

# Análise Experimental em Dinâmica das Estruturas

Prof. Flávio de Souza Barbosa

28 de abril de 2006

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução à Dinâmica Estrutural</b>	<b>3</b>
1.1	Objetivo fundamental da análise estrutural dinâmica . . . . .	3
1.2	Tipos de carregamentos prescritos . . . . .	3
1.3	Características essenciais de um problema dinâmico . . . . .	4
1.4	Formulação das equações de movimento . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Análise de um Sistema com um Grau de Liberdade</b>	<b>7</b>
2.1	Componentes Básicas de um Sistema Dinâmico . . . . .	7
2.2	Equação de Movimento de um Sistema Dinâmica Básico . . . . .	7
2.3	Análise de Vibrações Livres . . . . .	8
2.3.1	Vibrações Livres não Amortecidas . . . . .	9
2.3.2	Vibrações Amortecidas . . . . .	11
2.4	Resposta para um Carregamento Harmônico . . . . .	15
2.4.1	Sistema não Amortecido . . . . .	15
2.4.2	Sistema Amortecido . . . . .	17
2.5	Resposta para um Carregamento Periódico . . . . .	22
2.5.1	Carregamento Periódico em Série de Fourier . . . . .	22
2.5.2	Forma Trigonométrica . . . . .	22
2.5.3	Forma Exponencial . . . . .	23
2.5.4	Resposta para um Carregamento Expandido em Série de Fourier . . . . .	23
2.6	Exercício . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Medições Dinâmicas</b>	<b>27</b>
3.1	Introdução . . . . .	27
3.2	Medição de Acelerações . . . . .	28
3.2.1	Características Básicas de um Acelerador . . . . .	29
3.3	Medição de Deslocamentos . . . . .	29
3.4	Exercícios . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Método das Diferenças Finitas</b>	<b>32</b>
4.1	Exercício . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Introdução ao Método da Superposição Modal</b>	<b>35</b>
5.1	Introdução : Sistema com 2 graus de Liberdade . . . . .	35
5.2	Variações Livres Não Amortecidas . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Sistemas Contínuos</b>	<b>41</b>

<b>7</b>	<b>Identificação Modal no Domínio do Tempo</b>	<b>47</b>
7.1	A Técnica do Decremento Aleatório . . . . .	47
7.2	O Método de Ibrahim . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Anexo</b>	<b>53</b>
8.1	Capítulo 2 - Conceitos de números complexos . . . . .	53

# Capítulo 1

## Introdução à Dinâmica Estrutural

### 1.1 Objetivo fundamental da análise estrutural dinâmica

A análise dinâmica pode ser vista como uma abordagem mais abrangente da análise estrutural, uma vez que considera a variação do carregamento ao longo do tempo.

Neste tipo de análise é conveniente distinguirmos as componentes estáticas (constantes no tempo) das componentes dinâmicas (variantes no tempo) de um carregamento aplicado. O efeito total destas componentes atuando sobre uma estrutura é obtido pela superposição das mesmas quando se tratar de uma análise linear.

A palavra dinâmica pode ser definida simplesmente como variação do tempo. Logo, considera-se um carregamento dinâmico como aquele para o qual existe variação de pelo menos uma das componentes desta grandeza vetorial, ou seja, módulo, direção, sentido ou ponto de aplicação.

A resposta estrutural de um carregamento dinâmico também varia com o tempo e para sua análise podemos enquadrá-la dentro de dois grandes grupos:

- *Análise Determinística:* quando a função carregamento (dependente do tempo) é completamente conhecida. Neste caso o carregamento é dito carregamento dinâmico prescrito e é a partir dele que são obtidos os deslocamentos em função do tempo. Os outros resultados tais como tensão, deformação, forças internas, etc são obtidos posteriormente.
- *Análise não Determinística:* quando a função carregamento (dependente do tempo) não é completamente conhecida mas pode ser definida por dados estatísticos. O carregamento é dito então carregamento dinâmico aleatório.

Neste tipo de análise, os resultados provêm de um carregamento descrito estatisticamente e são gerados a partir de procedimentos de análise não determinística (estatística).

### 1.2 Tipos de carregamentos prescritos

Os carregamentos prescritos podem ser divididos em dois tipos:

- *Periódicos:* são aqueles que possuem a mesma variação do tempo para a execução de um grande número de ciclos. Através da análise de Fourier qualquer carregamento periódico pode ser escrito como a soma de componentes harmônicos simples.

- *Não periódicos*: podem ser de curta duração ou impulsivos ou de longa duração. Para os de curta duração (explosões) são necessárias formas especiais de análise simplificadas. Para os carregamentos de longa duração (terremotos) apenas procedimentos completos de análise dinâmica podem ser usados.

Veja exemplos na figura 1.1.

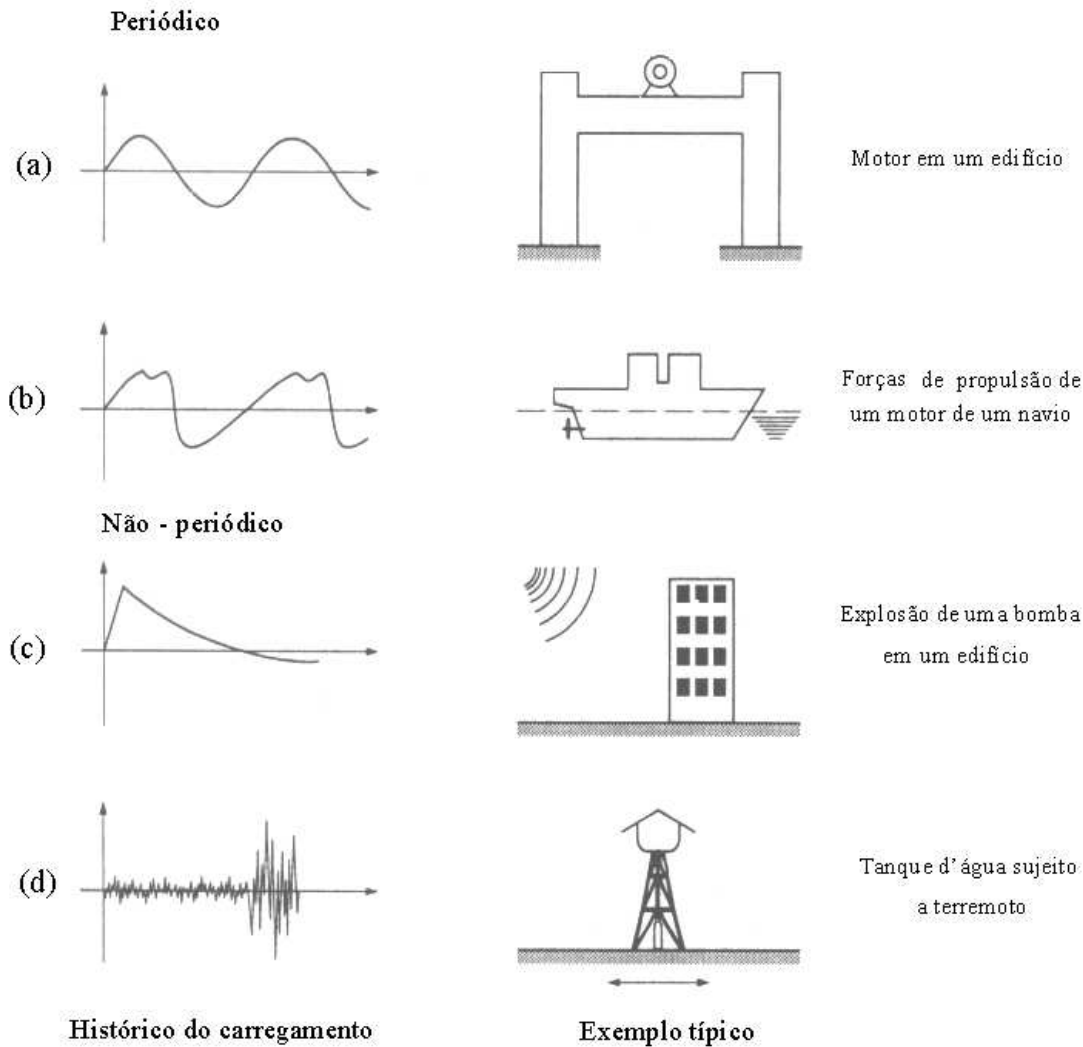


Figura 1.1: Características e fontes de carregamento dinâmico típico: (a) harmônico simples; (b) complexo; (c) implusivo; (d) longa duração. Extraído da referência [?]

### 1.3 Características essenciais de um problema dinâmico

Existem duas diferenças básicas entre um problema estático e um dinâmico. A primeira refere-se ao fato de que o carregamento num problema dinâmico varia com o tempo. A segunda e mais importante diferença é o aparecimento das forças inerciais que são contrárias à aceleração.

É importante ressaltar que um problema dinâmico não possui uma solução única como um problema estático, ele apresenta uma sucessão de soluções correspondentes ao tempo de interesse do problema.

Quando usar a análise dinâmica?

Em geral se as forças inerciais representam uma parcela significativa do total do carregamento equilibrado pelas forças elásticas internas da estrutura, então o caráter dinâmico do problema deve ser levado em consideração na sua solução. Por outro lado se os movimentos são pouco acelerados que as forças inerciais são consideravelmente pequenas, a resposta do problema pode ser encontrado através de procedimentos da análise estrutural estática, mesmo que o carregamento e a resposta variem com o tempo.

## 1.4 Formulação das equações de movimento

As equações de movimento de uma estrutura são as expressões matemáticas que definem os deslocamentos dinâmicos, e a solução dessas equações fornece os deslocamentos em função do tempo.

A formulação das equações de movimento de um sistema dinâmico é possivelmente a fase mais importante e às vezes a mais difícil do processo de análise.

Para a formulação dessas equações existem 3 métodos que são descritos abaixo.

### a) Princípio D'Alembert e equilíbrio dinâmico

Equivale à 2 Lei de Newton em que a variação da quantidade de movimento de uma massa  $m$  é igual à força atuante nela. A relação pode ser expressa matematicamente pela equação diferencial:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.1)$$

onde

$p(t)$  é o vetor força aplicado;

$x(t)$  é o vetor posição; e

$m$  é a massa da partícula

Para  $m$  constante em função do tempo a expressão (1.1) pode ser escrita como:

$$p(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} \equiv m\ddot{x}(t) \quad (1.2)$$

$$p(t) - m\ddot{x}(t) = 0 \quad (1.3)$$

Na expressão (1.3) o termo  $m\ddot{x}(t)$  é chamado de força inercial resistente à aceleração da massa.

Este conceito de que a massa desenvolve uma força inercial proporcional à aceleração e oposta a ela é conhecida como Princípio D'Alembert.

### b) Princípio do Trabalho Virtual

O Princípio do Trabalho Virtual pode ser expresso da seguinte forma. Se um sistema, o qual está em equilíbrio sob a atuação de uma força externa é sujeito a um deslocamento virtual, ou seja, um deslocamento compatível com as restrições de apoio, o trabalho total feito pelas forças será nulo. Conseqüentemente, a resposta das equações de um problema dinâmico pode ser estabelecida, primeiramente identificando todas as forças atuantes nas massas do sistema, incluindo as forças inerciais estabelecidas no princípio de D'Alembert.

A seguir, as equações de movimento são obtidas separadamente introduzindo um deslocamento virtual correspondendo a cada grau de liberdade e igualando o trabalho a zero. A maior vantagem dessa aproximação é que as contribuições do trabalho virtual são grandezas escalares e podem ser somadas algebricamente uma vez que as forças atuantes na estrutura são vetoriais e podem ser superpostas vetorialmente.

### **c) Aproximação Variacional**

Um outro meio de evitar a utilização de equações vetoriais de equilíbrio é usar grandezas escalares numa forma variacional conhecida como Princípio de Hamilton. Forças elásticas e inerciais não estão explicitamente envolvidas neste princípio; ao invés disso são utilizadas variações dos termos de energia cinética e potencial. Esta formulação tem a vantagem de lidar puramente com grandezas escalares de energia, assim as forças e os deslocamentos usados para representar os efeitos correspondentes ao processo de trabalho virtual são todas vetoriais mesmo que os termos dos trabalhos sejam escalares.

# Capítulo 2

## Análise de um Sistema com um Grau de Liberdade

### 2.1 Componentes Básicas de um Sistema Dinâmico

As propriedades físicas essenciais de um sistema estrutural elástico ou mecânico sujeito a uma fonte externa de excitação ou carregamento dinâmico são: massa, propriedades elásticas (flexibilidade ou rigidez) e o amortecimento ou perda de energia mecânica.

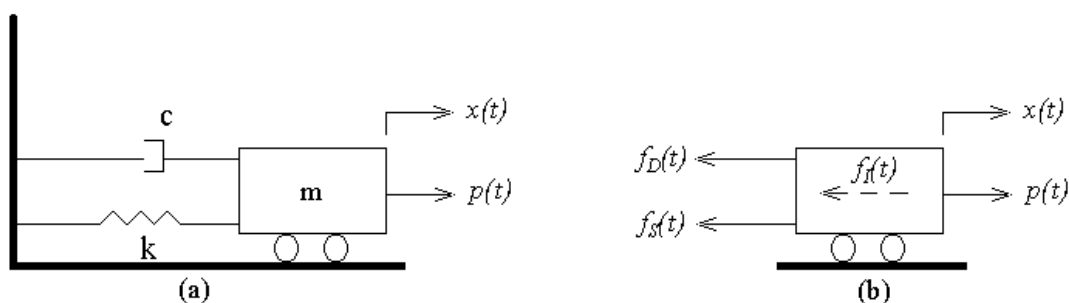


Figura 2.1: sistema de um grau de liberdade: (a) componentes básicas; (b) diagrama de corpo livre. Na figura  $k$  é rigidez da mola;  $c$  a constante de amortecimento viscoso (proporcional à velocidade);  $m$  é a massa do sistema;  $x(t)$  é o deslocamento do bloco e  $p(t)$  é a força aplicada.

