâmica via GHM de um modelo tridimensional mais refinado necessita de computação de alto desempenho, com paralelização e/ou vetorização do código, visto que os GLs dissipadores que são acrescentados ao problema aumentam substancialmente o esforço computacional.

Pode-se dizer que o presente trabalho alcançou seus objetivos principais, dotando o PEC da COPPE/UFRJ de um modelo matemático/numérico implementado num programa estruturado de elementos finitos, que viabiliza a análise dinâmica de estruturas com MVE.

As sugestões para futuros trabalhos são várias visto que, dentro da linha de pesquisa sobre modelagem dinâmica computacional de MVE do PEC da COPPE/UFRJ, este é o primeiro trabalho, o que faz com que muitas lacunas acerca deste assunto ainda estejam por ser preenchidas.

Desta forma, as sugestões para futuros trabalhos são separadas em três grupos:

1. Melhorias Computacionais das Implementações do GHM

No capítulo 5 foram apresentadas várias possíveis melhorias para os códigos implementados, que também podem ser encaradas como sugestões para futuros trabalhos. São elas:

- Expansão da biblioteca de elementos;
- Utilização de elementos isoparamétricos de alta ordem para uma melhor modelagem de problemas com contornos irregulares;
- Implementação de uma rotina de pré-processamento para otimizar a numeração nodal;
- Utilização da técnica elemento por elemento [40] na qual as matrizes globais do sistema não são montadas, o que aumenta a capacidade do programa de resolver problemas com elevado número de GLs e

- Paralelização e vetorização do procedimento também visando aumentar a capacidade de processamento.
 - Utilização de métodos iterativos (Newton-Raphson) para reduzir o desequilíbrio de forças internas/externas, visando melhorar a qualidade dos resultados, principalmente na que diz respeito à determinação do estado de tensões dos MVE.
 - Implementação de um pré-condicionador para atenuar os problemas de mal condicionamento matricial
2. Análise de novas formulações no domínio do tempo para modelagem dinâmica de MVE
- Modelagem de materiais compósitos associados com MVE na elaboração de estruturas com alto grau de amortecimento. Os trabalhos de Quian *et al* [12] e Yi *et alli* [13] são exemplos deste tipo de modelagem.
 - Estudo da equação diferencial da viga sanduíche apresentada no Apêndice A no intuito de se desenvolver um elemento finito capaz de englobar as características elásticas e viscoelásticas dos materiais que a constituem, sem a necessidade de se discretizá-los separadamente.
 - Modelagem de MVEs via GHM utilizando para a função de dissipação a representação Biot (tabela 2.1) aproximada por uma série com mais de dois termos, ou uma das outras funções contidas na tabela 2.1.
3. Aplicação dos programas desenvolvidos a outros tipos de estruturas
- Análises de estruturas aeroespaciais amortecidas com MVE.
O uso de MVE como amortecedores estruturais em satélites, por exemplo, é bastante conveniente, visto que fora da atmosfera terrestre a dissipação de energia de vibração através do meio é nula.
 - Análise de bases viscoelásticas funcionando como isoladores de vibração.
O uso de isoladores de vibração em estruturas sujeitas a abalos sísmicos é crescente, e os MVE podem ser usados com esta finalidade (ver foto da figura 1.4).
Outra utilização de MVE como isoladores ocorre em estruturas mecânicas conectadas a motores. A excitação dinâmica harmônica e contínua resultante da rotação do eixo pode provocar vibrações excessivas tanto na estrutura de sustentação do motor, quanto no conjunto de peças que nele estejam acopladas.

O caráter amortecedor dos MVE, quando utilizados de forma conveniente, foi verificado ao longo de todo o trabalho, o que incentiva a continuidade dos estudos sobre estruturas amortecidas por camadas de materiais viscoelásticos.

Referências Bibliográficas

- [1] **Barbosa, F. S.;**
“Controle Ativo Modal de Vibrações Estruturais”;
Tese de Mestrado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.
- [2] **Battista, R. C.;**
“Redução e Controle de Vibrações Estruturais”;
Notas de Aula do Curso, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.
- [3] **Pinheiro, M. A. S.;**
“Absorsor Pendular Não-Linear para Redução de Vibrações em Torres Es-
beltas”;
Tese de Mestrado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.
- [4] **Faisca, R. G.;**
“Caracterização de Materiais Viscoelásticos como Amortecedores Estruturais”;
Tese de Mestrado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.
- [5] **Oberst, H. end Frankenfeld, K.;**
“Uber die Dampfung der Biegeschwingungen dunner Bleche durch festhaftende
Belage”;
Acustica, vol. 2, pp. 181-194, 1952.
- [6] **Kervin Jr., E. M.;**
“Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer”;
Journal of the Acoustical Society of America, vol. 31, n. 7, pp. 952-962, 1959.
- [7] **Ross, D; Ungar, E. E. and Kervin Jr., E. M.;**
“Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminate”;
Structural Damping, ASME, pp. 49-88, New York, USA, 1959.
- [8] **DiTaranto, R, A.;**
“Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite
Lenght Beams”;
Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, vol. 87, pp. 881-886,
1965.

- [9] **Mead, D., J. and Markus, S.;**
 “The Forced Vibration of Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions”;
 Journal of Sound and Vibrations, vol.10, n. 2, pp. 163-175, 1969.
- [10] **Golla, D. F. and Huges, P. C.;**
 “Dynamics of Viscoelastic Structures - A Time-Domain, Finite Element Formulation”;
 Journal of Applied Mechanics, vol. 52, pp. 897-906, 1985.
- [11] **Gibson, W. C., and MacTavish, D. J.;**
 “Implementation of the GHM Method for Viscoelastic Materials Using MATLAB and NASTRAN”;
 Procedures of SPIE, vol. 2445, pp 312-323, 1995.
- [12] **Qian, C. and Demao Z.;**
 “Vibrational Analysis Theory and Application to Elastic-Viscoelastic Composite Structure”;
 Computer & Structures, vol. 37, n. 4, pp 585-595, 1990.
- [13] **Yi, S., Shih, F. L. and Ying, M.;**
 “Finite Element Analysis of Composite Structures with Smart Constrained Layer Damping”;
 Advances in Engineering Software, vol. 29, n. 3-6, pp 265-271, 1998.
- [14] **3M Company, Vibration Control Industrial Tape and Specialties Division;**
 “Viscoelastic Dampers for Seismic and Wind Applications ”;
 Brochure published in 1995.
- [15] **Mahmoodi, P.;**
 “Structural Dampers”;
 ASCE - Journal of Structural Division vol. 95, n. ST8, pp 1661-1672, August, 1969.
- [16] **Battista, R. C. e Roitman, N.;**
 “Análise Dinâmica Estrutural do Estádio do Maracanã”;
 Relatório Técnico COPPETEC ET, COPPE/ UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.
- [17] **Sun, C. T. and Lu, Y. P.;**
 “Vibration Damping of Structural Elements”;
 Prentice Hall PTR, New Jersey, USA, 1995.
- [18] **Blevins, R. D.;**
 “Flow Induced Vibrations”;
 Van Nostrand Reinhold Company, USA, 1977

- [19] **Harris, M. C. and Crede, C. E.;**
“Handbook of Shock and Vibration”;
McGraw-Hill Book Company, USA, 1976
- [20] **Louroza, M. A.;**
“Utilização de Sistema Passivo com Amortecimento de Coulomb para a Redução de Vibrações Estruturais”;
Tese de Mestrado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.
- [21] **Battista, R. C.;**
“Dinâmica de Estruturas”;
Notas de Aula do Curso, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.
- [22] **Clough, R. W and Penzien, J.;**
“Dynamics of Structures”;
Second Edition, McGraw-Hill International Editions, 1993.
- [23] **Kaliske, M. and Rothert, H.;**
“Formulation an Implementation of Three-Dimensional Viscoelasticity at Small and Finite Strains”;
Computational Mechanics, vol. 19, pp 228-239, 1997.
- [24] **Timoshenko, S. P. and Gere, J. E.;**
“Mecânica dos Sólidos”;
Livros Técnicos e Científicos Editora, 1989.
- [25] **Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P.;**
“Vibration Damping”;
A Wiley-Interscience Publication - John Wiley & Sons, USA, 1985.
- [26] **American Society for Testing Materials - ASTM;**
“Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials”;
New York, USA, Desig. E756, pp. 779-785, 1993.
- [27] **Drake, M. L.;**
“Material Property Measurements, Data Reduction, Data Presentation”;
University of Dayton. Note of the Short Course in Vibration Damping, 1988.
- [28] **Brigham, E. O.;**
“The Fast Fourier Transform ”;
Prentice-Hall, Inc., USA, 1974.
- [29] **Bathe, K-J.;**
“Finite Element Procedures in Engineering Analysis”;
Prentice-Hall, Inc., USA, 1982.

- [30] **Zienkiewicz, O. C.**;
“The Finite Element Method”;
4th edition vol 1. McGraw-Hill.
- [31] **Carnahan, B.; Luther, H.A. and Wilkes, J.O.**;
“Applied Numerical Methods”;
John Willey & Sons, New York, 1969.
- [32] **Dieguez, J. P. P.**;
“Métodos Numéricos Computacionais para a Engenharia”;
Âmbito Cultural Edições Ltda, , volumes I e II, 1994.
- [33] **Barbosa, F. S.**;
“Utilização de Materiais Viscoelásticos como Amortecedores de Vibrações Estruturais”
Seminário de Qualificação ao Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro 1998.
- [34] **Lemonge, A. C. C.**;
“Aplicação de Algoritmos Genéticos em Otimização Estrutural”;
Tese de Doutorado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1999.
- [35] **Neves, F. A.**;
“Programação Multi-Objetivos Aplicadas à Otimização do Projeto de Pontes Estaiadas”;
Tese de Doutorado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.
- [36] **Castro, R. C.**;
“Otimização”
Monografia para Qualificação ao Ingresso no Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1999
- [37] **Wilson, E. L.**;
“CAL - 86 Computer Assisted Learning of Structural Analysis and the CAL/SAP Development System”
Report NO. UCB/SESM-86/05, Department of Civil Engineering, University of California, August 1986, USA.
- [38] **Battista, R. C.**;
“Análise Estrutural I”
Notas de Aula do Curso, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.
- [39] **Crisfield, M. A.**;
“Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures”
J. Wiley, vol. 1, 1991

- [40] **Ferencz, M. R.;**
“Element-by-Element Preconditioning Techniques for Large-Scale, Vectorized Finite Element Analysis in Nonlinear Solid and Structural Mechanics”
Ph.D. Thesis, Division of Applied Mechanics Stanford.
- [41] **Computers and Structures Inc;**
“Analysis Reference”
Manual do Programa SAP2000, vol. 1, Versão 6.0, 1996.
- [42] **Garcia, L. F. T. e Villaça, S. F.;**
“Placas e Cascas” Notas de Aula do Curso, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.
- [43] **Leite, L. F. M.;**
“Estudos Reológicos de Cimentos Asfálticos”;
Tese de Mestrado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.
- [44] **Battista, R. C.;**
“Relatórios Técnicos sobre a Ponte Rio-Niterói - COPPETEC ET-150747, ET-150771 e ET 150825”;
Rio de Janeiro, COPPE - UFRJ, 1997 a 2000.
- [45] **Meirovitch, L.;**
“Dynamics and Control of Structures”,
Jonh Wiley & Sons, 1990, USA

Apêndice A

Modelo Analítico de Viga Sanduíche

A.1 Introdução

Um tipo de estrutura que utiliza material viscoelástico como amortecedor estrutural são as vigas sanduíches. Dentre essas vigas, as mais comuns são constituídas de uma única camada de material viscoelástico entre duas camadas de material elástico, denominadas camadas de restrição, conforme ilustra figura (A.1). Vigas com mais camadas de material viscoelástico também são consideradas vigas sanduíche.

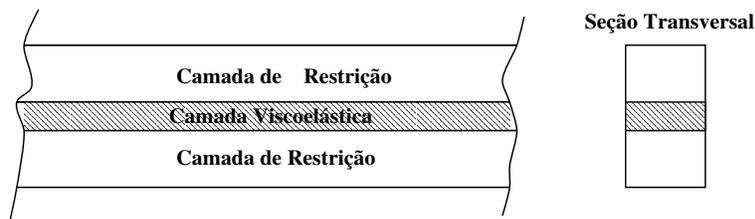


Figura A.1: Exemplo de Viga Sanduíche

Uma viga sanduíche desenvolve maiores amortecimentos na flexão que uma viga de dimensões idênticas constituída apenas do material elástico da camada de restrição. Isso se deve a sua maior dissipação de energia de deformações no núcleo devido ao cortante.

Os maiores esforços cortantes para uma viga submetida a flexão estão em seu núcleo ¹ que, para uma viga sanduíche, é constituído de material viscoelástico. Se o núcleo fosse muito flexível, haveria grandes deformações devido ao cortante para

¹Partindo-se das hipóteses adotadas na Resistência dos Materiais, chega-se a uma distribuição parabólica do cortante, com valores nulos nas extremidades e máximo no centro, para uma seção retangular

pequenas tensões cisalhantes e, conseqüentemente, pouca dissipação de energia. Se o núcleo fosse muito rígido, haveria pequenas deformações devido ao cortante e, mais uma vez, ter-se-ia pouca dissipação de energia. Para um núcleo com características intermediárias, como é o caso de material viscoelástico, haverá deformações moderadas com o surgimento de tensões também moderadas, levando a dissipação de energia através do cortante a um valor máximo.

