

Controle Ativo Modal de Vibrações Estruturais

Flávio de Souza Barbosa
Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

COPPE - UFRJ

CONTROLE ATIVO MODAL DE VIBRAÇÕES ESTRUTURAIS

BARBOSA, FLÁVIO DE SOUZA

Controle Ativo Modal de Vibrações Estruturais
ix, 90p., 29,7 cm, (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Dinâmica Estrutural
2. Controle de Vibrações Estruturais
3. Análise Modal

I. COPPE/UFRJ

II. TÍTULO (série)

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

- A Deus.
- Aos meus pais - Flávio e Janet - minha irmã - Luciana - e toda a minha família pelo carinho que recebo desde que nasci.
- Ao meu professor orientador Ronaldo Carvalho Batista pela confiança em mim depositada e pelos ensinamentos que recebi.
- À Natália, pessoa que mais me motivou a prosseguir no mestrado, dando-me amparo pessoal, emocional e profissional.
- Ao companheiro Marco Antônio Silva Pinheiro (Marco Baiano) que teve vital importância no desenvolvimento inicial deste trabalho, implementando procedimentos computacionais amplamente utilizados no decorrer da tese.
- Ao Élson, Walcyr, Bidu e Zé Alves pela ajuda nos instantes de se resolverem os problemas que vão desde a inscrição na COPPE, passando pela matemática e chegando aos arquivos Post Script e Gráficos 3-d.
- Ao Tio Jamison e ao Fernando pelos meses que me acolheram aqui no Rio de Janeiro
- À Tia Joseti à Graça por ajudarem meus pais na minha criação.
- Ao CNPq que viabilizou financeiramente o desenvolvimento deste trabalho
- Aos companheiros: Tuleba, Habib, Silcar, Kid Peixeira, 100%, Chicão, LuisP, Pietro “ o bom”, Paulinho, Assis, Petit Maurice, Walnório, Márcio Calango, Fábio, Mauricinho & Eliana e Flávio Bromélia, pelas ajudas para se tirar erros do programa, pelas descontrações no Anjinho, pelas comemorações no Plebeu e na Cervejaria Brasil (JF), e pela divisão no pagamento do aluguel.
- A todos os professores e funcionários do PEC da COPPE.
- A todos aqueles que me ajudaram e mereciam ser citados e por uma razão, que não me lembro, eu esqueci.

Resumo de Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE ATIVO MODAL DE VIBRAÇÕES ESTRUTURAIS

Flávio de Souza Barbosa

Fevereiro de 1996

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

A tendência cada vez mais forte de se projetar e construir estruturas leves e esbeltas, tem levado a problemas dinâmicos cujas medidas corretivas são, na maioria dos casos, conservadoras e pesadas, tal como a técnica costumeira de enrijecimento da estrutura. Por isto, as normas vigentes de projeto prescrevem, também de forma conservadora, limites inferiores para as frequências fundamentais de tipos específicos de estrutura segundo sua destinação.

Alternativamente, e de forma compatível com os conhecimentos científicos atuais, as estruturas leves podem ser projetadas de maneira segura com auxílio de sistemas de redução e/ou controle das amplitudes de vibrações induzidas pelas cargas dinâmicas atuantes. Raciocínio similar pode ser estendido às soluções dos problemas em estruturas existentes.

Este trabalho apresenta uma formulação para o problema de controle ativo ótimo modal com retroação, aplicado a sistemas estruturais discretizados pelo Método dos Elementos Finitos. O controle ótimo é obtido através da extremização de um funcional quadrático, que tem como critérios de performance a segurança estrutural e a praticidade do sistema de controle, tomando como medidas os deslocamentos nodais e forças de controle.

São apresentados e discutidos os aspectos relevantes para a implementação computacional de algoritmos numéricos capazes de simular o controle ativo de uma estrutura com n graus de liberdade via análise modal.

As respostas dinâmicas no domínio do tempo obtidas para os sistema estrutural não-controlado, são comparadas com suas respectivas respostas controladas, visando explicitar as vantagens e desvantagens dos algoritmos de controle ativo, bem como discutir a melhor disposição de atuadores para um controle mais efetivo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master Science (M.Sc.)

MODAL ACTIVE CONTROL OF STRUCTURAL VIBRATIONS

Flávio de Souza Barbosa

February, 1996

Thesis Supervisor: Ronaldo Carvalho Batista

Department: Civil Engineering

The strong inclination to design and build light and slender structures have led to dynamic problems whose corrective solutions are in most cases conservative and heavy, just like the usual technique of structural stiffening. Therefore, and also in a conservative manner, design rules in effect prescribe lower bounds to the fundamental frequencies for specific types of structures according to their destination.

Alternatively, and in agreement with the present scientific knowledge, light and slender structures may be safely designed using auxiliary systems for the reduction and/or control of the amplitudes of vibration, induced by the dynamic loads. Similar reasoning may be extended to the solutions of the problems in existent structures.

This work presents a formulation for the optimal modal active control with feedback, applied to structural systems discretized with Finite Elements. The optimal control is obtained by the extremization of a quadratic functional for which performance criteria are the structural safety and the feasibility of the control system. The control variables are taken as the nodal displacements and actuators forces.

It is also presented and discussed the important points for computational implementation of a numeric algorithms capable of simulating the active control of a structure with n degrees of freedom using modal analysis.

The uncontrolled dynamic responses of the analysed structural systems are compared with their controlled one, in order to show the advantages and the disadvantages of the active control algorithms, and also to discuss the best arrangement of the actuators to an effective control. The analysis are made in the time domain.

ÍNDICE

SIMBOLOGIA	ix
Capítulo I - INTRODUÇÃO	01
I.1 - Breve Histórico e Motivação do Trabalho	01
I.2 - Escopo	03
Capítulo II - DINÂMICA E CONTROLE DE ESTRUTURAS	04
II.1 - Sistema Estrutural Dinâmico	04
II.2 - Sistemas de Controle	06
II.2.1 - Sistemas de Controle Passivo	07
II.2.2 - Sistemas de Controle Ativo	09
II.2.3 - Sistemas de Controle Ativo/Passivo	10
II.3 - Formulação das Equações Diferenciais de Movimento	11
II.3.1 - Equações Lagrangianas de Movimento	11
II.3.2 - Equações Diferenciais de Movimento para Sistemas Discretos	14
II.3.3 - Equações Diferenciais de Movimento para Estruturas Discretizadas em Elementos de Pórtico Plano via Método dos Elementos Finitos	16
II.3.3 - Equações de Estado do Sistema	21
Capítulo III - ANÁLISE MODAL DE SISTEMAS CONTROLADOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	23
III.1 - Análise de Vibrações Livres de Estruturas Elásticas	23
III.1.1 - Propriedade de Ortogonalidade dos Auto-Vetores ou modos de Vibração	24
III.2 - Método da Superposição Modal	25
Capítulo IV - CONTROLE ÓTIMO MODAL	28
IV.1 - Aspectos Gerais	28
IV.2 - Modelos Matemáticos para Sistemas Estruturais Controlados	29
IV.2.1 - Equação Diferencial de Riccati	30
IV.2.2 - Equação Algébrica de Riccati	32
IV.2.3 - Controle Instantâneo	32
Capítulo V - SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO LINEAR ALGÉBRICO DE RICCATI PARA CONTROLE ÓTIMO MODAL	33
V.1 - Introdução	33

V.2 - Desenvolvimento da Equação Matricial do Problema Algébrico de Riccati	33
V.3 - Considerações sobre a Matriz de Ponderação Q	38
V.4 - Determinação da Configuração da Matriz de Riccati	38
V.5 - Aplicação do Algoritmo de Newton-Raphson para a Determinação da Matriz de Riccati	41
V.5.1 - Determinação dos Coeficientes da Matriz Jacobiana	43
V.5 - Comentários Adicionais	46
Capítulo VI - ALGORITMO NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO MODAL EM ESTRUTURAS DE PÓRTICO PLANO	48
VI.1 - Arquitetura do Programa	48
VI.2 - Descrição do Programa	49
Capítulo VII - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO CONTROLE MODAL	52
VII.1 - Viga sob Carregamento Harmônico	53
VII.1.1 - Descrição do Sistema Estrutural Dinâmico	53
VII.1.2 - Estudos Preliminares	55
VII.1.3 - Resposta Não-Controlada do Sistema	57
VII.1.4 - Controle Ativo do Sistema	58
VII.1.5 - Influência do Retardo na Atuação da Força de Controle	61
VII.1.6 - Comentários Adicionais	67
VII.2 - Pórtico de Três Andares sob Carga Simulada de Vento	69
VII.1.1 - Descrição do Sistema Estrutural Dinâmico	69
VII.1.2 - Estudos Preliminares	72
VII.1.3 - Resposta Não-Controlada do Sistema	74
VII.1.4 - Controle Ativo do Sistema	76
VII.1.5 - Desempenho dos Atuadores	84
VII.1.6 - Comentários Adicionais	86
Capítulo VIII - CONCLUSÕES	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90

SIMBOLOGIA

A	- área da seção transversal do elemento (m^2)
$b(t)$	- sinal sensoriado da estrutura
c	- coeficiente de amortecimento viscoso
C	- matriz de amortecimento
\overline{C}	- matriz de amortecimento modal
C^*	- matriz de amortecimento alterada pelas propriedades dinâmicas do sistema auxiliar para controle passivo
\mathcal{C}	- matriz de correspondência entre a resposta modal do sistema e a resposta modal observada
dt	- diferencial de tempo
$e(t)$	- medida de erro
E	- módulo de elasticidade
$f[x(t)]$	- forças elásticas ou histeréticas
$f[\dot{x}(t)]$	- forças amortecedoras
$f_c(t)$	- forças de controle dependente do tempo
$f_e(t)$	- força excitação do sistema
$F_A[x(t)]$	- forças geradas no sistema auxiliar para controle passivo
F_c	- forças de controle de maneira genérica
\mathbf{F}_c	- vetor de forças de controle atuantes na estrutura
$\overline{\mathbf{F}}_c$	- vetor de força de controle modal
\mathcal{F}	- função de dissipação de Rayleigh
\mathcal{H}	- função Hamiltoniana
I	- matriz identidade
I	- momento de inércia da seção transversal do elemento (m^4)
\mathcal{I}	- impulso ($N.m$)
J	- matriz Jacobiana
J	- número de modos de vibração tomados na superposição
\mathcal{J}	- funcional quadrático do controle ótimo
k	- coeficiente de rigidez
\mathbf{K}	- matriz de rigidez
$\overline{\mathbf{K}}$	- matriz de rigidez modal
\mathbf{K}^*	- matriz de rigidez alterada pelas propriedades dinâmicas do sistema auxiliar para controle passivo
L	- Comprimento do elemento (m)
\mathcal{L}	- Lagrangeano
m	- coeficiente de massa
\mathbf{M}	- matriz de massa
$\overline{\mathbf{M}}$	- matriz de massa modal
\mathbf{M}^*	- matriz de massa alterada pelas propriedades dinâmicas do sistema auxiliar para controle passivo
N	- esforço normal (N)

π	- 3,14159...
\mathcal{P}	- matriz de Riccati
\mathbf{q}	- vetor de deslocamentos generalizados do sistema
Q	- forças não conservativas, exetundo as de controle
\mathcal{Q}	- vetor de forças atuantes na estrutura exetundo as forças de controle
Q^A	- forças de amortecimento
Q^D	- forças aplicadas no sistema estrutural
\mathcal{Q}	- matriz de ponderação e ajuste dimensional para deslocamentos
$r(t)$	- trajetória de um ponto do sistema
$r_{ef}(t)$	- sinal de referência, ou resposta desejada
\mathcal{R}	- matriz de ponderação e ajuste dimensional para forças de controle
\mathcal{S}	- matriz de ponderação e ajuste dimensional para deslocamentos
t	- variável que descreve o tempo
T	- energia cinética total
$\mathbf{u}(t)$	- vetor de forças de controle
$\bar{\mathbf{u}}(t)$	- forças de controle ótimas
$u(x, t)$	- campo de deslocamentos axiais
U	- energia de deformação elástica
$v(x, t)$	- campo de deslocamentos transversais
V	- energia potencial total
W_c	- trabalho realizado pelas forças conservativas
W_{F_c}	- trabalho realizado pelas forças de controle
W_{nc}	- trabalho realizado pelas forças não conservativas
W_Q	- trabalho realizado pelas forças não conservativas, exetundo as de controle
W_{Q^A}	- trabalho realizado pelas forças dissipativas ou de amortecimento
W_{Q^D}	- trabalho realizado pelas forças aplicadas no sistema estrutural
$\mathbf{x}(t)$	- vetor de estado do sistema
$y(t)$	- coordenadas das amplitudes modais
α, β	- constantes reais relativas a proporcionalidade da matriz de amortecimento
δ	- operador variacional
η	- retardo de tempo
Φ	- matriz de auto-vetores ou modos de vibração
Γ	- matriz de ganho
$\lambda(t)$	- multiplicadores de Lagrange
$\bar{\lambda}(t)$	- multiplicadores ótimos de Lagrange
Λ	- vetor n -dimensional
Θ	- funções de interpolação do elemento
ω	- vetor de auto-valores ou frequências naturais de vibração
ω	- frequência circular de vibração do sistema (rad/s)
ω_e	- frequência circular de exitação (rad/s)
Ω	- Potencial das forças externas
el	- referencia ao elemento
u, v	- referencia à direção u ou v

Chapter 1

Introdução

1.1 Breve Histórico e Motivação do Trabalho

O projeto de novas estruturas ou a verificação de estruturas existentes, sujeitas a ações dinâmicas de grande intensidade e/ou faixas de frequências próximas às frequências naturais de uma dada estrutura, envolve critérios, por vezes conflitantes, de segurança, funcionalidade e também de conforto dos usuários.

Os avanços tecnológicos em áreas como materiais, equipamentos eletrônicos e computação, aliado a fatores econômicos e de criatividade e arrojo dos engenheiros, tem levado a uma tendência de se projetar estruturas cada vez mais leves e esbeltas e, portanto, flexíveis. Esta tendência tem induzido os engenheiros estruturais a considerarem a utilização de sistemas auxiliares para reduzir as amplitudes de resposta dinâmica e atender aos critérios de segurança, funcionalidade e conforto requeridas [1,2].

De acordo com esta nova filosofia de projeto estrutural, limites práticos usualmente considerados, tais como altura de edifícios, vão de ponte e esbeltez de máquinas e equipamentos, podem ser ultrapassados com a utilização de sistemas de controle dinâmico.

Na elaboração de um sistema de controle dinâmico, deparamos com várias incertezas, que por vezes, podem inviabilizar esta concepção. Tais incertezas podem estar relacionadas com as características físicas da estrutura, ou mesmo com o carregamento solicitante [2].

Para contornar os problemas oriundos dessas incertezas, utiliza-se um **sistema dinâmico de controle ativo com retroação**. Este sistema de controle além de proporcionar melhoria de desempenho do sistema estrutural segundo os critérios citados, minimiza as incertezas inerentes às características estruturais e ao carregamento, pois a sua forma de atuação depende da resposta sensorizada do sistema.

Esse controle ativo é formulado a partir da teoria de controle ótimo [1,2] e toda a formulação é desenvolvida no domínio do tempo. As vantagens oferecidas por um método de controle otimizado são, entretanto, perdidas quando se tratam sistemas com muitos graus de liberdade. A solução das equações de estado do sistema controlado requer a solução prévia de um outro sistema de equações diferenciais, ou algébricas, não-lineares de Riccati, o qual tem a mesma dimensão do sistema de equações diferenciais de primeira ordem que rege o comportamento dinâmico do sistema estrutural controlado.

Para contornar essa aparente dificuldade na solução do problema algébrico não-linear, alguns pesquisadores têm sugerido a utilização de algoritmos numéricos que servem de esquema de linearização e extremização passo a passo durante o processo de integração numérica das equações de movimento controlado [3-5]

Uma outra alternativa encontrada na literatura técnica [1] para a solução das equações algébricas não-lineares resultantes do problema de Riccati para sistemas controláveis (isto é, problemas para os quais os termos transientes se tornam constantes para um tempo ilimitado de controle) é a utilização de um procedimento matricial conhecido como algoritmo de Potter [6], o qual reduz o problema não-linear a um problema algébrico de auto-valor. Esse procedimento não é aqui utilizado, já que o problema de auto-valor resultante tem a mesma dimensão do sistema de equações de estado controlado e é bem conhecido o esforço computacional na solução desses problemas oriundos da discretização do sistema estrutural em muitos graus de liberdade.

A adoção de uma **análise modal** na avaliação da performance de um **sistema estrutural com controle retroativo**, é bastante vantajosa, porque reduz os inúmeros graus de liberdade de uma estrutura, a alguns graus de liberdade generalizados associados às formas modais de vibração consideradas.

Além da óbvia vantagem da utilização de uma técnica de redução de graus de liberdade na análise de sistemas estruturais convencionais (ou não-controlados), a análise modal representa uma enorme vantagem também na solução das equações de Riccati [1].

A aplicação da análise modal combinada com a teoria de controle ótimo para a solução das equações algébricas não-lineares de Riccati, oriundas de um problema estrutural dinâmico com controle retroativo, constitui-se na principal contribuição desse trabalho à literatura técnica e ao desenvolvimento de pesquisas sobre “Redução e Controle de Vibrações Estruturais” no PEC-COPPE/UFRJ, sob coordenação do Professor Ronaldo Carvalho Batista.

1.2 Escopo

O presente texto foi dividido em 8 (oito) capítulos, incluindo essa introdução, com o objetivo de expor, de uma forma mais clara, o trabalho desenvolvido sobre **Controle Ativo Modal**.

Os capítulos II, III e IV foram escritos com base na referência [2] e têm por objetivo mostrar os conceitos de Dinâmica voltados para uma filosofia de **Sistemas Controlados**. Incluem-se nestes capítulos, apresentações sucintas de:

- Tipos de controle
- Equações diferenciais de movimento
- Método da superposição modal - via MEF
- Controle ótimo modal

O capítulo V faz uma análise detalhada dos procedimentos algébricos/numéricos, para a determinação da Matriz de Riccati contida na Equação Matricial Algébrica Modal desenvolvida a partir do problema clássico de Riccati. A determinação desta matriz é de fundamental importância para se efetuar o controle ativo do sistema via análise modal.

O capítulo VI faz um resumo dos passos adotados para elaboração do código computacional, dando ênfase à rotina “CONTROLE”, que utiliza os dois algoritmos de controle implementados para a redução efetiva de vibrações do sistema estrutural:

- Controle algébrico; tal como descrito nos capítulos anteriores
- Controle instantâneo; tal como sugerido por J. N. Yang et alli [3]

O capítulo VII mostra duas aplicações do controle ótimo modal à problemas de dinâmica estrutural

- Viga sob excitação harmônica
- Edificação sob carregamento simulado de vento

As seções VII.1 e VII.2, apresentam as respectivas análises dos resultados obtidos e, ao final, alguns comentários adicionais, e um resumo das principais conclusões sobre desempenho dos algoritmos de controle.

O capítulo VIII apresenta as conclusões gerais sobre os resultados alcançados e comenta os aspectos mais relevantes do tema abordado neste trabalho, sugerindo alguns outros temas correlatos para prosseguimento dessa linha de pesquisa em Engenharia Estrutural no PEC-COPPE/UFRJ.

Chapter 2

Dinâmica e Controle de Estruturas

2.1 Sistema Estrutural Dinâmico

Um sistema estrutural dinâmico é caracterizado pela própria estrutura e pelas forças dinâmicas que sobre ele atuam. Uma vez solicitado, o sistema mostra uma resposta que é descrita pelas acelerações, velocidades e deslocamentos dos seus pontos característicos.

Dependendo de suas características geométricas e propriedades mecânicas de seus componentes, bem como das propriedades físicas dos materiais que o compoem, um sistema estrutural pode apresentar comportamento linear ou não-linear. O grau de não-linearidade de um sistema depende da qualidade e das amplitudes de sua resposta.

Um sistema tem comportamento dito linear quando é válido o **princípio da superposição de efeitos**, ou seja : O sistema é linear se para uma excitação $f_e(t) = f_{e_1}(t) + f_{e_2}(t) + \dots + f_{e_N}(t)$, a resposta do sistema é dada por $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_N(t)$

Sendo:

- t , a variável que descreve o tempo
- $f_e(t) = \sum_{i=1}^N f_{e_i}(t)$ a força de excitação
- $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$ a variável característica que descreve o estado ou resposta do sistema para uma excitação $f_e(t)$
- $x_n(t)$ a resposta para $f_{e_n}(t)$ ($n = 1 \dots N$)

O grau de não linearidade de um sistema estrutural é de grande importância na análise da relação entre a força de excitação dinâmica ($f_e(t)$) e sua resposta ($x(t)$).

O interrelação entre a variável característica ($x(t)$) e a força de excitação dinâmica ($f_e(t)$), é dado pela equação diferencial do tipo :

$$D(t)x(t) = f_e(t) \quad (2.1)$$

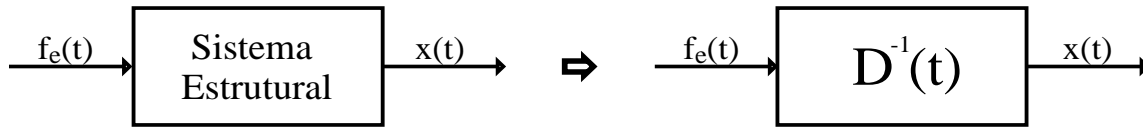


figura II.1

onde, $D(t)$ é um operador diferencial.

Se o problema tratado é um sistema dinâmico estrutural, o operador diferencial $D(t)$ é de segunda ordem, o que resulta em uma equação diferencial que escreve-se de forma simbólica:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + f[x(t)] + f[\dot{x}(t)] = f_e(x, t) \quad (2.2)$$

onde,

- $\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$
- $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$
- M é a massa da estrutura
- C é o amortecimento da estrutura
- K é a rigidez da estrutura
- $M\ddot{x}(t)$ é a resultante das forças de inércia
- $C\dot{x}(t)$ é a resultante das forças de amortecimento viscoso linear
- $Kx(t)$ é a força elástica linear
- $f[x(t)]$ são termos não lineares em $x(t)$ que, em geral, representam parcelas de forças elásticas ou histeréticas, oriundas da não linearidade geométrica ou física do sistema

- $f[\dot{x}(t)]$ são termos não lineares em $\dot{x}(t)$ que representam parcelas de forças restauradoras ou amortecedoras oriundas da interação com o meio, como, por exemplo, forças de amortecimento aerodinâmico, hidrodinâmico, etc
- $f_e(x, t)$ são as forças dinâmicas não conservativas. De forma geral, $f_e = f_e(x, \dot{x}, t)$, tal como as forças aeroelásticas e hidroelásticas que dependem do movimento da própria estrutura

A equação (II.2) representa assim, a equação de movimento de um sistema estrutural dinâmico não linear. Se $f[x(t)]$ e $f[\dot{x}(t)]$ forem aproximadas como funções lineares, a equação (II.2) representará a equação de movimento de um problema dinâmico também linear, a qual pode ser simplificada por:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f_e(t) \quad (2.3)$$

Cabe então uma identificação estrutural a fim de que possamos determinar os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento, bem como as forças de excitação para bem definirmos a resposta do sistema não controlado (sistema natural) no decorrer do tempo.



figura II.2

Para se obter redução de vibrações em um sistema natural, são necessárias alterações em uma ou mais propriedades da estrutura (massa, rigidez ou amortecimento). De uma forma geral, a solução deste problema se dá pelo aumento de rigidez, sem aumento significativo de massa.

A alteração de parâmetros estruturais nem sempre é viável, quer seja por ordem técnica, quer seja por questões práticas. Nestas situações, para obtermos redução de amplitude de resposta, deve-se optar por sistemas de controle auxiliares.

2.2 Sistemas de Controle

A partir da equação (II.3), pode-se escrever a equação diferencial que descreve a resposta do sistema estrutural controlado. Ela é obtida através da consideração de que

as forças que agora atuam na estrutura são $f_e(t) + F_c$. Onde F_c são as forças de controle. Assim a equação (II.3) fica:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{F}_c \quad (2.4)$$

Pode-se dividir os sistemas de controle em três grupos:

- Sistema de Controle Passivo (SCA)
- Sistema de Controle Ativo (SCA)
- Sistema de Controle Passivo/Ativo (SCP/A)

2.2.1 Sistema de Controle Passivo (SCP)

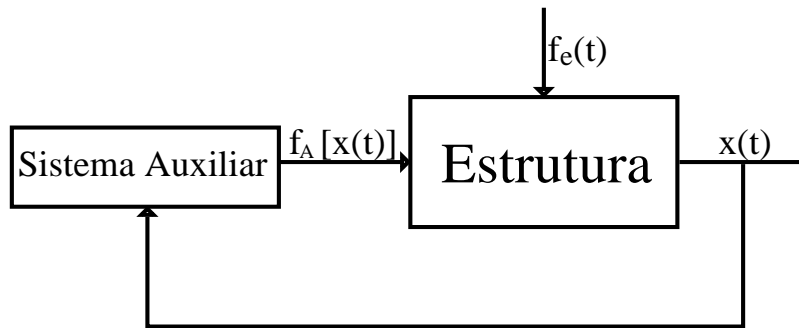


figura II.3 - Esquema de Controle Passivo

Para esse tipo de controle, tem-se a introdução de forças dissipativas por meio de sistemas auxiliares. Essas forças têm magnitudes dependentes das amplitudes de resposta e não são aplicadas por meio de atuadores.

No SCP tem-se $\mathbf{F}_c = \mathbf{f}_A[x(t)]$, onde $\mathbf{f}_A[x(t)]$ é a força gerada no sistema auxiliar que altera as propriedades do sistema estrutural.

A equação diferencial que rege o comportamento estrutural de um sistema passivo, também pode ser escrita de uma forma geral:

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}^*\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_e(t) \quad (2.5)$$

onde, \mathbf{M}^* , \mathbf{C}^* , \mathbf{K}^* são as propriedades do sistema estrutural alteradas pelas propriedades do sistema dinâmico auxiliar.

O SCP é geralmente um sistema de controle de ciclo fechado, pois a magnitude da força de controle depende diretamente das amplitudes de resposta ($\mathbf{x}(t)$).

A performance de um SCP está diretamente ligada à calibração prévia entre sistema auxiliar e estrutura (relação entre massas, frequências naturais, etc).

Existem dois tipos de Controle Passivo:

- **SCP Não Sensoriado**

Este sistema trata as propriedades dinâmicas da estrutura bem como do sistema auxiliar como invariantes no tempo.

Características de um SPC Não Sensoriado :

- A força de controle ($\mathbf{f}_A(t)$) gerada pelo sistema auxiliar é função da resposta da estrutura e também das propriedades características do próprio sistema auxiliar. Estas propriedades, por sua vez, dependem do sistema dinâmico que se deseja controlar, e dos níveis desejáveis de redução de vibração.
- Não possui regulador automático . Esta característica não permite ao SCP compensar perturbações inesperadas do sistema dinâmico.
- A ausência de um regulador automático pode resultar em perda de eficiência do sistema de controle, visto que a resposta da estrutura está intimamente ligada ao ajuste entre sistema auxiliar e estrutura.

- **SCP Sensoriado**

Através do sensoriamento da estrutura, pode-se introduzir um sistema auxiliar com parâmetros dinâmicos (massa, rigidez e amortecimento) variantes com o tempo. Esta flexibilidade dos parâmetros estruturais do sistema auxiliar, possibilita ajustes nas relações entre seus parâmetros dinâmicos e os da estrutura, viabilizando uma boa calibração a cada instante de tempo.