### 2.2 Equação de Movimento de um Sistema Dinâmica Básico

A equação de movimento de um sistema como o mostrado na figura anterior é obtida diretamente a partir da expressão de equilíbrio de todas as forças atuantes no sistema usando o princípio de d'Alembert.

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (2.1)$$

onde  $f_I(t)$  é a força inercial,  $f_D(t)$  é a força de amortecimento e  $f_S(t)$  é a força elástica.

De acordo com o princípio de d'Alembert a força inercial é o produto da massa pela aceleração.



$$f_I(t) = m\ddot{x}(t) \quad (2.2)$$

Assumindo o amortecimento mecânico viscoso, a força de amortecimento é o produto da velocidade pela constante de amortecimento  $c$ .

$$f_D(t) = c\dot{x}(t) \quad (2.3)$$

Finalmente, a força elástica é o produto da rigidez da mola pelo deslocamento.

$$f_S(t) = kx(t) \quad (2.4)$$

Substituindo as equações 2.2 a 2.4 na equação 2.1, obtemos a equação de movimento para um sistema com um único grau de liberdade (SDOF):

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \quad (2.5)$$

## 2.3 Análise de Vibrações Livres

Se considerarmos que a força aplicada  $p(t)$  é nula nós obtem-se um sistema em vibrações livres e a sua equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.6)$$

A solução dessa equação pode ser expressa como:

$$x(t) = Ce^{st} \quad (2.7)$$

onde  $C$  é uma constante de integração que pode ser determinada a partir das condições iniciais. Derivando a equação 2.7 tem-se:

$$\dot{x}(t) = Cse^{st} \quad (2.8)$$

$$\ddot{x}(t) = Cs^2e^{st} \quad (2.9)$$

E em seguida substituindo 2.8 e 2.9 na equação 2.6 obtemos:

$$(ms^2 + cs + k)Ce^{st} = 0 \quad (2.10)$$

Dividindo os dois termos da expressão acima por  $mCe^{st}$ , temos:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.11)$$

Fazendo  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  a expressão 2.11 fica:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (2.12)$$

### 2.3.1 Vibrações Livres não Amortecidas

Considerando sistemas não amortecidos, ou seja,  $c=0$ , a equação 2.12 tem como soluções:

$$s_{1,2} = \pm i\omega \quad (2.13)$$

A equação 2.7 é expressa então em função de dois termos da seguinte forma:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (2.14)$$

Escrevendo agora cada uma das constantes em termos de suas componentes reais e imaginárias, ou seja:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{1R} + iC_{1I} \\ C_2 &= C_{2R} + iC_{2I} \end{aligned} \quad (2.15)$$

e usando as formas trigonométricas,

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.16)$$

podemos reescrever a equação 2.14 da seguinte forma:

$$x(t) = (C_{1R} + iC_{1I})(\cos \omega t + i \sin \omega t) + (C_{2R} + iC_{2I})(\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (2.17)$$

ou

$$x(t) = (C_{1R} + C_{2R}) \cos \omega t - (C_{1I} - C_{2I}) \sin \omega t + i[(C_{1I} + C_{2I}) \cos \omega t + (C_{1R} - C_{2R}) \sin \omega t] \quad (2.18)$$

Entretanto, a resposta de vibrações livres deve ser real, então o termo imaginário (entre colchetes) deve ser nulo para qualquer valor de  $t$ . Para que esta condição seja satisfeita é necessário que:

$$\begin{aligned} C_{1I} = -C_{2I} &\equiv C_I \\ C_{1R} = C_{2R} &\equiv C_R \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tem-se então que  $C_1$  e  $C_2$  formam um par de complexos conjugados:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_R + iC_I \\ C_2 &= C_R - iC_I \end{aligned} \quad (2.20)$$

Com isso a equação 2.14 pode finalmente ser escrita como:

$$x(t) = (C_R + iC_I)e^{i\omega t} + (C_R - iC_I)e^{-i\omega t} \quad (2.21)$$

e reescrevendo a equação 2.17:

$$x(t) = 2C_R \cos \omega t - 2C_I \sin \omega t \quad (2.22)$$

ou ainda:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.23)$$

onde  $A = 2C_R$  e  $B = -2C_I$  lembrando que  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Os valores das constantes  $A$  e  $B$  podem ser determinadas a partir das condições iniciais, que são: o deslocamento  $x(0)$  e a velocidade  $\dot{x}(0)$  no tempo  $t = 0$ , ou seja:

$$x(0) = A = 2C_R \quad (2.24)$$

$$\frac{\dot{x}(0)}{\omega} = B = -2C_I \quad (2.25)$$

A equação 2.22 pode ser reescrita, então como:

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (2.26)$$

Esta solução representa o movimento harmônico simples (MHS).

O valor  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  definido anteriormente é conhecido como frequência angular. A relação entre a frequência angular e a frequência de movimento é dada por:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.27)$$

então

$$\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = T \quad (2.28)$$

que é o tempo necessário para completar um ciclo e é chamado de período do movimento.

Usualmente para sistemas estruturais ou mecânicos o período  $T$  é medido em segundos, e a frequência em ciclos por segundo<sup>1</sup>.

A resposta de vibrações livre também pode ser representada pela seguinte expressão abaixo:

$$x(t) = \rho \cos(\omega t + \theta) \quad (2.29)$$

desde que a amplitude seja dada por:

$$\rho = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2.30)$$

e o ângulo de fase seja dado por:

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{-B}{A} \right) \quad (2.31)$$

Provando a afirmação anterior tem-se:

$$x(t) = \rho(\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) \quad (2.32)$$

Substituindo os valores de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  de acordo com a figura 2.2, tem-se:

---

<sup>1</sup>A unidade frequência no Sistema Internacional de Medidas é o Hertz (oscilações por segundo)

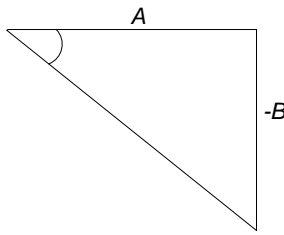


Figura 2.2: Esquema geométrico

$$x(t) = \rho \left( \cos \omega t \frac{A}{\rho} - \sin \omega t \frac{-B}{\rho} \right) \quad (2.33)$$

Simplificando chega-se então a equação anteriormente encontrada:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.34)$$

As equações 2.26 e 2.29 podem ser representadas graficamente como mostra a figura 2.3:

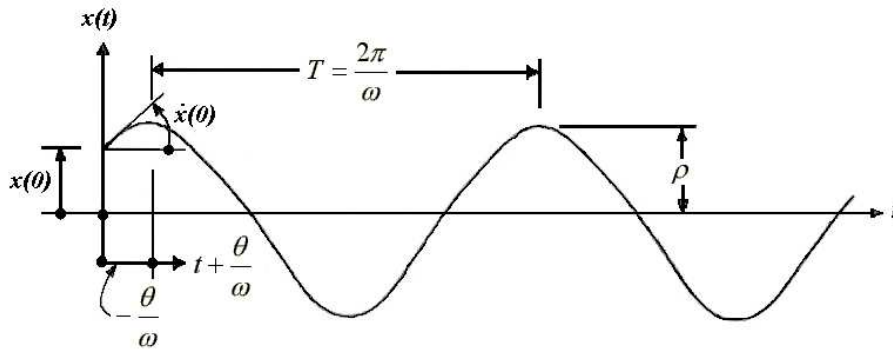


Figura 2.3: Resposta de vibração livre não amortecida.

### 2.3.2 Vibrações Amortecidas

Se o sistema apresenta amortecimento, a solução da equação 2.12 é dada por:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.35)$$

Esta expressão representa 3 tipos de movimento, conforme o termo do radical seja positivo, negativo ou nulo.

#### a) Amortecimento crítico

Neste sistema o termo do radical é nulo, então  $\frac{c}{2m} = \omega$ , logo o valor do coeficiente de amortecimento crítico é :

$$c_c = 2m\omega \quad (2.36)$$

Então, ambos os valores de  $s$  dados pela equação 2.35 são:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega \quad (2.37)$$

A solução da equação 2.6 neste caso especial (raízes iguais) deve ser da forma:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t} \quad (2.38)$$

Utilizando as condições de contorno pode-se determinar as constantes  $C_1$  e  $C_2$ :

$$x(0) = C_1 \quad (2.39)$$

$$\dot{x}(0) = -\omega C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + C_2 t e^{-\omega t}(-\omega) \quad (2.40)$$

$$\dot{x}(0) = -\omega C_1 + C_2 \quad (2.41)$$

Substituindo a equação 2.39 em 2.41 obtém-se:

$$C_2 = \dot{x}(0) + \omega x(0) \quad (2.42)$$

Então a equação 2.38 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \{x(0) + [\dot{x}(0) + \omega x(0)]t\} e^{-\omega t} \quad \text{ou} \\ x(t) &= [x(0)(1 + \omega t) + \dot{x}(0)]e^{-\omega t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

A equação 2.43 está expressa graficamente pela figura 2.4. Podemos ver que em um sistema de amortecimento crítico não há oscilações em torno da posição de deflexão nula; ao invés disso, retorna a zero assintoticamente de acordo com o termo exponencial da equação da equação 2.43. No entanto isso não aconteceria se os sinais do deslocamento e da velocidade fossem diferentes entre si. Uma definição muito útil de amortecimento crítico é que este representa o menor grau de amortecimento para o qual não ocorre nenhuma oscilação como resposta em vibrações livres.

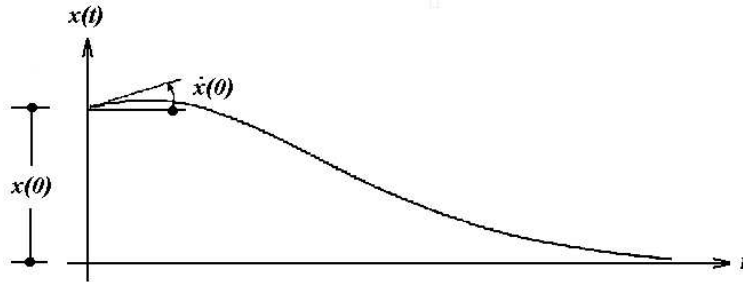


Figura 2.4: Resposta de vibração livre com amortecimento crítico.

### b) Amortecimento subcrítico

Neste caso o termo do radical da equação 2.35 é menor que zero. Para avaliar a resposta em vibrações livres expressa-se o amortecimento em termos de uma taxa de amortecimento  $\xi$  que é expressa por:

$$\xi \equiv \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.44)$$

Logo:

$$c = 2\xi\omega m \quad (2.45)$$

Introduzindo a equação 2.45 na equação 2.35, tem-se que:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\frac{2\xi\omega m}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{2\xi\omega m}{2m}\right)^2 - \omega^2} \\ s_{1,2} &= -\xi\omega \pm \sqrt{\xi^2\omega^2 - \omega^2} \\ s_{1,2} &= -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \\ s_{1,2} &= -\xi\omega \pm \omega\sqrt{(1 - \xi^2)(-1)} \\ s_{1,2} &= -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1 - \xi^2} \\ s_{1,2} &= -\xi\omega \pm i\omega_D \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde

$$\omega_D \equiv \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.47)$$

é chamada de frequência natural amortecida. Usando a equação 2.7 e os dois valores de  $s$  dados pela equação 2.46 tem-se que:

$$x(t) = (C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}) e^{-\xi\omega t} \quad (2.48)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são números complexos como visto no caso de sistemas não amortecidos. Fazendo-se a transformada de Euler da equação 2.48 tem-se:

$$x(t) = [A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t] e^{-\xi\omega t} \quad (2.49)$$

e usando as condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} A &= x(0) \\ B &= \frac{\dot{x}(0) + \omega\xi x(0)}{\omega_D} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Substituindo as equações 2.50 na equação 2.49 tem-se:

$$x(t) = \left[ x(0) \cos \omega_D t + \left( \frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega}{\omega_D} \right) \sin \omega_D t \right] e^{-\xi\omega t} \quad (2.51)$$

Observa-se que  $e^{-\omega\xi t}$  indica o comportamento assintótico da função. A equação 2.51 pode ser escrita como:

$$x(t) = \rho \cos(\omega_D t + \theta) e^{-\xi\omega t} \quad (2.52)$$

onde

$$\rho = \left[ x(0)^2 + \left( \frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega}{\omega_D} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.53)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \left( \frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega}{\omega_D x(0)} \right) \quad (2.54)$$

Como na prática  $\xi < 20\%$ , a relação entre  $\omega_D$  e  $\omega$  dada pela equação 2.47 é aproximadamente 1 ( $\frac{\omega}{\omega_D} \cong 1$ ), o que faz com que o termo frequência natural seja usado de forma imprecisa no lugar de frequência natural amortecida. O gráfico da figura 2.5 representa a relação entre  $\omega_D$  e  $\omega$ . A equação 2.55 (de um círculo) ajuda a entender este gráfico.