A.2 Formulação Matemática

A.2.1 Equação Diferencial dos Deslocamentos Transversais

Essa equação foi desenvolvida por Di Taranto [8] e Mead *et al* [9] e essa seção é baseada nesses dois trabalhos.

Considere uma viga sanduíche de largura unitária. As camadas de restrição têm espessura h_1 e h_3 e o núcleo tem espessura h_2 (figura A.2(a)). As camadas de restrição são puramente elásticas, com módulos de elasticidade longitudinal E_1 e E_2 . O núcleo é constituído de material viscoelástico de módulo de elasticidade transversal $G^* = G'(1 + i\eta) = G' + iG''$

A tensão de cisalhamento no núcleo pode ser escrita como (equação (2.43)):

$$\tau = G^* \gamma \tag{A.1}$$

mas

$$\gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{A.2}$$

e da geometria do problema mostrada na figura (A.2(b)) pode-se mostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{h_1 + h_3}{2h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \tag{A.3}$$

logo, substituindo as equações (A.2) e (A.3) na equação (A.1), chega-se a:

$$\tau = G^* \left(\frac{d}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right) \tag{A.4}$$

onde $d = h_2 + (h_1 + h_3)/2$; w é o deslocamento transversal; x representa as coordenadas longitudinais da viga; u_1 e u_2 são, respectivamente o deslocamento longitu-

dinal do eixo das camadas de restrição e u , sem índice, representa o deslocamento longitudinal de um ponto qualquer no núcleo.

A força cortante total, S , consiste em três componentes conforme ilustra figura (A.2(c)):

- A força cortante, S_1 , associada com a rigidez a flexão, D_1 , da lamina superior:

$$S_1 = D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (\text{A.5})$$

onde $D_1 = E_1 h_1^3 / 12$;

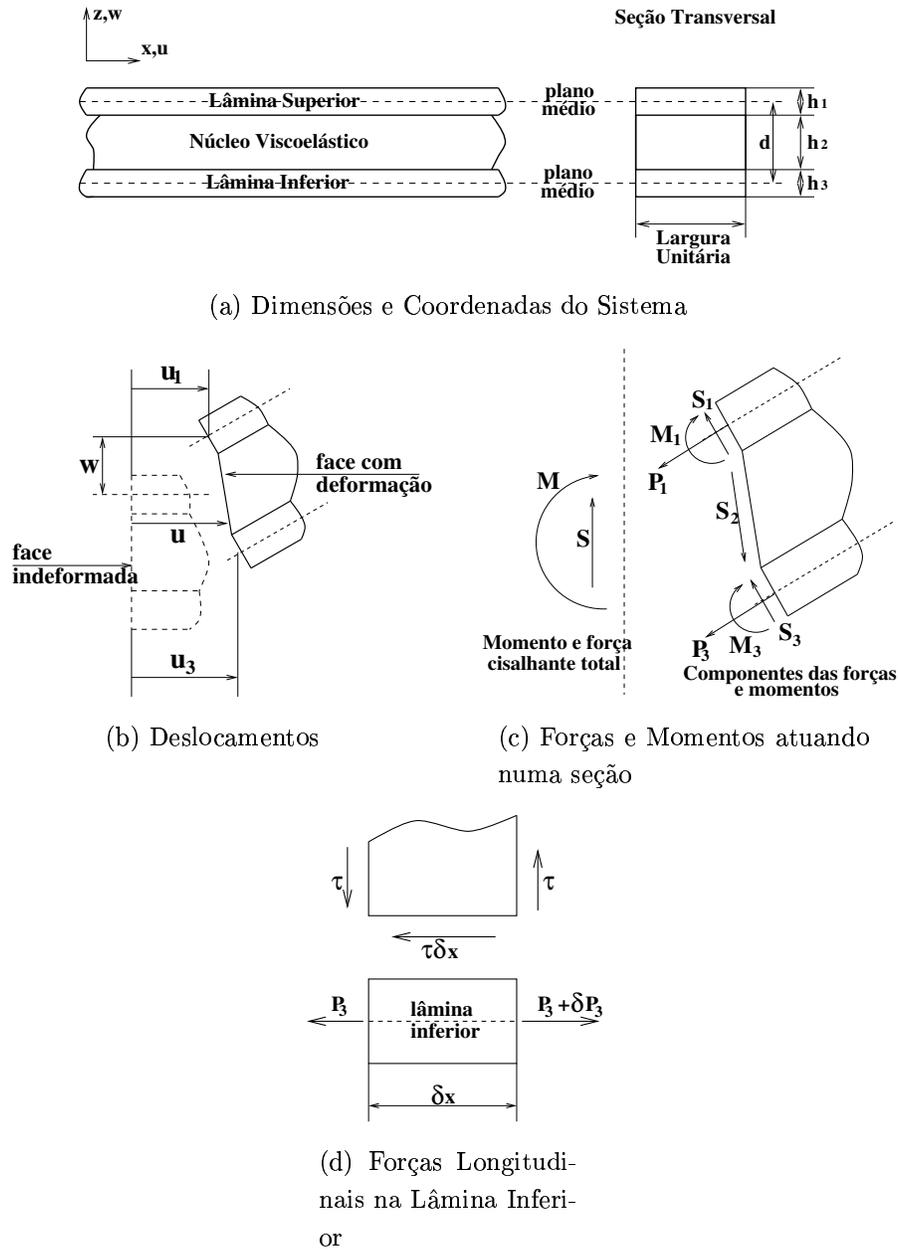


Figura A.2: Características das Forças e da Geometria Envolvidas no Problema

- A força cortante, S_3 , associada com a rigidez a flexão, D_3 , da lamina inferior:

$$S_3 = D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (\text{A.6})$$

onde $D_3 = E_3 h_3^3 / 12$;

- A força cortante, S_2 , associada com a tensão de cisalhamento τ do núcleo. Admitindo que o núcleo está submetido a uma tensão de cisalhamento constante, e que a tensão cisalhante nas laminas varia linearmente a partir de zero, pode-se considerar então uma tensão cisalhante constante entre os eixos das lâminas. Isso equivale a:

$$S_2 = -\tau d \quad (\text{A.7})$$

onde o sinal de menos é incluído já que a força cortante é oposta a direção positiva.

Então, o esforço cortante total S , é dado por:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = (D_1 + D_2) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - G^* d \left(\frac{d}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right) \quad (\text{A.8})$$

O carregamento transversal p que atua na viga se relaciona com o esforço cortante S por: $p = \partial S / \partial x$. Logo, derivando a equação (A.8), chamando $D_1 + D_2 = D_t$ e reorganizando, obtém-se:

$$p = D_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{G^* d^2}{h_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{G^* d}{h_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \quad (\text{A.9})$$

Chamando de P_1 e P_3 as forças longitudinais totais em cada lâmina respectivamente, pode-se expressá-las em função dos deslocamentos u_1 e u_2 :

$$P_1 = E_1 h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad P_3 = E_3 h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \quad (\text{A.10})$$

e por equilíbrio das forças longitudinais, tem-se $P_1 = -P_3$, ou:

$$E_1 h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -E_3 h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

Considerando a natureza física do problema e seus deslocamentos, pode-se também escrever que

$$E_1 h_1 u_1 = E_3 h_3 u_3 \quad (\text{A.12})$$

e a equação (A.9) pode então ser reescrita como:

$$D_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{G^* d^2}{h_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{G^* d}{h_2} \left(\frac{E_1 h_1 + E_3 h_3}{E_1 h_1} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x} = p \quad (\text{A.13})$$

Para as equações que seguem é conveniente introduzir os parâmetros:

$$g = \frac{G^*}{h_2} \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right) \quad (\text{A.14})$$

e

$$Y = \frac{d^2}{D_t} \left(\frac{E_1 h_1 E_3 h_3}{E_1 h_1 + E_3 h_3} \right) \quad (\text{A.15})$$

que usados na equação (A.13), depois de rearranjada, fornece:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - gY \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g \frac{E_3 h_3 d}{D_t} \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{p}{D_t} \quad (\text{A.16})$$

Agora, considerando o equilíbrio na direção longitudinal, ao longo do comprimento de um elemento δx (ver figura (A.2(d))), tem-se:

$$\delta P_3 = -\tau \delta x \Rightarrow \frac{\partial P_3}{\partial x} = -\tau \quad (\text{A.17})$$

Substituindo o valor de P_3 (equação (A.10)) na equação (A.17), chega-se a:

$$\tau = -\frac{\partial P_3}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(E_3 H_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \quad (\text{A.18})$$

e introduzindo o valor de τ (equação (A.4)) e utilizando a equação (A.12) para eliminar u_1 , após rearranjos, a equação (A.18) fica:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - g u_3 = -gY \frac{D_t}{E_3 h_3 d} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.19})$$

As equações (A.16) e (A.19) constituem o par mais simples de equações diferenciais que relacionam os deslocamentos w e u_3 com a carga aplicada p . Ao eliminar u_3 deste par, uma única equação diferencial de sexta ordem, em função de w é obtida:

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1 + Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{D_t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - gp \right) \quad (\text{A.20})$$

A.2.2 Soluções Especiais para Carregamento Harmônico

O deslocamento transversal de uma barra sob a ação de uma carga externa dependente do tempo $q(x, t)$, incluindo forças de inércia, é tal que:

$$p = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x, t) \quad (\text{A.21})$$

onde m é a massa por unidade de comprimento considerando as três camadas da seção transversal da viga.

Substituindo a equação (A.21) na equação (A.20), tem-se a equação diferencial para vibrações forçadas da viga:

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1 + Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{m}{D_t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{D_t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - gp \right) \quad (\text{A.22})$$

A equação (A.22) não considera efeitos de inércia à rotação.

Para um carregamento harmônico

$$q = Q(x) e^{i\omega t} \quad (\text{A.23})$$

w pode ser expresso na forma:

$$w = W(x, \omega) e^{i\omega t} \quad (\text{A.24})$$

Em geral $W = W(x, \omega)$. Entretanto, admitindo-se um conjunto de distribuições de carga $Q_n(x)$ que excitam somente um modo particular $W_n(x)$ que não variam com a frequência pode-se escrever w na forma:

$$w = W_n(x) T_n(\omega, t) \quad (\text{A.25})$$

onde a dependência do tempo e da frequência está contida em T_n . Nesse caso é como se a viga se comportasse como um sistema de um grau de liberdade para cada modo $i = 1, \dots, n$. Os modos $W_n(x)$ serão chamados de modos normais amortecidos da viga e as componentes $Q_n(x)$ de carregamento normal amortecido.

É conveniente selecionar os carregamentos normais amortecidos proporcionais a $mW_n(x)$. Em particular:

$$q_n = Q_n(x)e^{i\omega t} = PmW_n(x)e^{i\omega t} \quad (\text{A.26})$$

onde P é um coeficiente a determinar.

Os valores de w e q_n das equações (A.25) e (A.26), respectivamente, satisfazem simultaneamente a equação (A.22). Chamando as derivadas de W_n com relação ao tempo de $W'_n, W''_n, \dots, W_n^{vi}$ e a segunda derivada de T_n com relação ao tempo de \ddot{T}_n , pode-se obter da equação (A.22):

$$\ddot{T}_n \frac{m}{D_t} (W_n'' - gW_n) + T_n [W_n^{vi} - g(1+Y)W_n^{iv}] = P \frac{m}{D_t} (W_n'' - gW_n) e^{i\omega t} \quad (\text{A.27})$$

ou

$$\ddot{T}_n + T_n \left[\frac{W_n^{vi} - g(1+Y)W_n^{iv}}{(m/D_t)(W_n'' - gW_n)} \right] = P e^{i\omega t} \quad (\text{A.28})$$

Como T_n é uma função de ω e de t e não de x , o coeficiente de T_n na equação (A.28) é uma constante complexa $a + ib$, independente de x e essa equação pode ser reescrita como:

$$\ddot{T}_n + (a + ib)T_n = P e^{i\omega t} \quad (\text{A.29})$$

A amplitude de T_n agora varia com ω , ou seja, é a resposta em frequência de um sistema de um sistema massa-mola-amortecedor análogo. A amplitude máxima desse sistema ocorre na frequência de ressonância $\omega_n = a^{1/2}$. A intensidade e a forma da correspondente curva de resposta em frequência equivale a um sistema com fator de perda $\eta_n = b/a$. Dessa forma, pode-se substituir $a + ib$ por $\omega_n^2(1 + i\eta_n)$ e a equação (A.29) pode ser escrita numa notação mais familiar como:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2(1 + i\eta_n)T_n = P e^{i\omega t} \quad (\text{A.30})$$

Para se obter esses modos normais amortecidos, igualam-se as expressões dos coeficientes de T_n das equações (A.28) e (A.30), o que resulta:

$$W_n^{vi} - g(1+Y)W_n^{iv} - \omega_n^2(1 + i\eta_n) \left(\frac{m}{D_t} \right) (W_n'' - gW) = 0 \quad (\text{A.31})$$

Pode ser mostrado que os termos envolvendo $i\omega_n^2\eta_n$, na equação (A.31), estão associados com o carregamento normal externo. Para tal, basta substituir

$$q = \underbrace{i\omega_n^2\eta_n}_P mW_n e^{i\omega_n t} \quad (\text{A.32})$$

e

$$w = W_n(x)e^{i\omega_n t} \quad (\text{A.33})$$

na equação (A.22) e a equação (A.31) é obtida com os termos $i\omega_n^2\eta_n$ vindo inteiramente de q .