Características de um SPC Sensoriado :

- Assim como num SCP Não Sensoriado, a força de controle ($\mathbf{f}_A(t)$) gerada pelo sistema auxiliar é função da resposta da estrutura e também das propriedades características do próprio sistema auxiliar. Porém as características do sistema auxiliar não são invariantes
- A calibração ajustável, possibilita uma melhor performance do SCP Sensoriado com relação ao Não Sensoriado. Esta característica torna o sistema capaz de compensar pequenas incertezas e perturbações, tanto do carregamento quanto da própria estrutura principal.

2.2.2 Sistema de Controle Ativo

Neste caso são introduzidas forças de controle no sistema, por meio de atuadores (macaco hidráulico, motor elétrico, etc).

Considera-se aqui dois tipos de controle ativo:

- Controle de Ciclo Aberto (“open-loop control”)

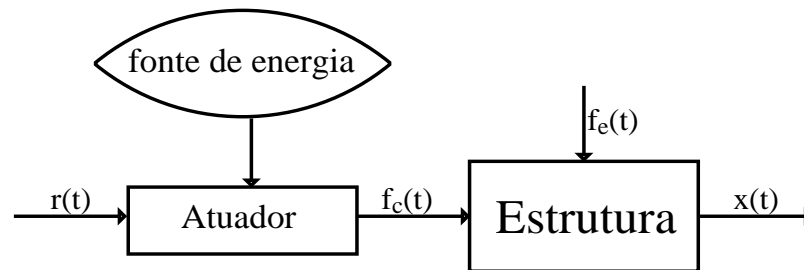


figura II.4 - Esquema de Controle Ativo de Ciclo Aberto

É dito de ciclo aberto porque a força de controle (F_c) não é função direta das amplitudes de resposta

Para este caso tem-se uma força de controle $F_c = f_c(t)$, ou seja, dependente apenas do tempo e função de um sinal de referência $r(t)$

Principais características de SCA com Ciclo Aberto:

- $r(t)$ é pré-programada e não depende de $x(t)$
- O atuador depende de uma fonte de energia externa
- Não permite correção da força de controle se o sistema estrutural e/ou força de controle forem alterados
- A força de controle $f_c(t)$ é determinada previamente em função das características dinâmicas da estrutura, da força de excitação, além do estado inicial do sistema.

Este tipo de controle produz bons resultados para sistemas estruturais para os quais a força de excitação tenha um comportamento conhecido e bem definido. Caso ocorra alguma variação significativa no comportamento da força de excitação (alteração do período de oscilação para carga harmônica, retardo, etc), a força de controle perde em eficiência no que diz respeito à redução das amplitudes de resposta, podendo até causar instabilidade do sistema.

- Controle de Ciclo Fechado (“closed-loop control”)

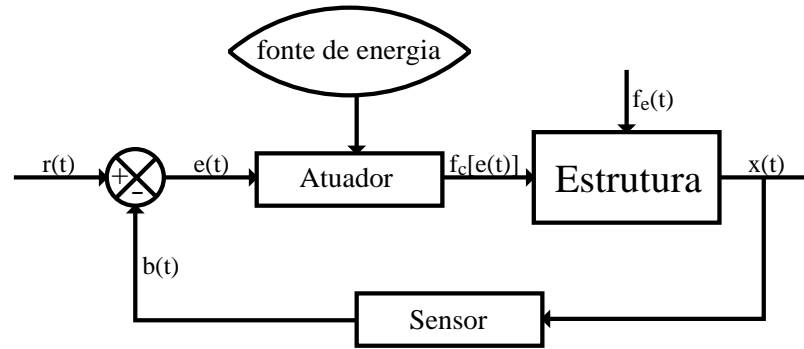


figura II.5 - Esquema de Controle Ativo de Ciclo Fechado

É dito de ciclo fechado pois a força de controle (\mathbf{F}_c) é função direta das amplitudes de resposta (sistema sensoriado). A força de controle é função da diferença entre um sinal de referência ($\mathbf{r}(t) \rightarrow$ resposta desejada) e a resposta real ($\mathbf{x}(t)$), ou seja: $\mathbf{F}_c = \mathbf{f}_c[\mathbf{r}(t) - \mathbf{x}(t)]$.

Principais características de SCA com Ciclo Fechado:

- A estrutura é sensoriada para obtenção do sinal de sua resposta real.
- A força de controle é regulada automaticamente, visto que o sensoramento da estrutura permite que se faça a reanálise da medida de erro ($\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{b}(t)$, $\mathbf{b}(t) \rightarrow$ sinal sensoriado da estrutura) a cada instante de tempo, fator fundamental para sua determinação.
- Assim como no SCA com Ciclo Aberto, a resposta desejada $\mathbf{r}(t)$ é programada em função dos níveis de deslocamentos, velocidades e acelerações desejáveis.

O SCA com Ciclo Fechado ou Sistema de Controle com Retroação é capaz de poder compensar :

- Perturbações ou distúrbios inesperados na força de excitação
- Incertezas inerentes às propriedades e características dinâmicas da estrutura bem como, nas medidas dos sensores e atuadores .

2.2.3 Sistema de Controle Passivo/Ativo (SCP/A)

São sistemas de controle que possuem características híbridas, ou seja, possuem atuadores e dissipadores de energia.

A função do sistema de controle passivo é, nesse caso, a de reduzir as amplitudes de resposta da estrutura sob ação de forças dinâmicas mais frequentes num estado normal de utilização ou em serviço. A função do sistema de controle ativo, nessa composição híbrida, é manter reduzida e controlada a resposta da estrutura sob ação de forças excepcionais, evitando que ela seja levada a um estado limite último.

2.3 Formulação das Equações Diferenciais de Movimento

Feita a identificação das propriedades e a investigação do comportamento estrutural, bem como as considerações teórico-práticas para se avaliar que tipo de controle deve-se adotar, passa-se para a formulação das equações diferenciais que regem o movimento da estrutura ou equações de estado do sistema. As formulações aqui apresentadas para sistemas contínuos e discretos, seguem aquelas apresentadas nas referências [1,2].

2.3.1 Equações Lagrangianas de Movimento

As equações diferenciais de movimento de um sistema estrutural, são deduzidas preferencialmente de princípios variacionais de energia, onde as quantidades envolvidas são descritas como funções escalares e não vetoriais, facilitando as operações entre as grandezas envolvidas.

Utiliza-se aqui o “Princípio de Hamilton Generalizado” para dedução das equações Lagrangianas de movimento.

O “Princípio de Hamilton Generalizado” é obtido através da variação, no espaço configuração, da trajetória de equilíbrio $r_j = r_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N$, considerando que a trajetória variada $r_j + \delta r_j$ coincide com $r_j(t)$ em dois instantes de tempo t_1 e t_2 , ou seja $\delta r_j(t_1) = \delta r_j(t_2) = 0$

onde,

- $r_j = r_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, N$ representam as j -ésimas trajetórias dos pontos do sistema estrutural.
- δr_j é a variação da j -ésima trajetória

O “Princípio Variacional de Hamilton Generalizado” é dado por :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W_c + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (2.6)$$

onde,

- δT é variação da energia cinética total
- δW_c é a variação do trabalho realizado pelas forças conservativas
- δW_{nc} é a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas

Considerando duas parcelas de forças não-conservativas Q e F_c , pode-se dizer que

$$\delta W_{nc} = \delta W_Q + \delta W_{F_c} \quad (2.7)$$

onde,

- δW_Q é a variação do trabalho realizado por todas as forças não conservativas (Q), excetuando a variação do trabalho realizado pelas forças de controle (F_c)
- δW_{F_c} é a variação do trabalho realizado pelas forças de controle (F_c).

Substituindo (II.7) em (II.6) tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W_c + \delta W_Q + \delta W_{F_c}) dt = 0 \quad (2.8)$$

Sendo:

$$\delta W_c = -\delta V \quad (2.9)$$

onde,

- δV é a variação da energia potencial total

E introduzindo o Lagrangiano (\mathcal{L}):

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2.10)$$

onde,

- T energia cinética total
- V energia potencial total

Pode-se reescrever a equação (II.8) na forma :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta\mathcal{L} + \underbrace{\delta W_Q + \delta W_{F_c}}_{\delta W_{nc}}) dt = 0 \quad (2.11)$$

O trabalho realizado pelas forças não conservativas pode ser escrito como:

$$W_{nc} = \sum_{i=1}^N (Q_i + F_{c_i}) q_i \quad (2.12)$$

onde,

- Q_i ($i = 1, \dots, N$) são as forças não conservativas atuantes na i -ésima direção generalizada do sistema, excetuando as forças de controle.
- F_{c_i} ($i = 1, \dots, N$) forças de controle atuantes na i -ésima direção generalizada do sistema. As forças de controle são forças não conservativas visto que buscam dissipar energia do sistema, reduzindo suas amplitudes de resposta.
- q_i ($i = 1, \dots, N$) são os deslocamento generalizados do sistema

Pode-se então escrever a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas:

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^N (Q_i + F_{c_i}) \delta q_i \quad (2.13)$$

Notando que \mathcal{L} é função das coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas e do tempo, ou seja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$, tem-se que:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (2.14)$$

Introduzindo (II.13) e (II.14) em (II.11) e integrando por partes tem-se:

$$\left. \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - Q_i - F_{c_i} \right] \delta q_i dt = 0 \quad (2.15)$$

Mas, para sistemas holonômicos, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$; $i = 1, \dots, N$ e δq_i são deslocamentos arbitrários e diferentes de zero. Com isso a equação (II.15) fica :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i + F_{c_i} \quad (2.16)$$

Estas são as equações Lagrangeanas do movimento.

2.3.2 Equações Diferenciais de Movimento para Sistemas Discretos

Para pequenas amplitudes de vibração em torno de uma configuração de equilíbrio $q_i^e = \text{constante}$; $\dot{q}_i^e = \ddot{q}_i^e = 0$ e com a hipótese de pequenos deslocamentos, pode-se considerar as equações de movimento, em torno de um estado de equilíbrio, linearizadas. Logo, para sistemas estruturais lineares as quantidades escalares envolvidas na dedução das equações diferenciais (ordinárias para sistemas discretos) são formas quadráticas em termos das coordenadas generalizadas $q_i(t)$ e velocidades generalizadas $\dot{q}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$

A Energia Cinética Total (T) de um sistema discreto é dada por :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.17)$$

onde, m_{ij} são os coeficientes de massa

A Energia Potencial Total (V) de um sistema discretizado é dada por :

$$V = \Omega + U \quad (2.18)$$

onde,

- Ω é o potencial de forças externas conservativas
- U é a energia de deformação Elástica

Expandindo-se $V(q_i)$ em série de Taylor em torno da configuração de equilíbrio ($q_i^e = \text{constante}$ $\dot{q}_i^e = 0$) tem-se :

$$V(q_i) = V(q_i^e) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} V(q_i^e) q_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} V(q_i^e) q_i q_j + 0_i(q_i^3) \quad (2.19)$$

Mas (q_i^e) é um ponto de equilíbrio, logo:

$$V(q_i^e) = 0 \quad (2.20)$$

e assim,

$$\frac{\partial}{\partial q_i} V(q_i^e) q_i = \frac{\partial}{\partial q_i} U(q_i^e) q_i = 0 \quad (2.21)$$

Portanto, desprezando-se os termos de ordem igual ou maior que três :

$$V(q_i) \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} U(q_i^e) q_i q_j \quad (2.22)$$

Chamando $\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} U(q_i^e)$ de k_{ij} e reescrevendo a parcela quadrática de V , chega-se à seguinte forma :

$$V(q_i) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} q_i q_j \quad (2.23)$$

onde, k_{ij} são os coeficientes de rigidez elástica linear.

O Trabalho realizado pelas forças não conservativas (W_{nc}) pode ser separado em três parcelas: uma contendo o trabalho das forças dissipativas ou de amortecimento (Q_i^A), outra contendo o trabalho das forças externas aplicadas ao sistema estrutural (Q_i^D), e outra contendo o trabalho realizado pelas forças de controle (F_{c_i}). Em outras palavras:

$$W_{nc} = W_{Q_i^A} + W_{Q_i^D} + W_{F_{c_i}} \quad (2.24)$$

As forças de amortecimento podem ser obtidas da função de dissipação de Rayleigh (\mathcal{F}_R):

$$Q_i^A = -\frac{\partial \mathcal{F}_R}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (2.25)$$

sendo,

$$\mathcal{F}_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.26)$$

onde, c_{ij} são os coeficientes de amortecimento viscoso

Considerando-se $Q_i = Q_i^D + Q_i^A$ pode-se escrever a equação de Lagrange (II.16) na forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}_R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^D + F_{c_i} \quad (2.27)$$

Substituindo-se as equações (II.17), (II.23) e (II.26) em (II.27) obtêm-se as equações Lagrangeanas linearizadas de movimento para sistemas discretos:

$$\sum_{j=1}^N (m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j) = Q_i^D + F_{c_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.28)$$

As equações (II.28) podem ser escritas na forma matricial, usualmente utilizada na dinâmica estrutural:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_c \quad (2.29)$$

onde,

- \mathbf{M} é a matriz de massa
- \mathbf{C} é a matriz de amortecimento
- \mathbf{K} é a matriz de rigidez
- \mathbf{Q} é o vetor de forças externas atuantes na estrutura excetuando as forças de controle
- \mathbf{F}_c é o vetor de forças de controle

2.3.3 Equações Diferenciais do Movimento para Estruturas Discretizadas em Elementos de Pórtico Plano via Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos aplicado à Análise Estrutural é, basicamente, um procedimento de discretização de uma estrutura complexa através da montagem de elementos estruturais finitos. Tais elementos são tratados como contínuos e os deslocamentos em qualquer ponto no interior de um elemento são funções dos deslocamentos nodais nos extremos do mesmo (ver figura II.6).

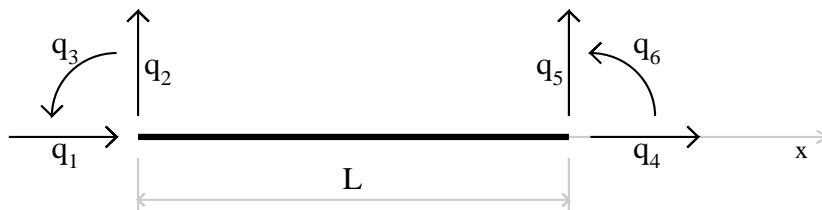


figura II.6 - Elemento de Pórtico Plano

Sendo $u(x, t)$ o campo de deslocamentos axiais e $v(x, t)$ o campo de deslocamentos transversais, pode-se escrever para um elemento de pórtico plano a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1(x) & 0 & 0 & \Theta_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1(x) & \Theta_2(x) & 0 & \Theta_5(x) & \Theta_6(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

ou,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \Theta_1(x)q_1(t) + \Theta_4(x)q_4(t) \\ v(x, t) &= \Theta_2(x)q_2(t) + \Theta_3(x)q_3(t) + \Theta_5(x)q_5(t) + \Theta_6(x)q_6(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde,

- $\xi = \frac{x}{L}$
- $\Theta_1(x) = (1 - \xi)$
- $\Theta_2(x) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1$
- $\Theta_3(x) = L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)$
- $\Theta_4(x) = \xi$
- $\Theta_5(x) = -2\xi^3 + 3\xi^2$
- $\Theta_6(x) = L(\xi^3 - \xi^2)$

As funções $\Theta_1(x)$ e $\Theta_2(x)$ são obtidas tomando-se uma variação linear para os deslocamentos axiais $u(x, t)$ no interior da barra, tendo como condições de contorno:

- $u(0, t) = q_1(t)$
- $u(L, t) = q_4(t)$

Já as funções $\Theta_2(x)$ e $\Theta_3(x)$ $\Theta_5(x)$ e $\Theta_6(x)$ são obtidas tomando-se uma variação cúbica para os deslocamentos transversais $v(x, t)$ no interior da barra, tendo como condições de contorno:

- $v(0, t) = q_2(t)$

- $v(L, t) = q_5(t)$
- $\frac{\partial}{\partial x}v(0, t) = q_3(t)$ (rotação)
- $\frac{\partial}{\partial x}v(L, t) = q_6(t)$ (rotação)

Aplicando o Princípio Variacional de Hamilton generalizado, escrito na forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W_c + \delta W_Q + \delta W_{F_c}) dt = 0 \quad (2.32)$$

Sendo $\delta W_c = -\delta V$ tem-se para um elemento:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T^{el} - \delta V^{el} + \delta W_Q^{el} + \delta W_{F_c}^{el}) dt = 0 \quad (2.33)$$

onde,

- el é o super-índice relativo ao elemento
- δT^{el} é variação da energia cinética total do elemento
- δV^{el} é a variação da energia potencial total do elemento.
- δW_Q^{el} é a variação do trabalho realizado por todas as forças não conservativas, excetuando as forças de controle, no elemento
- $\delta W_{F_c}^{el}$ é a variação do trabalho realizado pelas forças de controle no elemento.

A energia cinética total do elemento (T^{el}) é:

$$T^{el} = \frac{1}{2} \int_0^L m[\dot{u}(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L m[\dot{v}(x, t)]^2 dx \quad (2.34)$$

onde,

- m é a massa por unidade de comprimento do elemento
- $\dot{u}(x, t)$ é a derivada de $u(x, t)$ em relação ao tempo
- $\dot{v}(x, t)$ é a derivada de $v(x, t)$ em relação ao tempo

A energia potencial total do elemento (V^{el}), poder ser escrita como [2] :

$$V^{el} = \frac{1}{2} \int_0^L EA[u_{,x}(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI[v_{,xx}(x, t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L N[v_{,x}(x, t)]^2 dx \quad (2.35)$$

onde,

- E é o módulo de elasticidade do material constitutivo do elemento
- A é área da seção transversal do elemento
- I é o momento de inércia da seção transversal do elemento
- N é o esforço normal atuante no elemento
- $u_{,x}(x, t)$ é a derivada de $u(x, t)$ em relação a x
- $v_{,x}(x, t)$ é a derivada de $v(x, t)$ em relação a x
- $v_{,xx}(x, t)$ é a derivada segunda de $v(x, t)$ em relação a x

O trabalho realizado por todas as forças não conservativas (W_Q^{el}), excetuando o trabalho realizado pelas forças de controle, no elemento, pode ser escrito como :

$$W_Q^{el} = \int_0^L Q_u^{el} u(x, t) dx + \int_0^L Q_v^{el} v(x, t) dx \quad (2.36)$$

onde,

- Q_u^{el} representam as forças não conservativas, excetuando as de controle, aplicadas na direção u do elemento
- Q_v^{el} representam as forças não conservativas, excetuando as de controle, aplicadas na direção v do elemento

O trabalho realizado pelas forças de controle ($W_{F_c}^{el}$) atuantes no elemento pode ser escrito como :

$$W_{F_c}^{el} = \int_0^L F_{c_u}^{el} u(x, t) dx + \int_0^L F_{c_v}^{el} v(x, t) dx \quad (2.37)$$

onde,

- $F_{c_u}^{el}$ representam as forças de controle, aplicadas na direção u do elemento
- $F_{c_v}^{el}$ representam as forças de controle, aplicadas na direção v do elemento

Tomando-se a variação das quantidades descritas por (II.34), (II.35), (II.36) e (II.37), voltando à “Equação Variacional de Hamilton Generalizada” (II.33), e considerando-se as expressões de $u(x, t)$ e $v(x, t)$ dadas em (II.31), chega-se, após integração no domínio $[0, L]$ e no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, à equação matricial:

$$\mathbf{M}^{el} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{el} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^{el} \mathbf{q} = \mathbf{Q}^{el} + \mathbf{F}_c^{el} \quad (2.38)$$

onde,

- \mathbf{M}^{el} é a Matriz de Massa do Elemento de Pórtico Plano no referencial local

$$\mathbf{M}^{el} = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

- \mathbf{K}^{el} é a Matriz de Rigidez do Elemento de Pórtico Plano no referencial local

$$\mathbf{K}^{el} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

- \mathbf{C}^{el} é a Matriz de Amortecimento do Elemento de Pórtico Plano no referencial local

Geralmente tomada como : $\mathbf{C}^{el} = \alpha \mathbf{M}^{el} + \beta \mathbf{K}^{el}$ ($\alpha, \beta \rightarrow$ números reais)

- \mathbf{Q}^{el} são as Forças Externas atuantes no elemento, num referencial local, excluindo as forças de controle, associadas aos deslocamentos dinâmicos $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t), q_6(t)]^T$

- \mathbf{F}_c^{el} são as Forças de Controle atuantes no elemento, num referencial local, associadas aos deslocamentos dinâmicos $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t), q_6(t)]^T$

As matrizes de Massa, Rigidez e Amortecimento de uma estrutura, discretizada em elementos finitos, são obtidas pelo somatório das contribuições de cada elemento, tomadas num referencial global.

De uma forma simbólica:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i^{el} \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i^{el} \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i^{el} \quad (2.39)$$

De forma análoga, obtém-se os vetores contendo as forças de excitação e de controle da estrutura:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i^{el} \quad \mathbf{F}_c = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{c_i}^{el} \quad (2.40)$$

2.3.4 Equações de Estado do Sistema

As coordenadas $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) definem um vetor n -dimensional $\mathbf{q}(t)$. A ponta deste vetor descreve uma trajetória denominada caminho dinâmico. Os pontos descritos por $q(t)$, não representam um sistema único, visto que um mesmo caminho dinâmico, considerado-se apenas deslocamentos generalizados, pode ser descrito de infinitos modos. De uma forma bem simples, é como percorrer um trecho A-B com diferentes variações de velocidades.

Assim torna-se necessária a introdução de mais uma grandeza para bem definir o estado de um sistema. De uma forma clássica, consideram-se as velocidades generalizadas ($\dot{\mathbf{q}}(t)$) para definir completamente o vetor de estado ($\mathbf{x}(t)$):

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Pode-se escrever então que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Observa-se que para um vetor $\mathbf{q}(t)$ n -dimensional tem-se um vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ $2n$ -dimensional.

Feitas as necessárias considerações sobre o vetor de estado do sistema, pode-se agora prosseguir com a formulação das Equações de Estado.

Voltando à equação (II.38) e explicitando $\ddot{\mathbf{q}}$:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q} + \mathbf{F}_c) \quad (2.43)$$

Considerando a identidade $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}$ pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{Q} + \mathbf{F}_c) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Reconhecendo o primeiro membro da equação (II.44) como $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e rearranjando de uma forma matricial compacta, chega-se a:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F} \quad (2.45)$$

onde,

- $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{array} \right]$
- $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{array} \right]$
- $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_c$
- $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{array} \right] \mathbf{Q}$
- $\mathbf{I} \rightarrow$ é uma matriz identidade de ordem n -dimensional

As equações (II.45) são denominadas Equações de Estado do Sistema.

Chapter 3

Análise Modal de Sistemas Controlados via Método dos Elementos Finitos

3.1 Análise de Vibrações Livres de Estruturas Elásticas

A análise de vibrações livres de uma estrutura elástica, é uma etapa preliminar e de grande importância na análise modal de sistemas, controlados ou não. É através dela que determinam-se as características dinâmicas tais como frequências e modos naturais de vibração associados.

A análise aqui apresentada é dirigida a pequenas vibrações harmônicas de uma estrutura elástica discretizada em elementos finitos.

Retomando-se a equação (II.38) descrita na seção (II.3.3), pode-se escrever:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

já que, para um problema de vibração livre, não existem forças de excitação e as forças de controle são aqui consideradas nulas.

Se consideradas vibrações livres não amortecidas, pode-se dizer que $C = \mathbf{0}$, e a equação (III.1) fica:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + K\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Um vetor solução para as equações diferenciais acima pode ser escrito como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Phi} e^{i\boldsymbol{\omega}t} \quad (3.3)$$

onde,

- $\mathbf{\Phi}$ é uma matriz cujas colunas são os modos de vibração associados aos graus de liberdade nodais da estrutura, e representando a forma do modo de vibração
- $\boldsymbol{\omega}$ são as frequências circulares de vibração

Usando (III.3) em (III.2) tem-se o problema de auto-valor para de vibrações livres não amortecidas:

$$(\mathbf{K} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{M})\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

A solução não trivial para $\mathbf{\Phi}$ é dada pela equação característica

$$|\mathbf{K} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (3.5)$$

cuja solução fornece como auto-valores as frequências naturais ao quadrado ($\boldsymbol{\omega}^2$), e como auto-vetores, os modos de vibração associados ($\mathbf{\Phi}$).

A solução do problema de auto-valor completo para uma estrutura com um número elevado de graus de liberdade pode ser obtida através de vários métodos numéricos. O método de Jacobi (ver referência [9]) fornece todas as frequências naturais ($\boldsymbol{\omega}^2$) e modos de vibração ($\mathbf{\Phi}$).

3.1.1 Propriedade de Ortogonalidade dos Auto-Vetores ou Modos de Vibração

A equação (III.4) pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{1}{\boldsymbol{\omega}^2} \mathbf{K} - \mathbf{M}\right)\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Substituindo-se $\mathbf{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$ na equação (III.6) acima tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1^{-2} K \phi_1 - M \phi_1 = 0 \\ \omega_2^{-2} K \phi_2 - M \phi_2 = 0 \\ \vdots \\ \omega_N^{-2} K \phi_N - M \phi_N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{\Phi}\boldsymbol{\Omega}^{-2} - \mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

onde,

$$\bullet \Omega^{-2} = \begin{bmatrix} \omega_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^{-2} \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando (III.7) por Φ^T obtém-se:

$$\overline{\mathbf{K}}\Omega^{-2} = \overline{\mathbf{M}} \quad (3.8)$$

onde,

- $\overline{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$ - Matriz de rigidez generalizada (simétrica)
- $\overline{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$ - Matriz de massa generalizada (simétrica)

Escrevendo as equações (III.8) com uma notação indicial:

$$\begin{aligned} \overline{k}_{ij} &= \overline{m}_{ij}\omega_{jj}^2 \\ \overline{k}_{ji} &= \overline{m}_{ji}\omega_{ii}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

e considerando a simetria de $\overline{\mathbf{K}}$, ou seja, $\overline{k}_{ij} = \overline{k}_{ji}$ tem-se:

$$\overline{m}_{ij}\omega_{jj}^2 = \overline{m}_{ji}\omega_{ii}^2 \quad (3.10)$$

Para que a equação (III.10) seja válida para qualquer par de índices (i,j) , deve se ter $\overline{m}_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja $\overline{\mathbf{M}}$ é diagonal. Isso mostra que os modos de vibração (Φ) são ortogonais com relação à matriz de massa.

Com raciocínio análogo pode-se dizer que os modos de vibração, também são ortogonais com relação à matriz de rigidez.

3.2 Método da Superposição Modal

Quando uma estrutura contínua é discretizada em elementos finitos, resultando num sistema com N graus de liberdade, o problema de auto-valor descrito por (III.5), fornece N modos e frequências naturais dentre as infinitas existentes. Utilizando-se o Método da Superposição Modal [7], admite-se então que a resposta da estrutura é dada por:

$$\mathbf{q}(x, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) y_j(t) \quad (3.11)$$

onde,

- $\phi_j(x)$ são os modos naturais de vibração
- $y_j(t)$ são as coordenadas das amplitudes modais

Dependendo do caso tratado, as respostas dinâmicas do sistema podem ser obtidas com relativa precisão se tomarmos J ($J \leq N$) modos de vibração superpostos.

$$\mathbf{q}(x, t) \approx \sum_{j=1}^J \phi_j(x) y_j(t) \quad (3.12)$$

Necessita-se, então, determinar as amplitudes modais ($y(t)$) para obter a resposta dinâmica de um sistema estrutural utilizando-se o Método da Superposição Modal.