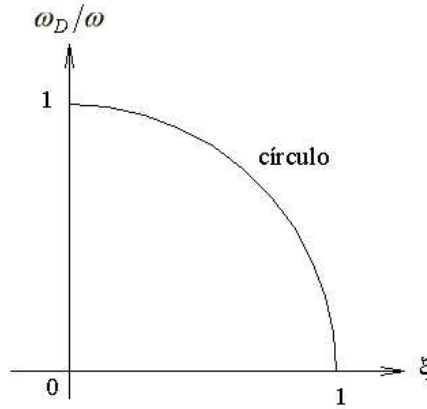


Figura 2.5: Relação entre a taxa de frequência e a taxa de amortecimento.

$$\begin{aligned}\omega_D &= \omega\sqrt{1 - \xi^2} \\ \omega_D^2 &= \omega^2(1 - \xi^2) \\ \left(\frac{\omega_D}{\omega}\right)^2 + \xi^2 &= 1\end{aligned}\tag{2.55}$$

A resposta de um sistema em amortecimento subcrítico está graficamente representada na figura 2.6.

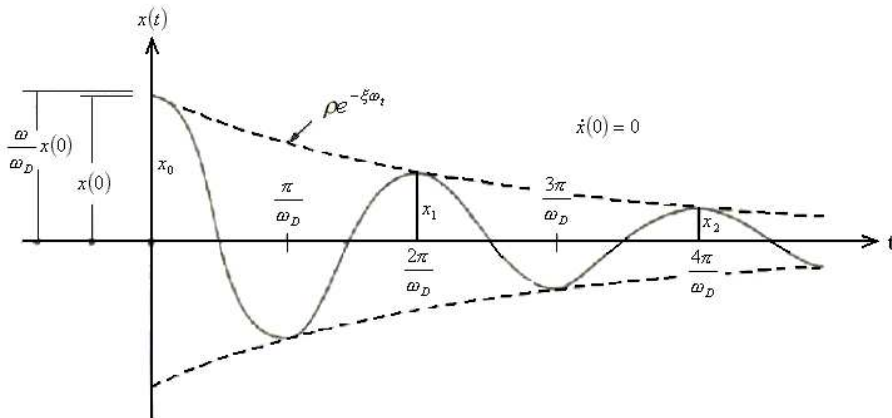


Figura 2.6: Resposta de vibrações livres de um sistema sub-crítico.

Uma maneira usual de se aproximar a taxa de amortecimento  $\xi$  é mostrada a seguir. Seja  $x_1$  o deslocamento no tempo  $t_1$  e  $x_2$  o deslocamento no tempo  $t_2$  (ver figura 2.6), tem-se, através da equação 2.52:

$$x_1 \cong \rho e^{-\xi\omega t_1}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &\cong \rho e^{-\xi\omega t_2} \\
\frac{x_1}{x_2} &\cong e^{-\xi\omega t_1 + \xi\omega t_2} \\
\ln \frac{x_1}{x_2} &\cong \xi\omega(t_2 - t_1) \\
\ln \frac{x_1}{x_2} &\cong \xi\omega T \\
\ln \frac{x_1}{x_2} &\cong \xi\omega \frac{2\pi}{\omega} \\
\xi &\cong \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_1}{x_2}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Analogamente, para  $n$  ciclos tem-se:

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_1}{x_2} \tag{2.57}$$

### c) Amortecimento supercrítico

Embora não seja muito usual sob condições normais haver sistemas supercríticos em sistemas estruturais, às vezes isso ocorre em sistemas mecânicos. Portanto apresentamos a análise da resposta dinâmica de um sistema em amortecimento supercrítico só para tornar o trabalho completo. Neste caso  $\xi \equiv \frac{c}{c_c} > 1$ , então podemos escrever a equação 2.35 na forma:

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega \pm \hat{\omega} \tag{2.58}$$

onde

$$\hat{\omega} = \pm\omega\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.59}$$

Substituindo os dois valores da equação 2.58 na equação 2.7 tem-se:

$$x(t) = [A \sinh \hat{\omega}t + B \cosh \hat{\omega}t]e^{-\xi\omega t} \tag{2.60}$$

onde  $A$  e  $B$  são as condições iniciais do problema. É importante ressaltar que a resposta de um sistema em amortecimento supercrítico é similar à de um sistema em amortecimento crítico. No entanto a assíntota retorna a posição de deslocamento nulo mais lentamente.

## 2.4 Resposta para um Carregamento Harmônico

### 2.4.1 Sistema não Amortecido

Considerando que a figura 2.7 esteja sujeita a um carregamento variável harmônico  $p(t)$  de forma senoidal com amplitude  $p_0$  e frequência  $\bar{\omega}$ . A equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \tag{2.61}$$

Para sistemas não amortecidos ( $c = 0$ ):

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t) \tag{2.62}$$

A solução de uma equação diferencial é a soma da solução da equação geral  $x_p(t)$  com a solução da equação homogênea  $x_h(t)$ .



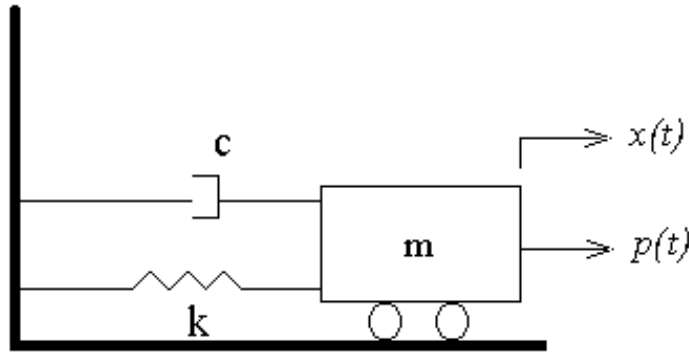


Figura 2.7:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \quad (2.63)$$

A solução particular depende do carregamento dinâmico. Neste caso:

$$x_p(t) = G \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.64)$$

A solução da equação homogênea  $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$  como foi visto no capítulo 2 é :

$$x_h = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.65)$$

$$\dot{x}_p(t) = G\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t) \quad (2.66)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -G\bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.67)$$

Substituindo as equações 2.66 e 2.67 na equação 2.62 tem-se:

$$\begin{aligned} -mG\bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t) + KG \sin(\bar{\omega}t) &= p_0 \sin(\bar{\omega}t) \\ -mG\bar{\omega}^2 + KG &= p_0 \\ G &= \frac{p_0}{K - \bar{\omega}^2 m} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Lembrando que  $\omega^2 = \frac{K}{m}$  e fazendo  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$  obtem-se:

$$G = \frac{p_0}{K - \bar{\omega}^2 \left(\frac{K}{\omega^2}\right)} = \frac{p_0}{K(1 - \beta^2)} \quad (2.69)$$

e finalmente:

$$G = \frac{p_0}{K} \left( \frac{1}{1 - \beta^2} \right) \quad (2.70)$$

Somando as soluções da equação homogênea e da equação particular podemos escrever a solução da equação 2.62 como:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{p_0}{K} \left( \frac{1}{1 - \beta^2} \right) \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.71)$$

onde A e B dependem das condições de contorno.

Para  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , tem-se:

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B = -\frac{p_0\beta}{K} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) \quad (2.72)$$

Logo a equação 2.71 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x(t) = -\frac{p_0\beta}{K} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) \sin(\omega t) + \frac{p_0}{K} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.73)$$

ou,

$$x(t) = \frac{p_0}{K} \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) [\sin(\bar{\omega}t) - \beta \sin(\omega t)] \quad (2.74)$$

onde  $\frac{p_0}{K} = x$  é o deslocamento estático e  $\frac{1}{1-\beta^2}$  é o fator de amplificação. Nesta equação o termo  $\sin(\bar{\omega}t)$  representa a componente da resposta na frequência do carregamento; é chamada de resposta permanente e está diretamente relacionado ao carregamento.

### Fator de amplificação. MF

Uma medida da influência de um carregamento dinâmico é o fator de amplificação  $R(t)$  dado por:

$$R(t) = \frac{x(t)}{x_{est}} = \left( \frac{1}{1-\beta^2} \right) [\sin(\bar{\omega}t) - \beta \sin(\omega t)] \quad (2.75)$$

É interessante observar o comportamento da resposta dinâmica mais detalhadamente pelas figuras abaixo. A figura 2.8-a representa a componente permanente da resposta enquanto que a figura 2.8-b representa a componente transiente. Neste exemplo, assumimos que  $\beta = \frac{2}{3}$ , ou seja, a frequência de aplicação da força é 2/3 da frequência natural da estrutura. A resposta total é a soma de ambos os tipos de respostas e é mostrada na figura 2.8-c. Dois pontos são de interesse: (1) a tendência das duas componentes entrarem e saírem de fase, causando um efeito de batimento na resposta total; e (2) a inclinação nula na resposta total em  $t = 0$  mostra que a velocidade inicial da resposta transiente é suficiente para cancelar a velocidade inicial da resposta permanente; o que satisfaz a condição de contorno  $\dot{x}(0) = 0$ .

## 2.4.2 Sistema Amortecido

Se dividirmos a equação 2.61 por  $m$  e denotando  $\frac{c}{m} = 2\xi\omega$  tem-se:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega}t \quad (2.76)$$

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \quad (2.77)$$

$$x_h(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi\omega t} \quad (2.78)$$

onde  $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ .

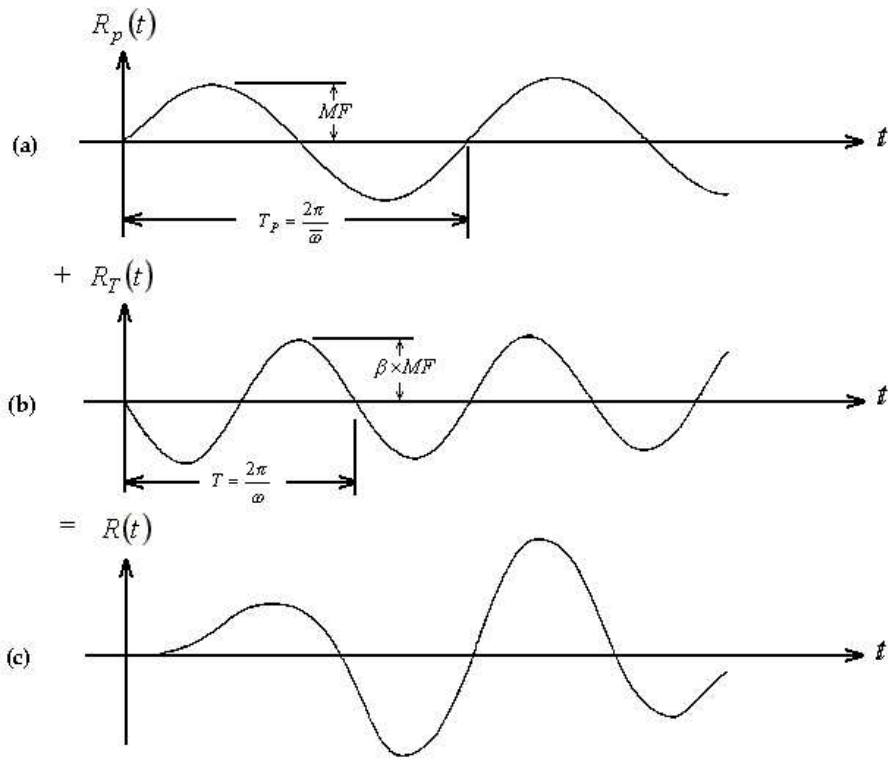


Figura 2.8: Frequency ratio  $\beta = 2/3$

A solução particular da equação 2.76 é:

$$x_p(t) = G_1 \cos(\bar{\omega}t) + G_2 \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.79)$$

derivando a equação acima, teremos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -G_1 \bar{\omega} \sin(\bar{\omega}t) + G_2 \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t) \\ \ddot{x}_p(t) &= -G_1 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) - G_2 \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t) \end{aligned} \quad (2.80)$$

e substituindo em 2.76:

$$\begin{aligned} & \left[ -G_1 \bar{\omega}^2 + G_2 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_1 \omega^2 \right] \cos(\bar{\omega}t) + \\ & \left[ -G_2 \bar{\omega}^2 - G_1 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_2 \omega^2 - \frac{p_0}{m} \right] \sin(\bar{\omega}t) = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Para que a equação acima seja verdade, os dois termos entre colchetes devem ser nulos. Tem-se então um sistema de duas equações e duas incógnitas, donde obtem-se  $G_1$  e  $G_2$ .

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{p_0}{k} \left[ \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \\ G_2 &= \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.82)$$

Substituindo em 2.81 e em seguida combinando o resultado com 2.78 , tem-se:

$$x(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t} + \frac{p_0}{k} \left[ \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \cos(\bar{\omega}t) + \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.83)$$

ou,

$$x(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t} + \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \left[ (1-\beta^2) \sin(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega}t) \right] \quad (2.84)$$

O primeiro termo da equação 2.84 refere-se a resposta transiente, a qual é amortecida pelo fator  $e^{-\xi \omega t}$ , enquanto que o segundo termo representa a resposta permanente, que continuará indefinidamente. No entanto, a resposta transiente amortece rapidamente, logo é de pouco interesse neste estudo e pode ser desprezada. Sendo assim, podemos dizer que  $x(t) \simeq x_p(t)$ .