A equação diferencial homogênea (equação (A.31)), juntamente com as Condições de Contorno (CC) da viga sanduíche, só pode ser satisfeita por um conjunto particular de funções W_n em valores particulares de ω_n e η_n . Como a equação (A.31) é de sexta ordem, as funções W_n podem ser expressas na forma:

$$W_n = \sum_{s=1}^6 A_{ns} e^{\lambda_{ns} x} \quad (\text{A.34})$$

Os valores λ_{ns} são as raízes complexas da equação característica:

$$\lambda_n^6 - g(1+Y)\lambda_n^4 - \omega_n^2(1+i\eta_n)\left(\frac{m}{D_t}\right)[\lambda_n^2 - g] = 0 \quad (\text{A.35})$$

Para se determinar o conjunto de coeficientes A_n para uma viga e modo particulares e os correspondentes valores de frequências de ressonância ω_n e respectivos η_n , a equação (A.34) deverá satisfazer seis CC homogêneas.

Os coeficientes A_n são em geral complexos, conseqüentemente, os modos normais amortecidos W_n são também complexos.

A próxima seção discute as CC para W .

A.2.3 Condições de Contorno Possíveis para W

Para cada caso particular de viga sanduíche, deverão ser extraídas seis CC.

Antes de se escreverem algumas possíveis CC, é preciso ter expressões das forças longitudinais P_1 e P_3 , do momento fletor M e do esforço cortante S em termos de W e p apenas.

As equações (A.9), (A.10) e (A.11) podem ser convenientemente manipuladas para se mostrar que:

$$P_1 = -P_3 = \frac{D_t}{gd} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - gY \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{p}{D_t} \right) \quad (\text{A.36})$$

O momento fletor total M atuante na seção pode ser dividido em três partes, analogamente ao esforço cortante:

- Momento fletor M_1 associado com a rigidez a flexão D_1 da camada superior:

$$M_1 = D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.37})$$

- Momento fletor M_3 associado com a rigidez a flexão D_3 da camada superior:

$$M_3 = D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.38})$$

- Momento fletor M_2 associado com o binário P_1 e P_2 , que atua ao longo no plano médio das camadas externas, isto é:

$$M = +P_3 d = -\frac{D_t}{g} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - gY \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{p}{D_t} \right) \quad (\text{A.39})$$

Então

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \frac{D_t}{g} \left(-\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + g(1+Y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{p}{D_t} \right) \quad (\text{A.40})$$

e como $S = \frac{\partial M}{\partial x}$ tem-se também:

$$S = \frac{D_t}{g} \left(-\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + g(1+Y) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{D_t} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (\text{A.41})$$

Quando a viga está vibrando em um modo normal amortecido, p , que foi expresso na equação (A.21), deve ser substituído por $m\omega^2(1+i\eta_n)W_n$ após se observar os valores de w (equação (A.33)) e q (equação (A.32)), bem como w deve ser substituído por W_n pois o carregamento q excita somente um modo W_n .

Seguem as possíveis CC para os modos de uma viga sanduíche.

- Deslocamento transversal impedido na extremidade

$$[W_n]_{end} = 0 \quad (\text{A.42})$$

- Rotação impedida na extremidade

$$\left[\frac{\partial W_n}{\partial x} \right]_{end} = 0 \quad (\text{A.43})$$

- Momento fletor, $M = 0$ na extremidade. A equação (A.40) fornece:

$$\left[W_n^{iv} - g(1 + Y)W_n'' - \frac{m\omega_n^2}{D_t}(1 + i\eta_n)W_n \right]_{end} = 0 \quad (\text{A.44})$$

- Esforço cortante, $S = 0$ na extremidade. A equação (A.41) fornece:

$$\left[W_n^v - g(1 + Y)W_n''' - \frac{m\omega_n^2}{D_t}(1 + i\eta_n)W_n' \right]_{end} = 0 \quad (\text{A.45})$$

- Deslocamentos u_1 e u_3 sem restrição na extremidade, isto é, $P_1 = P_3 = 0$. A equação (A.36) fornece:

$$\left[W_n^{iv} - gYW_n'' - \frac{m\omega_n^2}{D_t}(1 + i\eta_n)W_n \right]_{end} = 0 \quad (\text{A.46})$$

- Deslocamentos u_1 e u_3 são restringidos ao longo de todo o sanduíche. Isso significa que a deformação cisalhante no núcleo é impedida e $S_2 = 0$. Então, da equação (A.8), tem-se:

$$S = D_t \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{end} \quad (\text{A.47})$$

mas S também é dado pela equação (A.41). Utilizando essas duas equações, chega-se a:

$$\left[W_n^v - gYW_n''' - \frac{m\omega_n^2}{D_t}(1 + i\eta_n)W_n' \right]_{end} = 0 \quad (\text{A.48})$$

Outras CC podem ser obtidas considerando-se deslocamentos prescritos diferentes de zero, apoios flexíveis, etc.

A.2.4 Ortogonalidade dos Modos Amortecidos

Se um par de modos W_n e W_m , satisfazem uma relação de ortogonalidade na forma

$$\int_0^l mW_nW_m dx = 0 \quad (n \neq m) \quad (\text{A.49})$$

então a solução geral para vibrações forçadas pode ser reduzida a uma forma bastante simplificada (ver próxima seção). Essa relação não pode ser provada somente através da equação (A.31) pois o problema não é auto-adjunto. Apesar disso, o fato do problema não ser auto-adjunto não exclui a possibilidade da ortogonalidade acima. Considerando-se, entretanto, o par de equações (A.16) e (A.19), que foram base na dedução da equação (A.31) e introduzindo $p = \omega_n^2(1+i\eta_n)mW_n$, esse par de equações resultam:

$$W_n^{iv} - gYW_n'' + gXu_n' = \omega_n^2 \frac{1+i\eta_n}{D_t} mW_n \quad (\text{A.50})$$

e

$$u_n'' - gu_n = -\frac{gY}{X} W_n' \quad (\text{A.51})$$

onde $X = E_3h_3d/D_t$ e u_n é o deslocamento longitudinal correspondente a função de deslocamento transversal W_n .

A equação (A.49) pode ser verificada multiplicando-se a equação (A.50) por W_m integrando ao longo do comprimento

$$\int_0^l W_m \left[W_n^{iv} - gYW_n'' + gXu_n' - \omega_n^2 \frac{1+i\eta_n}{D_t} mW_n \right] dx = 0 \quad (\text{A.52})$$

multiplicando-se o valor de W_m por W_n também integrando ao longo do comprimento

$$\int_0^l W_n \left[W_m^{iv} - gYW_m'' + gXu_m' - \omega_m^2 \frac{1+i\eta_m}{D_t} mW_m \right] dx = 0 \quad (\text{A.53})$$

e subtraindo-se as equações (A.52) e (A.53) membro a membro. Esta última operação, após desenvolvimentos, resulta:

$$\begin{aligned} & gY \left(\int_0^l W_n W_m'' dx - \int_0^l W_n'' W_m dx \right) + \\ & + gX \left(\int_0^l u_n' W_m - \int_0^l W_n u_m' dx \right) + \\ & + \frac{1}{D_t} \left(\omega_n^2 \int_0^l m W_n W_m dx - \omega_m^2 \int_0^l m W_n W_m dx \right) + \\ & + \frac{1}{D_t} \left(\omega_m^2 \eta_m \int_0^l im W_n W_m dx - \omega_n^2 \eta_n \int_0^l im W_n W_m dx \right) = 0 \quad (\text{A.54}) \end{aligned}$$

Para que a equação (A.54) seja satisfeita quaisquer que sejam W_n , W_m , u_n , e u_m , ou seus termos entre parênteses se anulam, ou cada uma das integrais se anula. Para

a primeira hipótese seria necessário que $m = n$, o que é falso. Conseqüentemente, cada integral da equação (A.54) deverá ser igual a zero. Com isso a verificação final da equação (A.49) fica trivial e ainda se pode escrever:

$$\int_0^l m \operatorname{Re}(W_n) \operatorname{Re}(W_m) dx = 0 \quad (\text{A.55})$$

$$\int_0^l m \operatorname{Im}(W_n) \operatorname{Im}(W_m) dx = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$\int_0^l m [\operatorname{Re}(W_n) \operatorname{Im}(W_m) + \operatorname{Im}(W_n) \operatorname{Re}(W_m)] dx = 0 \quad (\text{A.57})$$

ou

$$\int_0^l m (W_n W_m^* + / - W_n^* W_m) dx = 0 \quad (\text{A.58})$$

onde o asterisco designa o complexo conjugado.

Essas propriedades de ortogonalidade justificam a terminologia “modos normais amortecidos” e “carregamento normal amortecido”.

A.2.5 O Problema Geral de Vibrações Harmônicas Forçadas

Supondo-se agora que a viga sanduíche está sendo excitada por um carregamento harmônico genérico

$$q(x, t) = Q(x) e^{i\omega t} = [Q_r(x) + iQ_i(x)] e^{i\omega t} \quad (\text{A.59})$$

Escrevendo esse carregamento como uma série infinita de cargas normais amortecidas, isto é

$$Q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m W_m \quad (\text{A.60})$$

Multiplicando a equação (A.60) por W_n e integrando de $x = 0$ a $x = l$, em virtude da equação (A.49), pode-se chegar a:

$$k_n = \frac{\int_0^l Q(x) W_n dx}{\int_0^l W_n^2 dx} \quad (\text{A.61})$$

Escrevendo a solução geral do problema de vibração na forma

$$w = \sum_n^{\infty} B_n W_n e^{i\omega t} \quad (\text{A.62})$$

A equação (A.22), juntamente com as equações (A.59), (A.60) e (A.62) agora fornecem:

$$\sum_n^{\infty} B_n \left[W_n^{vi} - g(1+Y)W_n^{iv} - \frac{m}{D_t} \omega^2 (W_n'' - gW_n) \right] = \frac{1}{D_t} \sum_n^{\infty} k_n (W_n'' - gW_n) \quad (\text{A.63})$$

Em seção anterior deduziu-se que essa equação deverá ser satisfeita para cada modo separadamente, isto é

$$W_n^{vi} - g(1+Y)W_n^{iv} - \frac{m}{D_t} \omega^2 (W_n'' - gW_n) = \frac{1}{D_t} \frac{k_n}{B_n} (W_n'' - gW_n) \quad (\text{A.64})$$

onde as funções W_n são geradas a partir da equação (A.31). Combinando a equação (A.31) com (A.64), chega-se a:

$$B_n = \frac{k_n}{m[\omega_n^2(1+\eta_n) - \omega]} \quad (\text{A.65})$$

onde $k_n = k_{nr} + ik_{ni}$ é totalmente determinado através da equação (A.61).

Finalmente, da equação (A.62), a resposta dinâmica em qualquer ponto x ao longo da viga fica:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x) \int_0^l Q(x) W_n dx e^{i\omega t}}{m \int_0^l W_n^2 dx [\omega_n^2(1+\eta_n) - \omega^2]} \quad (\text{A.66})$$

A.3 Exemplo: Lâmina Engastada e Livre

A.3.1 Característica Gerais do Problema

O exemplo que segue é uma lâmina composta de duas camadas metálicas e uma camada de material viscoelástico, conforme descreve a figura (A.3).

Nesse exemplo os material constitutivo da viga sanduíche são:

- Camadas de Restrição: Aço - Material 1
- Material Viscoelástico: SJ2015X da 3M - Material 2

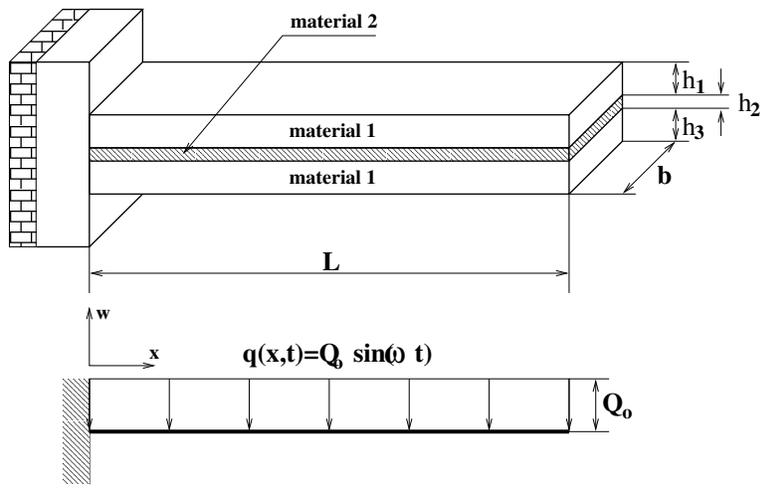


Figura A.3: Descrição do Exemplo

O material viscoelástico usado tem como valor característico para o módulo de elasticidade transversal $G^* = f(\omega) = G'(1 + i\eta) = G' + iG''$ a uma temperatura de $51\text{ }^\circ\text{C}$ [17]:

$$\begin{aligned} \ln G' &= 0,579 \ln \frac{\omega}{2\pi} + 0,783 \quad (G' \text{ em } N/cm^2) \\ \ln G'' &= 0,601 \ln \frac{\omega}{2\pi} + 0,788 \quad (G'' \text{ em } N/cm^2) \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Outras características do problema podem ser encontradas na tabela 4.1

tabela 4.1: Dados do Exemplo

Característica	Variável	Valor
Comprimento da viga	L	61,456 cm
Largura da Viga	$b_1 = b_3 = b$	2,54 cm
Alturas do Material 1	$h_1 = h_3 = h$	0,635 cm
Altura do Material 2	h_2	0,01 cm
Massa/unidade de Volume do Material 1	ρ_{aco}	$7,850 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$
Massa/unidade de Volume do Material 2	ρ_{visco}	$1,102 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$
Módulo de Elasticidade do Material 1	E_{aco}	$2,1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$

Deve ser observado que toda a formulação matemática descrita na seção 4.2 foi desenvolvida para uma viga de largura unitária. Portanto todos os termos que envolvem a area e a rigidez a flexão da viga, devem ser multiplicados por b

A.3.2 Resposta para Carregamento Senoidal

A força de excitação do sistema é

$$q(x, t) = Q_o \sin(\omega t) \quad (\text{A.68})$$

sendo $Q_o = 10 \text{ N}$, e $\omega = 2\pi f = 4,40 \text{ rad/s}$.