Substituindo-se a equação (III.12) e suas derivadas na equação diferencial do movimento para sistemas discretos (II.29), utilizando-se as propriedades de ortogonalidade entre os modos de vibração descritas na seção III.1.1, e considerando-se um amortecimento proporcional massa e/ou a rigidez, chega-se ao sistema de equações diferenciais desacopladas:

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{y} = \overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{F}}\mathbf{c} \quad (3.13)$$

onde,

- $\overline{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$ - Matriz de massa generalizada
- $\overline{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi$ - Matriz de amortecimento generalizada
- $\overline{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$ - Matriz de rigidez generalizada
- $\overline{\mathbf{Q}} = \Phi^T \mathbf{Q}$ - Vetor de cargas generalizado
- $\overline{\mathbf{F}}\mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{F}\mathbf{c}$ - Vetor de forças de controle generalizado

Para cada i -ésimo modo de vibração tem-se a equação modal:

$$m_i \ddot{y} + c_i \dot{y} + k_i y = q_i + f c_i \quad (3.14)$$

onde,

- m_i , c_i e k_i são respectivamente a massa, o amortecimento e a rigidez modal
- q_i e $f c_i$ são respectivamente as forças de excitação e de controle modais

Resolvidas as equações (III.13), e voltando a equação (III.12), tem-se a resposta do sistema controlado pelo método da superposição modal.

Chapter 4

Controle Ótimo Modal

4.1 Aspectos Gerais

Num sistema dinâmico controlado ativamente por meio de forças de controle $\mathbf{u}(t)$, que alteram sua resposta no tempo, o desempenho do sistema de controle é medido segundo alguns critérios:

- **Critérios de segurança e conforto do usuário**

A segurança de uma estrutura está diretamente ligada às amplitudes de resposta em termos de deslocamentos. Já o conforto humano está relacionado com as amplitudes de resposta em termos de velocidades e/ou acelerações. Para esta última grandeza, costuma-se fazer referência aos níveis de acelerações, por exemplo verticais, num piso estrutural, para se avaliar os limites de conforto e tolerância humana.

- **Critérios de praticidade**

Os critérios de praticidade referem-se a limitações econômicas e/ou físicas na concepção do sistema de controle. Essas limitações estão ligadas a certos aspectos tais como: número de atuadores disponíveis, potência de cada atuador, número de pontos viáveis para aplicação de forças de controle, dentre outros aspectos de ordem prática.

Conceitua-se então um controle ótimo como sendo:

“ A determinação de um controle admissível $\bar{\mathbf{u}}(t)$ que leve o sistema a um estado desejado $\bar{\mathbf{x}}(t)$ e que minimize uma certa medida de desempenho ” [1,2].

4.2 Modelos Matemáticos para Sistemas Estruturais Controlados

A determinação da força de controle ótimo é agora feita tomando-se como medidas de desempenho as amplitudes dos deslocamentos e da própria força de controle em um sistema ativo de ciclo fechado.

A minimização das amplitudes de deslocamentos $\mathbf{x}(t)$, num período de tempo compreendido entre t_0 e t_f pode ser feita, por exemplo, tomando-se um funcional quadrático que, com a parcela relativa às forças de controle incluída, fica:

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T(t) \mathcal{Q} \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathcal{R} \mathbf{u}(t)] dt + \mathbf{y}^T(t_f) \mathcal{S} \mathbf{y}(t_f) \quad (4.1)$$

Onde [2]:

- $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ é a resposta modal observada do sistema. \mathbf{C} é a matriz de correspondência entre a resposta modal do sistema e a resposta modal observada. A matriz \mathbf{C} caracteriza os pontos de localização dos sensores para aquisição da resposta modal. Resposta modal observada do sistema são os sinais dinâmicos de grandezas como deslocamentos, velocidades ou acelerações, obtidas via sensoriamento da estrutura. Os sensores são localizados em pontos característicos, por exemplo, ventres dos modos de vibração.
- \mathcal{Q} é uma matriz simétrica de ponderação. Cada termo não nulo refere se a uma variável modal controlada.
- \mathcal{R} é uma matriz de ponderação e seus termos não nulos referem-se às forças modais que atuam nos modos de vibração sob controle. No caso de uma análise modal, \mathcal{R} é uma matriz diagonal.
- \mathcal{S} é uma matriz de ponderação para o valor de contorno ($t = t_f$) da amplitude modal.

O controle ótimo é obtido pela determinação da função $\bar{\mathbf{u}}(t)$ que minimiza o funcional \mathcal{J} :

Utilizando multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, aplicados às condições de restrição relativas ao estado do sistema (ver equação II.45), na extremização do funcional \mathcal{J} , chega-se à função \mathcal{H} Hamiltoniana a ser extremizada [1,2]:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \{[\mathbf{C}\mathbf{x}(t)]^T \mathcal{Q} \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathcal{R} \mathbf{u}(t)\} + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \quad (4.2)$$

A função \mathcal{H} é resultado da extremização da primeira parcela do funcional \mathcal{J} descrito em (IV.1), ou seja, extremização do funcional \mathcal{J} no domínio (t_0, t_f) . Restam ainda as considerações para o contorno - segunda parcela de \mathcal{J}

Utilizando o Princípio Variacional do Mínimo de Pontryagin [10], pode-se mostrar que as funções extremizantes $\bar{\mathbf{x}}(t)$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ e $\bar{\mathbf{u}}(t)$ atendem às seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} &= \dot{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}(t) \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Substituindo-se a equação (IV.2) em (IV.3) tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\lambda}}}(t) &= -\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}}(t) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{R}\bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\lambda}}(t)\end{aligned}\tag{4.4}$$

A determinação das funções extremizantes, é feita utilizando-se modelos matemáticos descritos por Riccati

4.2.1 Equação Diferencial de Riccati [1]

Da extremização do funcional \mathcal{J} tem-se a equação de contorno:

$$\left[\frac{\partial [\mathbf{y}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{y}(t_f)]}{\partial \mathbf{x}} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}(t_f) \right]^T \Delta \mathbf{x}_f = \mathbf{0}\tag{4.5}$$

Sabendo-se que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ e que $\Delta \mathbf{x}_f \neq \mathbf{0}$ tem-se então:

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(t_f)\tag{4.6}$$

Chamando $\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C}$ de $\mathcal{P}(t)$ visto que a matriz \mathbf{C} é função do tempo, pode-se reescrever a equação (IV.6) na forma:

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}(t_f) = \mathcal{P}(t_f) \bar{\mathbf{x}}(t_f)\tag{4.7}$$

A hipótese básica para a formulação da equação diferencial de Riccati é que :

$$\bar{\lambda}(t) = \mathcal{P}(t)\bar{x}(t) \quad (4.8)$$

Ou seja, fazer valer em todo o domínio $[t_0, t_f]$ a equação (IV.7), onde $\mathcal{P}(t)$ é a Matriz de Riccati

Da terceira equação (IV.4) pode-se escrever:

$$\bar{u}(t) = -\mathcal{R}^{-1}B^T\bar{\lambda}(t) \quad (4.9)$$

Derivando (IV.8) em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{\bar{\lambda}}(t) = \dot{\mathcal{P}}(t)\bar{x}(t) + \mathcal{P}(t)\dot{\bar{x}}(t) \quad (4.10)$$

e substituindo as equações de estado do sistema em (IV.10), chega-se a:

$$\dot{\bar{\lambda}}(t) = \dot{\mathcal{P}}(t)\bar{x}(t) + \mathcal{P}(t)[A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)] \quad (4.11)$$

Mas, de acordo com a equação (IV.9), $\bar{u}(t) = -\mathcal{R}^{-1}B^T\bar{\lambda}(t)$, logo, reescrevendo (IV.11):

$$\dot{\bar{\lambda}}(t) = \dot{\mathcal{P}}(t)\bar{x}(t) + \mathcal{P}(t)\{A\bar{x}(t) + B[-\mathcal{R}^{-1}B^T\bar{\lambda}(t)]\} \quad (4.12)$$

Substituindo os expressões para $\dot{\bar{\lambda}}(t)$ e $\bar{\lambda}(t)$ na equação (IV.12) tem-se após desenvolvimentos:

$$-\dot{\mathcal{P}}(t)[\bar{x}(t)] = [\mathcal{P}(t)A + A^T\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(t)\mathcal{R}^{-1}B^T\mathcal{P}(t) + \mathcal{Q}][\bar{x}(t)] \quad (4.13)$$

Pós multiplicando ambos os membros da equação (IV.13) por $[\bar{x}^{-1}(t)]$ chega-se finalmente a:

$$-\dot{\mathcal{P}}(t) = \mathcal{P}(t)A + A^T\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(t)\mathcal{R}^{-1}B^T\mathcal{P}(t) + \mathcal{Q} \quad (4.14)$$

que é a Equação Diferencial Matricial da Riccati, que pode ser resolvida por integração numérica inversa.

Determinada a matriz $\mathcal{P}(t)$, volta-se a (IV.8) e determina-se $\bar{\lambda}(t)$ com o qual, por sua vez, levado à (IV.9), chega-se ao controle ótimo ($\bar{u}(t)$) do regulador linear com utilização de funcional quadrático.

4.2.2 Equação Algébrica de Riccati

A equação algébrica de Riccati é obtida diretamente da equação (IV.14), considerando um tempo final de controle tendendo para infinito. Para $t_f \rightarrow \infty$, tem-se que as velocidades generalizadas tendem a zero. Consequentemente, tem-se $\dot{\mathcal{P}}(t) \rightarrow 0$ e $\mathcal{P}(t) \rightarrow \text{constante}$. Em resumo:

$$t_f \Rightarrow \infty \begin{cases} \dot{\mathcal{P}}(t) \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathcal{P}(t) \rightarrow \mathcal{P} \end{cases} \quad (4.15)$$

Com a equação (IV.14), e considerando $t_f \rightarrow \infty$, chega-se a Equação Matricial Algébrica de Riccati:

$$\mathcal{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathbf{B}\mathcal{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

Determinada a matriz \mathcal{P} , através de solução da equação (IV.16), volta-se às equações (IV.8) e (IV.9), e obtém-se a função $\bar{\mathbf{u}}(t)$ extremizante:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \Gamma_{\alpha}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.17)$$

onde, $\Gamma_{\alpha} = -\mathcal{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathcal{P}$ é a Matriz de Ganho para Controle Algébrico.

A solução do conjunto de equações algébricas descritas por (IV.16), pode ser feita utilizando-se um método iterativo.

O próximo capítulo deste trabalho descreve uma técnica para solução desta equação, com a utilização do método de Newton-Raphson.

4.2.3 Controle Instantâneo

O controle instantâneo é obtido [3,5] através da extremização do funcional \mathcal{J} , com as restrições impostas pelas equações de estado, para cada intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$ para todo $(0 \leq t \leq t_f)$

Desta forma chega-se à expressão para o controle ótimo de ciclo fechado :

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \Gamma_i\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (4.18)$$

onde, $\Gamma_i = -\Delta t\mathcal{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathcal{Q}$ é a Matriz de Ganho para Controle Instantâneo.

Chapter 5

Solução do Problema Não-Linear Algébrico de Riccati para Controle Ótimo Modal

5.1 Introdução

Este capítulo visa explicitar um algoritmo numérico para se determinar a Matriz de Riccati \mathcal{P} no problema de controle ótimo modal. Os procedimentos aqui descritos são válidos para estruturas discretizadas analisadas via análise modal.

A idéia geral do algoritmo pode ser estendida a análises que não utilizem o controle modal. Para tanto faz-se necessária uma reavaliação das matrizes envolvidas no problema, visto que as matrizes de Massa, Rigidez e Amortecimento não serão mais diagonais.

Passemos então para a determinação da Matriz de Riccati \mathcal{P} de dimensão $2n \times 2n$

5.2 Desenvolvimento da Equação matricial do problema Algébrico de Riccati

Tomando inicialmente a equação matricial proposta para o problema de controle ativo utilizando-se a equação algébrica de Riccati:

$$\mathcal{P}A + A^T\mathcal{P} - \mathcal{P}BR^{-1}B^T\mathcal{P} + \mathcal{Q} = 0 \quad (5.1)$$

As matrizes A e B da secção II.3.4, podem ser descritas em função das matrizes

modais apresentadas na secção III.2

$$\mathbf{A}_{2n \times 2n} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\overline{\mathbf{M}}^{-1} \overline{\mathbf{K}} & -\overline{\mathbf{M}}^{-1} \overline{\mathbf{C}} \end{array} \right] \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B}_{2n \times n} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \overline{\mathbf{M}}^{-1} \end{array} \right] \quad (5.3)$$

sendo n o número de graus de liberdade do sistema estrutural discretizado em elementos finitos.

Chamando-se $\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T = -\overline{\mathbf{B}}$ em (V.1) tem-se:

$$\mathcal{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathcal{P} + \mathcal{P}\overline{\mathbf{B}}\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

onde,

$$\overline{\mathbf{B}} = - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \overline{\mathbf{M}}^{-1} \end{array} \right] \quad (5.5)$$

As matrizes \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{B}}$ e \mathcal{Q} são extraídas diretamente das características dinâmicas da estrutura e das ponderações consideradas, restando então, determinar os coeficientes de \mathcal{P} .

Valendo-se da análise modal, tem-se $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{K}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$, como matrizes diagonais, logo, os produtos $\overline{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{K}}$, $\overline{\mathbf{M}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}$ e $\overline{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\overline{\mathbf{M}}^{-1}$ são também matrizes diagonais. Com isso chegamos às matrizes \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{B}}$, \mathcal{Q} e \mathcal{P} :

- Matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline A_{k1} & \cdots & 0 & A_{kk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{2nn} & 0 & \cdots & A_{2n2n} \end{array} \right] \quad (5.6)$$

- Matriz $\overline{\mathbf{B}}$:

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \overline{B}_{kk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \overline{B}_{2n2n} \end{array} \right] \quad (5.7)$$

• Matrix \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathcal{Q}_{11} & \cdots & \mathcal{Q}_{1n} & \mathcal{Q}_{1k} & \cdots & \mathcal{Q}_{12n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{Q}_{n1} & \cdots & \mathcal{Q}_{nn} & \mathcal{Q}_{nk} & \cdots & \mathcal{Q}_{n2n} \\ \hline \mathcal{Q}_{k1} & \cdots & \mathcal{Q}_{kn} & \mathcal{Q}_{kk} & \cdots & \mathcal{Q}_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{Q}_{2n1} & \cdots & \mathcal{Q}_{2nn} & \mathcal{Q}_{2nk} & \cdots & \mathcal{Q}_{2n2n} \end{array} \right] \quad (5.8)$$

• Matrix \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathcal{P}_{11} & \cdots & \mathcal{P}_{1n} & \mathcal{P}_{1k} & \cdots & \mathcal{P}_{12n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{P}_{n1} & \cdots & \mathcal{P}_{nn} & \mathcal{P}_{nk} & \cdots & \mathcal{P}_{n2n} \\ \hline \mathcal{P}_{k1} & \cdots & \mathcal{P}_{kn} & \mathcal{P}_{kk} & \cdots & \mathcal{P}_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{P}_{2n1} & \cdots & \mathcal{P}_{2nn} & \mathcal{P}_{2nk} & \cdots & \mathcal{P}_{2n2n} \end{array} \right] \quad (5.9)$$

Efetutando-se as operações matriciais expressas na equação (V.4), considerando-se as características das matrizes \mathbf{A} , $\overline{\mathbf{B}}$, \mathcal{Q} e \mathcal{P} , chega-se às seguintes equações $\Psi_{ij} = 0$:

$$\Psi_{11} = \mathcal{P}_{1k}A_{k1} + A_{k1}\mathcal{P}_{k1} + \mathcal{P}_{1k}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{k1} + \mathcal{P}_{12n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2n1} + \mathcal{Q}_{11} \quad (V.10.1)$$

⋮

⋮

$$\Psi_{1n} = \mathcal{P}_{12n}A_{2nn} + A_{k1}\mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{1k}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{12n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nn} + \mathcal{Q}_{1n} \quad (V.10.n)$$

$$\Psi_{1k} = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{1k}A_{kk} + \mathcal{P}_{kk}A_{k1} + \mathcal{P}_{1k}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{kk} + \mathcal{P}_{12n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nk} + \mathcal{Q}_{1k} \quad (\text{V.11.1})$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{12n} = \mathcal{P}_{1n} + \mathcal{P}_{12n}A_{2n2n} + A_{k1}\mathcal{P}_{k2n} + \mathcal{P}_{1k}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{k2n} + \mathcal{P}_{12n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2n2n} + \mathcal{Q}_{12n} \quad (\text{V.11.n})$$

$$\Psi_{n1} = \mathcal{P}_{nk}A_{k1} + A_{2nn}\mathcal{P}_{2n1} + \mathcal{P}_{nk}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{k1} + \mathcal{P}_{n2n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2n1} + \mathcal{Q}_{n1} \quad (\text{V.12.1})$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{nn} = \mathcal{P}_{n2n}A_{2nn} + A_{2nn}\mathcal{P}_{2nn} + \mathcal{P}_{nk}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{n2n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nn} + \mathcal{Q}_{nn} \quad (\text{V.12.n})$$

$$\Psi_{nk} = \mathcal{P}_{n1} + \mathcal{P}_{nk}A_{kk} + A_{2nn}\mathcal{P}_{2nk} + \mathcal{P}_{nk}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{kk} + \mathcal{P}_{n2n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nk} + \mathcal{Q}_{nk} \quad (\text{V.13.1})$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{n2n} = \mathcal{P}_{nn} + \mathcal{P}_{n2n}A_{2n2n} + \mathcal{P}_{2n2n}A_{2nn} + \mathcal{P}_{nk}\overline{B}_{kk}\mathcal{P}_{k2n} + \mathcal{P}_{n2n}\overline{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2n2n} + \mathcal{Q}_{n2n} \quad (\text{V.13.n})$$

$$\begin{aligned}\Psi_{k1} = & \mathcal{P}_{kk}A_{k1} + \mathcal{P}_{11} + A_{kk}\mathcal{P}_{k1} + \mathcal{P}_{kk}\bar{B}_{kk}\mathcal{P}_{k1} + \mathcal{P}_{k2n}\bar{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2n1} + \\ & + \mathcal{Q}_{k1}\end{aligned}\tag{V.14.1}$$

⋮ ⋮

$$\begin{aligned}\Psi_{kn} = & \mathcal{P}_{k2n}A_{2nn} + \mathcal{P}_{1n} + A_{kk}\mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{kk}\bar{B}_{kk}\mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{k2n}\bar{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nn} + \\ & + \mathcal{Q}_{kn}\end{aligned}\tag{V.14.n}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{kk} = & \mathcal{P}_{k1} + 2\mathcal{P}_{kk}A_{kk} + \mathcal{P}_{1k} + \mathcal{P}_{kk}^2\bar{B}_{kk} + \mathcal{P}_{k2n}\bar{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nk} + \\ & + \mathcal{Q}_{kk}\end{aligned}\tag{V.15.1}$$

⋮ ⋮

$$\begin{aligned}\Psi_{k2n} = & \mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{k2n}A_{2n2n} + \mathcal{P}_{12n} + A_{kk}\mathcal{P}_{k2n} + \mathcal{P}_{kk}\bar{B}_{kk}\mathcal{P}_{k2n} + \mathcal{P}_{k2n}\bar{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2n2n} + \\ & + \mathcal{Q}_{k2n}\end{aligned}\tag{V.15.n}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{2n1} = & \mathcal{P}_{2nk}A_{k1} + \mathcal{P}_{n1} + A_{2n2n}\mathcal{P}_{2n1} + \mathcal{P}_{2nk}\bar{B}_{kk}\mathcal{P}_{k1} + \mathcal{P}_{2n2n}\bar{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2n1} + \\ & + \mathcal{Q}_{2n1}\end{aligned}\tag{V.16.1}$$

⋮ ⋮

$$\begin{aligned}\Psi_{2nn} = & \mathcal{P}_{2n2n}A_{2nn} + \mathcal{P}_{nn} + A_{2n2n}\mathcal{P}_{2nn} + \mathcal{P}_{2nk}\bar{B}_{kk}\mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{2n2n}\bar{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nn} + \\ & + \mathcal{Q}_{2nn}\end{aligned}\tag{V.16.n}$$

(5.10)

(5.11)

(5.12)

(5.13)

(5.14)

(5.15)

(5.16)

(5.17)

$$\Psi_{2nk} = \mathcal{P}_{2n1} + \mathcal{P}_{2nk}A_{kk} + \mathcal{P}_{nk} + A_{2n2n}\mathcal{P}_{2nk} + \mathcal{P}_{2nk}\bar{B}_{kk}\mathcal{P}_{kk} + \mathcal{P}_{2n2n}\bar{B}_{2n2n}\mathcal{P}_{2nk} + \mathcal{Q}_{2nk} \quad (\text{V.17.1})$$

⋮

$$\Psi_{2n2n} = \mathcal{P}_{2nn} + 2\mathcal{P}_{2n2n}A_{2n2n} + \mathcal{P}_{n2n} + \mathcal{P}_{2nk}\bar{B}_{kk}\mathcal{P}_{k2n} + \mathcal{P}_{2n2n}^2\bar{B}_{2n2n} + \mathcal{Q}_{2n2n} \quad (\text{V.17.n})$$

5.3 Considerações sobre a Matriz de Ponderação \mathcal{Q}

Os termos \mathcal{Q}_{ij} da matriz de ponderação \mathcal{Q} mostram os pesos dados aos controles das velocidades e deslocamentos generalizados associados aos n modos de vibração do sistema. Mas, numa análise modal desacoplada, as contribuições do i -ésimo para o j -ésimo deslocamento ou velocidade generalizados e vice-versa, isto é para $i \neq j$ e $i \neq (j+n)$, são nulas. Assim, chega-se a um matriz \mathcal{Q} rarefeita, com termos não nulos na diagonal principal e na diagonais das sub-matrizes representativas das influências entre velocidades e deslocamentos generalizados modais de um mesmo modo.

$$\mathcal{Q} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathcal{Q}_{11} & \cdots & 0 & \mathcal{Q}_{1k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{Q}_{nn} & 0 & \cdots & \mathcal{Q}_{n2n} \\ \hline \mathcal{Q}_{1k} & \cdots & 0 & \mathcal{Q}_{kk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{Q}_{n2n} & 0 & \cdots & \mathcal{Q}_{2n2n} \end{array} \right] \quad (5.18)$$

5.4 Determinação da Configuração da Matriz de Riccati \mathcal{P}

Com as subtrações das funções $\Psi_{ij} - \Psi_{ji}$ (com $(i \neq j)$ e $(i, j = 1 \dots 2n)$) descritas ao final da seção V.2 tem-se :

⋮

$$\Psi_{1n} - \Psi_{n1} = 0 \quad (5.19)$$

$$\Psi_{1k} - \Psi_{k1} = 0 \quad (5.20)$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{12n} - \Psi_{2n1} = 0 \quad (5.21)$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{nk} - \Psi_{kn} = 0 \quad (5.22)$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{n2n} - \Psi_{2nn} = 0 \quad (5.23)$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{k2n} - \Psi_{2nk} = 0 \quad (5.24)$$

Considerando-se a simetria de \mathcal{Q} tem-se, por exemplo, para o desenvolvimento de (V.19), substituindo-se o valor de Ψ_{1n} dado pela equação (V.10.n) e de Ψ_{n1} dado pela equação (V.12.1):

$$\begin{aligned} & A_{2nn} (\mathcal{P}_{12n} - \mathcal{P}_{2n1}) + A_{k1} (\mathcal{P}_{nk} + \mathcal{P}_{kn}) \\ & + \overline{B}_{kk} (\mathcal{P}_{1k} \mathcal{P}_{kn} - \mathcal{P}_{k1} \mathcal{P}_{nk}) \\ & + \overline{B}_{2n2n} (\mathcal{P}_{12n} \mathcal{P}_{2nn} - \mathcal{P}_{2n1} \mathcal{P}_{n2n}) = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nota-se que A_{ij} e \overline{B}_{ij} não se anulam em todos os casos. Logo, para (V.25) ser válida para quaisquer valores de A_{ij} e \overline{B}_{ij} , cada termo entre parênteses deve ser nulo. Com isso pode-se escrever:

$$\mathcal{P}_{12n} = \mathcal{P}_{2n1} \quad (5.26)$$

$$\mathcal{P}_{nk} = \mathcal{P}_{kn} \quad (5.27)$$

$$\mathcal{P}_{1k} \mathcal{P}_{kn} = \mathcal{P}_{k1} \mathcal{P}_{nk} \quad (5.28)$$

$$\mathcal{P}_{12n} \mathcal{P}_{2nn} = \mathcal{P}_{2n1} \mathcal{P}_{n2n} \quad (5.29)$$

Analogamente, para as demais equações (V.19 a V.24), chega-se a :

$$\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ji} \quad (5.30)$$

Conclui-se então que a Matriz de Riccati \mathcal{P} é uma matriz simétrica.

Tomando-se Ψ_{1n} (equação V.10.n), lembrando com a equação (V.18) que $\mathcal{Q}_{1n} = 0$, tem-se:

$$\Psi_{1n} = \mathcal{P}_{12n} A_{2nn} + A_{k1} \mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{1k} \overline{B}_{kk} \mathcal{P}_{kn} + \mathcal{P}_{12n} \overline{B}_{2n2n} \mathcal{P}_{2nn} \quad (\text{V.10.n}')$$

e pondo-se em evidência os termos \mathcal{P}_{12n} e \mathcal{P}_{kn} :

$$\mathcal{P}_{12n} (A_{2nn} + \overline{B}_{2n2n} \mathcal{P}_{n2n}) + \mathcal{P}_{nk} (A_{k1} + \overline{B}_{kk} \mathcal{P}_{nk}) = 0 \quad (\text{V.10.n}'')$$

Para que a equação anterior seja satisfeita, deve-se ter $\mathcal{P}_{12n} = 0$ e $\mathcal{P}_{nk} = 0$, pois os termos entre parênteses não se anulam para todo e qualquer problema.

Fazendo-se um raciocínio análogo para as demais funções Ψ_{ij} chega-se a:

$$\mathcal{P}_{1n} = 0 \text{ e } \mathcal{P}_{k2n} = 0 \quad (5.31)$$

Em síntese, para uma matriz \mathcal{Q} , com uma configuração geral dada por (V.18), ter-se-á uma matriz \mathcal{P} com configuração análoga:

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathcal{P}_{11} & \cdots & 0 & \mathcal{P}_{1k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{P}_{nn} & 0 & \cdots & \mathcal{P}_{n2n} \\ \hline \mathcal{P}_{1k} & \cdots & 0 & \mathcal{P}_{kk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathcal{P}_{n2n} & 0 & \cdots & \mathcal{P}_{2n2n} \end{array} \right] \quad (5.32)$$

5.5 Aplicação do algoritmo de Newton-Raphson para a determinação da Matriz de Riccati

Inicialmente faz-se necessário um remapeamento das variáveis \mathcal{P}_{ij} , já que o objetivo primordial é a determinação dos coeficientes incógnitos da Matriz de Riccati, extraindo-se os elementos $\mathcal{P}_{ij} = 0$. Para tal, foi adotado o seguinte procedimento:

- Renumeração dos termos \mathcal{P}_{ij} começando pelo elemento \mathcal{P}_{11} , da esquerda para direita, seguindo linha por linha, partindo sempre da diagonal principal, levando em conta a simetria de \mathcal{P} e organizando os elementos num vetor $\overline{\mathcal{P}}$ de dimensão $3n$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathcal{P}}_1 \\ \overline{\mathcal{P}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{\mathcal{P}}_{2n-1} \\ \overline{\mathcal{P}}_{2n} \\ \hline \overline{\mathcal{P}}_{2n+1} \\ \vdots \\ \overline{\mathcal{P}}_{3n} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}_{11} \\ \mathcal{P}_{1k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathcal{P}_{nn} \\ \mathcal{P}_{n2n} \\ \hline \mathcal{P}_{kk} \\ \vdots \\ \mathcal{P}_{2n2n} \end{array} \right\} \quad (5.33)$$

Vale salientar que esse rearranjo também é válido para as funções Ψ , ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{\Psi}_{2n-1} \\ \overline{\Psi}_{2n} \\ \hline \overline{\Psi}_{2n+1} \\ \vdots \\ \overline{\Psi}_{3n} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Psi_{11} \\ \Psi_{1k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Psi_{nn} \\ \Psi_{n2n} \\ \hline \Psi_{kk} \\ \vdots \\ \Psi_{2n2n} \end{array} \right\} \quad (5.34)$$

Com a matriz de Riccati numa forma vetorial definida por (V.33), tem-se um sistema não linear com $3n$ equações, montado somente para os coeficientes de $\overline{\mathcal{P}}$ que são as as variáveis incógnitas.