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \left[ (1-\beta^2) \sin(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega}t) \right] \quad (2.85)$$

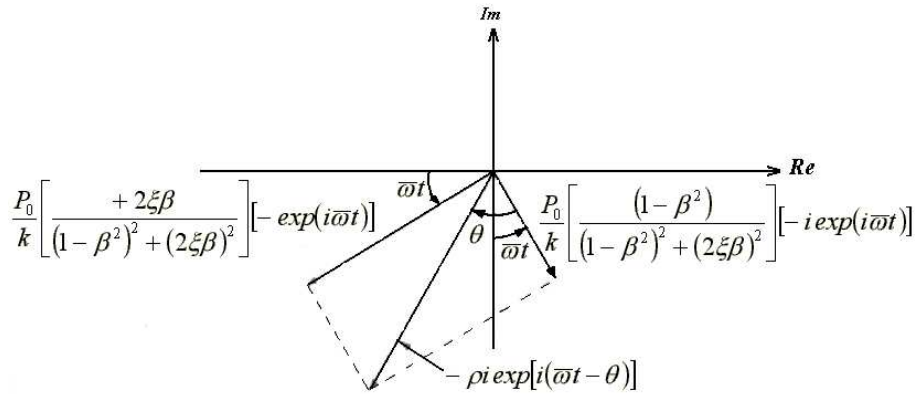


Figura 2.9:

No plano dos números complexos, a expressão 2.85 pode ser escrita como:

$$x(t) = \rho \cos(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2.86)$$

onde,

$$\rho = \frac{p_0}{k} \left[ (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan \left( \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right) \quad (2.87)$$

O fator de amplificação dinâmica provocado pela força  $p_0$  é dado por:

$$D = \frac{\rho}{\frac{p_0}{k}} = \left[ (1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.88)$$

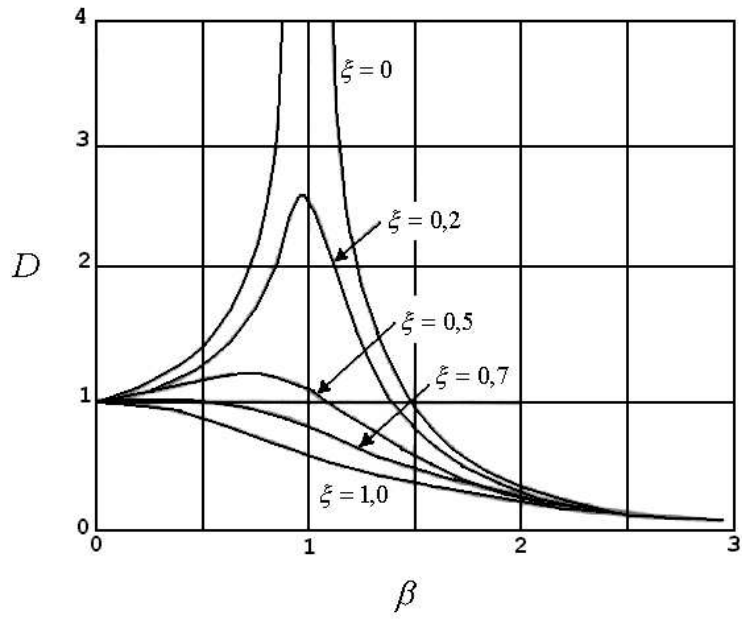


Figura 2.10:

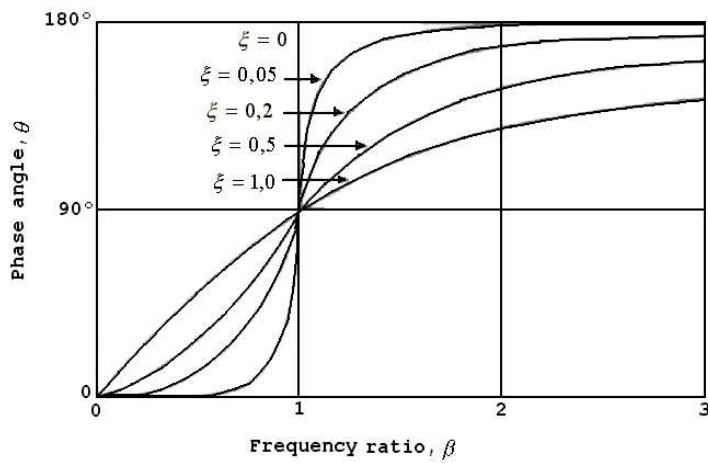


Figura 2.11:

Os gráficos  $DX\beta$  e  $\theta X\beta$  estão mostrados nas figuras abaixo.

É interessante solucionar a resposta de um carregamento harmônico permanente da forma exponencial. Considere o caso geral de carregamento harmônico expresso na forma exponencial:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \frac{p_0}{m}e^{i\bar{\omega}t} \quad (2.89)$$

A solução particular da equação 2.89 e suas derivadas primeira e segunda são:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= Ge^{i\bar{\omega}t} \\ \dot{x}_p(t) &= i\bar{\omega}Ge^{i\bar{\omega}t} \\ \ddot{x}_p(t) &= -\bar{\omega}^2Ge^{i\bar{\omega}t} \end{aligned} \quad (2.90)$$

onde  $G$  é uma constante complexa que pode ser calculada substituindo as equações 2.90 na equação 2.89 e lembrando que  $m = k\omega^2$  e  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ .

$$G = \frac{p_0}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2) + i(2\xi\beta)} \right] = \frac{p_0}{k} \left[ \frac{(1 - \beta^2) - i(2\xi\beta)}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \quad (2.91)$$

Substituindo a constante  $G$  na primeira das equações 2.90, e representando graficamente os dois vetores resultantes no plano complexo, obtém-se a representação mostrada na figura abaixo:

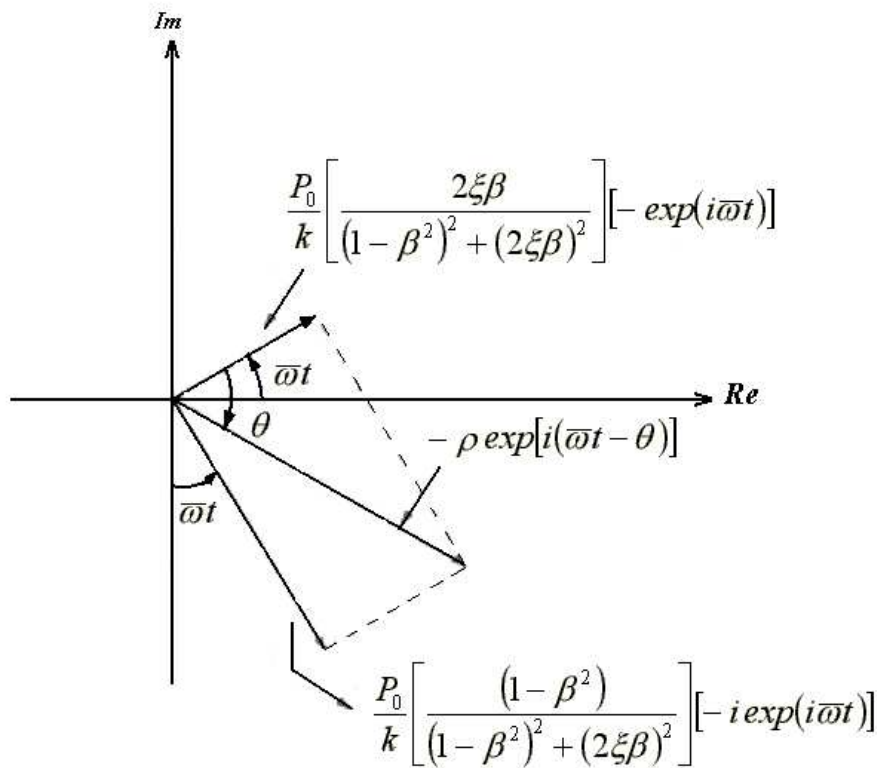


Figura 2.12:

A resposta total obtida a partir do equilíbrio de forças atuando na massa sob um carregamento harmônico permanente como mostrado na figura 2.12 é:

$$x_p = \rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} \quad (2.92)$$

onde  $\rho$  é a amplitude dada pela equação 2.87. O equilíbrio das forças requer que o somatório das forças inercial, de amortecimento e elástico seja igual ao carregamento aplicado, ou seja:

$$p_t = p_0 e^{i\bar{\omega}t} \quad (2.93)$$

Usando a equação 2.92 essas forças são:

$$f_{I_p}(t) = m\ddot{x}_p(t) = -m\bar{\omega}^2 e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} \quad (2.94)$$

$$f_{D_p}(t) = c\dot{x}_p(t) = ic\bar{\omega}\rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} \quad (2.95)$$

$$f_{S_p}(t) = kx_p(t) = k\rho e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} \quad (2.96)$$

onde:

$f_{I_p}(t)$  é a força inercial.

$f_{D_p}(t)$  é a força de amortecimento.

$f_{S_p}(t)$  é a força elástica.

## 2.5 Resposta para um Carregamento Periódico

### 2.5.1 Carregamento Periódico em Série de Fourier

### 2.5.2 Forma Trigonométrica

Dado um carregamento periódico arbitrário como o da figura 2.13 com período  $T_p$ , é conveniente expressá-lo em uma série de Fourier. A forma trigonométrica da série é bem conhecida e é representada por:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t \quad (2.97)$$

onde:

$$\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_p}$$

Os coeficientes harmônicos das amplitudes podem ser determinados usando as expressões

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \bar{\omega}_n t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.98)$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \bar{\omega}_n t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

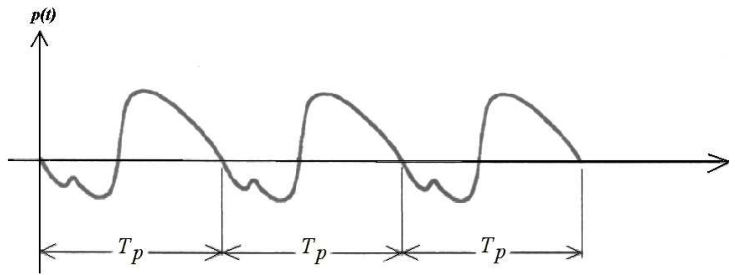


Figura 2.13:

### 2.5.3 Forma Exponencial

A forma exponencial para a série de Fourier pode ser obtida substituindo as relações abaixo nas equações 2.98 e 2.97.

$$\cos \bar{\omega}_n t = \frac{1}{2} [e^{i\bar{\omega}_n t} + e^{-i\bar{\omega}_n t}] \quad (2.99)$$

$$\sin \bar{\omega}_n t = \frac{1}{2} [e^{i\bar{\omega}_n t} - e^{-i\bar{\omega}_n t}] \quad (2.100)$$

o que nos dá:

$$p(t) = \sum_{m=1}^{N-1} P_m \cdot e^{i\bar{\omega}_m t} \quad (2.101)$$

onde o coeficiente  $P_n$  pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$P_n = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_p} p(t) e^{-i\bar{\omega}_n t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.102)$$

Deve ser notado que para cada valor positivo de  $n$  na eq 2.102 ( $n = +m$ ) há um valor correspondente negativo  $n = -m$ . A partir da forma da equação 2.102 podemos ver que  $P_m$  e  $P_{-m}$  são pares de complexos conjugados, que é uma condição para que as partes imaginárias dos termos correspondentes na equação 2.102 se cancelem.

### 2.5.4 Resposta para um Carregamento Expandido em Série de Fourier

Tendo expressado o carregamento periódico como uma série de termos harmônicos, a resposta de um sistema linear para este carregamento pode ser obtido simplesmente somando as respostas para carregamentos harmônicos individuais. No capítulo 3 (equação 2.74) foi mostrado que a resposta permanente produzida por um carregamento harmônico senoidal em um sistema não amortecido com um único grau de liberdade é dado por (após omitir o termo da resposta transiente):

$$x_n(t) = \frac{b_n}{k} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] \sin \bar{\omega}_n t \quad (2.103)$$

onde, tem-se:

$$\beta_n \equiv \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} \quad (2.104)$$



Similarmente, a resposta permanente produzida pelo termo em co-seno na equação 2.97 é:

$$x_n(t) = \frac{a_n}{k} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] \cos \bar{\omega}_n t \quad (2.105)$$

Finalmente, a resposta permanente para o termo constante  $a_0$  é a deflexão estática

$$x_0 \equiv \frac{a_0}{k} \quad (2.106)$$

A resposta total de uma estrutura não amortecida pode ser expressa como a soma das respostas de cada termo da equação 2.97 como se segue:

$$x(t) = \frac{1}{k} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{1 - \beta_n^2} \right] \cdot (a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t) \right\} \quad (2.107)$$

Se quisermos levar em conta o amortecimento viscoso no cálculo da resposta permanente é necessário substituir as expressões para a resposta amortecida da forma da equação 2.85 nas expressões usadas acima. Neste caso a resposta permanente total é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{k} \left( a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \right] \right) \times \\ \times \left( [2\xi \cdot a_n \cdot \beta_n + b_n(1 - \beta_n^2)] \cdot \sin \bar{\omega}_n t + [a_n(1 - \beta_n^2) - 2\xi \cdot b_n \cdot \beta_n] \cos \bar{\omega}_n t \right) \quad (2.108)$$

Se o carregamento é expresso da forma exponencial como na eq. 2.101, a resposta para um sistema com amortecimento viscoso será:

$$x_n = H_n P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2.109)$$

onde o coeficiente  $P_n$  é dado pela equação 2.102 e o coeficiente  $H_n$  é dado pela equação 2.91 após ser dividida pela amplitude do carregamento, ou seja,

$$H_n = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta_n^2) + i(2\xi\beta_n)} \right] = \frac{1}{k} \left[ \frac{(1 - \beta_n^2) + i(2\xi\beta_n)}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \right] \quad (2.110)$$

Usando mais uma vez o princípio da superposição, a resposta total para um sistema com um único grau de liberdade submetido a um carregamento periódico da forma da equação 2.101 é:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n P_n e^{i\bar{\omega}_n t} \quad (2.111)$$

## 2.6 Exercício

Calcular a resposta dinâmica para o sistema abaixo, comparar com a resposta estática. Dados:  $k = 10^6 N/m$ ,  $m = 100Kg$ ,  $p_0 = 10KN$ .

Caso 1)  $\xi = 0.01$ ,  $\bar{\omega} = 10 rad/seg$ .

Caso 2)  $\xi = 0$ ,  $\bar{\omega} = 99 rad/seg$ .