A fim de se obter a resposta do sistema, deve-se ter o carregamento na forma (ver equação(A.59)):

$$q(x, t) = Q(x)e^{i\omega t} = [Q_r(x) + iQ_i(x)] e^{i\omega t} \quad (\text{A.69})$$

Igualando as equações (A.69) e (A.59) pode-se chegar a:

$$q(x, t) = [Q_o \sin(\omega t) \cos(\omega t) - iQ_o \sin^2(\omega t)] e^{i\omega t} \quad (\text{A.70})$$

logo:

$$Q(x) = Q_o \sin(\omega t) \cos(\omega t) - iQ_o \sin^2(\omega t) \quad (\text{A.71})$$

Para se obter a resposta do sistema, faz-se também necessária a determinação dos modos normais amortecidos $W_n = \sum_{s=1}^6 A_{ns} e^{\lambda_{ns} x}$; $n = 1 \dots$ número de modos considerados (equação (A.34)) e seus respectivos valores de ω_n e η_n .

Para tanto, Sun *et al* [17] cita que Mead e Markus apresentam uma solução iterativa da equação característica (A.35) e das 6 equações resultantes das CC do problema (equações (A.42) a (A.48)).

O presente trabalho analisa o problema da seguinte forma:

De posse das 6 equações resultantes das 6 CC homogêneas para cada modo $W_n = \sum_{s=1}^6 A_{ns} e^{\lambda_{ns} x}$, é possível escrever esse sistema de equações na forma:

$$\mathcal{H}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\text{A.72})$$

onde \mathcal{H} é a matriz que contém os coeficientes das equações resultantes das CC que multiplicam A_{ns} ; $\mathbf{A} = \{A_{n1}, A_{n1}, \dots, A_{n6}\}^T$ e $\mathbf{0}$ é um vetor de elementos nulos.

A título de ilustração, faz-se uma expansão parcial da equação matricial (A.72) que resulta na equação (A.73). Nessa equação estão representadas duas CC: $[W_n]_{x=0} = 0$ (equação (A.42)) e $[\frac{\partial W_n}{\partial x}]_{x=0} = 0$ (equação (A.43)):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n1} & \lambda_{n1} & \lambda_{n1} & \lambda_{n1} & \lambda_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \\ A_{n4} \\ A_{n5} \\ A_{n6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

Devido a natureza física das equações de contorno, pode-se dizer que as mesmas são linearmente independentes, o que resulta numa matriz \mathcal{H} que pode ser invertida. Desta maneira, a única solução para o sistema matricial da equação (A.72) é a trivial:

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\text{A.74})$$

Obviamente essa solução não interessa pois $W_n \neq 0$

Para que o sistema linear da equação (A.72) admita soluções diferentes da trivial é preciso que o determinante da matriz \mathcal{H} seja igual a zero.

Para tal o presente trabalho propõe um procedimento iterativo para que se busque valores de ω_n e η_n que substituídos na equação característica (A.35) forneça valores de λ tais que substituídos em \mathcal{H} forneça $\det(\mathcal{H}) = 0$ e, conseqüentemente, soluções diferentes da trivial.

Esse procedimento bem como a discussão sobre a possibilidade de se determinar tais valores de ω_n e η_n seriam bastante específicos, fugindo dos objetivos desse trabalho. Tal assunto se encontra incluído na lista de propostas para trabalhos futuros ao final das conclusões deste apêndice.

O presente trabalho aproxima as frequências amortecidas ω_n pelas não amortecidas de uma viga engastada e livre:

$$\omega_1 \approx 1,875^2 \sqrt{\frac{E_{aco}I}{\mu L^4}} = 8,820 \text{ rad/s} \quad (\text{A.75})$$

$$\omega_2 \approx 4,694^2 \sqrt{\frac{E_{aco}I}{\mu L^4}} = 55,281 \text{ rad/s} \quad (\text{A.76})$$

$$\omega_3 \approx 7,855^2 \sqrt{\frac{E_{aco}I}{\mu L^4}} = 154,804 \text{ rad/s} \quad (\text{A.77})$$

$$(\text{A.78})$$

onde μ é a massa por unidade de comprimento da viga e $I = 2(bh^3/12)$

Os valores aproximados para $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, se levados a equação (A.67), fornecem as aproximações tomadas para η_n , lembrando que $\eta = G'/G''$:

$$\eta_1 = 1,013 \quad (\text{A.79})$$

$$\eta_2 = 1,054 \quad (\text{A.80})$$

$$\eta_3 = 1,078 \quad (\text{A.81})$$

Os valores aproximados de ω_n e η_n se levados à equação característica (A.35) fornecem os seguintes valores de λ_{ns} :

- Para o primeiro modo:

$$\lambda_{1,1} = +0,0328138 + i0,0066468$$

$$\lambda_{1,2} = -0,0328138 - i0,0066468$$

$$\lambda_{1,3} = +0,0035600 + i0,0014712$$

$$\lambda_{1,4} = -0,0035600 - i0,0014712$$

$$\lambda_{1,5} = -0,0064615 + i0,0325347$$

$$\lambda_{1,6} = +0,0064615 - i0,0325347$$

- Para o segundo modo:

$$\lambda_{2,1} = +0,0821940 + i0,0169395$$

$$\lambda_{2,2} = -0,0821940 - i0,0169395$$

$$\lambda_{2,3} = +0,0035602 + i0,0014717$$

$$\lambda_{2,4} = -0,0035602 - i0,0014717$$

$$\lambda_{2,5} = +0,0168664 - i0,0820824$$

$$\lambda_{2,6} = -0,0168664 + i0,0820824$$

- Para o terceiro modo:

$$\lambda_{3,1} = +0,1378186 + i0,0287819$$

$$\lambda_{3,2} = -0,1378186 - i0,0287819$$

$$\lambda_{3,3} = +0,0035602 + i0,0014717$$

$$\lambda_{3,4} = -0,0035602 - i0,0014717$$

$$\lambda_{3,5} = +0,0287386 - i0,1377521$$

$$\lambda_{3,6} = -0,0287386 + i0,1377521$$

Esses valores λ_{ns} se levados diretamente a equação (A.72) fornecem a solução trivial. Para se obter soluções diferentes da trivial adotou-se nesse trabalho o relaxamento de uma das CC, arbitrando o valor $A_{n1} = 1$. As CC usadas foram as referentes às equações (A.42), (A.43), (A.44), (A.46) e (A.48), sendo que a relaxada foi a referente a equação (A.45).

Esse procedimento equivale a se resolver o sistema de equações (A.72) com a quarta equação contendo o valor prescrito $A_{n1} = 1$.

Dessa forma, obtém-se para A_{ns} :

- Para o primeiro modo:

$$A_{1,1} = +1$$

$$A_{1,2} = +5, 8874426 + i0, 7929775$$

$$A_{1,3} = +0, 0009037 + i0, 0018327$$

$$A_{1,4} = +0, 0010347 + i0, 0021127$$

$$A_{1,5} = -3, 8542867 + i2, 0665700$$

$$A_{1,6} = -3, 0350943 - i2, 8634920$$

- Para o segundo modo:

$$A_{2,1} = +1$$

$$A_{2,2} = -56, 039650 - i46, 648610$$

$$A_{2,3} = -0, 0002279 + i0, 0010198$$

$$A_{2,4} = -0, 0001900 + i0, 0009850$$

$$A_{2,5} = +50, 895511 - i5, 2249324$$

$$A_{2,6} = +4, 1445568 + i51, 871538$$

- Para o terceiro modo:

$$A_{3,1} = +1$$

$$A_{3,2} = -38, 74603560 + i1121, 313660$$

$$A_{3,3} = -0, 003118667 + i0, 002391121$$

$$A_{3,4} = -0, 003192600 + i0, 002374821$$

$$A_{3,5} = -542, 0709100 - i580, 6576800$$

$$A_{3,6} = +579, 8232569 - i540, 6607459$$

Obviamente, as CC serão satisfeitas para cada modo n com exceção da condição de contorno relativa a equação (A.45) que foi relaxada.

Determinados A_{ns} e λ_{ns} e, conseqüente, W_n , pode-se voltar na equação (A.66) e determinar a resposta $w(x, t)$ do sistema que está expressa na figura (A.4), comparada com a resposta de uma viga dimensões idênticas composta somente do material elástico da camada de restrição. A resposta da viga sanduíche foi obtida através da superposição dos três primeiros modos normais amortecidos e a da viga elástica através de integração direta das equações de movimento.

A.3.3 Resposta para Varredura em Freqüência

As figuras (A.5(a)) e (A.5(b)) mostram o deslocamento máximo na extremidade da viga sanduíche e de uma viga de dimensões idênticas composta somente do material elástico, respectivamente. Pode-se observar nessas figuras maiores amplitudes de deslocamentos na proximidade das freqüências de ressonância.

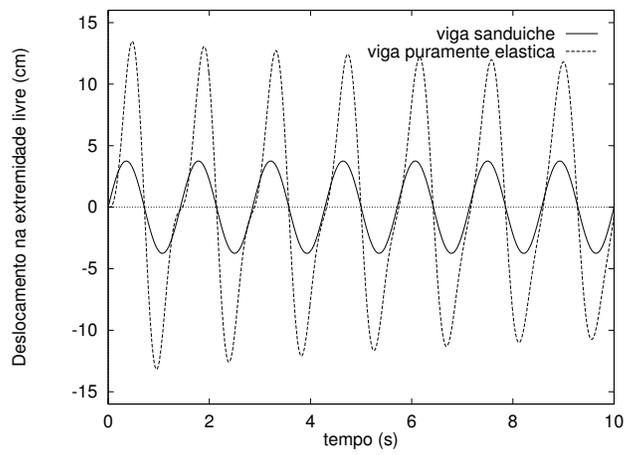


Figura A.4: Resposta do Sistema

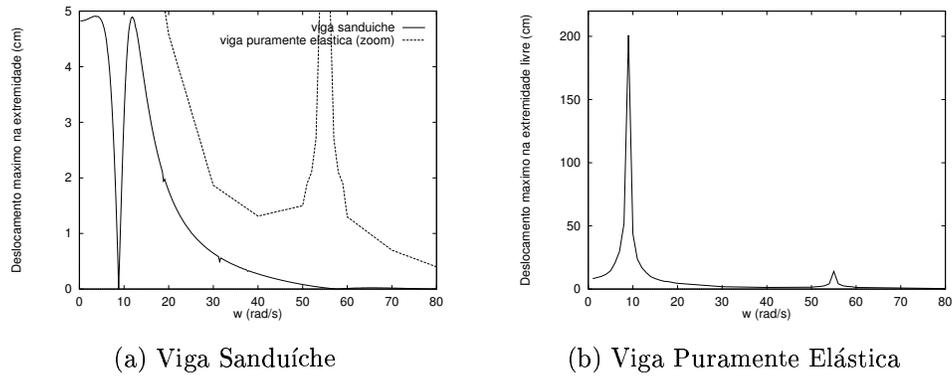
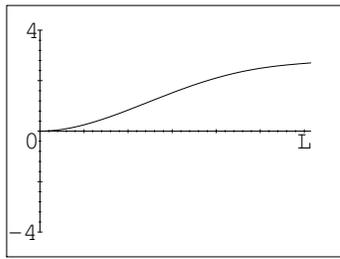


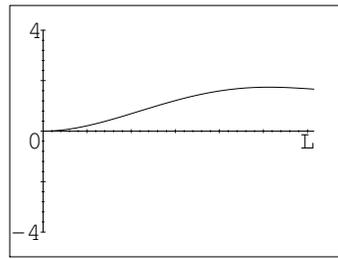
Figura A.5: Deslocamento Máximo da Extremidade Livre \times Frequência

No intuito de expressar a intensidade e a forma de vibrar da viga sanduíche em função da frequência de excitação, foi feita uma animação para um carregamento descrito pela equação (A.68) e com a frequência variando entre 6,28 e 62,83 rad/s . Nessa animação tomou-se apenas o primeiro modo, visto que ele se mostrou preponderante com relação aos demais em todas as análises colhidas durante o trabalho.