De uma forma genérica tem-se:

$$\bar{\Psi}_i(\bar{\mathcal{P}}_1, \dots, \bar{\mathcal{P}}_{3n}) = 0 \quad (i = 1, \dots, 3n) \quad (5.35)$$

e a solução do sistema descrito por (V.35), utilizando-se o método de Newton-Raphson segue os seguintes passos:

1. Inicialização das variáveis

$$\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{P}}^0 \quad (5.36)$$

2. Avaliação da Matriz de Derivadas Parciais ou Matriz Jacobiana (\mathbf{J}) do problema em $\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{P}}^0$ ou seja :

$$J_{i,j}^0 = \frac{\partial \bar{\Psi}_i(\bar{\mathcal{P}}^0)}{\partial \bar{\mathcal{P}}_j} \quad (i, j = 1, \dots, 3n) \quad (5.37)$$

3. Solução do sistema linear descrito por:

$$\mathbf{J}^0 \delta \bar{\mathcal{P}}^0 = -\bar{\Psi}(\bar{\mathcal{P}}^0) \quad (5.38)$$

4. Reavaliação dos valores anteriormente estimados para $\bar{\mathcal{P}}$:

$$\bar{\mathcal{P}}^1 = \bar{\mathcal{P}}^0 + \delta \bar{\mathcal{P}}^0 \quad (5.39)$$

5. Repetição dos passos 2, 3 e 4 utilizando-se a nova avaliação para $\bar{\mathcal{P}}$ até que numa r -ésima iteração tenhamos obtido:

$$\bar{\Psi}(\bar{\mathcal{P}}^r) \approx \mathbf{0} \quad (5.40)$$

6. A avaliação da magnitude do vetor residual $\bar{\Psi}(\bar{\mathcal{P}}^r)$, dado por (V.40), pode ser feita analisando-se a diferença percentual entre a norma euclidiana da r -ésima e a $(r - 1)$ -ésima iteração de $\bar{\mathcal{P}}$, comparando-se com uma tolerância (Tol) conveniente:

$$\frac{\|\bar{\mathcal{P}}^r\| - \|\bar{\mathcal{P}}^{r-1}\|}{\|\bar{\mathcal{P}}^r\|} < Tol \quad (5.41)$$

Sendo norma euclidiana de um vetor $\mathbf{\Lambda}$ ($\|\mathbf{\Lambda}\|$) n -dimensional:

$$\|\mathbf{\Lambda}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Lambda_i^2} \quad (5.42)$$

No processo de aplicação do Método de Newton-Raphson e sua implementação computacional, é preciso saber avaliar $\bar{\Psi}_i(\bar{\mathcal{P}}_1, \dots, \bar{\mathcal{P}}_{3n})$ e $\frac{\partial \bar{\Psi}_i(\bar{\mathcal{P}}_1, \dots, \bar{\mathcal{P}}_{3n})}{\partial \bar{\mathcal{P}}_j}$ ($i, j = 1, \dots, 3n$) para um valor qualquer de $\bar{\mathcal{P}}$.

Os valores de $\bar{\Psi}_i(\bar{\mathcal{P}}_1, \dots, \bar{\mathcal{P}}_{3n})$ ($i = 1, \dots, 3n$) são avaliados utilizando-se diretamente as equações (V.10.1 a V.17.n).

Já o procedimento para a avaliação de $\frac{\partial \bar{\Psi}_i(\bar{\mathcal{P}}_1, \dots, \bar{\mathcal{P}}_{3n})}{\partial \bar{\mathcal{P}}_j}$ ($i, j = 1, \dots, 3n$), necessita de uma análise mais fina visto que as funções que definem cada elemento de \mathbf{J} , não aparecem de uma forma diretamente explícita e tais funções deverão estar pré-formatadas para viabilizar uma solução numérica mais rápida e precisa.

A próxima seção descreve todo o processo computacional para determinação da matriz \mathbf{J}

5.5.1 Determinação dos coeficientes da Matriz Jacobiana \mathbf{J}

A Matriz Jacobiana do sistema, é formada pelas derivadas parciais das funções $\bar{\Psi}_i$ com relação as incógnitas $\bar{\mathcal{P}}_j$:

$$J_{ij} = \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \bar{\mathcal{P}}_j} \quad (5.43)$$

Por análise comparativa da composição da Matriz Jacobiana para diversos valores de n , depara-se com a seguinte configuração para \mathbf{J} (não simétrica e esparça):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
 0 & \text{G4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \text{G2} & 0 & 0 & \text{G1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \text{G4} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \text{G2} & 0 & \text{G1} \\
 0 & 2 & 0 & 0 & \text{G3} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \text{G3}
 \end{bmatrix}$$

A Matriz Jacobiana anteriormente descrita tem dimensão (6×6) resultante de um sistema com 2 graus de liberdade ($\dim \mathbf{J} = 3n$; $n = 2$), tomado aqui como exemplo.

Feita uma inicialização com zeros da matriz \mathbf{J} é preciso agora alocar seus coeficientes não nulos e quantificá-los:

- Elementos com valor 1 (um):
 - número de números 1 (um) $\rightarrow n$
 - posição inicial $\rightarrow J_{ij}$ para $i = 2$ e $j = 1$
 - incremento de $i \rightarrow 2$
 - incremento de $j \rightarrow 2$

- Elementos com valor 2 (dois):
 - número de números 2 (dois) $\rightarrow n$
 - posição inicial $\rightarrow J_{ij}$ para $i = 2n + 1$ e $j = 2$
 - incremento de $i \rightarrow 1$
 - incremento de $j \rightarrow 2$

- Elementos do Grupo 1 (G1):
 - número de elementos G1 $\rightarrow n$
 - forma da função G1 $\rightarrow J_{i,j} = A_{k,l} + \overline{B}_{k,k} \overline{P}_i$
 - inicialização de $i \rightarrow 2n$
 - inicialização de $j \rightarrow 3n$
 - inicialização de $k \rightarrow 2n$
 - inicialização de $l \rightarrow n$
 - decremento de $i \rightarrow 2$
 - decremento de $j \rightarrow 1$
 - decremento de $k \rightarrow 1$
 - decremento de $l \rightarrow 1$

- Elementos do Grupo 2 (G2):
 - número de elementos G2 $\rightarrow n$
 - forma da função G2 $\rightarrow J_{i,i} = A_{j,j} + \overline{B}_{j,j} \overline{P}_k$
 - inicialização de $i \rightarrow 2$

- inicialização de $j \rightarrow n + 1$
- inicialização de $k \rightarrow 2n + 1$
- incremento de $i \rightarrow 2$
- incremento de $j \rightarrow 1$
- incremento de $k \rightarrow 1$
- Elementos do Grupo 3 (G3):
 - número de elementos G3 $\rightarrow n$
 - forma da função G3 $\rightarrow J_{i,i} = 2 * A_{j,j} + 2 * \overline{B}_{j,j} \overline{P}_i$
 - inicialização de $i \rightarrow 3n$
 - inicialização de $j \rightarrow n$
 - decremento de $i \rightarrow 1$
 - decremento de $j \rightarrow 1$
- Elementos do Grupo 4 (G4):
 - número de elementos G4 $\rightarrow n$
 - forma da função G4 $\rightarrow J_{i,j} = A_{k,l} + \overline{B}_{k,k} \overline{P}_j$
 - inicialização de $i \rightarrow 1$
 - inicialização de $j \rightarrow 2$
 - inicialização de $k \rightarrow n + 1$
 - inicialização de $l \rightarrow 1$
 - incremento de $i \rightarrow 2$
 - incremento de $j \rightarrow 2$
 - incremento de $k \rightarrow 1$
 - incremento de $l \rightarrow 1$

Fica assim determinada a Matriz Jacobiana para um sistema com n graus de liberdade generalizados, que possibilitará a determinação da Matriz de Riccati e a utilização do método de Newton-Raphson na solução da equação não-linear de Riccati algébrica.

5.6 Comentários adicionais

As propriedades da Matriz de Ponderação \mathcal{Q} descritas na seção V.3, decorrentes da análise modal adotada, além de reduzirem o número de coeficientes não nulos da Matriz de Riccati \mathcal{P} , viabilizam o tratamento computacional do problema para um sistema com muitos graus de liberdade.

Para demonstrar a afirmação acima considera-se, a princípio, que a matriz \mathcal{Q} decorre de um sistema de equações acopladas e, portanto, sem propriedades de esparsidade. Desta forma tem-se uma matriz \mathcal{P} com $(2n \times 2n = 4n^2)$ elementos a determinar, visto que a configuração de \mathcal{P} , conforme descrito na seção (V.4), segue a configuração de \mathcal{Q} .

A matriz Jacobiana(\mathbf{J}) de um sistema é uma matriz quadrada, de dimensões idênticas ao número de incógnitas do problema. Sendo assim, para o caso em questão, tem-se : $dim(\mathbf{J}) = (4n^2 \times 4n^2)$. Isso resulta num total de $16 \times n^4$ elementos. Se utilizada dupla precisão nos cálculos, ter-se-á um gasto de 8 bytes por cada elemento da matriz, totalizando $128 \times n^4$ bytes para armazenamento de \mathbf{J} .

Para um computador provido de 16 Mbytes de memória RAM , efetuando-se os cálculos pode-se dizer que o armazenamento de \mathbf{J} só seria possível para um sistema para até $n = 18$, ou seja, 18 graus de liberdade Isso não se levando em conta a área de memória reservada para o Sistema Operacional, o próprio código e outras matrizes envolvidas, o que, obviamente, reduz ainda mais esta estimativa para n .

Com a consideração da simetria, tem-se uma melhora pouco significativa do problema:

- Número de elementos de \mathcal{P} a determinar $\Rightarrow \frac{(2n \times 2n)}{2} + \frac{n}{2} = 2n^2 + \frac{n}{2}$
- Dimensão de (\mathbf{J}) $\Rightarrow \left[(2n^2 + \frac{n}{2}) \times (2n^2 + \frac{n}{2}) \right]$
- Total de elementos de \mathbf{J} $\Rightarrow 4n^4 + 2n^3 + \frac{1}{4}n^2$
- Total de Bytes para \mathbf{J} $\Rightarrow 32n^4 + 16n^3 + 2n^2$
- n máximo $\Rightarrow 26$

Já para uma análise modal desacoplada, como a exposta neste capítulo tem-se:

- Número de elementos de \mathcal{P} a determinar $\Rightarrow (2n + \frac{2n}{2}) = 3n$
- Dimensão de \mathbf{J} $\Rightarrow (3n \times 3n)$
- Total de elementos de \mathbf{J} $\Rightarrow 9n^2$
- Total de Bytes para \mathbf{J} $\Rightarrow 72n^2$

- n máximo \Rightarrow 471 graus de liberdade

Com isso viabiliza-se a análise computacional de um sistema com um número relativamente maior de graus de liberdade nodais. O gráfico da figura V.1 mostra a crescente diferença em termos de Mbytes para o armazenamento da Matriz \mathbf{J} em função no número de graus de liberdade envolvido, isto é, do número de equações que regem a dinâmica do sistema controlado.

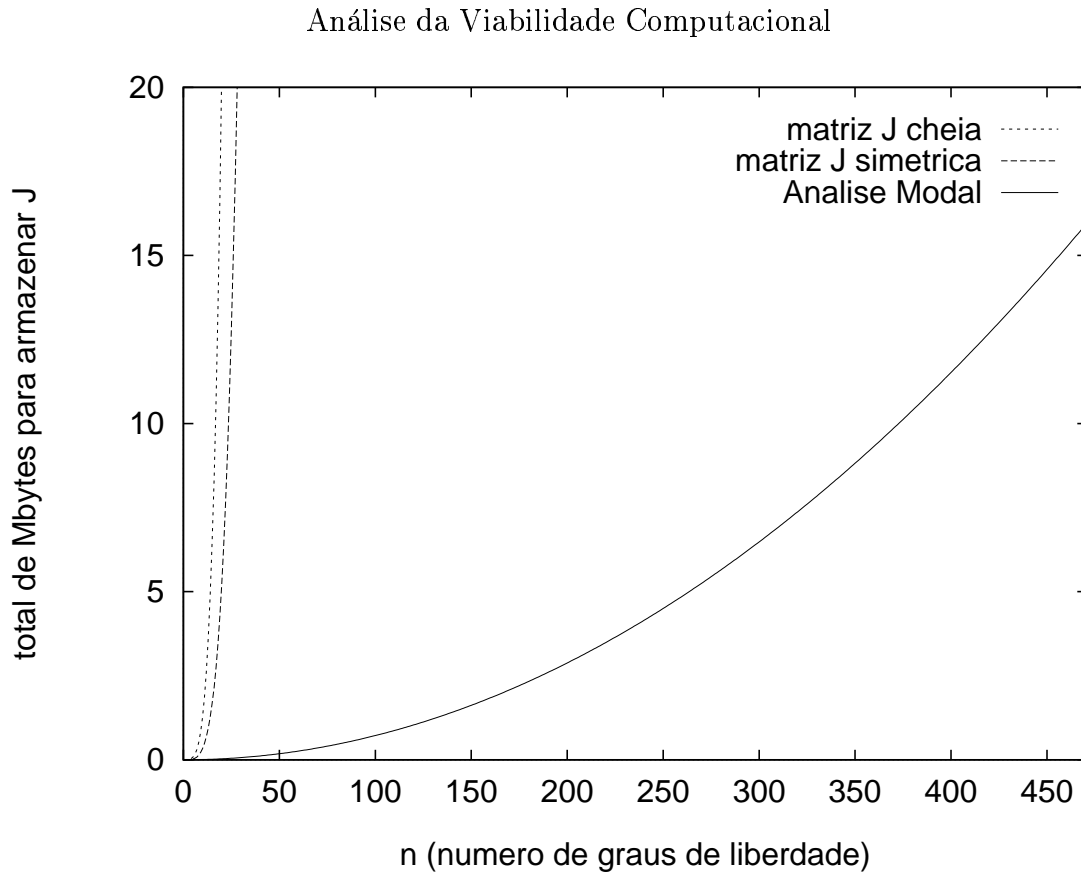


figura V.1 - Variação do número de Mbytes para armazenar a matriz Jacobiana (\mathbf{J}) com o número de graus de liberdade do sistema

Chapter 6

Algoritmo Numérico para Solução do Problema de Controle Ótimo de Estruturas de Pórtico Plano

Este capítulo visa mostrar, de forma sucinta, a arquitetura do programa bem como os algoritmos utilizados no desenvolvimento desse programa, capaz de simular a resposta de um pórtico plano sensoriado, submetido a excitação dinâmica e controle ativo modal.

6.1 Arquitetura do programa

O programa é composto de dois grandes blocos:

- Gerador de Matrizes - subrotina GERA_MATRIZ
- Controlador Dinâmico - subrotina CONTROLE

A subrotina GERA_MATRIZ é responsável pela determinação e montagem das matrizes e vetores característicos de uma estrutura de pórtico plano. São eles: Matrizes de Massa, Rigidez e Amortecimento Modais, Matriz de Auto-Vetores ou de Formas Modais de Vibração, Vetor de Auto-Valores ou de Freqüências Naturais de Vibração e Vetor de Cargas Modais.

A subrotina CONTROLE recebe como parâmetros os coeficientes das matrizes e vetores anteriormente citadas e tem a função de determinar a resposta controlada, bem como a(s) força(s) de controle da estrutura.

Esta arquitetura torna-se bastante conveniente, visto que para se controlar outro tipo de estrutura, também discretizada por elementos finitos, bastaria adequar a

subrotina GERA_MATRIZ ficando a subrotina CONTROLE inalterada. Desta forma, pode-se facilmente estender o programa à análise de vários tipos de estrutura.

6.2 Descrição do Programa

Subrotina GERA_MATRIZ

1. Abertura de arquivos

- Arquivo de entrada de dados
- Arquivo de saída de dados
- Arquivo para impressão dos deslocamentos
- Arquivo para impressão das forças de controle
- Arquivo para impressão do espaço-fase

2. Leitura de dados

- Número de nós, elementos, restrições de deslocamentos, nós carregados, modos para superposição modal
- Módulo de elasticidade e massa específica do material
- Coordenadas nodais
- Incidência, área e mometo de inércia da secção transversal dos elementos
- Nós carregados

3. Montagem das matrizes de massa e rigidez do sistema

- Montagem das matrizes de massa e rigidez dos elementos no referencial local
- Rotação para o referencial global
- Espalhamento das matrizes de elementos no referencial global nas respectivas matrizes de massa (\mathbf{M}) e rigidez (\mathbf{K}) do sistema

4. Imposição das condições de contorno

- Para o k -ésimo deslocamento impedido faz-se:
 - Substituição para 1 (um) do elemento (k, k) da matriz de rigidez
 - Multiplicação por 10^{-6} do elemento (k, k) da matriz de massa
 - Substituição por 0 (zero) dos elementos (k, j) ($j = 1, \dots, NGL \ j \neq k$) e dos elementos (i, k) ($i = 1, \dots, NGL \ i \neq k$) das matrizes de massa e rigidez (NGL - número de graus de liberdade)

5. Solução do problema de auto-valor $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ com a utilização do algoritmo de Jacobi.
6. Determinação da matriz de massa modal do sistema ($\overline{\mathbf{M}}$)
 - Determinação da matriz de auto-vetores (Φ - formas modais) e do vetor de auto-valores (ω - frequências naturais)
 - Ordenação das formas modais segundo ordem crescente das frequências naturais
7. Montagem das matrizes e vetores modais
 - $\overline{\mathbf{K}} = \omega^2 \overline{\mathbf{M}}$
 - $\overline{\mathbf{C}} = \alpha \overline{\mathbf{M}} + \beta \overline{\mathbf{K}}$
 - $\overline{\mathbf{F}} = \Phi^T \mathbf{F}$

Subrotina CONTROLE

1. Leitura de dados

- Número de graus de liberdade controlados
- Graus de liberdade controlados - Montagem de $\mathbf{L} \rightarrow$ matriz booleana de localização dos atuadores.
- Tempo máximo e intervalo para integração numérica - Δt
- Grau de liberdade para impressão de deslocamento e velocidade
- Matrizes de ponderações modais de deslocamento e força de controle, respectivamente \mathcal{Q} e \mathcal{R} .
- Retardo para a atuação da força de controle η .

2. Montagem da matriz \mathbf{A}

- De posse de $\overline{\mathbf{K}}$, $\overline{\mathbf{M}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ tem-se: $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline \overline{\mathbf{M}}^{-1} \overline{\mathbf{K}} & -\overline{\mathbf{M}}^{-1} \overline{\mathbf{C}} \end{array} \right]$

3. Montagem da matriz \mathbf{B}

- De posse de $\overline{\mathbf{M}}$ tem-se: $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \overline{\mathbf{M}}^{-1} \end{array} \right]$

4. Montagem da matriz Γ tal que: $\overline{\mathbf{F}}_c = \Gamma \mathbf{Y}$

- $\overline{\mathbf{F}}_c$ é o vetor de forças de controle modais
- \mathbf{Y} é vetor de estado modal do sistema

- Para controle instantâneo tem-se $\Rightarrow \Gamma_i = -\Delta t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}$
- Para controle algébrico tem-se $\Rightarrow \Gamma_a = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$
A determinação da matriz \mathbf{P} do produto matricial acima, sugere um procedimento à parte, procedimento esse descrito no capítulo V

5. Determinação da resposta do sistema e das forças de controle

Para cada instante de tempo (t) temos:

- Transformação das J equações modais de segunda ordem em $2J$ equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} y(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{f_i(t)}{m_i} + \frac{f_{c_i}(t)}{m_i} - \frac{c_i(t)}{m_i} - \frac{k_i(t)}{m_i} \end{cases}$$

A variável que descreve o tempo (t) varia entre zero e o tempo máximo para integração numérica, passando por um instante $t = \eta$, onde η é o retardo previsto para aplicação da força de controle.

- Para instantes onde $t \leq \eta$ temos $f_{c_i} = 0$
- Para instantes onde $t > \eta$ temos $f_{c_i} = f_{c_i}(t - \eta)$
- Resolução $2J$ equações modais pelo Método de Runge-Kutta para determinação do vetor de estado modal $\mathbf{Y}(t)$
- Cálculo do vetor de estado nodal:
- $\mathbf{x}(t) = \Phi^T \mathbf{Y}(t)$
- Cálculo do vetor de controle modal:
- $\overline{\mathbf{F}}_c = \Gamma \mathbf{Y}(t)$
- Cálculo do vetor de controle nodal
- $\mathbf{F}_c = \Phi^T \overline{\mathbf{F}}_c$
- Zeragem das forças de controle nos graus de liberdade onde não existem atuadores.
- $\mathbf{F}_c^* = \mathbf{L} \mathbf{F}_c$, onde \mathbf{L} é a matriz de localização dos atuadores e \mathbf{F}_c^* é o vetor de forças de controle efetivo.
- Determinação das parcelas modais f_{c_i} de $\overline{\mathbf{F}}_c^*$ (vetor de forças de controle modais efetivo). Estas parcelas são armazenadas e aplicadas no sistema convenientemente, segundo as considerações de defasagem citadas
- $\overline{\mathbf{F}}_c^* = \Phi^T \mathbf{F}_c^*$

Chapter 7

Exemplos de Aplicação do Controle Modal

Apresentam-se a seguir exemplos de aplicação do algoritmo desenvolvido para controle ótimo modal em estruturas discretizadas em elementos de pórtico plano.

Serão analisadas 2 estruturas:

- **Exemplo 1** - Viga bi-apoiada submetida a carregamento harmônico
- **Exemplo 2** - Pórtico de três andares submetido a carregamento de vento simplificado por uma carga uniforme horizontal.

Objetivo das análises:

- Redução dos deslocamentos e/ou acelerações a níveis compatíveis com as medidas de desempenho, segundo critérios de segurança e conforto, respectivamente.
- Determinação das forças de controle para que se tenha as referidas reduções de deslocamentos.
- Estudo da estabilidade do sistema controlado considerando o efeito de retardo na aplicação da força de controle.
- Análise da localização dos atuadores para que se tenha maior efetividade no controle.
- Evidenciar o comportamento de sistemas estruturais controlados, onde as forças de controle são aplicadas em pontos distintos das forças de excitação.
- Comparar as performances obtidas para os dois algoritmos de controle implementados.

As análises foram feitas com base nas respostas de cada sistema dinâmico estudado, no **domínio do tempo**, como sugere a teoria de controle moderno [1,2,3].

7.1 Exemplo 1 - Viga sob Carregamento Harmônico

7.1.1 Descrição do Sistema Estrutural Dinâmico

Seja a viga em estudo o perfil metálico I 15" (381mm x 63,3kg/m) bi-apoiado submetido a uma carga dinâmica oriunda de um motor montado na viga, conforme ilustra a figura VII.1.1

O movimento rotativo do eixo do motor da máquina instalada sobre a viga, gera uma força vertical dinâmica harmônica $f_e(t)$ de frequência circular $\omega_e = 52,74 \text{ rad/s}$ e magnitude $\bar{f}_e = 1,2 \text{ kN}$

$$f_e(t) = 1200[\text{sen}(\omega_e t)] \text{ N}$$

As amplitudes das vibrações acarretadas pelo uso da máquina excedem o limite imposto pelo critério de segurança, que é de $\pm 6 \text{ mm}$ no ponto de deslocamento máximo. Esse limite é resultado de análises de tensões admissíveis e fadiga da viga.

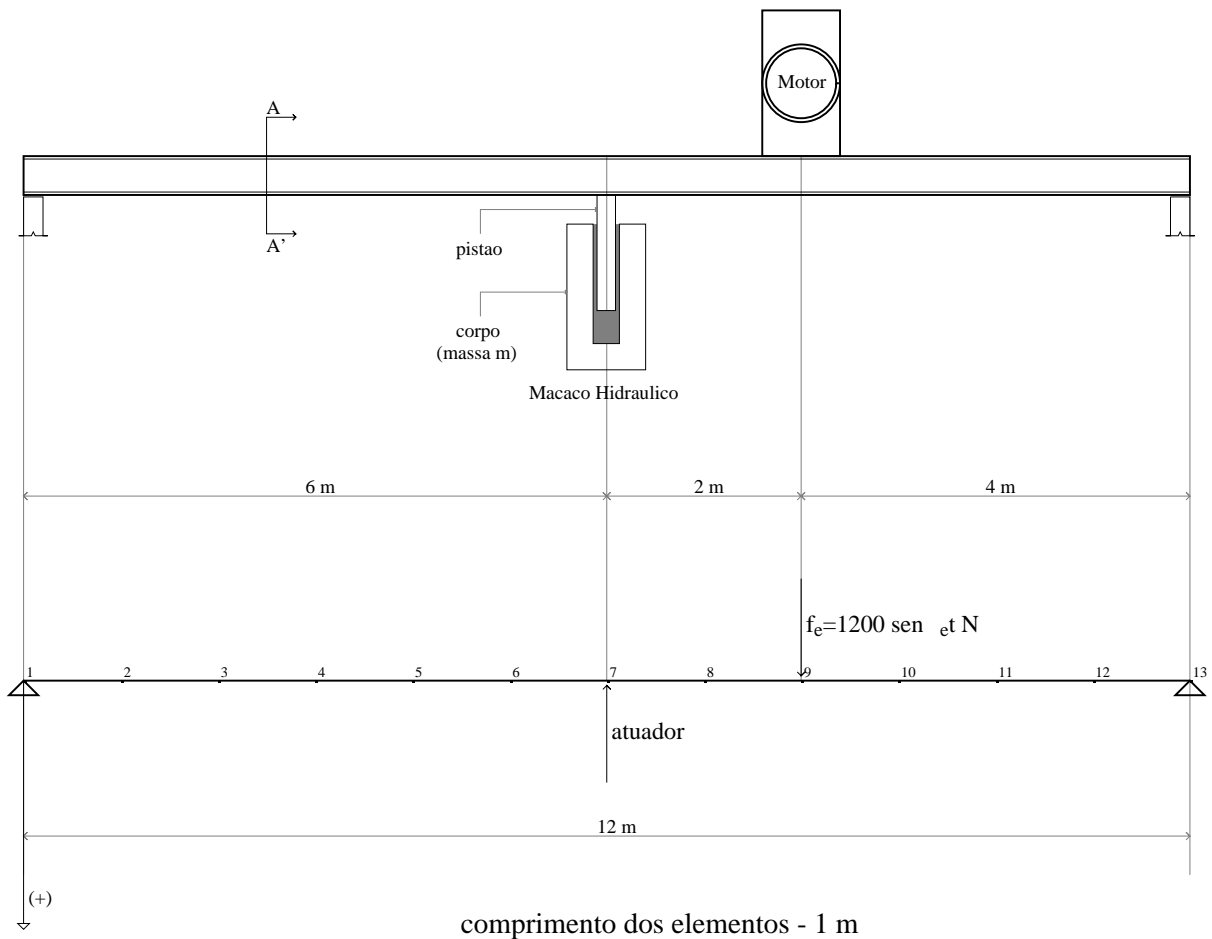
Deseja-se então, através do controle ativo ótimo modal, atender o critério de segurança, bem como analisar o sistema controlado afetado pelo retardo no controle.