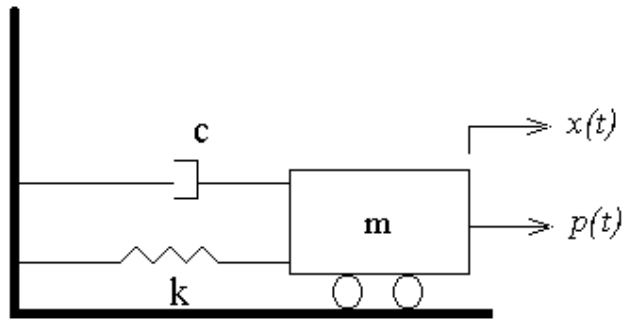


Figura 2.14:

Caso 3)  $\xi = 0.9$  ,  $\bar{\omega} = 99\text{rad/seg}$ .

Caso 4)  $\xi = 0.05$  ,  $\bar{\omega} = 80\text{rad/seg}$ .

Calcule  $D$  para  $\xi = 0.02$ .

- Dada a resposta em vibrações livres para o deslocamento vertical do nó situado a 222,4 cm do apoio da esquerda da viga esquematizada na figura 2.15, calcular o período, a frequência natural e taxa de amortecimento do sistema (relativos à primeira frequência natural).

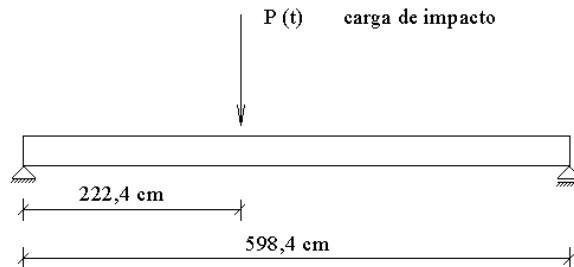


Figura 2.15:

- Um edifício é idealizado com vigas suportadas por pilares. Para avaliar as propriedades dinâmicas da estrutura, foi feito um teste de vibrações livres, no qual os pilares foram deslocados lateralmente por um macaco hidráulico e liberado repentinamente. Durante a operação é observado que a força de 90,72 N é exercida para deslocar 0,508 cm; após alguns instantes o deslocamento retorna a 0,406 cm e o período é de 1,40 segundos. Determinar:

- A rigidez à flexão
- A frequência de vibração
- As propriedades de amortecimento  $\xi$ ,  $c$ ,  $\omega_D$
- Amplitude após 6 ciclos.

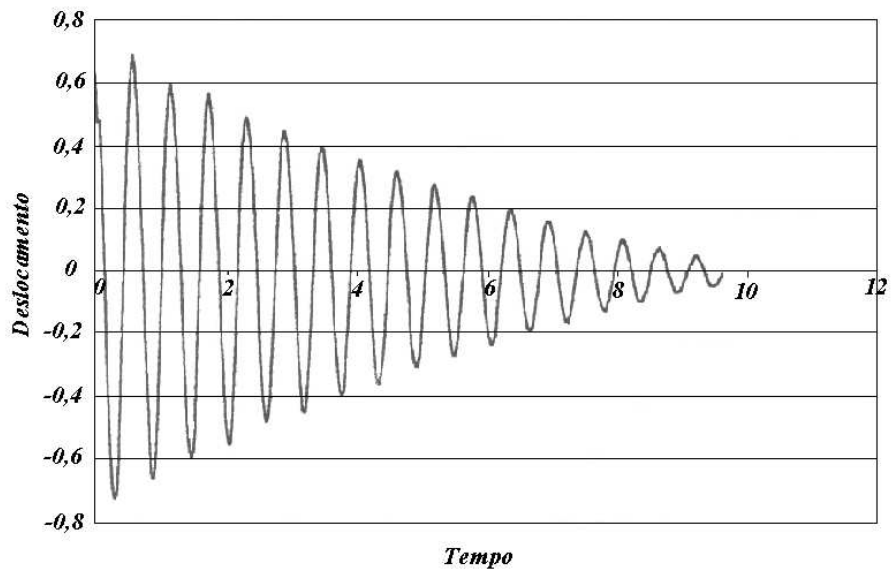


Figura 2.16: Resposta Dinâmica

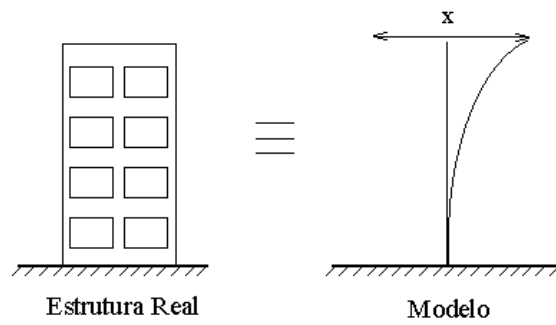


Figura 2.17:

# Capítulo 3

## Medições Dinâmicas

### 3.1 Introdução

Influência do movimento do suporte.

Em todos os casos, emprega-se o movimento relativo da massa com relação à base para se obter uma avaliação da grandeza desejada.

Para determinação de deslocamentos utilizam-se aparelhos denominados de transdutores sísmicos de deslocamentos, também conhecidos como vibrômetros. No caso da determinação de velocidades, são empregados os transdutores sísmicos de velocidade enquanto que, para a medição de acelerações são usados os transdutores sísmicos de aceleração, também denominados de acelerômetros.

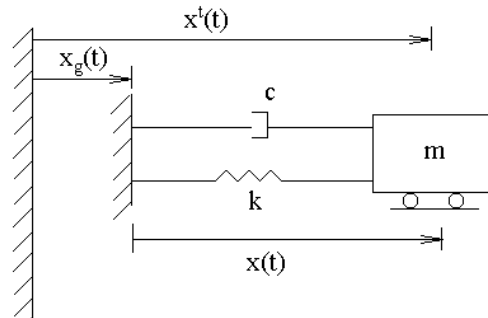


Figura 3.1:

onde  $x_g(t)$  é o movimento do suporte.

Tem-se que:

$$x^t(t) = x_g(t) + x(t) \quad (3.1)$$

Escrevendo a equação de movimento que rege o comportamento do grau de liberdade  $x$ , tem-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^t(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \\ m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= -m\ddot{x}_g(t) \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= -m\ddot{x}_g \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $-m\ddot{x}_g$  é o  $P_{efetivo}$ .

## 3.2 Medição de Acelerações

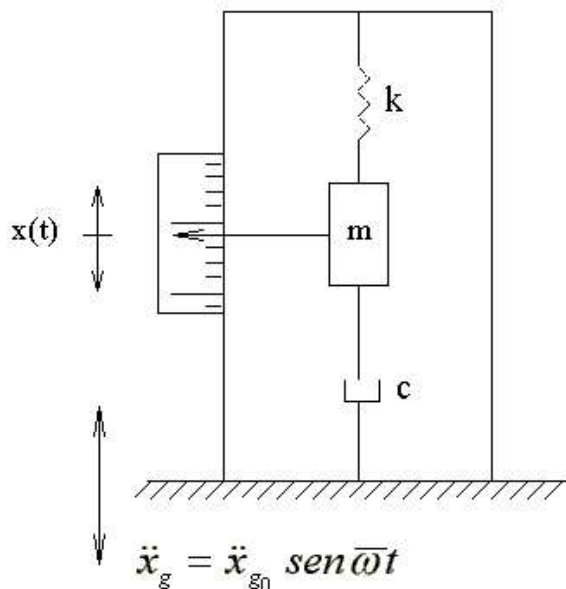


Figura 3.2: Modelo de um acelerômetro.

Imagine se déssemos nessa base uma aceleração harmônica  $\ddot{x}_g$ . Logo teríamos que:

$$P_{efetivo} = -m\ddot{x}_{g0} \text{sen } \bar{\omega}t$$

de onde poderíamos concluir que:

$$P_0 = -m\ddot{x}_{g0}$$

Logo, a amplitude da resposta em regime para  $P = P_{efe}$  é:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-\frac{1}{2}} \\ \rho &= \frac{-m\ddot{x}_{g0}}{k} D \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $D$  é o fator de amplificação dinâmica.

Tem-se que para  $\xi = 0,7$  e para  $\beta < 0,6$ , e ainda analisando a expressão  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$  e o gráfico da figura 3.3,  $D \cong 1$ .

Logo a expressão 3.3 resume-se em:

$$\rho = \frac{-m\ddot{x}_{g0}}{k} \quad (3.4)$$

Como  $m$  e  $k$  nós conhecemos do aparelho, tem-se que o deslocamento  $x(t)$  indicado pelo instrumento será proporcional à amplitude da aceleração da base sobre a qual o acelerômetro está montado.

$$\rho \propto \ddot{x}_{g0} \quad (3.5)$$

Logo, quando se estiver lendo qual a amplitude medida na escala do aparelho, estaremos medindo a aceleração da base.

### 3.2.1 Características Básicas de um Acelerador

- faixa de trabalho (frequência)

- amplitudes máximas (frações ou múltiplos de  $g$ , que é a aceleração da gravidade)

Para  $\beta < 0,6$  e analisando a equação  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$  tem-se  $\omega$  grande. E como  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , precisaremos ou de um  $k$  grande ou de um  $m$  pequeno. E com estas características consigo fazer um aparelho pequeno.

Como conseqüência do que foi visto, conclui-se que estes dispositivos deverão utilizar molas de constante de rigidez extremamente elevadas, combinadas com massas pequenas. Com isso, asseguram-se valores de frequência circular natural  $\omega$  elevados o que permite a operação do acelerômetro com valores de  $\beta$  pequenos, mesmo quando o valor da frequência circular  $\bar{\omega}$  do movimento aplicado seja grande.

Portanto, os acelerômetros podem ser feitos muito pequenos, o que assegura que a sua presença terá pouca influência na modificação do movimento da massa que está sendo por ele monitorada e na qual ele é fixado. Em outras palavras, tudo se passa como se não houvesse modificação de massa e, conseqüentemente, os resultados lidos com o aparelho registrador estarão corretos, dispensando ajustes posteriores.

### 3.3 Medição de Deslocamentos

Agora ao invés de aplicar uma aceleração à base, aplicaremos um deslocamento  $x_g$  conforme mostra a figura 3.3.

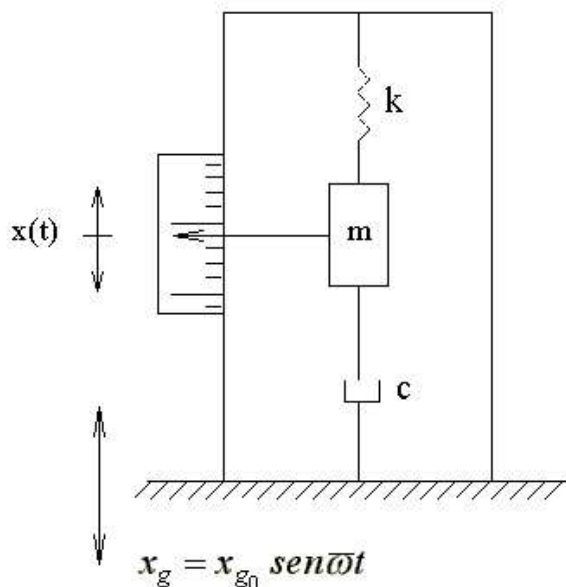


Figura 3.3: Modelo de um vibrômetro ou deflectômetro.

Tenho que:

$$\dot{x}_g = x_{g0} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t \quad (3.6)$$

$$\ddot{x}_g = x_{g0} \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t \quad (3.7)$$

Logo:

$$P_{efe} = mx_{g_0}\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t \quad (3.8)$$

onde  $P_0 = mx_{g_0}\bar{\omega}^2$ .

Logo, a amplitude da resposta em regime para  $P = P_{efe}$  é:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{P_0}{k}[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \rho &= \frac{mx_{g_0}\bar{\omega}^2}{k}D \\ \rho &= \frac{1}{\omega^2}x_{g_0}\bar{\omega}^2 D \\ \rho &= x_{g_0}\beta^2 D \end{aligned} \quad (3.9)$$

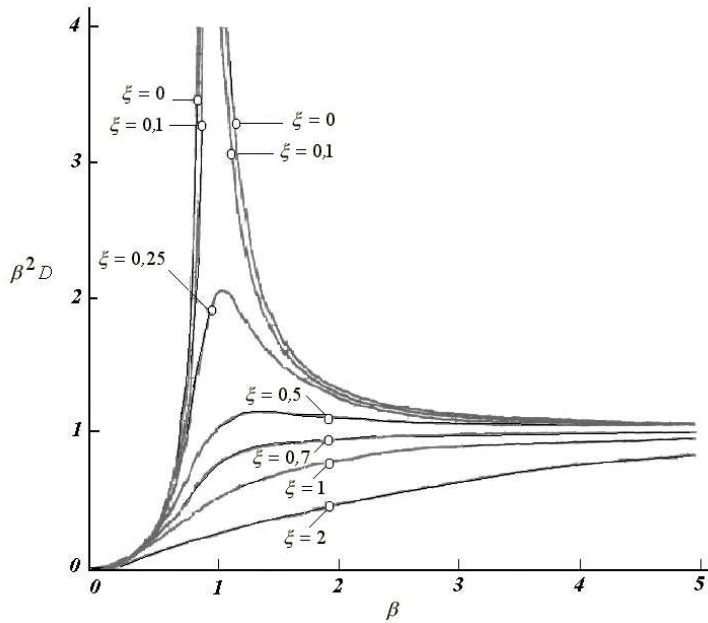


Figura 3.4:

Para  $0,5 < \xi < 0,7$  e  $\beta > 1$ , e analisando o gráfico da figura 3.4 tem-se que  $\beta^2 D \cong 1$ . Logo:

$$\rho \propto x_{g_0} \quad (3.10)$$

Pode-se concluir então que a leitura que fazemos no aparelho é o próprio deslocamento aplicado à base.