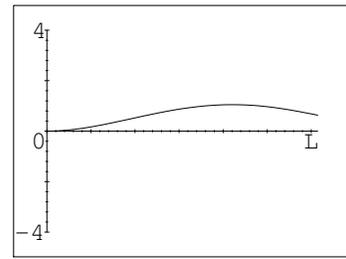
As figuras (A.6(a)) a (A.6(l)) retratam quadros de deformadas máximas para as respectivas frequências de excitação.



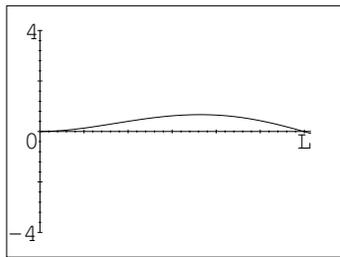
(a) $\omega = 6,28 \text{ rad/s}$



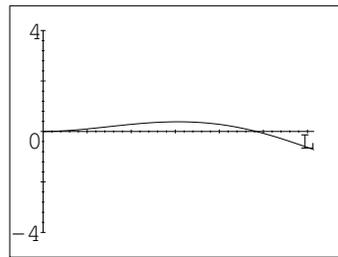
(b) $\omega = 7,41 \text{ rad/s}$



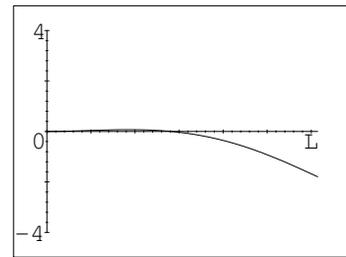
(c) $\omega = 8,17 \text{ rad/s}$



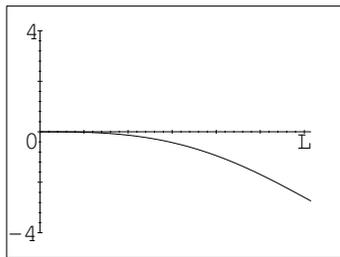
(d) $\omega = 8,61 \text{ rad/s}$



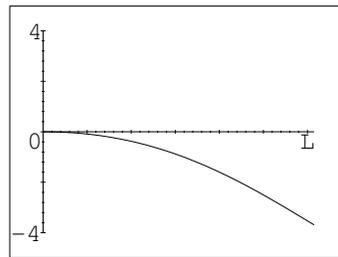
(e) $\omega = 8,98 \text{ rad/s}$



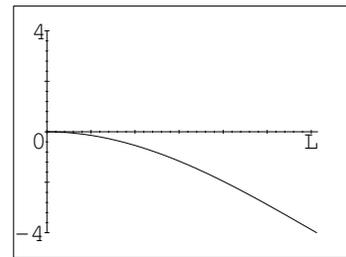
(f) $\omega = 9,61 \text{ rad/s}$



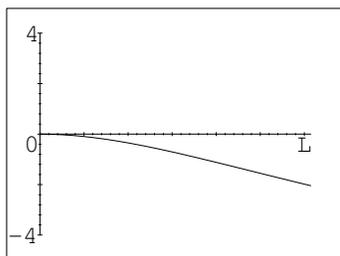
(g) $\omega = 10,24 \text{ rad/s}$



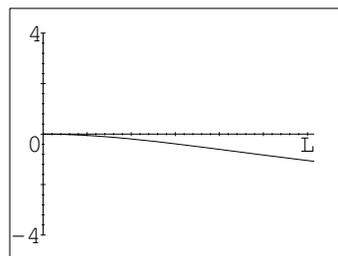
(h) $\omega = 11,18 \text{ rad/s}$



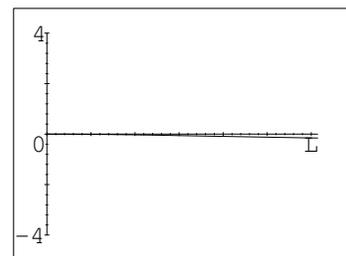
(i) $\omega = 12,57 \text{ rad/s}$



(j) $\omega = 18,85 \text{ rad/s}$



(k) $\omega = 25,83 \text{ rad/s}$



(l) $\omega = 62,83 \text{ rad/s}$

Figura A.6: Quadros da Animação Gerada por uma Varredura em Freqüência

Apêndice B

Geração de Malhas para o GHM

Os programas `ghm2d.for` e `ghm3d.for` possuem geradores de malhas de elementos finitos denominados `gera2d.for` e `gera3d.for`, respectivamente.

O `gera2d.for` monta uma malha de elementos finitos quadriláteros lineares, e o `gera3d.for` uma malha de elementos hexaédricos. Em ambos os programas existe a possibilidade de se inserir uma camada de MVE.

Os algoritmos destes programas relativos à geração de malhas associadas à materiais elásticos não possuem nenhum procedimento especial. As dificuldades ficam por conta das malhas que contém elementos viscoelásticos.

Com o objetivo de facilitar o uso de geradores comerciais já existentes, estes programas possuem uma estrutura que também permite a leitura de malhas já prontas para em seguida se fazer a inserção dos elementos viscoelásticos.

O procedimento que insere os elementos viscoelásticos nas malhas de elementos finitos lidas ou geradas é o mesmo e segue os seguintes passos no `gera2d.for`¹

1. Identificação do elemento viscoelástico;
2. Identificação do nó do elemento viscoelástico com a maior numeração nodal - $Max_{nó}$;
3. Atribuição do quinto nó dissipador do elemento viscoelástico para $Max_{nó} + 1$, caso não ainda não exista um nó dissipador com numeração igual ou maior;
4. Atualização de conectividades;
5. Atualização de coordenadas;
6. Atualização do número total de nós:

¹Procedimento análogo pode ser feito no `gera3d.for`

A determinação dos elementos viscoelásticos pode ser feita através de uma estrutura de dados que define o tipo do material ou através da posição em que se encontra o elemento. A seguir é apresentado o trecho comentado do programa `gera2d.for` que insere a parcela de elementos viscoelásticos numa malha já existente, utilizando a altura média do elemento para definir se o mesmo é elástico e viscoelástico

```
c
c Este programa eh parte integrante da tese D.Sc. de
c Flavio de Souza Barbosa, orientada pelo professor
c Ronaldo Carvalho Battita
c Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ fevereiro de 2000
c
c programa gera2d.for
c
c variaveis:
c
c nel - numero de elementos
c nno - numero de nos
c x(nno),y(nno) - vetores de coordenadas nodais
c ix(nel,6) - vetor de conectividades (incidencias) e tipo de material
c      5 primeiras posicoes de conectividades e a
c      sexta posicao com o tipo do material
c viscmin - Altura minima dos materiais viscoelasticos
c viscmax - Altura maxima dos materiais viscoelasticos
c altm      - Altura media do elemento
c numvis   - numero correspondente ao material viscoelastico
c numela   - numero correspondente ao material viscoelastico
c maxnodis - numeracao do maior no dissipador
.
.
.
c
c Determinacao dos elementos viscoelasticos
c
  do i=1,nel
    altm=(y(ix(i,1))+z(y(i,5)))/2
    if (altm .gt. viscmin .and. altm .lt. viscmax) then
      ix(i,6)=numvis
    else
      ix(i,6)=numela
      ix(i,5)=0
```

```

endif
enddo

```

Até esta parte do programa, todos os elementos viscoelásticos podem ser identificados através da sexta posição do vetor $ix(nel,6)$. Se $ix(i,6)=numvis$ o elemento é viscoelástico. Os próximos passos são as atualizações em função do nó dissipador que é inserido.

```

c
c atualizacao de conectividades
c
maxnodis=1
do i=1,nel
  if (ix(i,6).eq.numvis) then
    ix(i,5)=max0(ix(i,1),ix(i,2),ix(i,3),ix(i,4))+1
    if (ix(i,5).le.maxnodis) then
      ix(i,5)=maxnodis+1
      maxnodis = ix(i,5)
    else
      maxnodis = ix(i,5)
    endif
  endif
  do k=1,nel
    do j=1,4

      if(ix(k,j).ge.ix(i,5)) then
        ix(k,j)=ix(k,j)+1
      endif
    enddo
  enddo
enddo

c
c atualizacao das coordenadas
c
do j=nno,ix(i,5),(-1)
  x(j+1)=x(j)
  y(j+1)=y(j)
enddo
x(ix(i,5))=0.0d00
y(ix(i,5))=0.0d00
nno=nno+1
endif
enddo

```

Apêndice C

Tabelas de Valores Discretos

Este Apêndice apresenta os principais resultados obtidos no desenvolver do presente trabalho sob a forma de tabela de pontos discretos. Basicamente, os resultados que serão apresentados são relativos ao exemplo 1 - viga sanduíche.

Estas tabelas tem a finalidade de oferecer parâmetros comparativos para trabalhos futuros, eliminando erros provenientes da digitalização de pontos discretos.

É importante salientar que as tabelas que seguem não contém todos os pontos usados para se montar os respectivos gráficos apresentados ao longo do presente trabalho, pois, como existem gráficos com mais de 3000 pontos, o volume de papel necessário para se imprimir as tabelas completas seria muito grande e inviável.

As tabelas são apresentadas com uma legenda que indica que resultado está sendo apresentado, e o(s) gráfico(s) correspondente que foi mostrado ao longo do presente trabalho.

C.1 Resultados Experimentais

Inicialmente são apresentados os resultados extraídos de Faisca [4].

frequência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]	frequência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]
0,0000	0,0295	0,1191	176,7140	3,9585	1,9379
4,9087	0,0311	0,2884	181,6227	3,3031	1,9142
9,8174	0,0512	0,2541	186,5314	3,0648	1,8671
14,7262	0,0976	0,2039	191,4402	2,8582	1,8229
19,6349	0,1814	0,1478	196,3489	3,4095	1,6018
24,5436	0,2939	0,1022	201,2576	2,6097	1,5715
29,4523	0,4950	0,0946	206,1663	2,6182	1,5748
34,3611	0,8645	0,1494	211,0750	2,4058	1,4263
39,2698	1,6625	0,2461	215,9838	2,1484	1,3768
44,1785	7,0954	0,3917	220,8925	1,9253	1,3742
49,0872	1,3260	0,6384	225,8012	1,8021	1,3171
53,9959	0,9154	0,9651	230,7099	1,7286	1,2629
58,9047	0,6754	1,0858	235,6187	1,5913	1,1957
63,8134	0,5739	0,8661	240,5274	1,5312	1,1826
68,7221	0,4786	0,6644	245,4361	1,4389	1,1511
73,6308	0,4057	0,5519	250,3448	1,3671	1,0684
78,5395	0,3611	0,4519	255,2535	1,3625	1,0579
83,4483	0,4296	0,3731	260,1622	1,2733	1,0028
88,3570	0,4618	0,3075	265,0710	1,1926	0,9693
93,2657	0,0605	0,2867	269,9797	1,0066	0,9257
98,1744	0,0269	0,2855	274,8884	0,8980	0,9282
103,0832	0,1360	0,2733	279,7971	0,9250	0,8762
107,9919	0,3142	0,2852	284,7059	0,9621	0,8374
112,9006	0,3797	0,3342	289,6146	0,9482	0,8470
117,8093	0,7966	0,3862	294,5233	0,7970	0,8702
122,7180	1,1301	0,4728	299,4320	0,7264	0,8356
127,6268	1,5110	0,6039	304,3407	0,8409	0,8359
132,5355	2,0814	0,7551	309,2495	1,6926	0,8177
137,4442	2,9669	0,9159	314,1582	0,4837	0,8562
142,3529	3,8149	1,0421	319,0669	0,5714	0,8752
147,2617	8,4289	1,3083	323,9756	0,4372	0,9015
152,1704	26,0912	1,4650	328,8844	0,6974	0,9729
157,0791	26,4847	1,7103	333,7931	1,1564	1,0436
161,9878	10,1364	1,8092	338,7018	1,8244	1,1645
166,8965	6,5474	1,8987	343,6105	2,9104	1,1763
171,8053	4,8614	1,9798	348,5193	4,5960	1,2488

Respostas Experimentais no Domínio da Frequência do Exemplo 1 - figuras 6.9 e
6.10 (continuação)

frequência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]	frequência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]
353,4280	7,6518	1,3593	530,1420	1,6975	1,1231
358,3367	14,6899	1,4298	535,0507	1,6584	1,1133
363,2454	34,2835	1,5376	539,9594	1,5334	1,0952
368,1541	12,9461	1,6153	544,8681	1,5118	1,0623
373,0629	8,0354	1,6130	549,7769	1,4972	1,1673
377,9716	6,4981	1,6408	554,6855	1,4167	1,0080
382,8803	5,5249	1,7206	559,5943	1,5161	1,0246
387,7890	5,0124	1,7476	564,5030	1,4966	1,0085
392,6977	4,4216	1,7720	569,4117	1,4090	0,9832
397,6065	3,9822	1,8366	574,3204	1,3573	0,9643
402,5152	4,0520	1,7525	579,2292	1,4047	0,9670
407,4239	4,0525	1,7602	584,1379	1,3418	0,8877
412,3326	3,3471	1,7518	589,0466	1,3247	0,9133
417,2414	3,1535	1,7424	593,9553	1,2677	0,8633
422,1501	3,0373	1,7172	598,8641	1,2727	0,8675
427,0588	2,8805	1,6999	603,7728	1,2292	0,8605
431,9675	2,6798	1,7235	608,6815	1,1387	0,8476
436,8763	2,4886	1,6182	613,5902	1,0186	0,7890
441,7849	2,3561	1,5793	616,0446	1,1421	0,7953
446,6937	2,4762	1,5354	618,4989	0,9675	0,7887
451,6024	2,3609	1,4710	620,9533	1,1437	0,7882
456,5111	2,3888	1,4675	623,4077	1,0699	0,7588
461,4198	2,2390	1,4405	625,8620	1,0345	0,7926
466,3286	2,2273	1,4391	628,3164	0,9874	0,7039
471,2373	2,1602	1,4068	630,7707	0,9031	0,7256
476,1460	2,0307	1,4451	633,2251	1,0983	0,7193
481,0547	2,0577	1,3315	635,6795	0,9437	0,7205
485,9635	2,0010	1,2969	638,1338	1,0266	0,6707
490,8722	2,0667	1,3395			
495,7809	1,9105	1,2726			
500,6896	1,9151	1,3085			
505,5983	1,8338	1,1437			
510,5071	1,7755	1,1984			
515,4158	1,6324	1,2014			
520,3245	1,5699	1,1254			
525,2332	1,6824	1,1493			