Para tanto, foi instalado um macaco hidráulico capaz de atuar na estrutura como um controlador de deslocamentos.

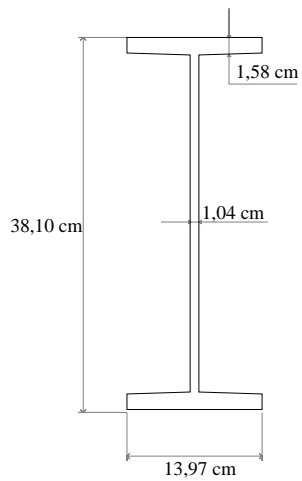
O pistão deste macaco-hidráulico está ligado à estrutura, permitindo imprimir forças tanto de baixo para cima como de cima para baixo.

O macaco-hidráulico pode funcionar de duas maneiras:

- **Aterrado** (isto é, com o corpo ligado ao chão)
Neste caso, as forças de controle são as geradas pelo pistão do macaco-hidráulico atuando diretamente na estrutura.
- **Pendurado pelo pistão**
Neste caso, as forças de controle são as geradas pelas forças inerciais resultantes da aceleração da massa "m" do corpo do macaco-hidráulico.



Corte AA' - Perfil I 15'' (381 x 63,3)



modulo de elasticidade - $2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

area da secao - $8,06 \times 10^3 \text{ m}^2$

massa especifica - 7850 kg/m^3

momento de inercia - $1,86 \times 10^4 \text{ m}^4$

figura VII.1.1 - Esquema de Discretização do Sistema Dinâmico

7.1.2 Estudos Preliminares

Numa análise preliminar da estrutura sob vibrações livres, foram determinadas as três primeiras frequências (ω_i) e modos naturais de vibração, que são apresentadas na tabela VII.1.1

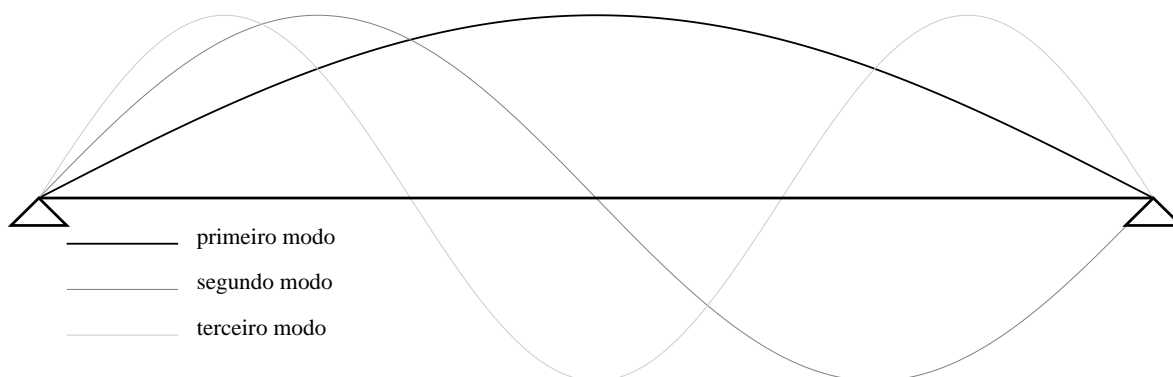


figura VII.1.2 - modos de vibração da viga

tabela VII.1.1 - Frequências Naturais de Vibração da Viga

Modo	Frequência Circular (rad/s)	Frequência (Hz)	Período (s)
primeiro	53,82	8,57	0,117
segundo	215,20	34,25	0,029
terceiro	484,30	77,08	0,013

Percebe-se, então, que a força de excitação do sistema está bem próxima da primeira frequência natural, pondo o sistema em “quase-ressonância” no primeiro modo de vibração

$$\omega_e \approx 0,98 \omega_1 \Rightarrow \begin{cases} \omega_e = 52,74 \text{ rad/s} \\ \omega_1 = 53,82 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Pode-se então afirmar que para este carregamento harmônico, a resposta da estrutura é, predominantemente, função do primeiro modo de vibração.

As respostas dinâmicas obtidas pelo método da superposição modal, formam praticamente as mesmas para a utilização de um, dois ou três modos de vibração. Sendo assim a análise desse exemplo será feita tomando-se apenas o primeiro modo de vibração.

Obviamente, o ponto onde o macaco hidráulico controla com maior eficiência o sistema, será o meio do vão, onde ocorre a maior amplitude modal de deslocamentos

para o primeiro modo de vibração (ver figuras VII.1.1 e VII.1.2). Pelo mesmo motivo, as medições de deslocamentos serão tomadas também no meio do vão, ou seja, deslocamento transversal do nó 7

Para que a contribuição dos 3 modos fosse explorada seria necessário que a excitação tivesse valor de frequência fundamental entre as frequências naturais da estrutura, ou que a excitação fosse variável em frequência (do tipo varredura em frequência). Entretanto o interesse primordial desse exemplo é explorar o comportamento do sistema frente a perturbações dinâmicas, tal como retardos na atuação do controle ativo.

A fim de que se tenha aproximadamente 100 pontos por período de oscilação nas respostas do sistema, será adotado como intervalo de tempo para integração numérica das equações diferenciais modais de movimento, 1/100 do primeiro período natural. Isso equivale a 0,00117 s.

- **Matriz modal \mathcal{Q} de ponderação de deslocamentos**

Os coeficientes de \mathcal{Q} terão valores não nulos, apenas nas posições relativas às amplitudes e velocidades generalizadas do primeiro modo de vibração:

$$\mathcal{Q}_{68 \times 68} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathcal{Q}_{1-1} & \cdots & 0 & \mathcal{Q}_{1-40} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{1-40} & \cdots & 0 & \mathcal{Q}_{40-40} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathcal{Q}_{\text{não nulo}} = 10^n \quad (n \rightarrow \text{número real})$$

Onde o índice não nulo indica os termos diferentes de zero da matriz \mathcal{Q}

- **Matriz modal \mathcal{R} de ponderação da força de controle**

Tal como em \mathcal{Q} , o coeficiente de \mathcal{R} não nulo é apenas o relativo à amplitude de deslocamento generalizado associado ao primeiro modo de vibração:

$$\mathcal{R}_{39 \times 39} = \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{1-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathcal{R}_{\text{não nulo}} = 10^p \quad (p \rightarrow \text{número real})$$

Onde o índice não nulo indica o coeficiente diferente de zero da matriz \mathcal{R}

7.1.3 Resposta Não-Controlada do Sistema

A resposta não-controlada da viga excedeu o limite imposto como critério de segurança. Foi obtido $\pm 26,4 \text{ mm}$ como pico extremo na resposta transiente e $\pm 20,6 \text{ mm}$ para a resposta em regime.

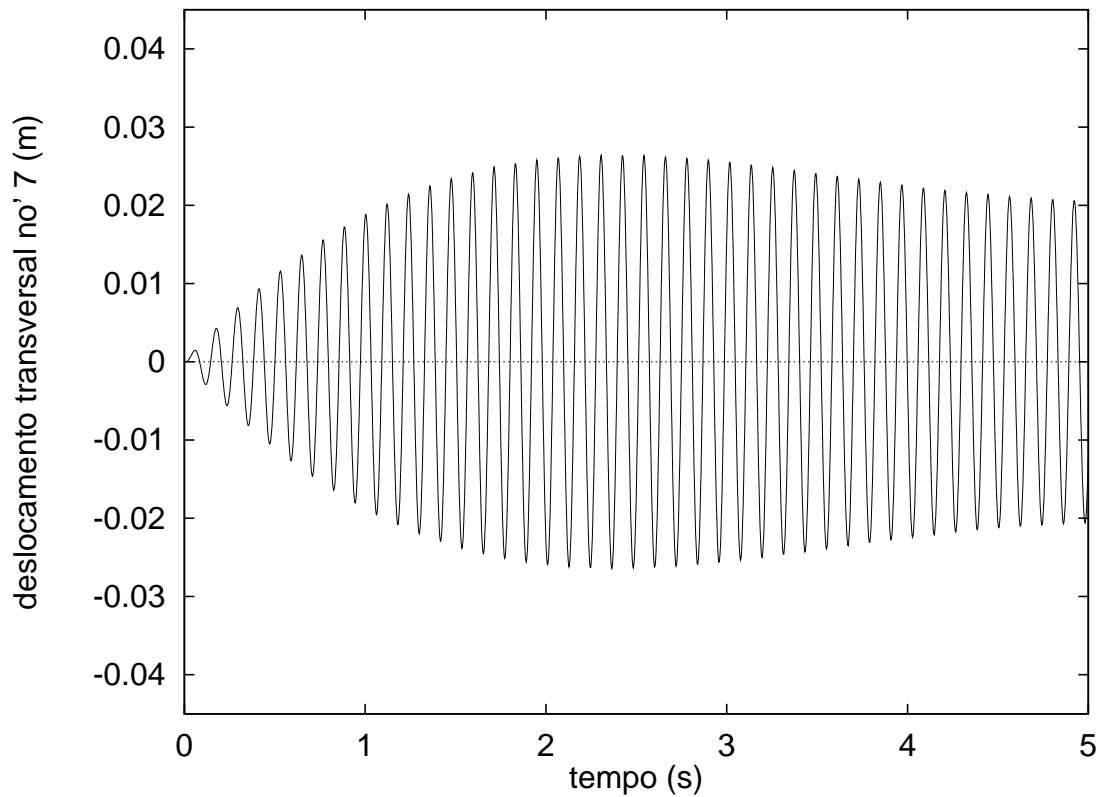


figura VII.1.3 - resposta não controlada do sistema

7.1.4 Controle Ativo do Sistema

Com a introdução do controle ativo na estrutura, foram obtidas reduções significativas para as amplitudes de deslocamentos. Tomando as seguintes ponderações:

- $Q_{n\grave{a}o\ nulo} = 10^8$ e $R_{n\grave{a}o\ nulo} = 10^0$

e aplicando âmbos os algoritmos de controle foram obtidas as respostas dinâmicas mostradas na figura VII.1.4:

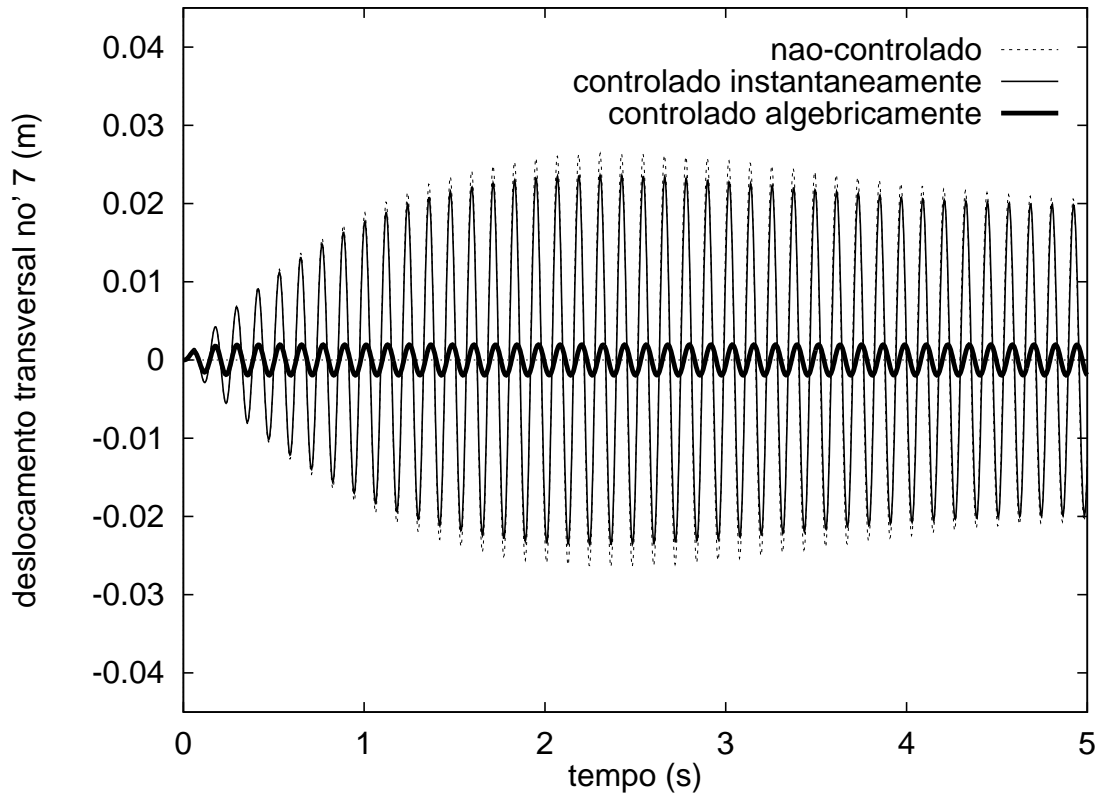


figura VII.1.4 - Deslocamento vertical no meio do vão \times tempo para o sistema com e sem controle ativo

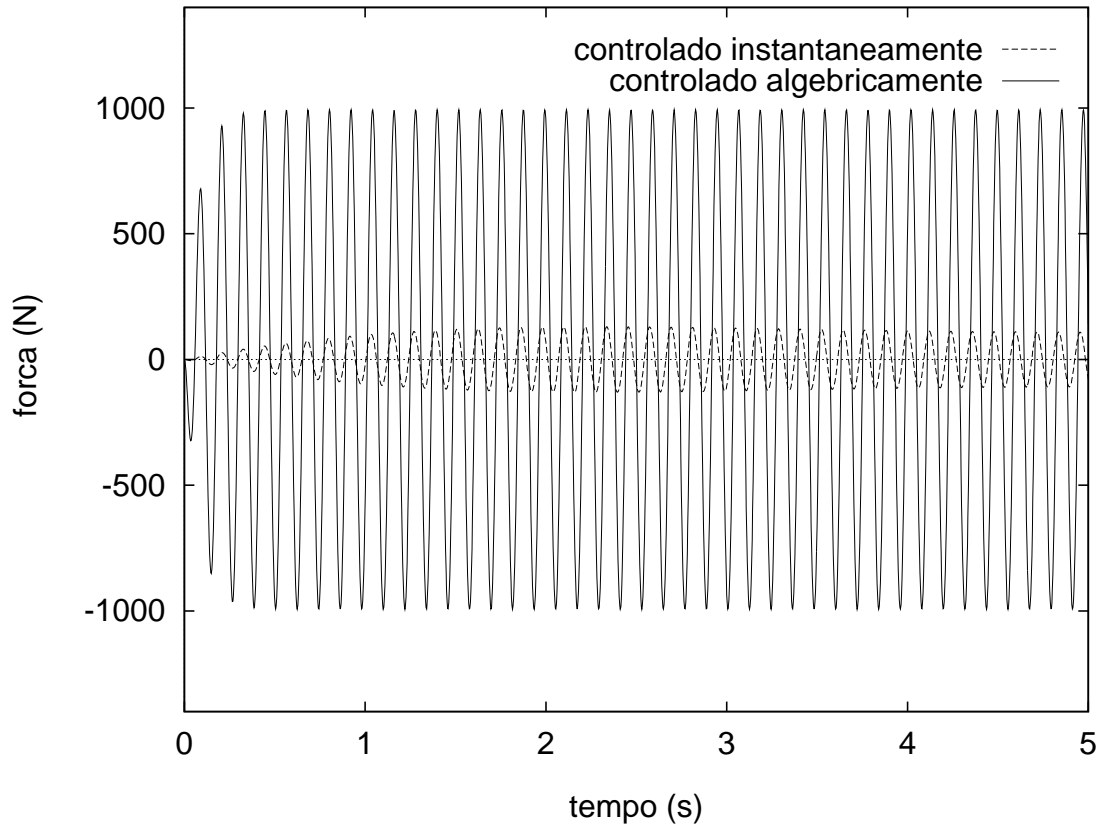


figura VII.1.5 - forças de controle \times tempo

Para o par de valores tomados para os coeficientes não nulos de \mathcal{Q} e \mathcal{R} , as respostas controladas alcançaram os valores máximos de $\pm 1,9 \text{ mm}$ e $\pm 19,8 \text{ mm}$ para deslocamentos, para os casos de controle algébrico e instantâneo, respectivamente. Esses valores foram obtidos para as respostas em regime.

Já com relação às forças de controle, os valores máximos obtidos foram $\pm 109 \text{ N}$ para controle instantâneo e $\pm 992 \text{ N}$ para controle algébrico.

Percebe-se que para um mesmo par \mathcal{R} e \mathcal{Q} de ponderação de força de controle e deslocamentos, tem-se maiores reduções de deslocamentos e conseqüentemente maiores amplitudes de força de controle quando se utiliza o controle algébrico.

Este resultado pode ser confirmado tomando-se várias ponderações e observando as variações dos máximos dos deslocamentos e das forças de controle (os deslocamentos e as forças de controle foram tomados em módulo nestas análises), tal como ilustrado nos pares de figuras VII.1.6a / VII.1.7a e VII.1.6b / VII.1.7b, respectivamente.

1. Variando n e fixando-se p tal que:

$$0 \leq n \leq 12 \Rightarrow \mathcal{Q}_{\text{n\~{a}o nulo}} = 10^n$$

$$p = 0 \Rightarrow \mathcal{R}_{\text{n\~{a}o nulo}} = 10^0$$

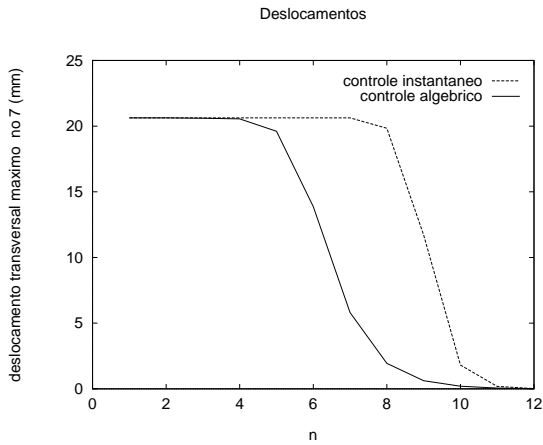


figura VII.1.6a

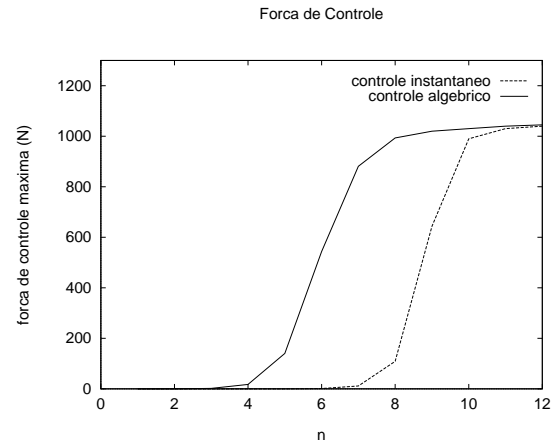


figura VII.1.6b

2. Variando p e fixando-se n tal que:

$$0 \leq p \leq 12 \Rightarrow \mathcal{R}_{\text{n\~{a}o nulo}} = 10^p$$

$$n = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}_{\text{n\~{a}o nulo}} = 10^0$$

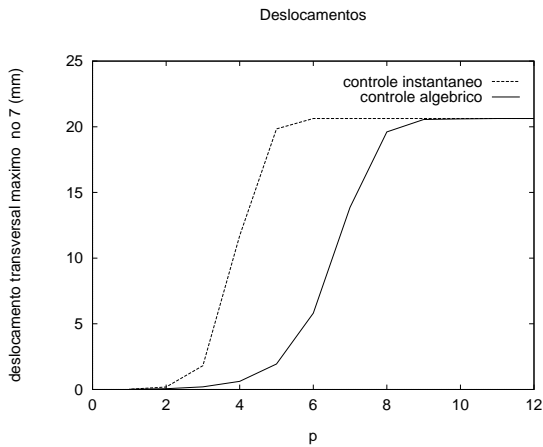


figura VII.1.7a

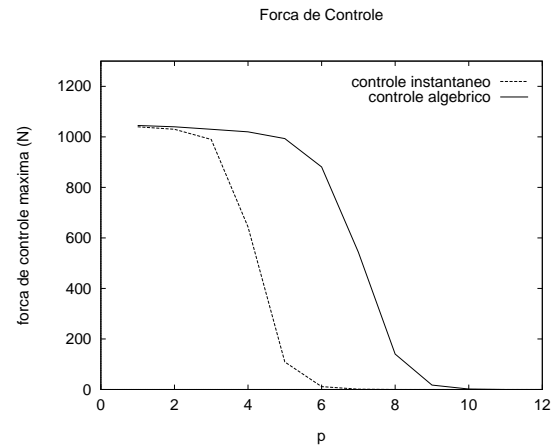


figura VII.1.7b

Uma das possíveis dos valores dos expoentes n e p para \mathcal{Q} e \mathcal{R} respectivamente que reduziram os deslocamentos, levando-os à níveis compatíveis com critério de segurança foram:

- **Para Controle Algébrico:** $p = 0$ e $n = 7$
Esta combinação n/p ocasionou deslocamentos da ordem de $\pm 5,8 \text{ mm}$ e força de controle em torno de $\pm 880 \text{ N}$
- **Para Controle Instantâneo :** $p = 0$ e $n = 9,127$
Os níveis de deslocamentos e força de controle foram de $\pm 5,8 \text{ mm}$ e $\pm 880 \text{ N}$ tal como no caso anterior

7.1.5 Influência do Retardo na Atuação da Força de Controle

Um sistema dinâmico controlado ativamente de maneira ideal, é aquele onde as forças de controle estão em exata oposição de fase com as forças inerciais criadas na estrutura pelas forças dinâmicas externas.

Em particular, neste exemplo analisado da figura VII.1.1 onde o macaco hidráulico encontra-se aterrado, o sistema ideal se dá quando um ponto da estrutura tende a se deslocar num certo sentido e a força de controle atua em sentido contrário nesse mesmo ponto, atenuando as amplitudes de resposta em termos de deslocamentos verticais.

Lembrando que o movimento de um ponto da estrutura pode ser descrito pela sua velocidade, num sistema de controle ativo ideal, deve-se ter a força de controle em oposição de fase com a velocidade da estrutura [1].

Considerando um movimento harmônico cossenoidal, pode-se escrever para um sistema ideal: (ver figura VII.1.8a)

$$\begin{aligned}
 \text{Deslocamentos} &= \bar{d} \cos(\omega t) \\
 \text{Velocidade} &= -\bar{v} \text{sen}(\omega t) \\
 \text{Força de Controle}_{ideal} &= -\bar{f}_c \text{sen}(\omega t \pm \pi)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Onde:

- t é a variável que descreve o tempo
- ω é a frequência circular de vibração por flexão da estrutura
- \bar{d} é a amplitude do deslocamento

- \bar{v} é a amplitude da velocidade
- \bar{f}_c é a magnitude da força de controle
- $\pi = 3,14159\dots$

Deve-se observar no entanto que, é praticamente impossível se obter um sistema de controle ideal, pois existem vários fatores que ocasionam perda de eficiência do sistema controlado ativamente.

Um dos fatores que pode até mesmo inviabilizar o controle ativo de uma estrutura, é intervalo de tempo decorrido entre o instante de aquisição da resposta da estrutura sensoriada (t_1) e o instante de atuação efetiva dos controladores (t_2). Este intervalo de tempo ($t_2 - t_1$) representa o **retardo na atuação da força de controle**[2,8].

Logo para um sistema real pode-se reescrever as equações (VII.1.1), ilustradas na figura VII.1.8b, como:

$$\begin{aligned} \text{Velocidade} &= -\bar{v} \operatorname{sen}(\omega t) \\ \text{Força de Controle}_{real} &= -\bar{f}_c \operatorname{sen}(\omega t + \pm\pi \pm \eta) \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde, além das quantidades já definidas, $\eta = \omega(t_2 - t_1)$ é a defasagem da força de controle, sendo ($t_2 - t_1$) o retardo na atuação da força de controle

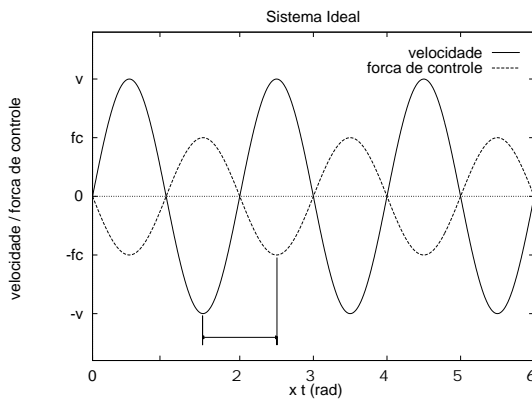


figura VII.1.8a

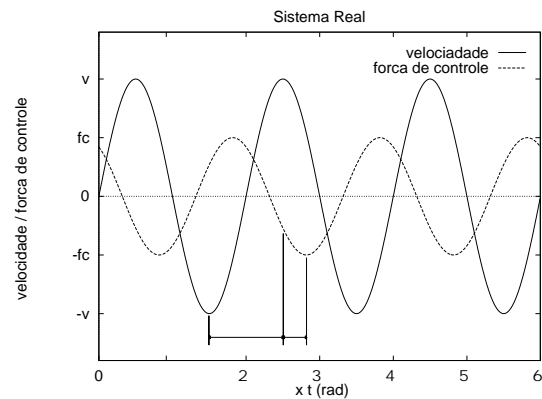


figura VII.1.8b

A situação mais desfavorável possível seria uma defasagem $\eta = \pi \text{ rad}$. Desta forma ter-se-ia a força de controle atuando em fase com a velocidade, levando assim a uma amplificação da excitação em ressonância com a vibração da estrutura, em seu modo dominante.

O efeito desse retardo decorre de vários fatores, podendo-se citar como exemplos:

- Tempo para aquisição do sinal sensoriado
- Tempo de processamento computacional para determinação das forças de controle
- Tempo para vencer a inércia mecânica de um macaco hidráulico

E suas consequências principais são:

- Perda de sincronismo na aplicação das forças de controle
- Perda de eficiência do sistema de controle
- Instabilidade do sistema estrutural controlado

A medida corretiva mais usual é a de promover mudanças nos parâmetros de ganho da retroação. Estas alterações ou ajustes dos ganhos do sistemas atuadores podem ser efetuadas, em geral, de maneira fácil quando o movimento do sistema estrutural controlado é dominado por vibrações de uma certa frequência.

Através da simulação numérica pode-se fazer um estudo do comportamento de uma estrutura controlada diante do efeito de retardo.