Para se ter  $\beta > 1$ , analisando a equação  $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$ , conclui-se que é necessário um  $\omega$  pequeno. E para que isso aconteça, analisando a equação  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , é preciso ou um  $k$  pequeno ou um  $m$  grande. Para se ter um  $k$  pequeno, é necessário uma mola molenga, e para  $m$  grande, um aparelho muito grande. Portanto, os aparelhos que medem deslocamentos utilizam molas macias e dimensões grandes para assegurar uma frequência circular natural  $\omega$  pequena.

### 3.4 Exercícios

No mercado existem diversos tipos de acelerômetros. Dentre suas características fundamentais tem-se: amplitude máxima de aceleração e faixa de frequência de trabalho. Dentre os acelerômetros disponíveis  $ac_1$ ,  $ac_2$  e  $ac_3$ , qual é o mais indicado para sensorar a estrutura representada pelo modelo da figura 3.5?

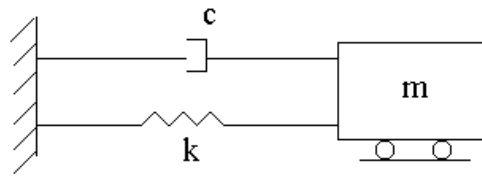


Figura 3.5:



# Capítulo 4

## Método das Diferenças Finitas

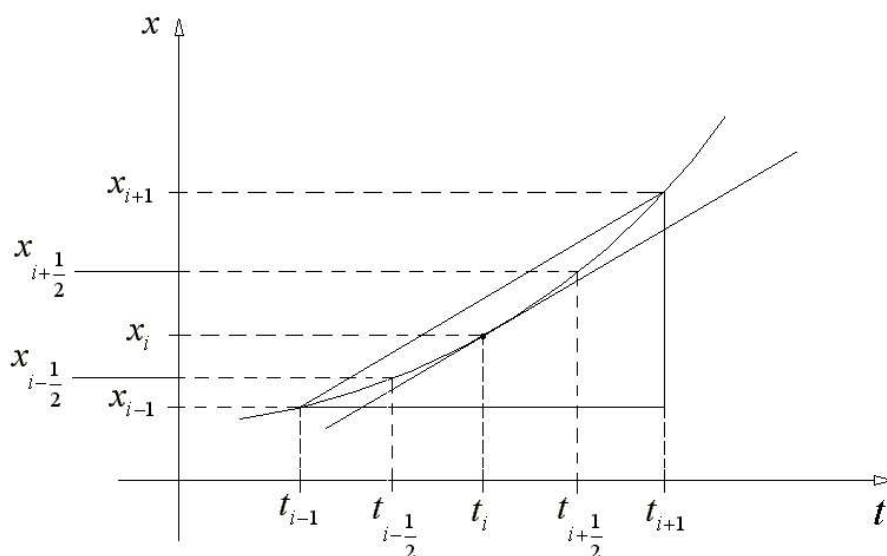


Figura 4.1:

Considerem-se os vetores de deslocamento  $X^{i-1}$ ,  $X^i$  e  $X^{i+1}$  referentes, respectivamente, aos tempos  $t_{i-1}$ ,  $t_i$  e  $t_{i+1}$  separados entre si por um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Para o tempo intermediário entre  $t_{i-1}$  e  $t_i$  uma avaliação linear da velocidade pode ser estabelecida por :

$$\dot{X}^{i-\frac{1}{2}} = \frac{X^i - X^{i-1}}{\Delta t} \quad (4.1)$$

enquanto que para o tempo intermediário entre  $t_i$  e  $t_{i+1}$  , a avaliação linear velocidade será dada por:

$$\dot{X}^{i+\frac{1}{2}} = \frac{X^{i+1} - X^i}{\Delta t} \quad (4.2)$$

Os vetores velocidade obtidos pelas expressões 4.1 e 4.2 permitem que se obtenha uma avaliação linear do vetor aceleração  $\ddot{X}^i$  que será dada por:

$$\ddot{X}^i = \frac{\dot{X}^{i+\frac{1}{2}} - \dot{X}^{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (4.3)$$

Substituindo a 4.1 e a 4.2 na 4.3, obtém-se uma aproximação do valor da aceleração no tempo  $t_i$ :

$$\ddot{X}^i = \frac{1}{\Delta t^2} (X^{i+1} - 2X^i + X^{i-1}) \quad (4.4)$$

Fazendo-se a média da 4.1 e 4.2, obtém-se uma avaliação da velocidade no tempo  $t_i$ :

$$\dot{X}^i = \frac{\dot{X}^{i-\frac{1}{2}} + \dot{X}^{i+\frac{1}{2}}}{2} = \frac{X^{i+1} - X^{i-1}}{2\Delta t} \quad (4.5)$$

Tem-se que:

$$M\ddot{X}^i + C\dot{X}^i + KX^i = F^i \quad (4.6)$$

na qual se pode substituir  $\ddot{X}^i$  e  $\dot{X}^i$  e pelas suas expressões 4.4 e a 4.5, obtendo-se:

$$M \left[ \frac{1}{\Delta t^2} (X^{i+1} - 2X^i + X^{i-1}) \right] + C \left( \frac{X^{i+1} - X^{i-1}}{2\Delta t} \right) + KU^i = F^i \quad (4.7)$$

Isolando-se, na expressão 4.7, os termos em  $X^{i+1}$ , obtém-se:

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right] X^{i+1} = F^i - \left[ K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right] X^i - \left[ \frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right] X^{i-1} \quad (4.8)$$

que, resolvida com o auxílio de um processo de solução de sistemas de equações algébricas lineares, permite obter o vetor de deslocamentos  $X^{i+1}$ , as expressões 4.4 e 4.5 podem ser utilizadas para obter os valores do vetor de velocidades  $\dot{X}^i$  e acelerações  $\ddot{X}^i$  respectivamente.

Note-se que para o primeiro passo, caso em que  $i = 0$ , deve-se obter o vetor de deslocamentos  $X^{i-1}$  para que seja possível aplicar a equação 4.8 com o objetivo de calcular  $X^1$ . Para tal, utiliza-se a equação 4.4 com  $i = 0$  e pondo-se em evidência  $X^{-1}$  resulta:

$$X^{-1} = \Delta t^2 \ddot{X}^0 + 2X^0 - X^1 \quad (4.9)$$

Fazendo  $i = 0$  na equação 4.5, pode-se isolar  $X^1$ , obtendo:

$$X^1 = 2\Delta t \dot{X}^0 + X^{-1} \quad (4.10)$$

que, utilizada na equação 4.9, fornece:

$$X^{-1} = \Delta t^2 \ddot{X}^0 + 2X^0 - 2\Delta t \dot{X}^0 - X^{-1} \quad (4.11)$$

donde obtém-se finalmente:

$$X^{-1} = \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}^0 - \Delta t \dot{X}^0 + X^0 \quad (4.12)$$

Na expressão acima o vetor  $\ddot{X}^0$  pode ser calculado como:

$$\ddot{X}^0 = M^{-1} (F^0 - C\dot{X}^0 - KX^0) \quad (4.13)$$

Este método apresenta vantagens computacionais significativas quando se trabalha com matrizes de massa diagonais. Neste caso, é imediata a obtenção da matriz  $M^{-1}$ , utilizada na expressão 4.13. Por outro lado, caso a matriz de amortecimento  $C$  possa ser considerada nula, a expressão 4.8 permite escrever:

$$X^{i+1} = \Delta t^2 M^{-1} \left[ F^i - \left( K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right) X^i - \frac{1}{\Delta t^2} M X^{i-1} \right] \quad (4.14)$$

e, se a matriz de massa  $M$  for diagonal  $M^1$ , pode ser facilmente obtida pela inversão algébrica dos termos da diagonal de  $M$ . Neste caso, não há necessidade de ser empregado um processo qualquer de solução de sistemas de equações algébricas para obter  $X^{i+1}$ . Esta é a grande vantagem do método de diferenças centrais, e de todos os métodos explícitos, em relação aos implícitos.

## 4.1 Exercício

Fazer no Matlab um programa que faça a integração numérica da equação a seguir e comparar com o resultado teórico.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_0 \sin \bar{\omega}t$$

# Capítulo 5

## Introdução ao Método da Superposição Modal

### 5.1 Introdução : Sistema com 2 graus de Liberdade

Consideremos o sistema massa-mola com 2 graus de liberdade mostrado na figura abaixo:

Vejamos como ficam os diagramas de corpo livre das massas  $m_1$  e  $m_2$ .

Equações de Equilíbrio Dinâmico:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) - c_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = F(t) \quad (5.2)$$

Podemos reescrever as equações acima na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$
$$M \cdot \ddot{X} + C \cdot \dot{X} + K \cdot X = F$$

onde:

$M$  = Matriz de Massa;

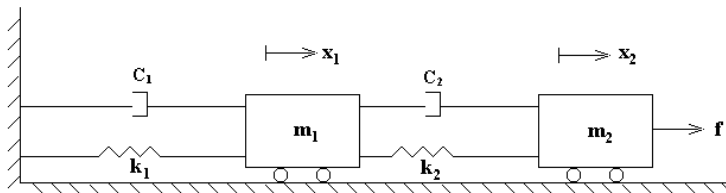


Figura 5.1:

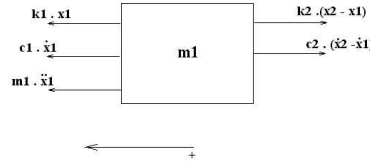


Figura 5.2:

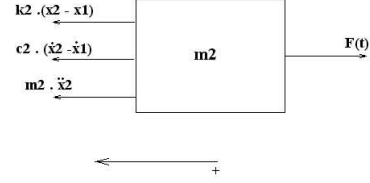


Figura 5.3:

- $\ddot{X}$  = Vetor de Aceleração;
- $C$  = Matriz de Amortecimento;
- $\dot{X}$  = Vetor de Velocidades;
- $K$  = Matriz de Rigidez;
- $X$  = Vetor de Deslocamento;
- $F$  = Vetor de forcas.

Resolvendo o Sistema por Diferencas Finitas:

$$\ddot{x}_1^i = \frac{1}{\Delta t^2}(x_1^{i+1} - 2x_1^i + x_1^{i-1})$$

$$\dot{x}_1^i = \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{x}_2^i = \frac{1}{\Delta t^2}(x_2^{i+1} - 2x_2^i + x_2^{i-1})$$

$$\dot{x}_2^i = \frac{x_2^{i+1} - x_2^{i-1}}{2\Delta t}$$

teremos:

$$m_1 \left[ \frac{1}{\Delta t^2}(x_1^{i+1} - 2x_1^i + x_1^{i-1}) \right] + C_1 \left( \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2\Delta t} \right) + k_1 x_1^i - k_2(x_2^i - x_1^i) - C_2 \left[ \left( \frac{x_2^{i+1} - x_2^{i-1}}{2\Delta t} \right) - \left( \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2\Delta t} \right) \right] = 0 \quad (5.3)$$

$$m_2 \left[ \frac{1}{\Delta t^2}(x_2^{i+1} - 2x_2^i + x_2^{i-1}) \right] + C_2 \left[ \left( \frac{x_2^{i+1} - x_2^{i-1}}{2\Delta t} \right) - \left( \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2\Delta t} \right) \right] + k_2(x_2^i - x_1^i) = F^i \quad (5.4)$$

Utilizando as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}x_1^{-1} &= 0; \\x_1^0 &= 0; \\x_2^{-1} &= 0; \\x_2^0 &= 0\end{aligned}$$

Para  $i = 0$ , podemos reescrever as equações 5.3 e 5.4 da seguinte forma:

$$m_1 \left[ \frac{1}{\Delta t^2} (x_1^1) \right] + C_1 \left( \frac{x_1^1}{2\Delta t} \right) - C_2 \left[ \frac{x_2^1 - x_1^1}{2\Delta t} \right] = 0 \quad (5.5)$$

$$m_2 \left[ \frac{1}{\Delta t^2} (x_2^1) \right] + C_2 \left( \frac{x_2^1 - x_1^1}{2\Delta t} \right) = F^0 \quad (5.6)$$

Resolvendo o sistema acima (Maple):

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = X^1 \dots p/i = 1,$$

$$A \cdot X = F$$

\* **Observações:**

01) Para cada grau de liberdade (gl), tem-se que resolver um sistema. Por exemplo: 2 gl = sistema 2x2.

02) Para cada passo temporal caímos num sistema.

## 5.2 Variações Livres Não Amortecidas

Nesta situação a solução é do tipo:

$$\rho \cos(\omega t + \theta) \quad (5.7)$$

com  $\theta = 0$

$$x_1 = \phi_{11} \cos(\omega_1 t) + \phi_{12} \cos(\omega_2 t)$$

$$x_2 = \phi_{21} \cos(\omega_1 t) + \phi_{22} \cos(\omega_2 t)$$

Podemos reescrever o sistema acima da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_2 t) \end{Bmatrix}$$

ou,

$$X = \phi \cdot \cos(\omega_i t)$$

Derivando duas vezes:

$$\ddot{X} = -\omega_i^2 \phi \cdot \cos(\omega_i t) \quad (5.8)$$

Para Variações Livres Não Amortecidas a equação diferencial é da seguinte forma:

$$M \cdot \ddot{X} + K \cdot X = 0 \quad (5.9)$$

onde:  $C = 0$ .