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,0000	-0,4211	-0,1741	0,0720	27,7280	1,2918
0,0020	3,2849	2,9851	0,0740	13,9930	0,9183
0,0040	50,8910	30,4580	0,0760	18,7160	1,2328
0,0060	33,9330	24,7630	0,0780	1,1624	1,8619
0,0080	-0,9153	-1,8787	0,0800	-13,0610	1,5586
0,0100	-11,5620	-9,6435	0,0820	6,8730	0,3258
0,0120	-41,3280	-23,5220	0,0840	14,8970	0,2752
0,0140	-33,4950	-21,0670	0,0860	7,1763	0,1208
0,0160	-14,9480	-10,4830	0,0880	15,7510	-0,0730
0,0180	19,3610	0,1348	0,0900	12,5950	0,3342
0,0200	-11,9440	-1,3058	0,0920	-16,1660	0,7863
0,0220	-11,4210	-6,3663	0,0940	-29,2500	0,8958
0,0240	3,4590	-2,2494	0,0960	-25,9480	0,9267
0,0260	-28,4410	-3,0750	0,0980	-32,3770	0,9660
0,0280	-23,7020	-2,3954	0,1000	-27,3690	0,8200
0,0300	8,4285	3,6338	0,1020	1,6958	0,7526
0,0320	19,1310	7,0655	0,1040	12,6960	0,3370
0,0340	19,0970	7,0880	0,1060	8,7261	0,2219
0,0360	39,9190	5,7204	0,1080	17,1940	0,0112
0,0380	42,1930	3,6058	0,1100	14,5150	-0,1966
0,0400	-0,5278	-0,6684	0,1120	-3,8745	-0,2977
0,0420	-5,6265	-4,3977	0,1140	-3,1501	-0,6178
0,0440	-2,8750	-5,0660	0,1160	13,2690	-0,9688
0,0460	-30,8000	-5,4086	0,1180	11,6010	-1,1317
0,0480	-20,5120	-5,3946	0,1200	20,5970	-1,2890
0,0500	3,7847	-4,1281	0,1220	36,7570	-1,3704
0,0520	-2,3752	-3,1480	0,1240	25,3190	-1,1458
0,0540	-11,9440	-2,9037	0,1260	6,9910	-1,2581
0,0560	-5,2502	-2,6229	0,1280	-0,9209	-1,3255
0,0580	-18,3620	-1,5277	0,1300	-14,0610	-1,3760
0,0600	-43,2540	-0,4746	0,1320	-30,7490	-1,1795
0,0620	-28,3060	1,2862	0,1340	-23,8980	-1,0952
0,0640	-10,4110	5,2935	0,1360	-9,8267	-1,1401
0,0660	-10,6690	5,6305	0,1380	-10,9720	-0,9323
0,0680	15,1160	3,6395	0,1400	-3,2905	-0,8930
0,0700	39,7170	2,4825	0,1420	4,6719	-0,8677

Respostas Experimentais no Domínio do Tempo do Exemplo 1 - figuras 6.11 e 6.12
(continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,1440	-7,0134	-0,8846	0,2160	-26,4370	-0,2780
0,1460	-16,2900	-0,6515	0,2180	-32,3770	-0,3510
0,1480	-9,2764	-0,7554	0,2200	-24,1120	-0,5420
0,1500	-5,6321	-0,7891	0,2220	-14,9760	-0,4577
0,1520	-2,4595	-0,7021	0,2240	-6,7888	-0,5336
0,1540	20,0630	-0,5813	0,2260	7,1707	-0,4184
0,1560	32,6920	-0,4943	0,2280	13,3750	-0,5757
0,1580	25,9990	-0,4549	0,2300	5,5872	-0,5925
0,1600	24,1740	-0,1910	0,2320	4,1440	-0,6487
0,1620	16,1770	-0,1629	0,2340	4,1609	-0,6459
0,1640	-3,8240	-0,0253	0,2360	0,8479	-0,6740
0,1660	-13,6790	0,0197	0,2380	5,9353	-0,7301
0,1680	-8,4622	-0,0927	0,2400	18,6540	-0,6178
0,1700	-9,4055	0,2022	0,2420	23,3370	-0,4437
0,1720	-9,9221	0,2303	0,2440	21,5340	-0,5223
0,1740	0,6177	0,3145	0,2460	19,3560	-0,5392
0,1760	-3,4197	0,3342	0,2480	7,7153	-0,5308
0,1780	-18,3000	0,4746	0,2500	-9,5459	-0,4044
0,1800	-20,9900	0,4465	0,2520	-15,9920	-0,5308
0,1820	-23,7240	0,4830	0,2540	-17,7500	-0,4634
0,1840	-28,2560	0,5336	0,2560	-18,8000	-0,3932
0,1860	-17,8680	0,4409	0,2580	-12,5730	-0,4100
0,1880	2,0439	0,3370	0,2600	-2,4033	-0,3482
0,1900	11,2300	0,2162	0,2620	-2,1506	-0,3398
0,1920	17,0140	0,3679	0,2640	-5,3120	0,0056
0,1940	25,7850	0,3089	0,2660	-4,4810	-0,2247
0,1960	15,7560	0,2050	0,2680	-9,0125	-0,1853
0,1980	2,8525	0,4156	0,2700	-10,7190	-0,1966
0,2000	2,3584	0,1488	0,2720	-1,2634	-0,1601
0,2020	1,1174	-0,0309	0,2740	9,6638	-0,0955
0,2040	0,0898	-0,0084	0,2760	16,8570	-0,0674
0,2060	7,8389	0,0393	0,2780	24,8640	0,0084
0,2080	14,3080	-0,1657	0,2800	27,7730	-0,0281
0,2100	5,6602	-0,0758	0,2820	17,9130	0,0702
0,2120	-4,0991	-0,0309	0,2840	8,1814	0,0168
0,2140	-11,2300	-0,0730	0,2860	2,2405	-0,0927

Respostas Experimentais no Domínio do Tempo do Exemplo 1 - figuras 6.11 e 6.12
(continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,2880	-5,7219	0,0477	0,3600	9,0405	-0,3651
0,2900	-8,2656	0,1067	0,3620	14,9200	-0,3145
0,2920	-3,0884	0,1460	0,3640	20,2930	-0,3230
0,2940	0,2976	0,2499	0,3660	18,9740	-0,2022
0,2960	-3,4534	0,0168	0,3680	9,9109	-0,2499
0,2980	-5,6040	-0,0056	0,3700	0,8311	-0,2724
0,3000	-10,7530	-0,0786	0,3720	-8,0242	-0,3482
0,3020	-21,7030	-0,0084	0,3740	-16,1160	-0,0674
0,3040	-23,3870	-0,0225	0,3760	-16,7000	-0,2162
0,3060	-18,1320	0,0056	0,3780	-11,8540	-0,2584
0,3080	-11,0680	0,2106	0,3800	-8,5239	-0,1741
0,3100	-0,3875	-0,1573	0,3820	-5,3064	-0,3875
0,3120	12,8530	-0,1236	0,3840	-2,7515	-0,2527
0,3140	17,8680	-0,2106	0,3860	-5,4187	-0,1769
0,3160	14,6280	-0,1713	0,3880	-9,7256	0,0112
0,3180	12,3140	-0,2415	0,3900	-8,8833	-0,1545
0,3200	6,4014	-0,2640	0,3920	-4,8853	-0,0786
0,3220	-0,0618	-0,1320	0,3940	0,4605	-0,0871
0,3240	1,8811	-0,2780	0,3960	10,4950	-0,0225
0,3260	6,8506	-0,2752	0,3980	19,4570	-0,1123
0,3280	7,4851	-0,3005	0,4000	22,1240	-0,1039
0,3300	8,2432	-0,5757	0,4020	19,8050	-0,2022
0,3320	5,6096	-0,3735	0,4040	14,9030	-0,2106
0,3340	-5,7781	-0,3903	0,4060	6,2273	-0,1741
0,3360	-17,3010	-0,3960	0,4080	-1,0500	-0,2668
0,3380	-22,2700	-0,1573	0,4100	-2,2405	-0,1657
0,3400	-25,5320	-0,3819	0,4120	-1,8867	0,1011
0,3420	-23,4830	-0,3763	0,4140	-1,6116	-0,2527
0,3440	-13,1730	-0,4381	0,4160	0,6008	-0,1432
0,3460	-3,0940	-0,3286	0,4180	-0,6233	-0,2415
0,3480	1,3870	-0,4100	0,4200	-7,3672	-0,1713
0,3500	4,3855	-0,3875	0,4220	-13,3870	-0,2359
0,3520	4,8909	-0,4943	0,4240	-16,9070	-0,2106
0,3540	-0,1460	-0,3230	0,4260	-18,6090	-0,2864
0,3560	-1,1006	-0,2949	0,4280	-14,1050	-0,2387
0,3580	4,4023	-0,2724	0,4300	-4,0935	-0,1825

Respostas Experimentais no Domínio do Tempo do Exemplo 1 - figuras 6.11 e 6.12
(continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,4320	4,6494	-0,2780
0,4340	11,0340	-0,1039
0,4360	14,9250	-0,2893
0,4380	13,6390	-0,2134
0,4400	8,1477	-0,3623
0,4420	4,6887	-0,2949
0,4440	4,3518	-0,3370
0,4460	4,3069	-0,2443
0,4480	7,8838	-0,1882
0,4500	11,1240	-0,2584
0,4520	8,3835	-0,2106
0,4540	1,7183	-0,2275
0,4560	-5,7332	0,0646
0,4580	-14,3920	-0,2724
0,4600	-21,2140	-0,2921
0,4620	-20,8550	-0,2780
0,4640	-16,4810	-0,2808
0,4660	-10,8490	-0,2584
0,4680	-3,8184	-0,2022
0,4700	1,2129	-0,2584
0,4720	1,1343	-0,2415
0,4740	0,0168	-0,2527
0,4760	-0,9377	-0,1853
0,4780	-0,3425	-0,0899
0,4800	3,0435	-0,2162
0,4820	9,6021	-0,1882
0,4840	14,7120	-0,1910
0,4860	15,5490	-0,2387
0,4880	13,2240	-0,2050
0,4900	6,5642	-0,2471
0,4920	-2,8245	-0,2134
0,4940	-10,0060	-0,2050
0,4960	-12,8760	-0,1601
0,4980	-13,9430	-0,2134
0,5000	-11,3880	-0,1151

C.2 Resultados Numéricos

Respostas Numéricas no Domínio da Frequência do Exemplo 1 (primeiro ajuste)

figuras 6.9 e 6.10

freqüência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]	freqüência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]
0,0000	0,2828	0,0015	220,8932	1,8817	3,5370
6,1359	0,2925	0,0054	227,0292	1,6949	4,1087
12,2718	0,3236	0,0173	233,1651	1,5368	4,2899
18,4078	0,3840	0,0379	239,3010	1,3984	4,0425
24,5437	0,4946	0,0689	245,4369	1,2736	3,6038
30,6796	0,7192	0,1132	251,5728	1,1578	3,1652
36,8155	1,3545	0,1760	257,7088	1,0473	2,7914
42,9515	5,5214	0,2679	263,8447	0,9397	2,4868
49,0874	1,3586	0,4098	269,9806	0,8321	2,2391
55,2233	0,6384	0,6478	276,1165	0,7226	2,0352
61,3592	0,3852	1,0682	282,2525	0,6088	1,8644
67,4952	0,2541	1,5316	288,3884	0,4897	1,7184
73,6311	0,1820	1,3192	294,5243	0,3661	1,5910
79,7670	0,1603	0,9460	300,6602	0,2508	1,4779
85,9029	0,1861	0,7097	306,7962	0,2082	1,3754
92,0388	0,2436	0,5591	312,9321	0,3251	1,2808
98,1748	0,3210	0,4532	319,0680	0,5512	1,1920
104,3107	0,4156	0,3722	325,2039	0,8597	1,1073
110,4466	0,5299	0,3062	331,3399	1,2692	1,0252
116,5825	0,6691	0,2507	337,4758	1,8286	0,9445
122,7185	0,8423	0,2050	343,6117	2,6361	0,8644
128,8544	1,0640	0,1725	349,7476	3,9052	0,7846
134,9903	1,3588	0,1611	355,8835	6,1932	0,7057
141,1262	1,7707	0,1780	362,0195	11,5441	0,6302
147,2622	2,3892	0,2218	368,1554	36,8799	0,5647
153,3981	3,4246	0,2870	374,2913	35,1077	0,5239
159,5340	5,5179	0,3701	380,4272	14,2697	0,5331
165,6699	11,9206	0,4713	386,5632	9,3800	0,6204
171,8058	45,1583	0,5932	392,6991	7,2245	0,8032
177,9418	11,0638	0,7407	398,8350	6,0127	1,0932
184,0777	6,1282	0,9212	404,9709	5,2368	1,5121
190,2136	4,3219	1,1456	411,1069	4,6973	2,0944
196,3495	3,3827	1,4293	417,2428	4,3007	2,8638
202,4855	2,8026	1,7937	423,3787	3,9970	3,7362
208,6214	2,4046	2,2648	429,5146	3,7571	4,3850
214,7573	2,1108	2,8594	435,6505	3,5628	4,4879