A estrutura aqui analisada tem frequência de oscilação $\omega \approx 53,09 rad/s$, ou seja seu período de vibração $T \approx 0,118s$ (valor obtido a partir da resposta não controlada da estrutura - figura VII.1.3; compare com valores da tabela VII.1)

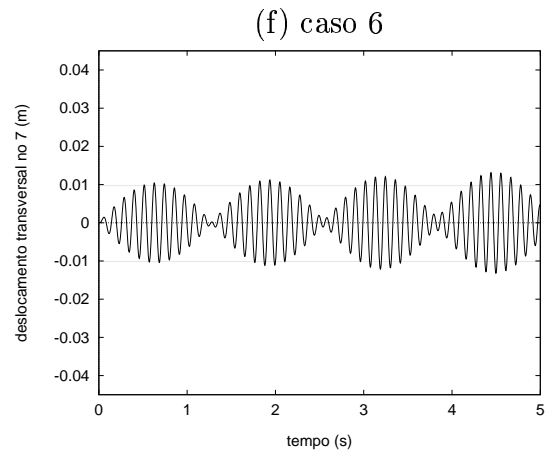
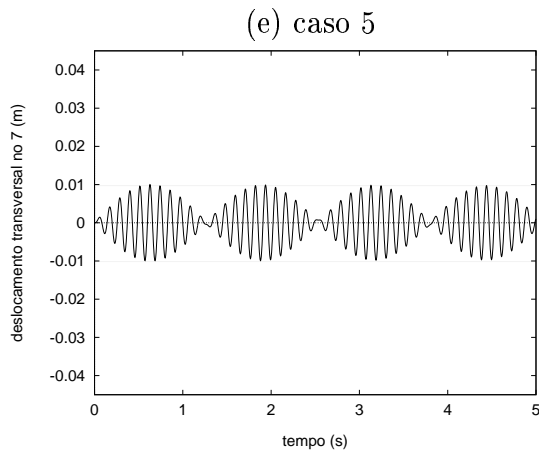
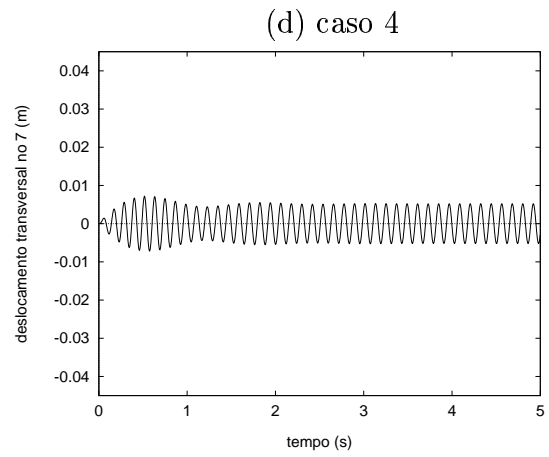
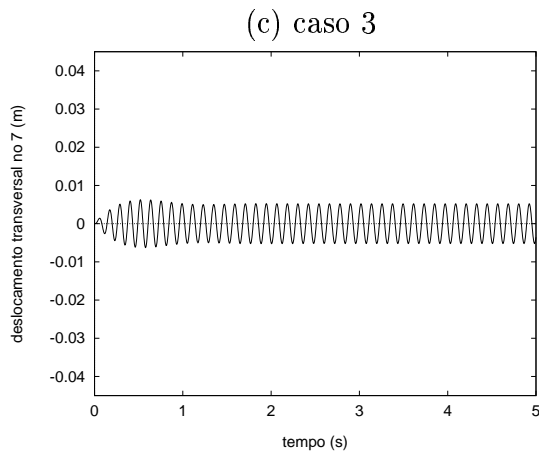
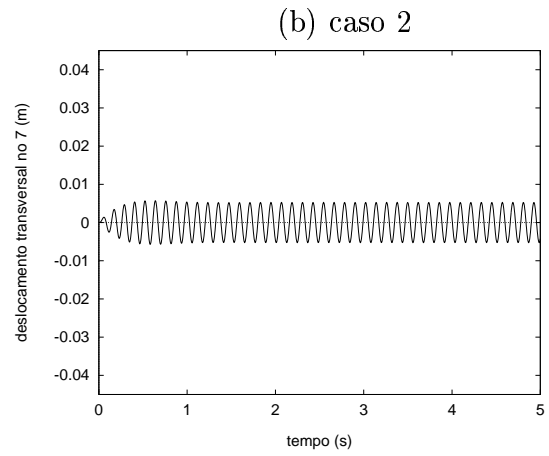
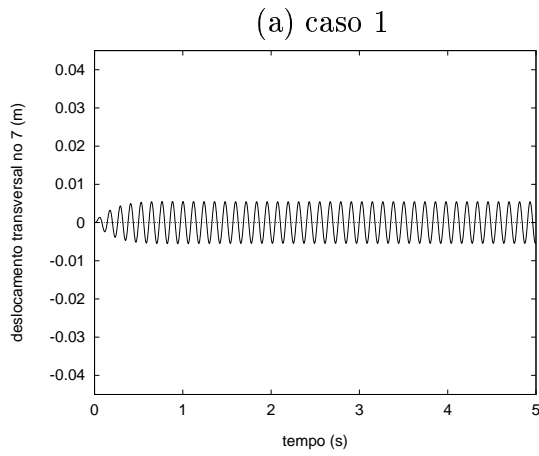
As figuras VII.1.9 que se seguem representam as respostas controladas sob efeito de retardos na atuação da força de controle variando entre $0 \leq \text{retardo} \leq (\frac{T}{2} = 0.059 \text{ seg})$ onde T é o período de resposta.

As respostas dinâmicas ilustradas nas figuras VII.1.9a-h foram obtidas numericamente com controle algébrico para o modelo da figura VII.1, com o mecanismo de controle aterrado e para os coeficientes de ponderação:

- $\mathcal{Q}_{\text{não nulo}} = 10^7$ e $\mathcal{R}_{\text{não nulo}} = 10^0$

Os casos de análise (casos 1 a 8) que correspondem às figuras VII.1.9 são resumidos na tabela VII.1.2, a qual apresenta os vários retardos de tempo e as correspondentes defasagens entre a força de controle e a resposta variando entre $0 \leq \eta \leq \pi \text{ rad}$.

figuras VII.1.9 - Respostas da estrutura controlada sob efeito de retardo na atuação da força de controle



figuras VII.1.9 - Continuação

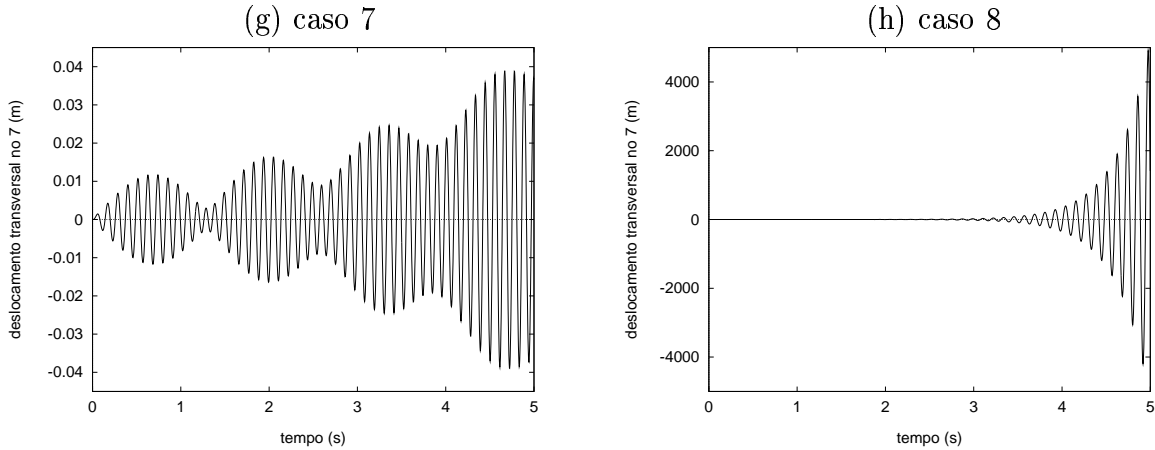


tabela VII.1.2 - Casos de análise sob efeito de retardo

<i>caso</i>	<i>defasagem (η) em radianos</i>	<i>retardo em segundos</i>
<i>caso 1</i>	<i>até $\pi/8$</i>	0,0074
<i>caso 2</i>	$\pi/4$	0,0147
<i>caso 3</i>	$\pi/3$	0,0197
<i>caso 4</i>	$\pi/2, 5$	0,0236
<i>caso 5</i>	$\pi/2$	0,0295
<i>caso 6</i>	$\pi/1, 95$	0,0303
<i>caso 7</i>	$\pi/1, 85$	0,0319
<i>caso 8</i>	π	0,0590

O **caso 1** refere-se as repostas controladas do sistema para pequenas defasagens. Neste caso o retardo praticamente não influenciou na resposta.

Para os **casos 2, 3 e 4** houve perturbações iniciais crescentes com a defasagem, mas como o sistema é retro-alimentado, estas perturbações foram absorvidas sem perda significativa de eficiência do controle e sem perda da estabilidade do movimento.

Para o **caso 5** houve aumento significativo das perturbações iniciais acrescidas de batimento. Embora ainda estável, este caso apresentou significativa perda de eficiência do controle. Para retardos um pouco superiores ao caso 5, a estrutura deixa de responder numa forma estável e periódica, e os batimentos passam a apresentar amplitudes crescentes. Para qualquer pequeno acréscimo de defasagem o sistema se instabiliza, o que leva à conclusão então que a defasagem $\pi/2$ se trata de um ponto crítico

O **caso 6** demonstra que para uma defasagem igual a $\pi/2$, o comportamento é crítico, pois para um aumento relativo de retardo de tempo (do caso 5 para o caso 6) de aproximadamente 2,64 %, o sistema tornou-se instável. Deve-se notar que o sistema se tornou instável para aumentos relativos bastante inferiores a 2,64 %, mas a visualização gráfica deste efeito seria aqui impossível.

Nos **casos 7 e 8** observa-se claramente a instabilidade do sistema estrutural. Nota-se que o caso extremo (8) é apresentado em escala de deslocamentos diferenciada.

Analisando os diagramas espaço-fase para os casos em que há estabilidade do sistema, tem-se diagramas semelhantes ao ilustrado na figura VII.1.10a Para os casos de instabilidade tem-se um diagrama espaço-fase semelhante ao apresentado na figura VII.1.10b

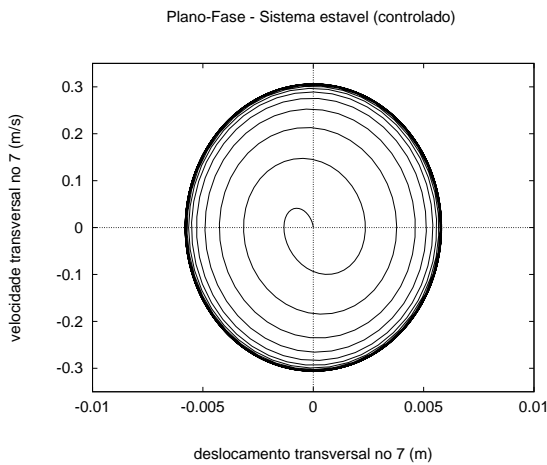


figura VII.1.10a

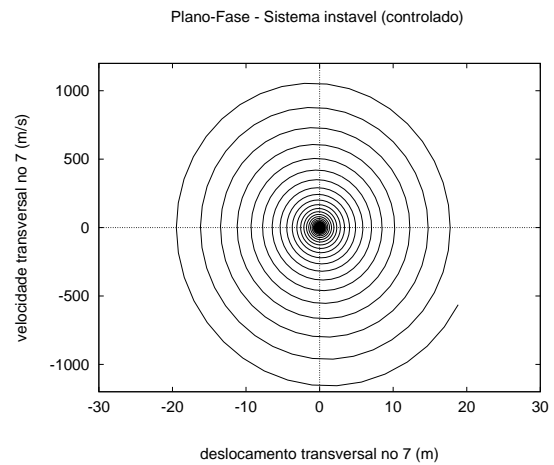
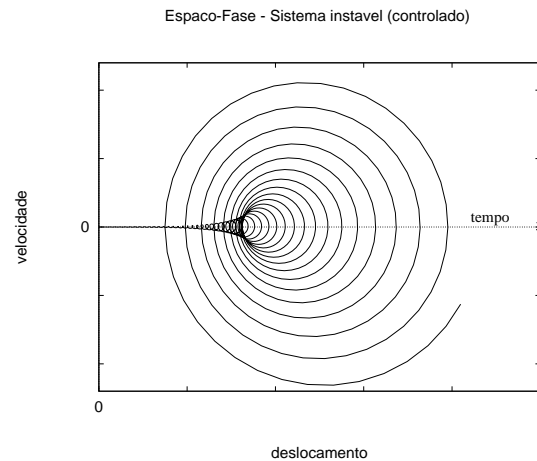
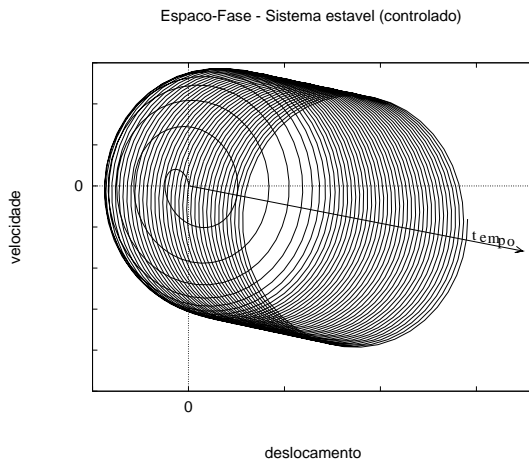


figura VII.1.10b

As figuras VII.1.11a e VII.1.11b fornecem, para cada uma das figuras VII.1.10 uma visão tri-dimensional do diagrama espaço fase.



7.1.6 Comentários Adicionais

Com introdução dos controles ativos - instantâneo ou algébrico - houve redução dos deslocamentos a níveis satisfatórios, atendendo às condições iniciais de projeto.

As forças de controle obtidas com cada um desses dois algoritmos, requerem intensidades praticamente iguais para se atingir os mesmos níveis de reduções de deslocamento. Isso pode ser demonstrado com o auxílio das figuras VII.1.6a e VII.1.6b, reproduzidas abaixo para maior clareza nas figuras VII.1.12a e VII.1.12b respectivamente.

Supondo que se deseje que os deslocamentos do sistema controlado não ultrapassem \bar{d} (mm). Pode-se com o auxílio dessas figuras determinar as necessárias ponderações \bar{n}_i e \bar{n}_a , correspondentes a cada algoritmo de controle (instantâneo e algébrico respectivamente). A ponderação relativa a matriz \mathcal{R} , neste caso, é constante e igual a 10^0 ($p = 0$) e estas ponderações \bar{n}_i e \bar{n}_a tiradas da figura VII.1.12a, e levadas para a figura VII.1.12b, conduzem à mesma intensidade de força de controle \bar{f}_c (N)

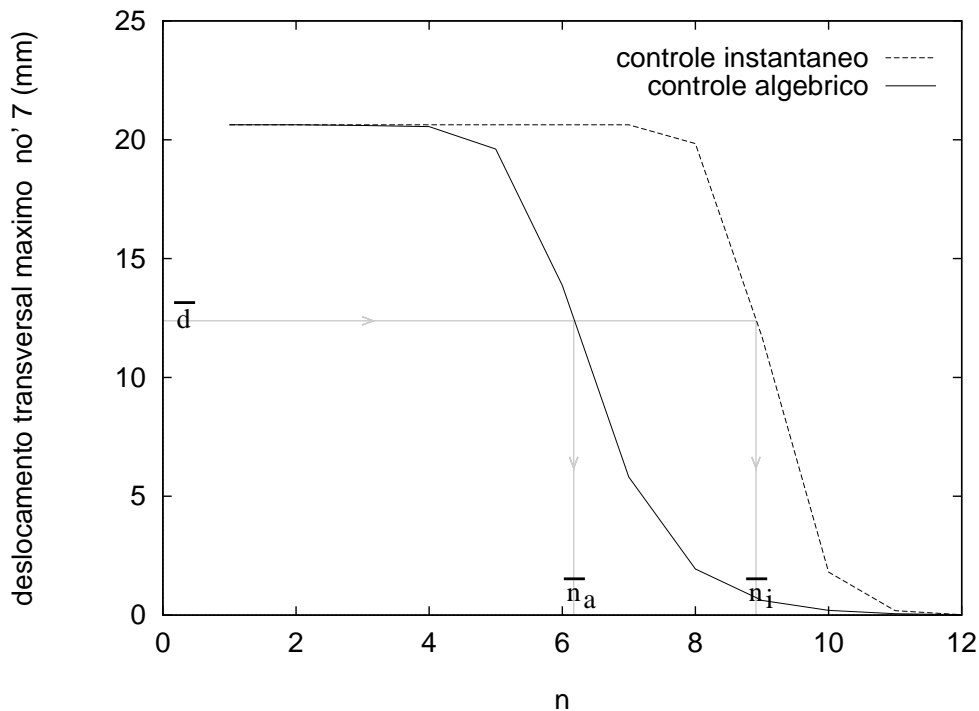


figura VII.1.12a - Deslocamentos Máximos \times Expoentes de Ponderação

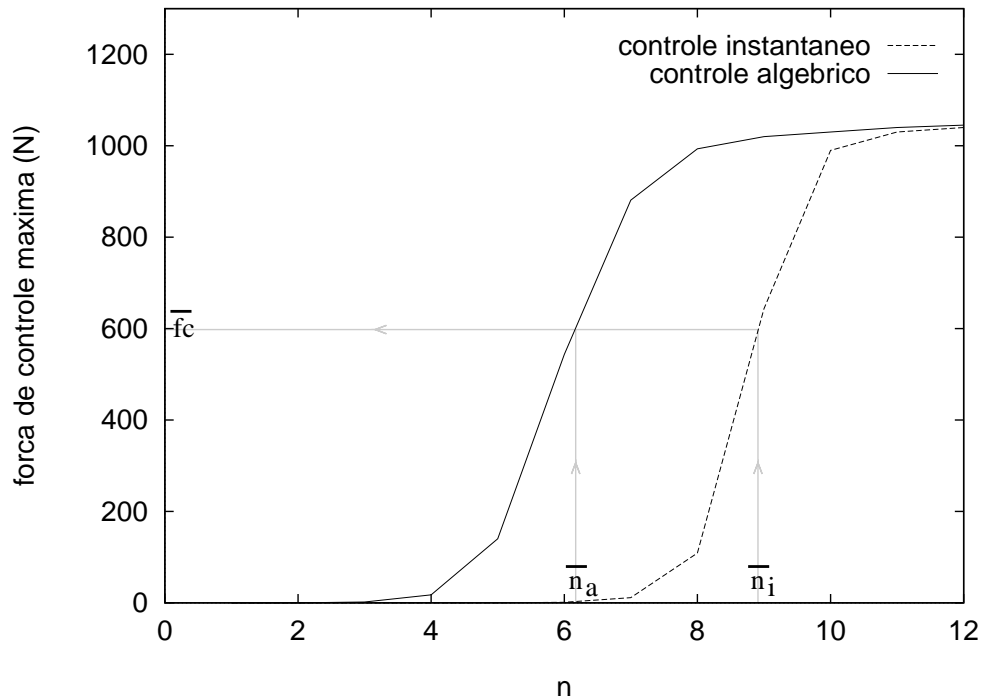


figura VII.1.12b - Forças de Controle Máximas × Expoentes de Ponderação

Uma diferença entre o controle algébrico e o instantâneo, para esse exemplo, foi que as reduções requeridas foram obtidas para diferentes ponderações conforme ilustram as figuras VII.1.12.

Também pode-se notar que o controle algébrico mostrou sensibilidade às variações nos valores de \mathcal{Q} numa faixa compreendida entre $10^3 \leq \mathcal{Q}_{\text{não nulo}} \leq 10^{12}$. Já o controle instantâneo teve uma faixa para redução compreendida entre $10^7 \leq \mathcal{Q}_{\text{não nulo}} \leq 10^{12}$. Esta sensibilidade também pode ser atestada analisando os valores de \mathcal{R} . Isto tornou a curva de redução de deslocamentos para o controle algébrico mais suave que a do controle instantâneo (comparar os gráficos das figuras VII.1.6a e VII.1.7a).

Com relação ao efeito de retardo de controle aplicado a viga, percebe-se que a retro-alimentação do sistema, permite uma certa flexibilidade para absorção desse efeito. A retroação introduz no sistema parâmetros que fazem com que as perturbações iniciais, crescentes com o retardo, sejam absorvidas ao longo do tempo. Obviamente isso foi válido somente para retardos inferiores ao crítico, retardo de 0,0295 seg ou defasagem de $\eta = \pi/2 \text{ rad}$, correspondentes ao caso 5, figura VII.1.9e.

7.2 Exemplo 2 - Pórtico de Três Andares sob Carga Simulada de Vento

7.2.1 Descrição do Sistema Dinâmico

Seja a edificação de concreto armado abaixo, sujeita a carregamento de vento:

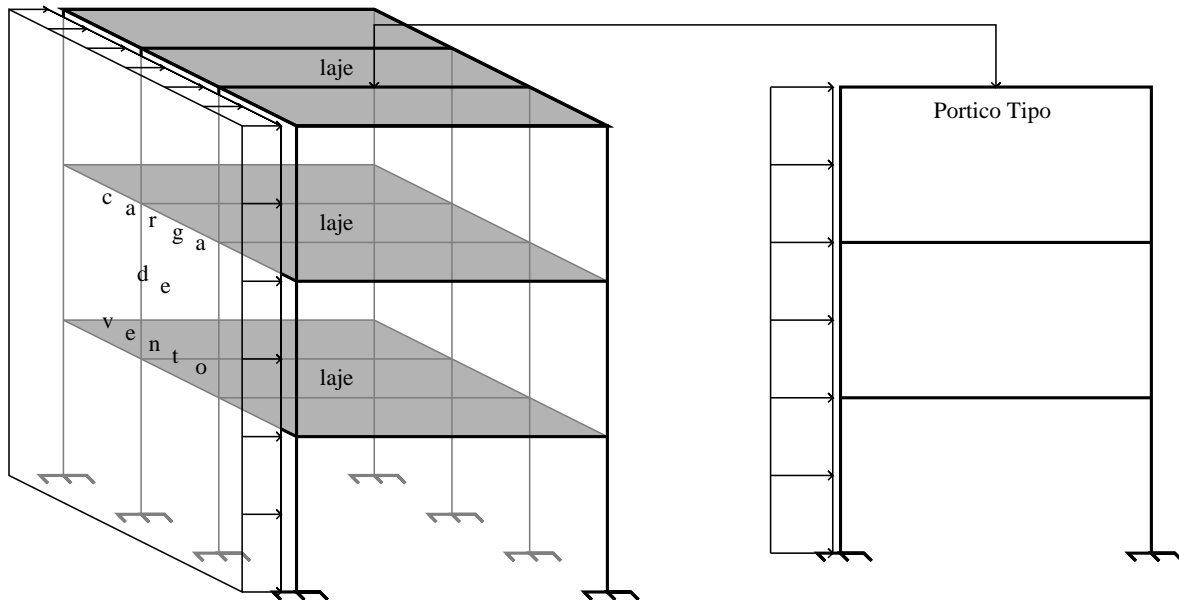


figura VII.2.1

Hipótese:

- As lajes da edificação são infinitamente rígidas no seu próprio plano.

De acordo com a hipótese considerada, a análise dinâmica da edificação fica reduzida ao estudo do pórtico tipo, com o carregamento equivalente, conforme sugere figura VII.2.1.

Na discretização do pórtico tipo, mostrada na figura VII.2.2, o carregamento distribuído foi descrito nodalmente. A massa correspondente à sobrecarga na edificação foi inserida utilizando-se massas concentradas nodais distribuídas ao longo das barras horizontais. A figura VII.2.2 ilustra com mais detalhes o esquema de discretização utilizado:

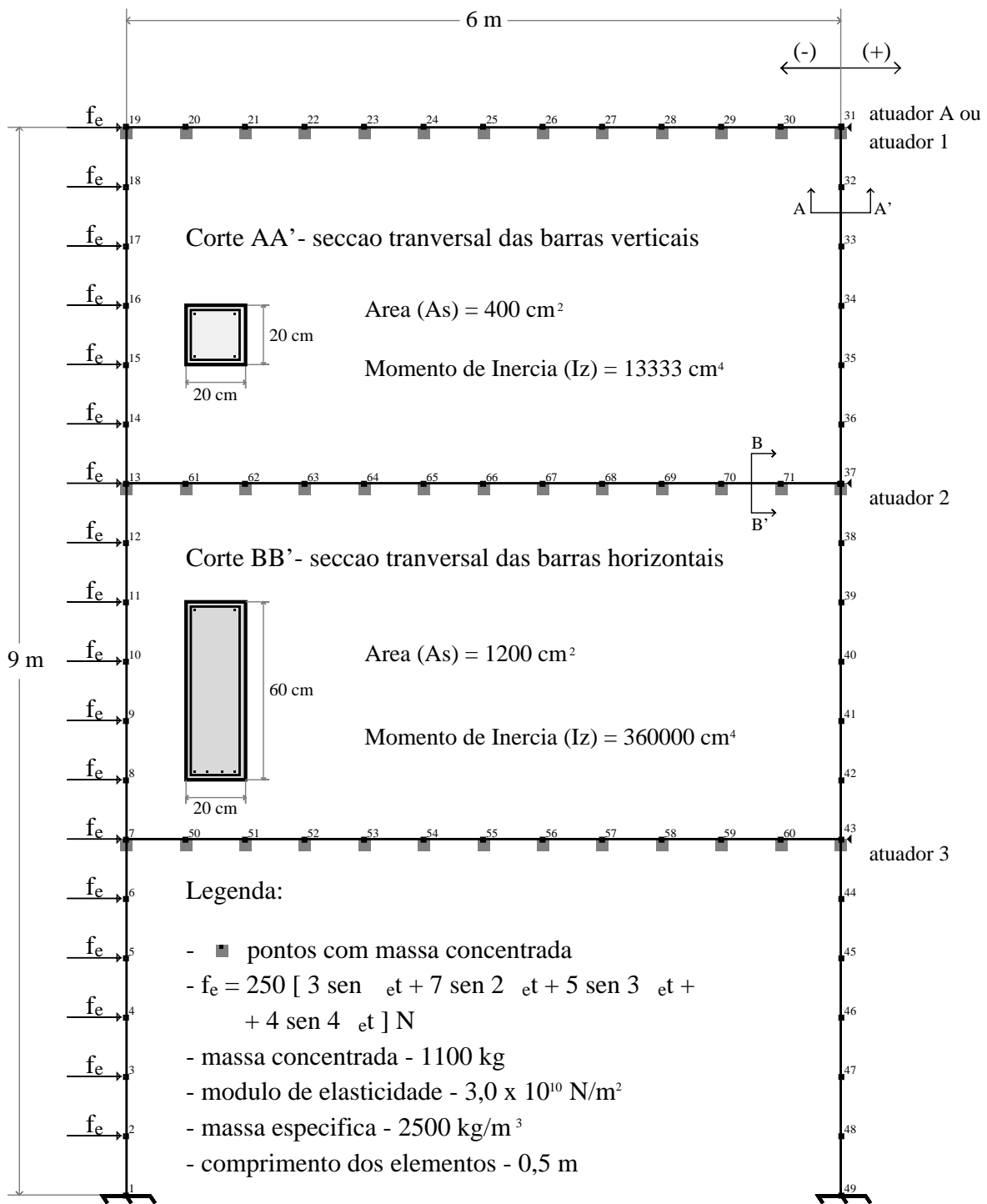


figura VII.2.2 - Discretização da Estrutura do Pórtico, do carregamento equivalente de vento e das massas

O carregamento devido ao vento é descrito por forças nodais dadas por:

$$F_e(t) = 250 [3\text{sen}(\omega_e t) + 7\text{sen}(2 \omega_e t) + 5\text{sen}(3 \omega_e t) + 4\text{sen}(4 \omega_e t)] N$$

onde, $\omega_e = 6,27 \text{ rad/s}$

As vibrações acarretadas pelo vento, podem comprometer os limites impostos pelos critérios de segurança (deslocamentos) e conforto do usuário (acelerações). Estes limites foram adotados como: 1 mm para deslocamentos e $1,5 \text{ m/s}^2$ para acelerações (valores em módulo), ambos relativos à direção horizontal no topo do edifício.