Substituindo 5.8 na equação acima, teremos:

$$-M\omega_i^2 \phi \cos(\omega_i t) + K \phi \cos(\omega_i t) = 0$$

$$(K - M\omega_i^2) \phi_i = 0 \quad (5.10)$$

Que, para soluções diferentes da trivial:

$$\det(K - M\omega_i^2) = 0$$

Chegamos em um Problema de Autovalor:

$$|K_{ij} - M_{ij}\omega_i^2| = 0 \quad (5.11)$$

fazendo  $k_1 = k_2 = k$ ,  $m_1 = m_2 = m$  e  $\omega_j^2 = \lambda_j$ , expandindo a equação 5.11:

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega_i^2 m & -k \\ -k & k - \omega_i^2 m \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

Resolvendo o determinante :

$$(2k - \omega_i^2 m) \cdot (k - \omega_i^2 m) - k^2 = 0$$

Chegamos em uma equação do segundo grau, cujas soluções para  $i = 1$  são:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \cdot 2,618$$

$$\omega_1 \simeq 1,62 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e,

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m} \cdot 0,382$$

$$\omega_{21} \simeq 0,62 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Voltando na equação 5.11, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2k - k \cdot 2,618 & -k \\ -k & k - 2,618k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Colocando  $k$  em evidência:

$$k \begin{bmatrix} 2,618 & -1 \\ -1 & -1,618 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Onde, podemos notar que a primeira matriz corresponde a duas equações linearmente independentes. Dividindo ambos os membros da equação por  $k$ :

$$\begin{bmatrix} 2,618 & -1 \\ -1 & -1,618 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nesta etapa, arbitramos valores para  $\phi_{11}$  ou  $\phi_{21}$ , como por exemplo:  $\phi_{11} = 1$ , donde teremos:

$$-0,618 \cdot (1) - \phi_{21} = 0$$

$$\phi_{21} = -0,618$$

Dizemos então, que  $|\phi_{11}| = 1$  e finalmente normalizando:  $\phi_{11} = 0,8506$  e  $\phi_{21} = -0,5257$ . Analogamente, para  $i = 2$ :  $\phi_{12} = 0,5257$  e  $\phi_{22} = 0,8506$ . Consequentemente a matriz  $\phi$  será:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0,8586 & 0,5257 \\ -0,5257 & 0,8506 \end{bmatrix}$$

e,

$$\phi \cdot \phi^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja,  $\phi^{-1} = \phi^T$ , e dizemos que  $\phi$  é Ortogonal.

Como a matriz  $\phi$  possui colunas com módulo unitário, é anti-simétrica e ortogonal, dizemos que a mesma é uma Matriz de Rotação.

Retornando ao problema inicial, queremos o sistema somente para matrizes diagonais, para isso fazemos:  $C = \alpha \cdot M + \beta \cdot K$ .

$$M \cdot \ddot{X} + C \cdot \dot{X} + K \cdot X = F$$

onde:

$$\bar{M} = \phi^T M \phi$$

$$\bar{X} = \phi^T \ddot{X}$$

$$\bar{k} = \phi^T k \phi$$



$$\overline{\dot{X}} = \phi^T \dot{X}$$

$$\overline{F} = \phi^T F$$

$$\overline{X} = \phi^T X \tag{5.13}$$

Multiplicando ambos os termos da equação 5.13 por  $\phi$ , teremos:

$$X = \overline{X} \phi$$

Onde, finalmente teremos várias equações desacopladas.

# Capítulo 6

## Sistemas Contínuos

Considere o seguinte sistema representado na figura 6.1:

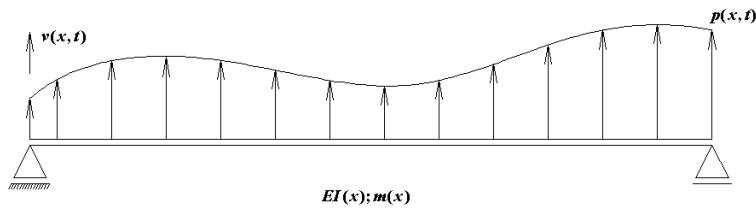


Figura 6.1:

Analisando o equilíbrio dinâmico de forças em elemento  $dx$ , de acordo com a figura 6.2, tem-se:

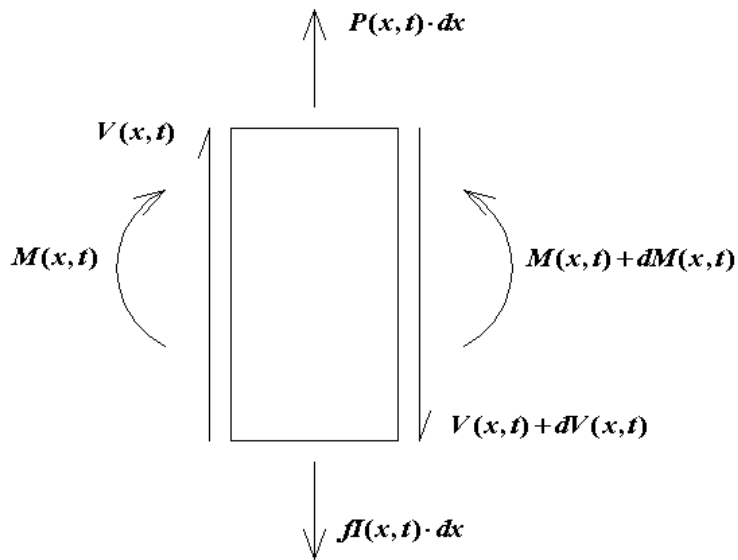


Figura 6.2:

$$\sum V = 0$$

$$V(x, t) + p(x, t)dx - [V(x, t) + dV(x, t)] - fI(x, t)dx = 0 \tag{6.1}$$

onde:

$$fI(x, t)dx = m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (6.2)$$

Substituindo a equação 6.2 na 6.1 tem-se:

$$dV(x, t) = p(x, t)dx - m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} dx \quad (6.3)$$

Dividindo ambos os membros por  $dx$  tem-se:

$$\frac{dV(x, t)}{dx} = p(x, t) - m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (6.4)$$

Fazendo o somatório de momentos em relação a um ponto  $A$  no centro da figura 6.2 tem-se:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \\ M(x, t) + V(x, t) \frac{dx}{2} + V(x, t) \frac{dx}{2} + dV(x, t) \frac{dx}{2} - M(x, t) - dM(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Simplificando a equação e desprezando o infinitésimo de segunda ordem  $dV(x, t)dx/2$ , tem-se:

$$\begin{aligned} V(x, t)dx - dM(x, t) = 0 \\ \frac{dM(x, t)}{dx} = V(x, t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Derivando ambos os membros da equação:

$$\frac{d^2 M(x, t)}{dx^2} = \frac{dV(x, t)}{dx} \quad (6.7)$$

Substituindo a equação 6.4 em 6.7, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M(x, t)}{dx^2} &= p(x, t) - m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \\ m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} &= p(x, t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Da Resistência I tem-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (6.9)$$

Logo:

$$M(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} EI \quad (6.10)$$

Para  $EI$  e  $\bar{m}$  constantes e  $p(x, t) = 0$   
 Substituindo a equação 6.10 na 6.8, tem-se:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.11)$$

Dividindo por  $EI$  tem-se:

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.12)$$

Se  $\frac{\bar{m}}{EI}$  é constante, a solução pode ser obtida por separação de variáveis.

$$y(x, t) = \phi(x)y(t) \quad (6.13)$$

Como o primeiro termo é função de  $(x)$  e o segundo é função de  $(t)$  a equação só pode ser satisfeita se ambos os termos forem constantes.

Substituindo a equação 6.13 na 6.12 tem-se:

$$\phi^{iv}(x)y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \ddot{y}(t)\phi(x) = 0 \quad (6.14)$$

Dividindo ambos os membros da equação 6.14 por  $y(t)\phi(x)$ , teremos:

$$\frac{\phi^{iv}(x)}{\phi(x)} + \frac{\bar{m}\ddot{y}(t)}{EIy(t)} = 0 \quad (6.15)$$

A equação 6.15 só é verdadeira se as funções em  $x$  e em  $t$  forem constantes. Isto é:

$$\frac{\phi^{iv}(x)}{\phi(x)} = -\frac{\bar{m}\ddot{y}(t)}{EIy(t)} = a^4 \quad (6.16)$$

Teremos portanto duas equações:

$$\phi^{iv}(x) - a^4 \phi(x) = 0 \quad (6.17)$$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (6.18)$$

onde:

$$\omega^2 = a^4 \frac{EI}{m} \Rightarrow a^4 = \frac{\bar{m}\omega^2}{EI}$$

A solução recai na resposta para 1 GL. A solução da equação 6.18 é:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (6.19)$$

Para a solução da equação 6.17, primeiramente calcula-se  $\phi^{iv}(x)$ :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= Ge^{sx} \\ \phi^i(x) &= Gse^{sx} \\ \phi^{ii}(x) &= Gs^2e^{sx} \\ \phi^{iii}(x) &= Gs^3e^{sx} \\ \phi^{iv}(x) &= Gs^4e^{sx} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Logo:

$$\begin{aligned}Gs^4 e^{sx} - a^4 G e^{sx} &= 0 \\s^4 - a^4 &= 0\end{aligned}\tag{6.21}$$

Esta admite 4 raízes:

$$s_{1,2} = \pm a\tag{6.22}$$

$$s_{3,4} = \pm ai\tag{6.23}$$

Logo:

$$\phi(x) = G_1 e^{iax} + G_2 e^{-iax} + G_3 e^{ax} + G_4 e^{-ax}\tag{6.24}$$

Após expansão trigonométrica, tem-se:

$$\phi(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax\tag{6.25}$$

Portanto a solução final é o somatório das equações 6.25 e 6.19.

Para uma viga Bi-apoiada:

Condições Iniciais:

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(L) = 0$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow EI\phi''(0) = 0 \Rightarrow \phi''(0) = 0$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow EI\phi''(L) = 0 \Rightarrow \phi''(L) = 0$$

Substituindo nas soluções tem-se:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_3 = 0$$

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow -A_1 + A_3 = 0$$

Logo:

$$A_1 = A_3 = 0$$

Com as outras condições, tem-se:

$$\phi(L) = A_2 \sin aL + A_4 \sinh aL = 0$$

$$\phi''(L) = -A_2 \sin aL + A_4 \sinh aL = 0$$

Fazendo o somatório das duas tem-se:

$$2A_4 \sinh aL = 0 \Rightarrow A_4 = 0$$

Logo:

$$\phi(x) = A_2 \sin ax \tag{6.26}$$

Tem-se que:

$$\phi(L) = 0$$

$$\phi(L) = A_2 \sin aL = 0$$

Como soluções tem-se:

$$A_2 = 0$$

Mas sendo trivial não nos interessa. E tem-se também:

$$\sin aL = 0 \Rightarrow aL = 0 \Rightarrow a_n L = n\pi$$

Logo:

$$a_n = \frac{n\pi}{L} \tag{6.27}$$

Lembrando que :

$$\omega = a^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{6.28}$$

Sendo  $\omega_n$  a frequência temporal.

Tem-se, portanto, as frequências dos modos próprios de vibração:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Finalmente:

$$y(x, t) = y(t)\phi(x)$$

onde:

$$\phi(x) = A_2 \sin ax$$

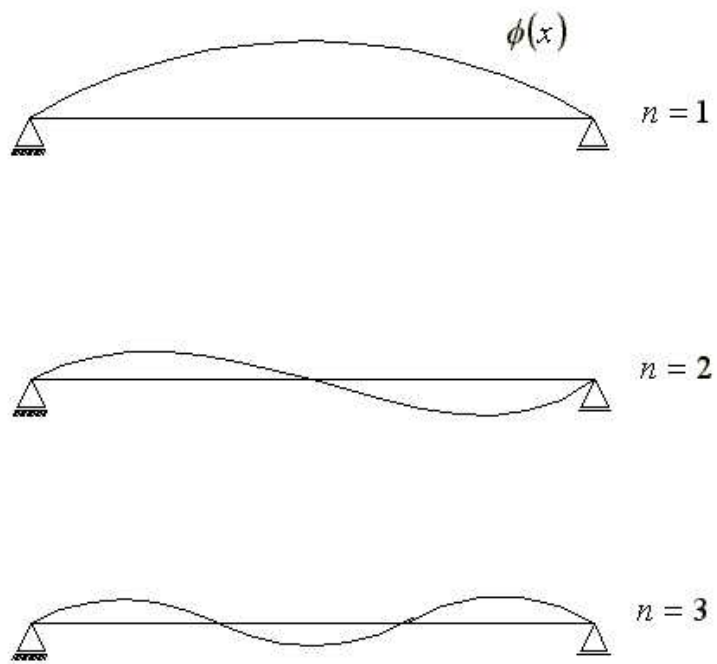


Figura 6.3: Modos próprios de vibração.

# Capítulo 7

## Identificação Modal no Domínio do Tempo

As medidas dinâmicas obtidas de ensaios estruturais são, de uma maneira geral, tomadas em função do tempo: acelerações, deslocamentos, deformações, etc. Este fato motiva o desenvolvimento de técnicas de identificação modal que trabalham diretamente com estas medidas, eliminando assim erros numéricos que possam ser introduzidos no problema quando se passa do domínio do tempo para outros domínios de análise.

Muitos destes algoritmos de identificação no domínio do tempo têm como dificuldade a necessidade de uma resposta em vibrações livres da estrutura, como é o caso do método de Ibrahim. Na prática esta necessidade inviabilizaria análises envolvendo estruturas nas quais, por um motivo qualquer, estas respostas não podem ser diretamente medidas. Mas, com o surgimento de técnicas que, partindo da resposta da estrutura excitada aleatoriamente, conseguem aproximar a resposta em vibrações livres de uma forma computacionalmente eficiente e com uma boa precisão, os métodos temporais ganham uma maior potencialidade. Dentre estas técnicas podemos destacar o Decremento Aleatório.