Respostas Numéricas no Domínio da Frequência do Exemplo 1 (primeiro ajuste)
 figuras 6.9 e 6.10 (continuação)

freqüência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]
441,7865	3,4026	4,1802
447,9224	3,2679	3,7635
454,0583	3,1535	3,3830
460,1942	3,0553	3,0695
466,3302	2,9700	2,8169
472,4661	2,8953	2,6122
478,6020	2,8293	2,4440
484,7379	2,7708	2,3037
490,8739	2,7185	2,1847
497,0098	2,6713	2,0822
503,1457	2,6291	1,9927
509,2816	2,5908	1,9136
515,4175	2,5557	1,8429
521,5535	2,5236	1,7789
527,6894	2,4941	1,7205
533,8253	2,4667	1,6667
539,9612	2,4414	1,6167
546,0972	2,4173	1,5699
552,2331	2,3948	1,5258
558,3690	2,3729	1,4838
564,5049	2,3513	1,4437
570,6409	2,3295	1,4050
576,7768	2,3064	1,3675
582,9127	2,2795	1,3309
589,0486	2,2433	1,2949
595,1845	2,1782	1,2592
601,3205	1,9244	1,2237
607,4564	2,6179	1,1879
613,5923	2,4018	1,1518
619,7282	2,3404	1,1156
625,8642	2,3074	1,0825

Respostas Numéricas no Domínio da Frequência do Exemplo 1 (segundo ajuste)

figura 6.17

frequência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]	frequência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]
0,0000	0,2828	0.0011	220,8932	1,8817	2.9111
6,1359	0,2925	0.0049	227,0292	1,6949	2.7402
12,2718	0,3236	0.0169	233,1651	1,5368	2.5406
18,4078	0,3840	0.0382	239,3010	1,3984	2.3443
24,5437	0,4946	0.0711	245,4369	1,2736	2.1646
30,6796	0,7192	0.1202	251,5728	1,1578	2.0047
36,8155	1,3545	0.1940	257,7088	1,0473	1.8637
42,9515	5,5214	0.3110	263,8447	0,9397	1.7391
49,0874	1,3586	0.5163	269,9806	0,8321	1.6282
55,2233	0,6384	0.9447	276,1165	0,7226	1.5286
61,3592	0,3852	1.8853	282,2525	0,6088	1.4381
67,4952	0,2541	1.7085	288,3884	0,4897	1.3551
73,6311	0,1820	1.0325	294,5243	0,3661	1.2782
79,7670	0,1603	0.7155	300,6602	0,2508	1.2064
85,9029	0,1861	0.5396	306,7962	0,2082	1.1389
92,0388	0,2436	0.4228	312,9321	0,3251	1.0752
98,1748	0,3210	0.3353	319,0680	0,5512	1.0153
104,3107	0,4156	0.2649	325,2039	0,8597	0.9597
110,4466	0,5299	0.2080	331,3399	1,2692	0.9094
116,5825	0,6691	0.1686	337,4758	1,8286	0.8666
122,7185	0,8423	0.1587	343,6117	2,6361	0.8348
128,8544	1,0640	0.1869	349,7476	3,9052	0.8190
134,9903	1,3588	0.2470	355,8835	6,1932	0.8263
141,1262	1,7707	0.3301	362,0195	11,5441	0.8647
147,2622	2,3892	0.4329	368,1554	36,8799	0.9418
153,3981	3,4246	0.5562	374,2913	35,1077	1.0637
159,5340	5,5179	0.7034	380,4272	14,2697	1.2334
165,6699	11,9206	0.8796	386,5632	9,3800	1.4501
171,8058	45,1583	1.0916	392,6991	7,2245	1.7071
177,9418	11,0638	1.3467	398,8350	6,0127	1.9874
184,0777	6,1282	1.6504	404,9709	5,2368	2.2618
190,2136	4,3219	2.0001	411,1069	4,6973	2.4926
196,3495	3,3827	2.3725	417,2428	4,3007	2.6481
202,4855	2,8026	2.7112	423,3787	3,9970	2.7173
208,6214	2,4046	2.9365	429,5146	3,7571	2.7121
214,7573	2,1108	2.9971	435,6505	3,5628	2.6558

Respostas Numéricas no Domínio da Freqüência do Exemplo 1 (segundo ajuste)
 figura 6.17 (continuação)

freqüência (rad/s)	FRF viga elástica [(m/s ²)/N]	FRF viga sanduíche [(m/s ²)/N]
441,7865	3,4026	2.5711
447,9224	3,2679	2.4744
454,0583	3,1535	2.3758
460,1942	3,0553	2.2804
466,3302	2,9700	2.1909
472,4661	2,8953	2.1080
478,6020	2,8293	2.0316
484,7379	2,7708	1.9614
490,8739	2,7185	1.8967
497,0098	2,6713	1.8369
503,1457	2,6291	1.7815
509,2816	2,5908	1.7299
515,4175	2,5557	1.6816
521,5535	2,5236	1.6361
527,6894	2,4941	1.5931
533,8253	2,4667	1.5522
539,9612	2,4414	1.5132
546,0972	2,4173	1.4757
552,2331	2,3948	1.4395
558,3690	2,3729	1.4044
564,5049	2,3513	1.3703
570,6409	2,3295	1.3369
576,7768	2,3064	1.3041
582,9127	2,2795	1.2718
589,0486	2,2433	1.2400
595,1845	2,1782	1.2086
601,3205	1,9244	1.1778
607,4564	2,6179	1.1480
613,5923	2,4018	1.1196
619,7282	2,3404	1.0931
625,8642	2,3074	1.0679

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (primeiro ajuste)
 figuras 6.11 e 6.12

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,0000	0,0000	0,0000	0,0720	31,3855	2,5316
0,0020	33,4982	21,6745	0,0740	4,7078	7,4046
0,0040	34,9225	46,1082	0,0760	-17,7073	8,9267
0,0060	23,8633	15,6969	0,0780	-13,6294	7,3105
0,0080	-7,9323	-6,3066	0,0800	-6,5754	4,4767
0,0100	-29,7011	-18,3204	0,0820	-13,9108	2,5387
0,0120	-32,7443	-17,4999	0,0840	-1,7157	2,3586
0,0140	-28,1033	-7,9986	0,0860	3,8894	3,1403
0,0160	-5,2597	1,6694	0,0880	-7,1441	3,2413
0,0180	3,9694	5,2572	0,0900	-22,5638	1,5322
0,0200	0,7331	3,0339	0,0920	-30,6519	-1,6836
0,0220	-13,3577	0,2466	0,0940	-22,6741	-4,8118
0,0240	-12,4023	1,7348	0,0960	-10,4521	-6,0322
0,0260	-10,2517	7,6234	0,0980	1,2336	-4,5338
0,0280	-0,6339	13,4301	0,1000	23,8761	-1,0779
0,0300	11,2037	13,8771	0,1020	41,5289	2,4762
0,0320	28,5321	6,9917	0,1040	39,9253	4,3372
0,0340	48,7246	-4,4878	0,1060	22,0693	3,8420
0,0360	31,2336	-14,9478	0,1080	10,3816	1,7182
0,0380	8,3797	-19,3592	0,1100	8,0802	-0,5538
0,0400	0,6943	-16,0982	0,1120	-6,0674	-1,7739
0,0420	-19,5124	-7,5892	0,1140	-6,6148	-1,7293
0,0440	-34,9209	1,4137	0,1160	5,8090	-1,1515
0,0460	-32,4678	6,7715	0,1180	17,3315	-1,0419
0,0480	-11,5553	7,2928	0,1200	-0,8229	-1,8835
0,0500	-6,4917	4,9929	0,1220	-10,9947	-3,2768
0,0520	-8,8577	3,2031	0,1240	-13,7299	-4,2231
0,0540	-10,5910	3,9620	0,1260	-32,5674	-3,8412
0,0560	-12,9128	6,5945	0,1280	-31,5416	-2,0178
0,0580	-22,0866	8,4334	0,1300	-24,9835	0,4610
0,0600	-27,2222	7,0139	0,1320	-0,6036	2,3922
0,0620	-8,1533	2,0504	0,1340	20,1840	2,9158
0,0640	13,1623	-4,2045	0,1360	23,5918	2,0227
0,0660	32,2116	-8,3863	0,1380	26,9207	0,4788
0,0680	34,3623	-8,1729	0,1400	25,4646	-0,7352
0,0700	35,2049	-3,7165	0,1420	15,1293	-1,0482

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (primeiro ajuste)
 figuras 6.11 e 6.12 (continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,1440	-5,6186	-0,5713	0,2160	17,3697	-0,3647
0,1460	-0,3163	0,1047	0,2180	28,7326	-0,0011
0,1480	13,0696	0,3900	0,2200	20,2540	0,2042
0,1500	9,2643	0,1145	0,2220	22,7556	0,1038
0,1520	11,1755	-0,3789	0,2240	15,6570	-0,2465
0,1540	7,1914	-0,5039	0,2260	-6,5057	-0,6253
0,1560	3,4692	0,1239	0,2280	-28,4305	-0,8008
0,1580	-25,6806	1,3751	0,2300	-24,5461	-0,6784
0,1600	-38,9285	2,6531	0,2320	-20,1735	-0,3374
0,1620	-31,4201	3,2779	0,2340	-16,0843	0,0439
0,1640	-28,9133	2,9359	0,2360	-3,3732	0,3053
0,1660	-13,0934	1,8707	0,2380	0,4041	0,3891
0,1680	0,0894	0,6927	0,2400	10,5509	0,3549
0,1700	17,8683	-0,0302	0,2420	-4,0581	0,3281
0,1720	20,2650	-0,1026	0,2440	-10,8819	0,4081
0,1740	10,0233	0,2523	0,2460	-3,6797	0,5915
0,1760	-1,2967	0,6110	0,2480	3,6360	0,7693
0,1780	3,2562	0,6547	0,2500	13,9492	0,8089
0,1800	7,0728	0,3647	0,2520	19,0709	0,6624
0,1820	0,0384	0,0033	0,2540	38,1745	0,4096
0,1840	16,6517	-0,0945	0,2560	33,1804	0,2008
0,1860	27,1750	0,2201	0,2580	11,9789	0,1495
0,1880	12,8932	0,7766	0,2600	-0,4736	0,2633
0,1900	-3,9261	1,1859	0,2620	-7,0511	0,4552
0,1920	-16,6087	1,1100	0,2640	-16,1120	0,6095
0,1940	-25,6426	0,5039	0,2660	-24,9020	0,6491
0,1960	-38,2617	-0,3540	0,2680	-6,4777	0,5680
0,1980	-33,2337	-1,0564	0,2700	1,0301	0,4255
0,2000	-15,1964	-1,3289	0,2720	-1,2348	0,3059
0,2020	1,7042	-1,1726	0,2740	-1,7882	0,2617
0,2040	4,7183	-0,8133	0,2760	-13,0024	0,2752
0,2060	4,4890	-0,5264	0,2780	-7,9861	0,2717
0,2080	7,1341	-0,4658	0,2800	-14,4013	0,1819
0,2100	0,2498	-0,5894	0,2820	-10,4797	0,0036
0,2120	-2,5411	-0,7126	0,2840	9,2425	-0,1924
0,2140	-4,8949	-0,6511	0,2860	27,4779	-0,3166