Dois casos de análise e controle são considerados sob os mesmos critérios de segurança e conforto do usuário adotados:

1. Caso 1:

- Este caso refere-se ao pórtico controlado por um único atuador que exerce sobre a estrutura uma força de controle horizontal, situada no topo do pórtico (nó 31)
- O atuador relativo ao caso 1 será designado como atuador A.
 - Ver figura VII.2.2

2. Caso 2:

- Este caso refere-se ao pórtico controlado por três atuadores situados nos nós 31, 37 e 43, que exercem sobre a estrutura forças de controle horizontais.
- Os atuadores relativos ao caso 2 serão designados como atuadores 1 2 e 3
 - Ver figura VII.2.2

Neste exemplo também será analisado a eficiência obtida no controle para os dois casos considerados.

Como se trata de um exemplo acadêmico e fictício, não será discutida a origem das forças de controle (macaco hidráulico, excitador eletro-magnético, etc), cabendo salientar que este fato não interfere nos resultados obtidos. Supõe-se apenas que esses atuadores estão montados sobre a estrutura (isto é, sobre as lajes) e aceleram massas nos planos horizontais; estas massas podem ser imaginadas, por exemplo, como sendo blocos rígidos sobre superfície lubrificada.

7.2.2 Estudos Preliminares

Numa análise preliminar da estrutura sob vibrações livres, foram determinadas as três primeiras frequências (ω_i) e modos naturais de vibração, apresentados na tabela VII.2.1.

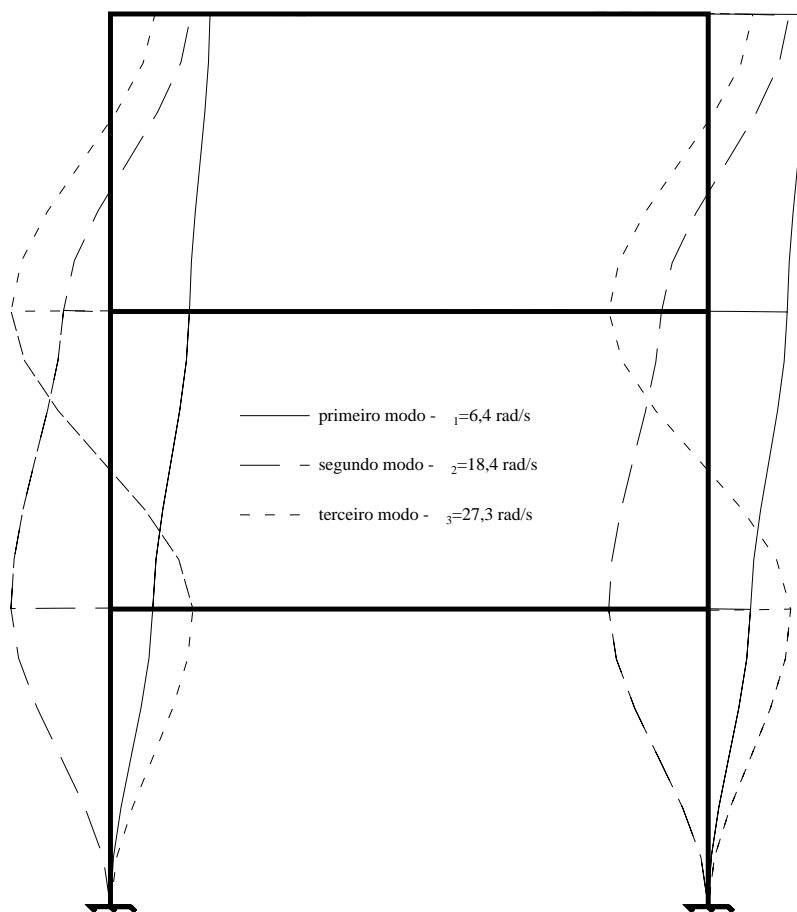


figura VII.2.3 - Modos de Vibração do Pórtico

tabela VII.2.1 - Frequências Naturais de Vibração do Pórtico

Modo	Frequência Circular (rad/s)	Frequência (Hz)	Período (s)
primeiro	6,44	1,02	0,98
segundo	18,40	2,93	0,34
terceiro	27,28	4,34	0,23

O quadro VII.2.1 traz uma comparação direta entre as frequências dos harmônicos que descrevem a excitação e as frequências naturais do sistema estrutural.

quadro VII.2.1 - Frequências de Excitação × Frequências Naturais do Pórtico

$k\omega_e$ (rad/s)	$\omega_{n\approx}$ (rad/s)	$k\omega_e/\omega_{n\approx}$
$1 \times \omega_e = 6,31$	$\omega_1 = 6,44$	0,98
$2 \times \omega_e = 12,62$	$\omega_2 = 18,40$	0,69
$3 \times \omega_e = 18,93$	$\omega_2 = 18,40$	1,03
$4 \times \omega_e = 25,24$	$\omega_3 = 27,28$	0,93

onde,

- $k\omega_e$ ($k = 1...4$) são os quatro harmônicos que compoem o carregamento de frequência ω_e
- $\omega_{n\approx}$ ($n = 1,2$ ou 3) são as frequências naturais que mais se aproximam das correspondentes frequências de excitação.

Observando-se o quadro VII.2.1, pode-se dizer que a resposta da estrutura é, predominantemente, função dos três primeiros modos de vibração. Logo, uma boa aproximação do comportamento dinâmico do sistema, pode ser obtida utilizando-se estes três modos dominantes e o Método da Superposição Modal [7].

A fim de que se tenha aproximadamente 100 pontos por período de vibração nas respostas do sistema, será adotado como intervalo de tempo para integração numérica das equações diferenciais modais de movimento, 1/100 do menor período natural considerado na superposição, Isto é 0,0023 seg.

As respostas do sistema tanto para deslocamentos como para acelerações horizontais serão observadas no nó 19 no topo do pórtico.

- **Matriz modal $\mathcal{Q}_{(426 \times 426)}$ de ponderação de deslocamentos**

$$\mathcal{Q} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathcal{Q}_{1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{Q}_{1-214} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{2-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathcal{Q}_{2-215} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_{3-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Q}_{3-216} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{1-214} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathcal{Q}_{214-214} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{2-215} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathcal{Q}_{215-215} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_{3-216} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \mathcal{Q}_{216-216} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

Os coeficientes não-nulos de \mathcal{Q} tem valor:

$$\mathcal{Q}_{n\text{ão nulo}} = 10^n \quad (n \rightarrow \text{número real})$$

- Matriz modal $\mathcal{R}_{213 \times 213}$ de ponderação de força de controle

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{2-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{3-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Os coeficientes não-nulos de \mathcal{R} tem valor:

$$\mathcal{R}_{n\text{ão nulo}} = 10^p \quad (p \rightarrow \text{número real})$$

7.2.3 Resposta Não-Controlada do Sistema

As figuras VII.2.4a e VII.2.4b mostram, respectivamente as respostas não controladas da estrutura em termos de deslocamentos e acelerações horizontais obtidas no topo do pórtico (nó 19)

Os resultados obtidos para resposta não-controlada do sistema em regime foram:

- Deslocamentos:

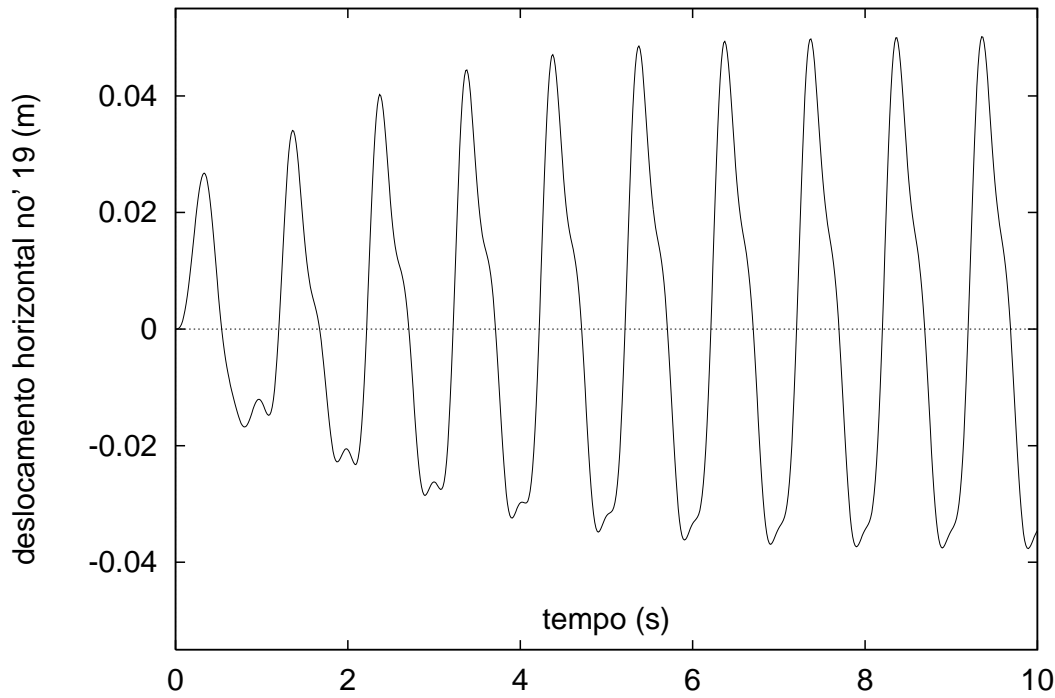
– máximo: +50,2 mm

– mínimo: -37,3 mm

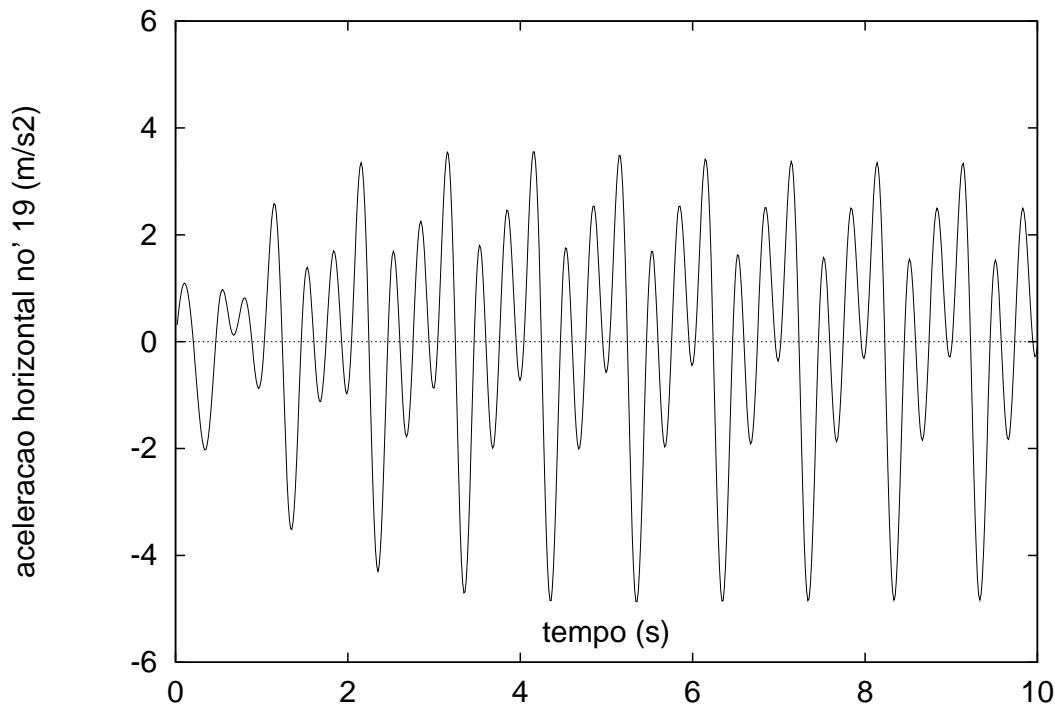
- Acelerações:

– máximo: +3,34 m/s²

– mínimo: -4,84 m/s²



figuras VII.2.4a - Deslocamento Horizontal no Topo do Pórtico × Tempo



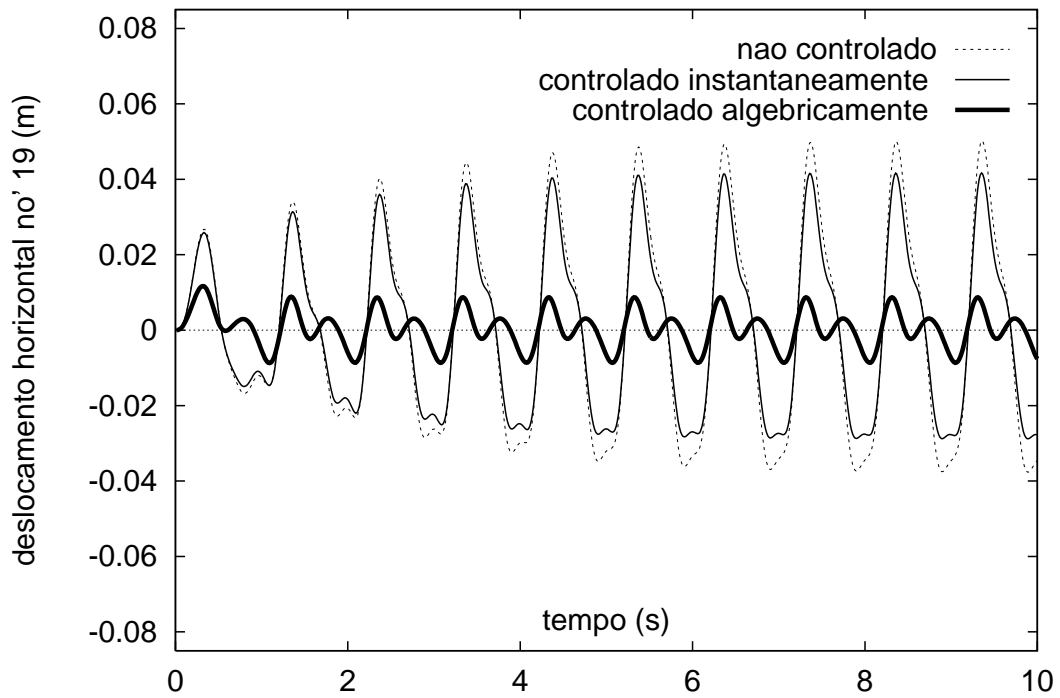
figuras VII.2.4b - Aceleração Horizontal no Topo do Pórtico × Tempo

7.2.4 Controle Ativo do Sistema

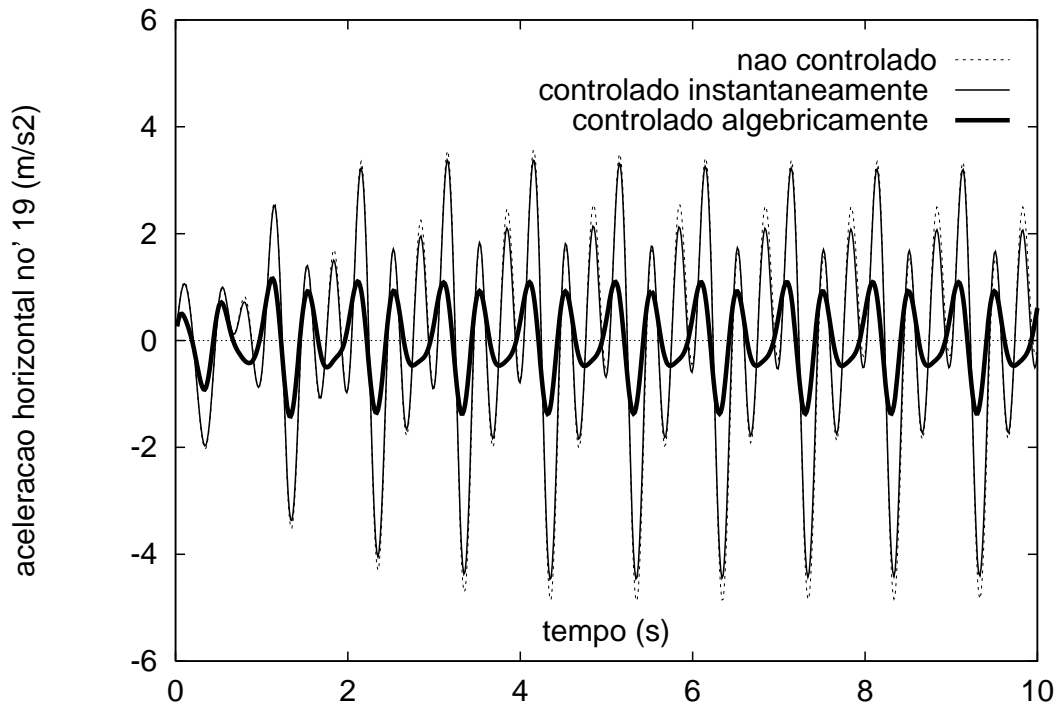
Aplicando o controle ativo modal na estrutura, utilizando as seguintes ponderações:

- $Q_{\text{n\~{a}o nulo}} = 10^{11}$ e $R_{\text{n\~{a}o nulo}} = 10^0$, Tem-se:

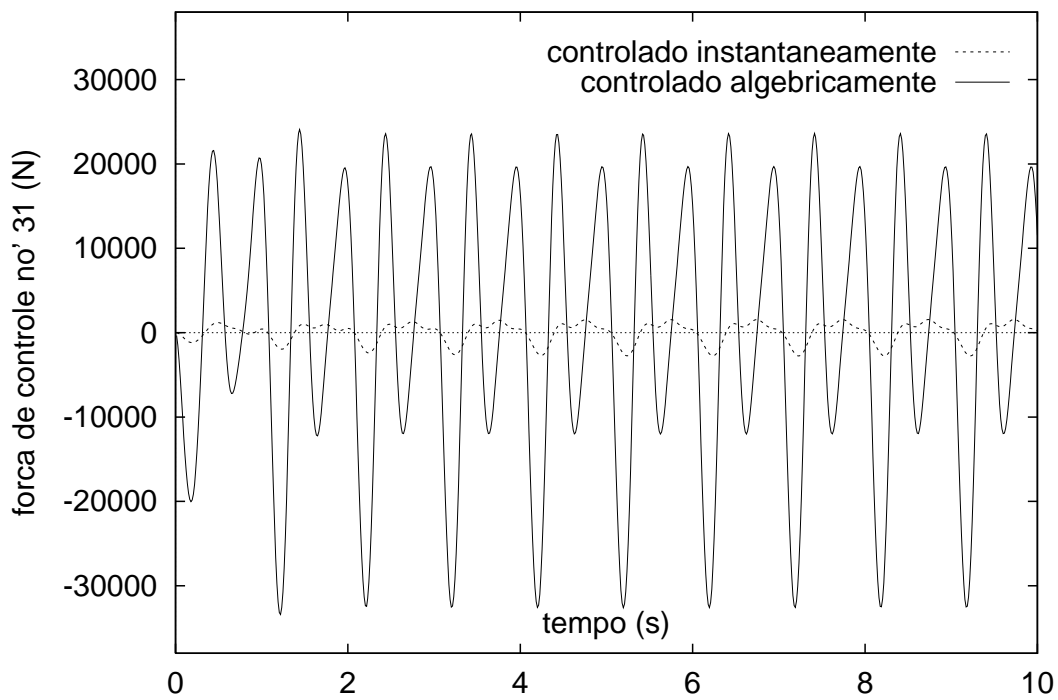
Caso 1:



figuras VII.2.5a - Deslocamento Horizontal do Topo do Pórtico \times Tempo



figuras VII.2.5b - Aceleração Horizontal no Topo do Pórtico × Tempo



figuras VII.2.5c - Forças de Controle Aplicadas no Topo do Pórtico × Tempo

- **Deslocamentos extremos:**

- controle instantâneo
 - * máximo: $+41,7 \text{ mm}$
 - * mínimo: $-28,8 \text{ mm}$
- controle algébrico
 - * máximo: $+8,7 \text{ mm}$
 - * mínimo: $-8,6 \text{ mm}$

- **Acelerações extremas:**

- controle instantâneo
 - * máximo: $+3,2 \text{ m/s}^2$
 - * mínimo: $-4,4 \text{ m/s}^2$
- controle algébrico
 - * máximo: $+1,1 \text{ m/s}^2$
 - * mínimo: $-1,4 \text{ m/s}^2$

- **Forças de controle extremas:**

- controle instantâneo
 - * máximo: $+1,6 \text{ kN}$
 - * mínimo: $-2,8 \text{ kN}$
- controle algébrico
 - * máximo: $+23,6 \text{ kN}$
 - * mínimo: $-32,6 \text{ kN}$

Caso 2:

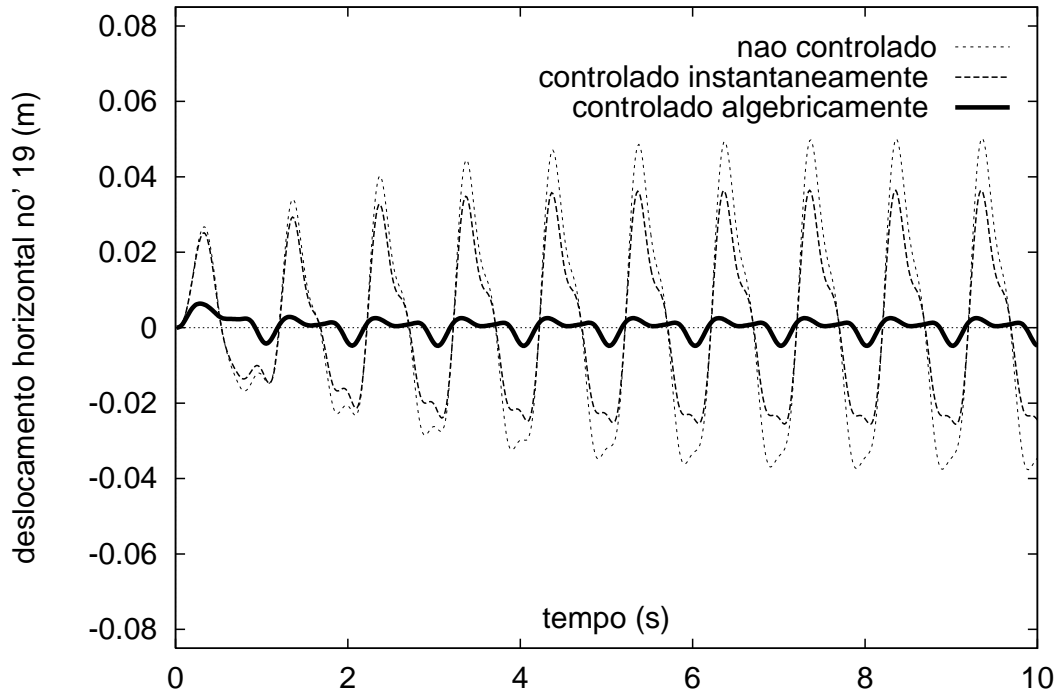


figura VII.2.6a - Deslocamento Horizontal do Topo do Pórtico \times Tempo

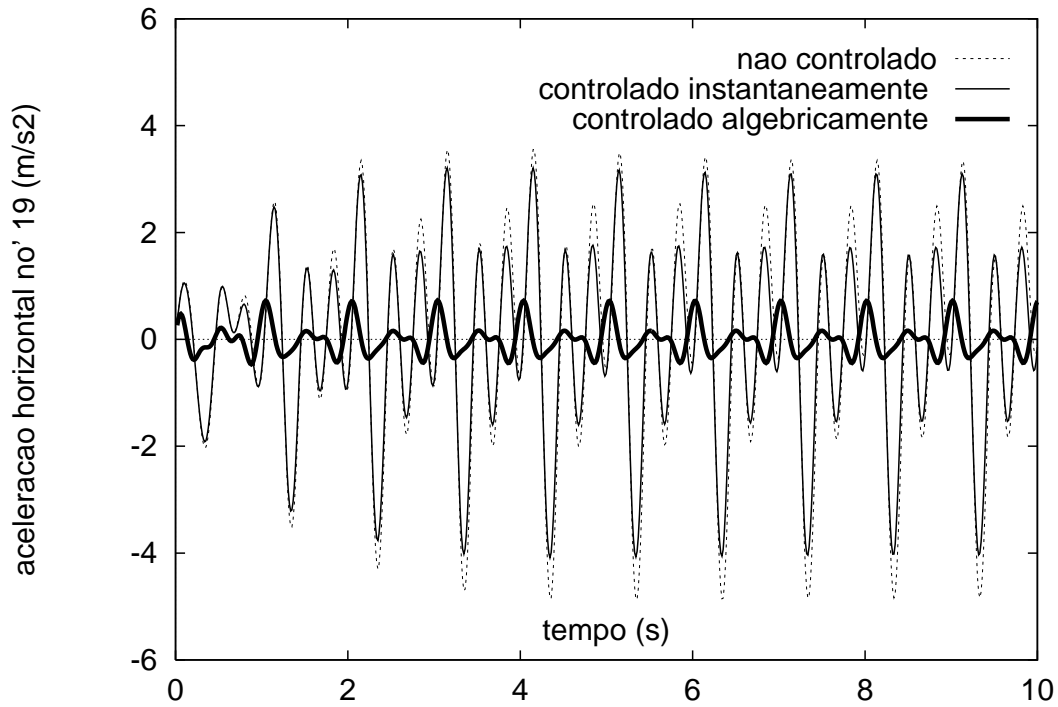


figura VII.2.6b - - Aceleração Horizontal no Topo do Pórtico \times Tempo

Forças de Controle

Controle Instantaneo

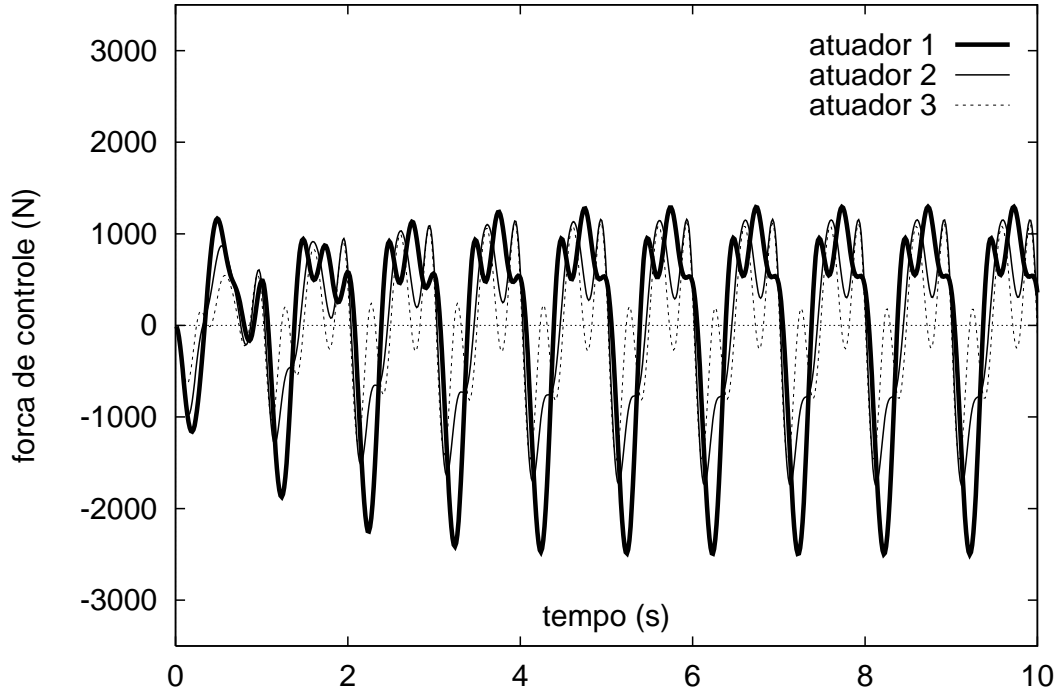


figura VII.2.6c

Controle Algebrico

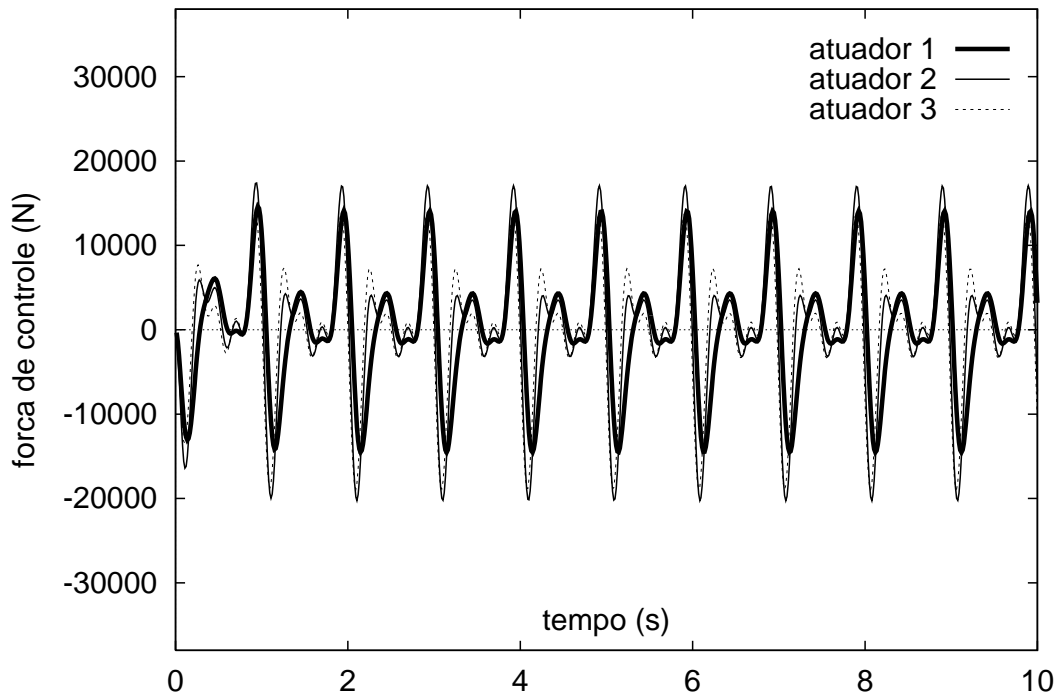


figura VII.2.6d

- **Deslocamentos extremos:**

- controle instantâneo
 - * máximo: $+36,4 \text{ mm}$
 - * mínimo: $-25,6 \text{ mm}$
- controle algébrico
 - * máximo: $+2,5 \text{ mm}$
 - * mínimo: $-4,8 \text{ mm}$

- **Acelerações extremas:**

- controle instantâneo
 - * máximo: $+3,1 \text{ m/s}^2$
 - * mínimo: $-4,0 \text{ m/s}^2$
- controle algébrico
 - * máximo: $+0,7 \text{ m/s}^2$
 - * mínimo: $-0,4 \text{ m/s}^2$

- **Forças de controle extremas:**

- controle instantâneo
 - * máximo: $+1,2 \text{ kN}$ - atuador 1
 - * mínimo: $-2,5 \text{ kN}$ - atuador 1
- controle algébrico
 - * máximo: $+17,1 \text{ kN}$ - atuador 2
 - * mínimo: $-20,2 \text{ kN}$ - atuador 2

Observa-se que para uma mesma ponderação, o algoritmo de controle algébrico forneceu as menores amplitudes de deslocamento/aceleração e, conseqüentemente, as maiores amplitudes de força de controle no controle, em âmbos os casos 1 e 2 de análise, isto é com um ou três atuadores respectivamente.

Variando-se as ponderações tal que:

- $\mathcal{Q}_{\text{não nulo}} = 10^n \Rightarrow 0 \leq n \leq 13$ e $\mathcal{R}_{\text{não nulo}} = 10^0$

pode-se montar, com os módulos dos máximos para deslocamentos e aceleração horizontais no topo do pórtico e para as forças de controle, os gráficos mostrados nas figuras VII.2.7, para uma visão mais abrangente do comportamento do sistema controlado.

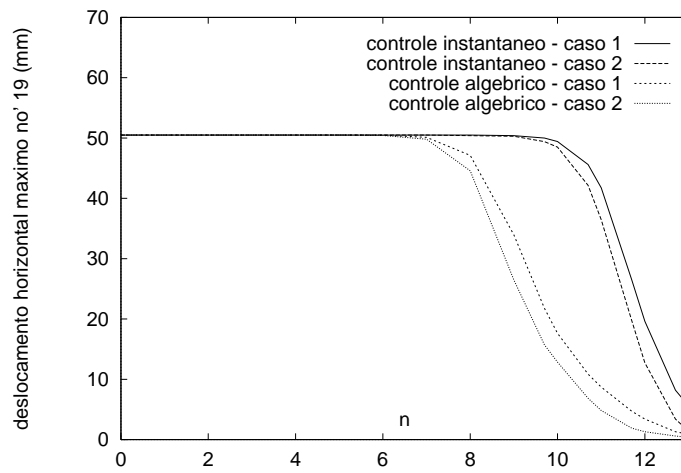


figura VII.2.7a - Deslocamentos Máximos × Expoentes de Ponderação

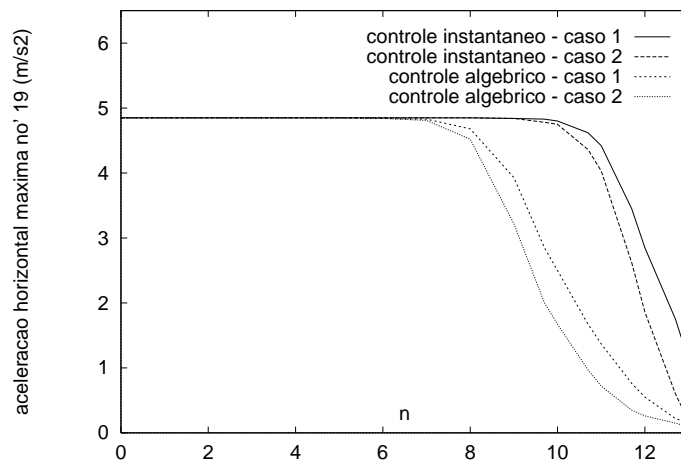


figura VII.2.7b - Acelerações Máximas × Expoentes de Ponderação

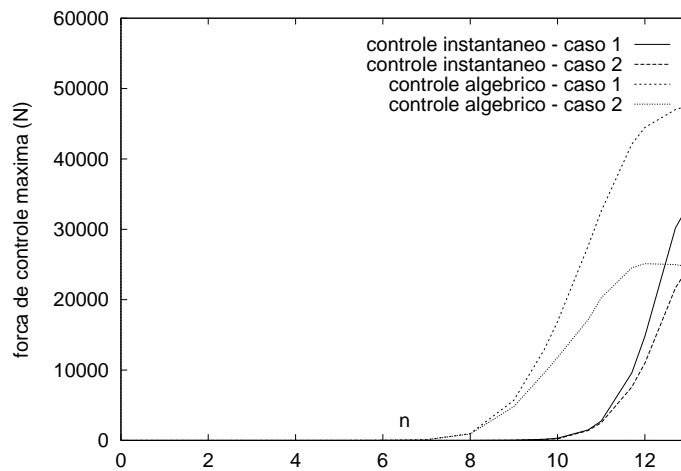


figura VII.2.7c - Forças de Controle Máximas × Expoentes de Ponderação

Os gráficos apresentados nas figuras VII.2.7 são de fundamental importância para se projetar o sistema de controle; isto será explicado mais adiante no capítulo VIII.

Com relação às 3 forças de controle do caso 2, cujas variações são mostradas nas figuras VII.2.8 observa-se um ponto onde as intensidades máximas de força de controle, não mais estão associadas ao atuador 1, e sim ao atuador 2. Isto pode ser observado tanto para o controle instantâneo como para o controle algébrico, ocorrendo porém em pontos distintos em termos dos expoentes n dos coeficientes de ponderação de Q

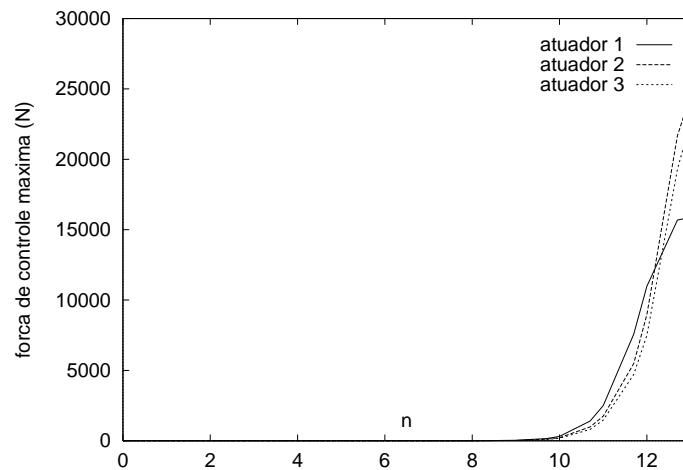


figura VII.2.8a - Forças de Controle Máximas para Controle Instantâneo no Caso 2

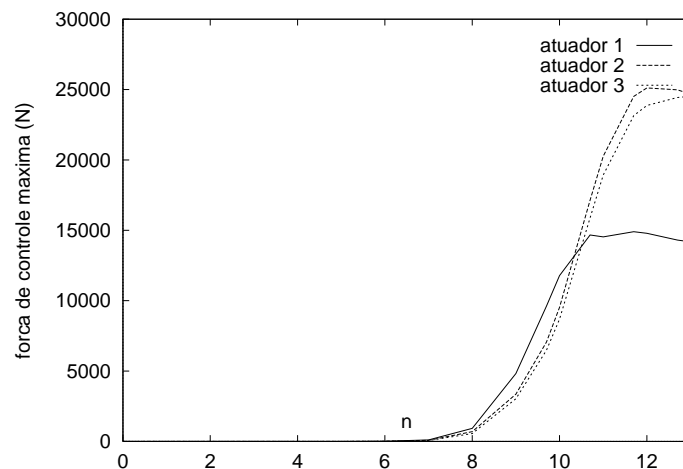


figura VII.2.8b - Forças de Controle Máximas para Controle Algébrico no Caso 2

Os pontos, nos gráficos das figuras VII.2.8a e VII.2.8b onde a intensidade da força de controle no atuador 2 excedeu a do atuador 1 podem ser expressos, em cada caso de controle, pelas seguintes quantidades:

- **controle instantâneo**

$$Q_{\text{não nulo}} = 10^{12,18} \rightarrow F_{c_{max}} = 13077 \text{ N} \rightarrow \text{Deslocamento}_{max} = 10 \text{ mm}$$

- **controle algébrico**

$$Q_{\text{não nulo}} = 10^{10,36} \rightarrow F_{c_{max}} = 12308 \text{ N} \rightarrow \text{Deslocamento}_{max} = 9 \text{ mm}$$

7.2.5 Desempenho dos Atuadores

Este exemplo também visa analisar o desempenho do controle realizado por um atuador situado no topo do pórtico (caso 1 - atuador A), comparado ao desempenho dos três atuadores distribuídos pelos três andares (caso 2 - atuadores 1, 2 e 3)

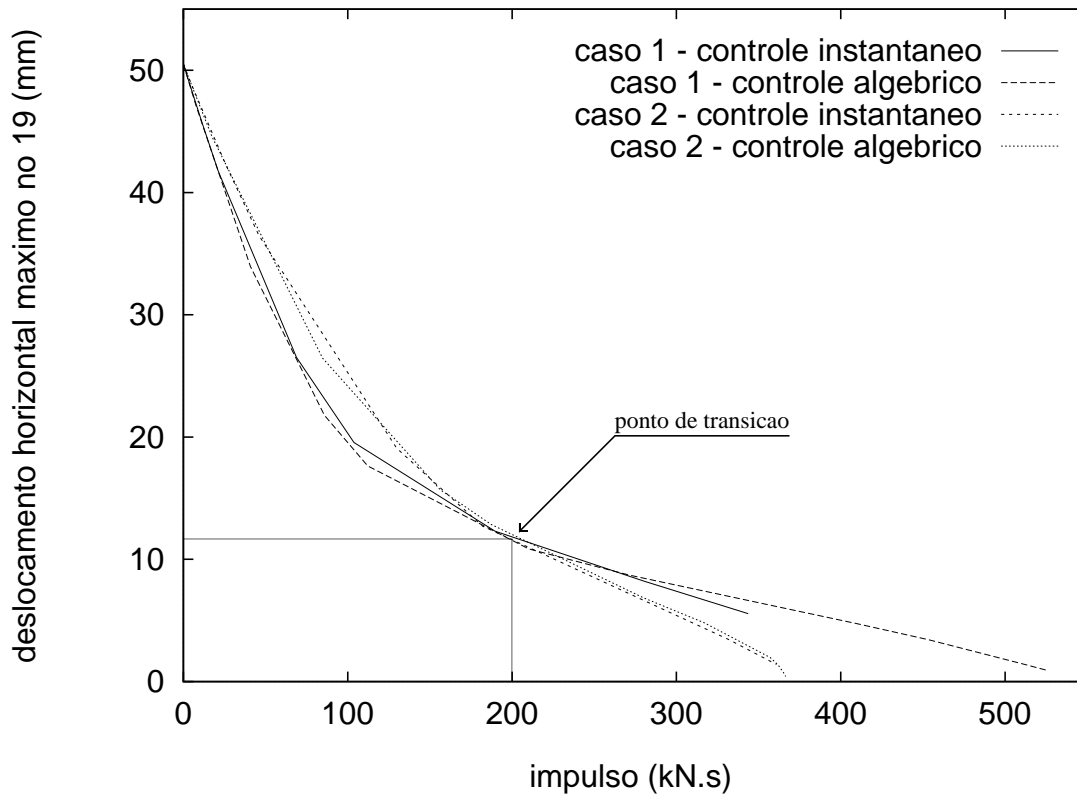
Para se medir o desempenho em cada caso, estabeleceu-se como parâmetro comparativo a medida de impulsão (I) entregue ao sistema:

$$I = \sum_{i=1}^k \int_0^{t_f} F_{c_i}(t) dt \quad (7.3)$$

onde,

- I - É a impulsão dada ao sistema (kN.s)
- t_f - É o tempo final de integração (s)
- $F_c(t)$ - É a força de controle (N)
- k - É o número de forças de controle atuantes

Pode-se agora montar um gráfico Impulsão x Deslocamento Máximo para os dois algoritmos de controle aplicado a ambos os casos. Caso se optasse por um gráfico Impulsão x Aceleração Máxima para a avaliação da performance, chegar-se-iam às mesmas conclusões, visto que, observando as figuras VII.2.7a e VII.2.7b, percebe-se uma configuração idêntica para o comportamento dos deslocamentos e acelerações máximas frente ao expoente adotado na ponderação.



figuras VII.2.9 - Comparação de Performances dos Algoritmos de Controle

Ponto de transição (vide figura VII.2.9):

É o ponto onde as performances são equivalentes para os casos 1 e 2, ou seja, onde para uma impulsão total de $\approx 200 \text{ kN.s}$, tem-se uma amplitude máxima de vibração de $\approx 12 \text{ mm}$.

Até esse ponto de transição para maiores impulsões, o melhor desempenho foi obtida para o caso 1 (um atuador), pois para se obter um mesmo nível de deslocamentos, necessita-se de uma impulsão total menor do que a necessária no caso 2 (3 atuadores).

A partir desse ponto de transição (para maiores impulsões), a situação se inverte, passando o caso 2 (3 atuadores) a desempenhar o controle mais efetivo.

Para esta amplitude máxima de deslocamento de $\approx 12 \text{ mm}$, correspondente ao ponto de transição, pode-se voltar à figura VII.2.7a, e determinar as correspondentes ponderações para o caso 2 (3 atuadores):

- Controle Algébrico - $\mathcal{Q}_{\text{não nulo}} = 10^{10,28}$ e $\mathcal{R}_{\text{não nulo}} = 10^0$
- Controle Instantâneo - $\mathcal{Q}_{\text{não nulo}} = 10^{12,15}$ e $\mathcal{R}_{\text{não nulo}} = 10^0$

Tais ponderações se levadas as figuras VII.2.8a e VII.2.8b, respectivamente, conduzem a níveis de força de controle que se aproximam bastante da referida ao ponto em que os atuadores 1 e 2 tem a mesma intensidade de força.

Daí conclui-se que:

“ O ponto de transição assinalado na figura VII.2.9, além fornecer as condições para que o mesmo índice de desempenho seja alcançado nos dois casos de controle, mostra também onde, ou para que ponderações, o atuador 1 deixa de ser o mais solicitado ”

7.2.6 Comentários Adicionais

As forças de controle obtidas para cada algoritmo de controle têm, como demonstrado no exemplo anterior, intensidades praticamente iguais para se levar aos mesmos níveis de redução de deslocamentos. Isso mostra que tanto o controle algébrico como o instantâneo, são eficazes na redução de vibrações via controle ativo modal; ficando as diferenças por conta dos coeficientes das Matrizes de Ponderações \mathcal{R} e \mathcal{Q} .

Com relação ao número e localização dos atuadores a figura VII.2.9 nos permite concluir que um único atuador no topo do pórtico teve um melhor desempenho para deslocamentos até a ordem de 12 *mm*. Daí em diante 3 atuadores (um em cada andar) tiveram melhor desempenho.

Uma explicação para esse fato é dada a seguir:

- O sistema estrutural, apesar de ter contribuições modais dos três primeiros modos, é excitado por forças que o fazem vibrar predominantemente no primeiro modo de vibração. Por isso um atuador situado no topo do pórtico têm grande eficiência. Para se obter grandes reduções de resposta, quando o pórtico experimenta grandes amplitudes deslocamentos, as parcelas modais do segundo e terceiro modos passam a ter maior peso. Consequentemente, 3 atuadores dispostos nos três andares tem melhor performace visto que eles atuam de forma mais homogênea sobre os 3 modos de vibração considerados.

O ponto de transição assinalado na figura VII.2.9, referido também ao ponto onde a intensidade da força de controle do atuador 2 ultrapassa a do atuador 1, vem ratificar a explicação dada acima:

- A maior coordenada modal do primeiro modo de vibração, localiza-se no topo do pórtico, ponto de aplicação do atuador 1 (ver figura VII.2.3). Sendo assim, o instante onde a intensidade das forças de controle do atuador 2 excedem a do atuador 1, revela o momento onde o primeiro modo de vibração deixa de ser o preponderante, evidenciando a necessidade de um controle mais distribuído para se obter grandes reduções nas amplitudes de resposta.

Chapter 8

Conclusões

O **controle ativo modal de vibrações estruturais**, se mostrou bastante efetivo na redução das amplitudes de resposta das estruturas analisadas.

Esta efetividade foi verificada para ambos os algoritmos implementados. A explicação para este fato vem da extremização do funcional \mathcal{J} descrito pela equação IV.1 na seção IV.2, e também do intervalo de tempo (Δt) utilizado na integração numérica das equações diferenciais modais de movimento:

- Nos exemplos estudados o (Δt) utilizado foi de 1/100 do menor período natural considerado. Então, para este intervalo de tempo, suficientemente pequeno, quando levado à extremização do funcional \mathcal{J} aplicado ao controle instantâneo, tem-se uma boa avaliação para a expressão final da força de controle descrita pela equação (IV.14). Isto conduz a um desempenho equivalente ao controle algébrico. Observa-se ainda que a comparação de desempenhos é válida, já que em ambos os casos a matriz de ganho é constante no tempo (Δt é constante; ver seções IV.2.2 e IV.2.3)

Mas devido as diferenças de valores entre essas constantes de ganho surge a seguinte questão:

- Qual algoritmo de controle deve-se adotar para se projetar um sistema de controle ativo com retroação?

Para os casos onde se tem de antemão já construídas as curvas que relacionam forças de controle e deslocamentos máximos com suas respectivas ponderações (ver figuras VII.1.12a e VII.1.12b), fica claro que a escolha do algoritmo de controle se torna indiferente.

Já nos casos em que tais curvas não são disponíveis, o que é mais comum, deve-se optar obviamente pelo controle algébrico podendo-se ainda adicionar os seguintes motivos:

- As forças de controle não dependem do intervalo de tempo de integração utilizado.
- As reduções das amplitudes de resposta têm uma convergência mais suave, o que diminui a margem de erro quando se avalia a ordenada máxima para deslocamentos e/ou acelerações. A figura VIII.1, extraída da figura VII.1.6a, mostra este aspecto importante para o projeto do sistema de controle.

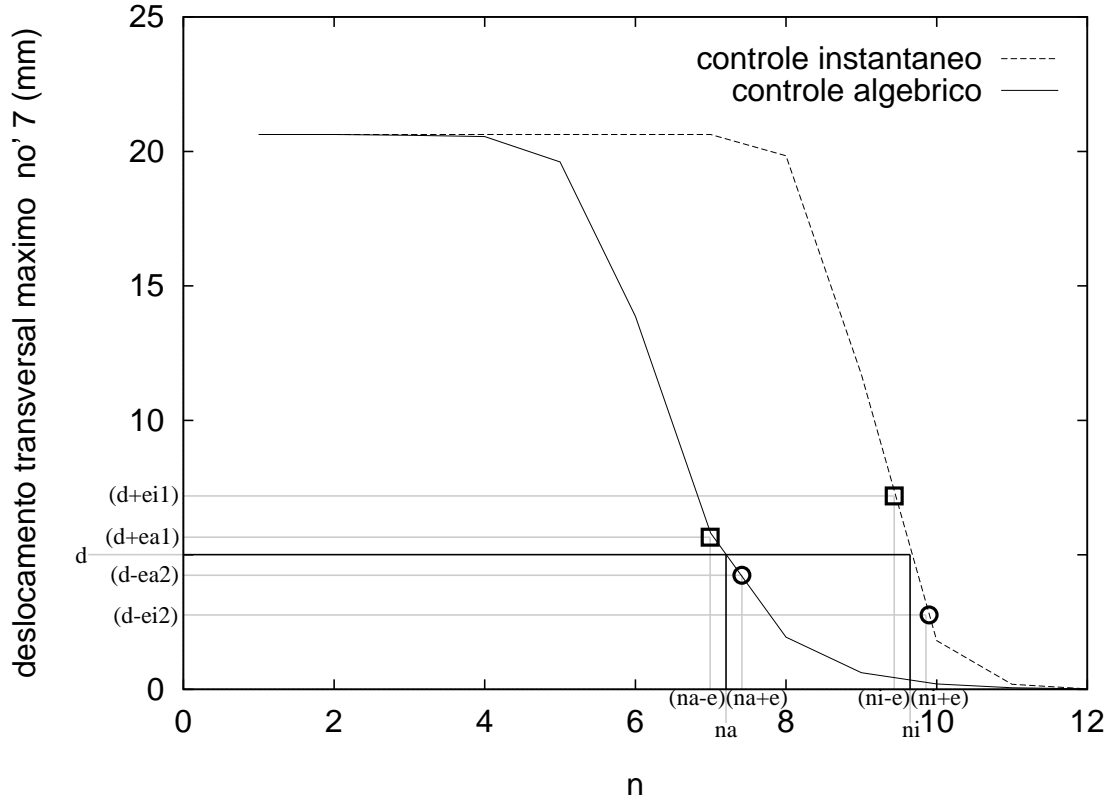


figura VIII.1 - Deslocamentos Máximos \times Expoentes de Ponderação

onde,

- **d** - é o deslocamento máximo estimado do sistema controlado
- **ni** - é a ponderação necessária ao controle instantâneo para se obter um deslocamento máximo **d**
- **na** - é a ponderação necessária ao controle algébrico para se obter um deslocamento máximo **d**
- **e** - é o erro admissível na avaliação das ponderações
- **(d+ei1)** e **(d-ei2)** - são, respectivamente, os deslocamentos máximos e mínimos esperados no controle instantâneo
- **(d+ea1)** e **(d-ea2)** - são, respectivamente, os deslocamentos máximos e mínimos esperados no controle algébrico

Os resultados obtidos demonstram também que o controle ativo com retroação é capaz de absorver, ao longo do tempo, as perdas de eficiência devidas ao retardo na atuação da força de controle. Isso foi verificado para excitações harmônicas e periódicas. Numa situação onde o carregamento dinâmico é aleatório, a assimilação das perturbações e das perdas de eficiência do controle frente aos retardos dos atuadores, será abviamente prejudicada, principalmente em regimes de altas frequências. Numa análise aleatória os modos a serem utilizados dependerão da faixa de frequência do espectro de carga, na região de maior densidade de energia.

O exemplo 2 deixou evidente o fato de que para se alcançar grandes reduções de deslocamentos deve-se ter um maior número de atuadores distribuídos. Mas, a escolha do número de atuadores, bem como suas localizações, no projeto de um sistema de controle, vai depender dos critérios de segurança, funcionalidade, conforto e economia que devem ser atendidos em cada caso particular. Quando as vibrações de uma estrutura são governadas por um modo dominante, a aplicação de um único atuador no ponto de amplitude modal máxima é suficiente e bastante eficaz.

Dessas discussões e dos aspectos não pesquisados nesse trabalho, surgem alguns temas para o prosseguimento dessa linha de pesquisa:

- Acoplar ao controle ótimo modal, uma otimização da localização dos atuadores.
- Análise do controle ótimo modal aplicado a carregamento aleatório
- Aplicações do controle ótimo modal a estruturas discretizadas em elementos de placa e/ou cascas.
- Desenvolvimento e aplicações do controle ótimo modal utilizando-se a Equação Diferencial Matricial de Riccati (equação IV.14) e comparações de suas performances com as de algoritmos numéricos de controle instantâneo.
- Utilização de solucionadores esparsos/iterativos no tratamento das esparsidades.
- Verificação de resultados via simulações completas no domínio do tempo, sem técnicas de redução de base.
- Análise aleatória no domínio da frequência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Meirovitch, L. “Dynamics and Control of Structures”, Jonh Wiley & Sons, 1990, USA
- [2] Batista, R. C. “Redução e Controle de Vibrações em estruturas”, Notas de Aula, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993
- [3] Yang, J. N.; Danielians, A. “A seismic hibrid control system for building structures under strong earthquake”, Proceeding of “Intelligent Structures”, Taiwan, 1990 (Chong, K. P.; Lui S. C.; Li, J. C., editors), pp. 179-195, Elsevier Applied Science, London, 1990.
- [4] Yang, J. N.; Akbarpour, A.; Ghaemmaghami, P., “New Optimal Control Algorithms for Structural Control”, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol 113, June 1987, pp. 1369-1386
- [5] Yang, J. N.; Long, F. X.; Wong, D., “Optimal Control of Nonlinear Structures”, Journal of Applied Mechanics”, ASCE, Vol.55, December 1988, pp. 931-938
- [6] Potter, J. E. “Matrix Quadratic Solutions”, Journal of Applied Mathematics, SIAM, Vol 14, No.3, 1966, pp. 496-501
- [7] Clough, R. W.; Penzien, J., “Dynamics of Structures”, Mc Graw-Hill Ltd, 2nd edition, 1993
- [8] Roorda, J. “Tendon Control in Tall Structures”, Journal of the Structural Division, ASCE, 1981, 101(ST3), pp. 505-521.
- [9] Bathe, K-J.; Wilson, E. L., “Numerical Methods in Finit Element Analysis”, Prentice-Hall Inc, 1976
- [10] Hagedorn, P., “Oscilações Não-Lineares”, editora Edgard Blucher Ltda