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (primeiro ajuste)
 figuras 6.11 e 6.12 (continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,2880	27,7112	-0,3260	0,3600	11,9902	0,1623
0,2900	22,5827	-0,2464	0,3620	15,8355	0,1347
0,2920	24,3544	-0,1458	0,3640	-1,8178	0,1284
0,2940	7,5800	-0,0892	0,3660	-7,0945	0,1234
0,2960	-10,7179	-0,1064	0,3680	8,9066	0,1003
0,2980	-16,4004	-0,1835	0,3700	10,3751	0,0574
0,3000	-6,3629	-0,2738	0,3720	8,3568	0,0111
0,3020	-4,6664	-0,3251	0,3740	5,5073	-0,0198
0,3040	-6,5556	-0,3146	0,3760	2,5696	-0,0301
0,3060	-1,3196	-0,2661	0,3780	-11,1428	-0,0291
0,3080	-3,0778	-0,2315	0,3800	-26,2954	-0,0306
0,3100	-16,9478	-0,2459	0,3820	-24,5975	-0,0448
0,3120	-24,3454	-0,2958	0,3840	-21,0370	-0,0747
0,3140	-23,5281	-0,3312	0,3860	-0,5459	-0,1156
0,3160	-11,5021	-0,3076	0,3880	-2,5282	-0,1555
0,3180	2,6608	-0,2190	0,3900	13,6299	-0,1799
0,3200	7,5922	-0,0974	0,3920	20,4146	-0,1817
0,3220	23,7873	0,0127	0,3940	11,5233	-0,1683
0,3240	30,7518	0,0796	0,3960	5,0912	-0,1553
0,3260	14,7562	0,0958	0,3980	-2,7080	-0,1529
0,3280	-0,7206	0,0785	0,4000	13,6563	-0,1575
0,3300	2,1153	0,0609	0,4020	4,4456	-0,1575
0,3320	-4,8897	0,0726	0,4040	11,5638	-0,1448
0,3340	-9,3948	0,1196	0,4060	20,5021	-0,1210
0,3360	-1,7284	0,1779	0,4080	18,9621	-0,0936
0,3380	5,6446	0,2134	0,4100	1,7608	-0,0696
0,3400	3,9518	0,2118	0,4120	-12,1558	-0,0534
0,3420	-11,9909	0,1908	0,4140	-13,3744	-0,0464
0,3440	-16,9550	0,1824	0,4160	-24,7306	-0,0449
0,3460	-23,3078	0,2055	0,4180	-18,7190	-0,0404
0,3480	-23,5964	0,2527	0,4200	-13,6506	-0,0246
0,3500	-23,8706	0,3001	0,4220	1,1928	0,0028
0,3520	-5,8950	0,3244	0,4240	12,1562	0,0333
0,3540	11,9237	0,3141	0,4260	4,1040	0,0561
0,3560	19,4915	0,2718	0,4280	2,2378	0,0682
0,3580	16,9283	0,2135	0,4300	5,7016	0,0747

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (primeiro ajuste)
 figuras 6.11 e 6.12 (continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,4320	-0,0261	0,0826
0,4340	-3,7202	0,0940
0,4360	8,3779	0,1062
0,4380	22,6009	0,1159
0,4400	18,7498	0,1203
0,4420	13,9437	0,1174
0,4440	8,3671	0,1067
0,4460	0,2216	0,0919
0,4480	-19,2464	0,0798
0,4500	-24,2319	0,0749
0,4520	-15,8108	0,0747
0,4540	-12,1189	0,0720
0,4560	-3,8121	0,0618
0,4580	-3,3969	0,0456
0,4600	3,2630	0,0286
0,4620	-0,6356	0,0138
0,4640	-8,2799	0,0009
0,4660	-13,6877	-0,0111
0,4680	2,6854	-0,0227
0,4700	9,3226	-0,0349
0,4720	7,6023	-0,0495
0,4740	22,3013	-0,0667
0,4760	23,0542	-0,0827
0,4780	9,5231	-0,0923
0,4800	-4,0436	-0,0946
0,4820	-10,9554	-0,0936
0,4840	-12,7183	-0,0946
0,4860	-16,8330	-0,0984
0,4880	-13,5610	-0,1022
0,4900	-1,9388	-0,1033
0,4920	0,4557	-0,1019
0,4940	-2,9455	-0,0989
0,4960	-12,5431	-0,0941
0,4980	-9,5311	-0,0872
0,5000	-8,9131	-0,0798

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (segundo ajuste) -
 figura 6.18

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,0000	0,0000	0,0000	0,0720	31,3855	-2,1631
0,0020	33,4982	20,5277	0,0740	4,7078	-0,5736
0,0040	34,9225	44,6039	0,0760	-17,7073	1,2235
0,0060	23,8633	15,9204	0,0780	-13,6294	2,4781
0,0080	-7,9323	-5,0426	0,0800	-6,5754	2,9976
0,0100	-29,7011	-17,1162	0,0820	-13,9108	3,0830
0,0120	-32,7443	-17,4291	0,0840	-1,7157	3,1640
0,0140	-28,1033	-9,3510	0,0860	3,8894	3,4486
0,0160	-5,2597	-0,3783	0,0880	-7,1441	3,8094
0,0180	3,9694	3,6513	0,0900	-22,5638	3,9098
0,0200	0,7331	2,3889	0,0920	-30,6519	3,4390
0,0220	-13,3577	-0,0999	0,0940	-22,6741	2,3220
0,0240	-12,4023	0,3564	0,0960	-10,4521	0,8025
0,0260	-10,2517	4,5380	0,0980	1,2336	-0,6520
0,0280	-0,6339	9,6940	0,1000	23,8761	-1,5915
0,0300	11,2037	12,0751	0,1020	41,5289	-1,8277
0,0320	28,5321	9,6444	0,1040	39,9253	-1,5114
0,0340	48,7246	3,1315	0,1060	22,0693	-0,9910
0,0360	31,2336	-4,7018	0,1080	10,3816	-0,5767
0,0380	8,3797	-10,6664	0,1100	8,0802	-0,3889
0,0400	0,6943	-12,6785	0,1120	-6,0674	-0,3704
0,0420	-19,5124	-10,6171	0,1140	-6,6148	-0,3980
0,0440	-34,9209	-6,1787	0,1160	5,8090	-0,3881
0,0460	-32,4678	-1,7784	0,1180	17,3315	-0,3443
0,0480	-11,5553	0,8884	0,1200	-0,8229	-0,3490
0,0500	-6,4917	1,6882	0,1220	-10,9947	-0,5134
0,0520	-8,8577	1,7523	0,1240	-13,7299	-0,8949
0,0540	-10,5910	2,3686	0,1260	-32,5674	-1,4301
0,0560	-12,9128	3,9678	0,1280	-31,5416	-1,9424
0,0580	-22,0866	5,9048	0,1300	-24,9835	-2,2388
0,0600	-27,2222	7,0261	0,1320	-0,6036	-2,2258
0,0620	-8,1533	6,4883	0,1340	20,1840	-1,9500
0,0640	13,1623	4,2846	0,1360	23,5918	-1,5416
0,0660	32,2116	1,2496	0,1380	26,9207	-1,1229
0,0680	34,3623	-1,3820	0,1400	25,4646	-0,7584
0,0700	35,2049	-2,6096	0,1420	15,1293	-0,4590

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (segundo ajuste) -
 figura 6.18 (continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,1440	-5,6186	-0,2072	0,2160	17,3697	-0,7440
0,1460	-0,3163	0,0233	0,2180	28,7326	-0,8468
0,1480	13,0696	0,2476	0,2200	20,2540	-0,9212
0,1500	9,2643	0,4507	0,2220	22,7556	-0,9656
0,1520	11,1755	0,5882	0,2240	15,6570	-0,9804
0,1540	7,1914	0,6237	0,2260	-6,5057	-0,9641
0,1560	3,4692	0,5715	0,2280	-28,4305	-0,9189
0,1580	-25,6806	0,5014	0,2300	-24,5461	-0,8551
0,1600	-38,9285	0,4934	0,2320	-20,1735	-0,7855
0,1620	-31,4201	0,5850	0,2340	-16,0843	-0,7144
0,1640	-28,9133	0,7595	0,2360	-3,3732	-0,6370
0,1660	-13,0934	0,9726	0,2380	0,4041	-0,5489
0,1680	0,0894	1,1829	0,2400	10,5509	-0,4543
0,1700	17,8683	1,3607	0,2420	-4,0581	-0,3611
0,1720	20,2650	1,4859	0,2440	-10,8819	-0,2719
0,1740	10,0233	1,5527	0,2460	-3,6797	-0,1815
0,1760	-1,2967	1,5727	0,2480	3,6360	-0,0856
0,1780	3,2562	1,5636	0,2500	13,9492	0,0143
0,1800	7,0728	1,5282	0,2520	19,0709	0,1150
0,1820	0,0384	1,4491	0,2540	38,1745	0,2175
0,1840	16,6517	1,3101	0,2560	33,1804	0,3244
0,1860	27,1750	1,1208	0,2580	11,9789	0,4331
0,1880	12,8932	0,9159	0,2600	-0,4736	0,5347
0,1900	-3,9261	0,7296	0,2620	-7,0511	0,6212
0,1920	-16,6087	0,5767	0,2640	-16,1120	0,6924
0,1940	-25,6426	0,4538	0,2660	-24,9020	0,7523
0,1960	-38,2617	0,3532	0,2680	-6,4777	0,8010
0,1980	-33,2337	0,2669	0,2700	1,0301	0,8340
0,2000	-15,1964	0,1824	0,2720	-1,2348	0,8480
0,2020	1,7042	0,0850	0,2740	-1,7882	0,8460
0,2040	4,7183	-0,0308	0,2760	-13,0024	0,8329
0,2060	4,4890	-0,1554	0,2780	-7,9861	0,8099
0,2080	7,1341	-0,2752	0,2800	-14,4013	0,7746
0,2100	0,2498	-0,3878	0,2820	-10,4797	0,7272
0,2120	-2,5411	-0,5021	0,2840	9,2425	0,6730
0,2140	-4,8949	-0,6236	0,2860	27,4779	0,6162

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (segundo ajuste) -
 figura 6.18 (continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)	tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,2880	27,7112	0,5555	0,3600	11,9902	0,3324
0,2900	22,5827	0,4865	0,3620	15,8355	0,3758
0,2920	24,3544	0,4082	0,3640	-1,8178	0,4150
0,2940	7,5800	0,3253	0,3660	-7,0945	0,4473
0,2960	-10,7179	0,2416	0,3680	8,9066	0,4698
0,2980	-16,4004	0,1565	0,3700	10,3751	0,4832
0,3000	-6,3629	0,0675	0,3720	8,3568	0,4906
0,3020	-4,6664	-0,0236	0,3740	5,5073	0,4929
0,3040	-6,5556	-0,1114	0,3760	2,5696	0,4876
0,3060	-1,3196	-0,1925	0,3780	-11,1428	0,4726
0,3080	-3,0778	-0,2681	0,3800	-26,2954	0,4498
0,3100	-16,9478	-0,3396	0,3820	-24,5975	0,4224
0,3120	-24,3454	-0,4047	0,3840	-21,0370	0,3910
0,3140	-23,5281	-0,4582	0,3860	-0,5459	0,3533
0,3160	-11,5021	-0,4985	0,3880	-2,5282	0,3083
0,3180	2,6608	-0,5287	0,3900	13,6299	0,2590
0,3200	7,5922	-0,5518	0,3920	20,4146	0,2086
0,3220	23,7873	-0,5664	0,3940	11,5233	0,1577
0,3240	30,7518	-0,5692	0,3960	5,0912	0,1042
0,3260	14,7562	-0,5604	0,3980	-2,7080	0,0480
0,3280	-0,7206	-0,5438	0,4000	13,6563	-0,0077
0,3300	2,1153	-0,5218	0,4020	4,4456	-0,0597
0,3320	-4,8897	-0,4924	0,4040	11,5638	-0,1083
0,3340	-9,3948	-0,4531	0,4060	20,5021	-0,1555
0,3360	-1,7284	-0,4051	0,4080	18,9621	-0,2010
0,3380	5,6446	-0,3525	0,4100	1,7608	-0,2418
0,3400	3,9518	-0,2974	0,4120	-12,1558	-0,2755
0,3420	-11,9909	-0,2379	0,4140	-13,3744	-0,3034
0,3440	-16,9550	-0,1719	0,4160	-24,7306	-0,3276
0,3460	-23,3078	-0,1021	0,4180	-18,7190	-0,3479
0,3480	-23,5964	-0,0329	0,4200	-13,6506	-0,3612
0,3500	-23,8706	0,0338	0,4220	1,1928	-0,3663
0,3520	-5,8950	0,0995	0,4240	12,1562	-0,3652
0,3540	11,9237	0,1653	0,4260	4,1040	-0,3604
0,3560	19,4915	0,2282	0,4280	2,2378	-0,3511
0,3580	16,9283	0,2841	0,4300	5,7016	-0,3351

Respostas Numéricas no Domínio do Tempo do Exemplo 1 (segundo ajuste) -
 figura 6.18 (continuação)

tempo (s)	aceleração viga elástica (m/s ²)	aceleração viga sanduíche (m/s ²)
0,4320	-0,0261	-0,3119
0,4340	-3,7202	-0,2844
0,4360	8,3779	-0,2550
0,4380	22,6009	-0,2230
0,4400	18,7498	-0,1863
0,4420	13,9437	-0,1457
0,4440	8,3671	-0,1043
0,4460	0,2216	-0,0642
0,4480	-19,2464	-0,0244
0,4500	-24,2319	0,0168
0,4520	-15,8108	0,0582
0,4540	-12,1189	0,0967
0,4560	-3,8121	0,1307
0,4580	-3,3969	0,1619
0,4600	3,2630	0,1919
0,4620	-0,6356	0,2191
0,4640	-8,2799	0,2406
0,4660	-13,6877	0,2560
0,4680	2,6854	0,2674
0,4700	9,3226	0,2762
0,4720	7,6023	0,2809
0,4740	22,3013	0,2790
0,4760	23,0542	0,2710
0,4780	9,5231	0,2595
0,4800	-4,0436	0,2460
0,4820	-10,9554	0,2287
0,4840	-12,7183	0,2059
0,4860	-16,8330	0,1788
0,4880	-13,5610	0,1505
0,4900	-1,9388	0,1220
0,4920	0,4557	0,0915
0,4940	-2,9455	0,0579
0,4960	-12,5431	0,0229
0,4980	-9,5311	-0,0104
0,5000	-8,9131	-0,0415