A técnica do Decremento Aleatório foi desenvolvida por Cole nos anos 60 como uma alternativa ao algoritmo da FFT na análise de respostas dinâmicas. Esta técnica é bastante atrativa pois a sua implementação computacional é simples e seu tempo de processamento é relativamente baixo. O princípio da técnica é estimar as chamadas funções de decremento aleatório tomando-se uma média de segmentos das medidas dinâmicas segundo certos critérios. Partindo-se das funções de decremento aleatório é possível extrair os parâmetros modais utilizando-se métodos desenvolvidos para determinação destes parâmetros partindo-se de uma resposta em vibrações livres.

### 7.1 A Técnica do Decremento Aleatório

Partindo-se de dois processos (medições dinâmicas) estocásticos, estacionários e de média zero  $X(t)$  e  $Y(t)$ , as funções de decremento aleatório  $D_{XX}$ ,  $D_{YX}$ ,  $D_{YY}$  e  $D_{XY}$  são definidas como:

$$D_{XX}(\tau) = E[X(t + \tau)|T_{X(t)}] \quad (7.1)$$

$$D_{YX}(\tau) = E[Y(t + \tau)|T_{X(t)}] \quad (7.2)$$

$$D_{YY}(\tau) = E[Y(t + \tau)|T_{Y(t)}] \quad (7.3)$$



$$D_{XY}(\tau) = E[X(t + \tau)|T_{X(t)}] \quad (7.4)$$

O primeiro índice se refere ao processo onde a média é calculada e o segundo ao processo onde a condição é satisfeita. As condições  $T_{X(t)}$  e  $T_{Y(t)}$  são denominadas condições de desencadeamento (“triggering conditions”) e os tempos  $t$  onde as condições de desencadeamento são satisfeitas são denominados pontos de desencadeamento. Para o caso apresentado, onde são disponíveis duas medições, pode-se definir dois conjuntos de funções de decremento aleatório na forma:

$$\left[ \left( \begin{array}{c} \text{Conjunto 1} \\ D_{XX}(\tau) \\ D_{YX}(\tau) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{Conjunto 2} \\ D_{XY}(\tau) \\ D_{YY}(\tau) \end{array} \right) \right] \quad (7.5)$$

Caso houvesse  $n$  medições, seria possível determinar  $n$  diferentes conjuntos de  $n$  funções de decremento aleatório.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assumindo-se os processos como ergódicos as funções de decremento aleatório podem ser estimadas como: (**Processo Ergódico**: Muitos processos apresentam a propriedade de que o histórico do processo independe das condições iniciais. Tal propriedade determina que o processo é ergódico.)

$$D_{XX}(\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(t_i + \tau)|T_{X(t_i)} \quad (7.6)$$

$$D_{YX}(\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(t_i + \tau)|T_{X(t_i)} \quad (7.7)$$

$$D_{XY}(\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(t_i + \tau)|T_{Y(t_i)} \quad (7.8)$$

$$D_{YY}(\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y(t_i + \tau)|T_{Y(t_i)} \quad (7.9)$$

onde  $N$  é o número de pontos de desencadeamento.

A estimativa das funções de decremento aleatório é bastante simples. Ela envolve a detecção de pontos de desencadeamento e o cálculo da média de segmentos das medidas. Um critério para determinação dos pontos de desencadeamento é:

$$T_{X(t)} = X(t) = \bar{x} \quad (7.10)$$

e

$$T_{Y(t)} = Y(t) = \bar{y} \quad (7.11)$$

sendo  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  números reais positivos. Asmussen propõe outros critérios para determinação dos pontos de desencadeamento além do acima citado. O número total de pontos de desencadeamento controla a precisão das estimativas das funções de decremento aleatório.

Tradicionalmente as funções de decremento aleatório de um conjunto de respostas dinâmicas de uma estrutura são interpretadas como sua resposta em vibrações livres.

A resposta dinâmica do tempo  $t_0$  ao tempo  $t_0 + t$  de uma estrutura sujeita a um carregamento estocástico, estacionário e de média zero consiste em três partes: 1) A parcela da resposta devida ao deslocamento inicial no tempo  $t_0$ ; 2) A parcela da resposta devida à velocidade inicial no tempo  $t_0$ ; 3) A resposta devida à excitação durante o intervalo entre  $t_0$  e  $t_0 + t$ .

A parcela da resposta devido ao carregamento é também estacionária e de média zero, fazendo com que a mesma se anule à medida que se aumenta o número de pontos de desencadeamento.

A curva que descreve a resposta dinâmica estrutural alterna ascendentes (velocidades positivas) e descentes (velocidades negativas) nos pontos  $X(t) = \bar{x}$  e  $Y(t) = \bar{y}$  fazendo com que a parcela da resposta devido à velocidade inicial no tempo  $t_0$  também se anule com o aumento do número de pontos de desencadeamento.

Finalmente, pode-se dizer então que as funções de decremento aleatório, com o aumento do número de pontos de desencadeamento, tendem a se aproximar das respostas em vibrações livres de uma estrutura para um deslocamento inicial  $X(t_0) = \bar{x}$  (Conjunto 1 - ver equações 7.5) e  $Y(t_0) = \bar{y}$  (Conjunto 2 - ver equações 7.5).

Uma vez obtido um conjunto de  $n$  respostas dentre as  $n^2$  funções  $D_{ij}$  ( $i=1..$  número de sinais analisados -  $n$  e  $j=1..$  número de sinais analisados -  $n$ ) é possível a aplicação do método de Ibrahim para determinação das freqüências, modos e amortecimentos próprios da estrutura analisada.

## 7.2 O Método de Ibrahim

A resposta em vibrações livres  $x$  de uma estrutura medida na posição  $i$  e no tempo  $t_j$  pode ser escrita como o somatório de  $m$  modos de vibração:

$$D_{ic}[t(j)] \approx x_i[t(j)] = x_{ij} = \sum_{k=1}^{2m} \varphi_{ik} e^{\lambda_k t_j} \quad (7.12)$$

onde o índice  $c$  indica o conjunto de funções de decremento aleatório escolhido,  $\lambda_k$  representa a  $k$ -ésima freqüência natural complexa de vibração e  $\varphi_{ik}$  a amplitude do  $k$ -ésimo modo de vibração complexo na posição  $i$ . Substituindo a equação 7.12 e suas derivadas na equação diferencial de equilíbrio dinâmico para um sistema em vibrações livres com um grau de liberdade resulta:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (7.13)$$

onde  $m$ ,  $c$  e  $k$  são, respectivamente, a massa, amortecimento e rigidez do sistema. Dividindo a equação 7.13 por  $m$ , tem-se:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = \lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0 \quad (7.14)$$

sendo  $c = 2\xi\omega m$  e  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ . Os valores de  $\lambda$  que satisfazem a equação 7.14 são:

$$\lambda = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\xi\omega \pm I\omega\sqrt{1 - \xi^2}, (I = \sqrt{-1}) \quad (7.15)$$

Num problema com vários graus de liberdade e com  $m$  modos de vibração, a equação 7.15 fica:

$$\lambda_k = -\xi_k\omega_k \pm I\omega_k\sqrt{1 - \xi_k^2}, k = 1..2m \quad (7.16)$$

A frequência circular natural de vibração  $\omega_k$  e o amortecimento modal  $\xi_k$  do  $k$ -ésimo modo podem ser calculados então usando:

$$(7.17)$$

e

$$\xi_k = -\frac{Re(\lambda_k)}{\omega_k} \quad (7.18)$$

onde  $Re(\lambda_k)$  denota a parte real de  $\lambda_k$  e  $Im(\lambda_k)$  denota a parte imaginária de  $\lambda_k$ .

Supondo que se deseja calcular  $m$  características modais e se disponha de  $n$  pontos de medições em  $s$  intervalos de tempo. Sendo  $n = 2m$  e partindo-se da equação 7.12, pode-se escrever uma matriz de respostas  $X$  na forma:

$$X = \Psi \Lambda \quad (7.19)$$

ou

$$\Psi^{-1} X = \Lambda \quad (7.20)$$

sendo:

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,s} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{2m,1} & x_{2m,2} & \cdot & x_{2m,s} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,2m} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{2,2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{2m,1} & \phi_{2m,2} & \cdot & \phi_{2m,2m} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & e^{\lambda_1 t_2} & \dots & e^{\lambda_1 t_s} \\ e^{\lambda_2 t_1} & e^{\lambda_2 t_2} & \dots & e^{\lambda_2 t_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{\lambda_{2m} t_1} & e^{\lambda_{2m} t_2} & \cdot & e^{\lambda_{2m} t_s} \end{bmatrix}$$

De maneira similar, pode-se escrever a matriz  $\hat{X}$  correspondente ao mesmo conjunto de medidas defasados de  $\Delta t$  com relação àquelas da equação 7.20 como:

$$\hat{X} = \hat{\Psi} \Lambda \quad (7.21)$$

ou

$$\hat{\Psi}^{-1} \hat{X} = \Lambda \quad (7.22)$$

sendo:

$$\hat{x}_{ij} = \sum_{k=1}^{2m} \hat{\varphi}_{ik} e^{\lambda_k t_j} \quad (7.23)$$

$$\hat{\varphi}_{ik} = \varphi_{ik} e^{\lambda_k t_j} \quad (7.24)$$

A substituição da matriz  $\Lambda$  da equação 7.22 na equação 7.20 produz:

$$\hat{\Psi}^{-1} \hat{X} = \Psi^{-1} X \Rightarrow \hat{X} = AX \quad (7.25)$$

sendo:

$$A = \hat{\Psi} \Psi^{-1} \quad (7.26)$$

A matriz  $A$  é denominada matriz de estado do sistema pois quando a operamos sobre o vetor  $X$  no instante  $t$ , o sistema é levado ao estado  $t + \Delta t$ .

Se substituirmos os valores dos vetores  $X$  e  $\hat{X}$  das equações 7.20 e 7.22 na equação 7.25 tem-se:

$$A(\Psi\Lambda) = (\hat{\Psi}\Lambda) \quad (7.27)$$

e considerando as equação 7.23 e 7.24 chega-se a:

$$A(\Psi\Lambda) = (\Psi e^{\lambda_k \Delta t} \Lambda) \Rightarrow A\Psi = \Psi e^{\lambda_k \Delta t} \Rightarrow (A - \alpha_k I)\Psi = 0 \quad (7.28)$$

sendo  $\alpha_k = e^{\lambda_k \Delta t}$  e  $I$  a matriz identidade. A equação 7.28 é um problema clássico de auto-valor. Uma vez determinado os autovalores e auto-vetores da matriz  $A$ , é possível se determinar as freqüências e amortecimentos modais. Para  $\alpha_k = e^{\lambda_k \Delta t} = \beta_k + I\gamma_k$  ( $I$  é a unidade imaginária) e  $\lambda_k = a_k + Ib_k$ , pode-se chegar as relações entre os coeficientes  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $\beta_k$  e  $\gamma_k$  da forma:

Tem-se que:

$$e^{(a_k + ib_k)\Delta t} = \beta_k + i\gamma_k$$

sabe-se que:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

ou,

$$e^{i\omega t} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

onde,  $\alpha = \omega t$ . Da trigonometria figura 7.1:

$$\beta_k + i\gamma_k = |\beta_k^2 + \gamma_k^2| \cos\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right) + i \sin\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)$$

ou,

$$\beta_k + i\gamma_k = |\beta_k^2 + \gamma_k^2| e^{i\theta}$$

onde,  $\theta = \arctan\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)$

Logo,

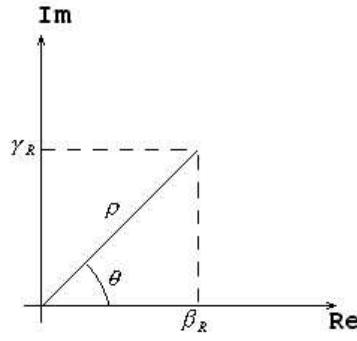


Figura 7.1:

$$e^{(a_k + ib_k)\Delta t} = \sqrt{\beta_k^2 + \gamma_k^2} \cdot e^{i \arctan\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)}$$

Aplicando ln em ambos os membros da equação acima, tem-se:

$$(a_k + ib_k)\Delta t = \ln(\beta_k^2 + \gamma_k^2)^{\frac{1}{2}} + i \arctan\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)$$

Então:

$$a_k \Delta t = \ln(\beta_k^2 + \gamma_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

e,

$$b_k \Delta t = \arctan\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right)$$

Resultando em:

$$a_k = \frac{1}{2\Delta t} \ln(\beta_k^2 + \gamma_k^2) \quad (7.29)$$

e,

$$b_k = \frac{1}{\Delta t} \arctan\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\right) \quad (7.30)$$

Uma vez determinados os valores de  $\lambda_k = a_k + b_k$ , através das equações 7.17 e 7.18, pode-se chegar às freqüências naturais e amortecimentos modais da estrutura. Conclui-se também que os auto-vetores  $\Psi$  são os modos complexos de vibração da estrutura.

Várias aproximações usando método dos mínimos quadrados e decomposições em valores singulares podem ser usadas na determinação da matriz  $A$ . Utilizando uma solução por mínimos quadrados, Ibrahim determina a matriz  $A$  como sendo:

$$A = (\hat{X}X^T)(XX^T)^{-1} \quad (7.31)$$

# Capítulo 8

## Anexo

### 8.1 Capítulo 2 - Conceitos de números complexos

$$x(t) = Ge^{st} \quad (8.1)$$

Onde  $G$  é uma constante complexa arbitrária denotada pela função exponencial.

Considerando que  $G$  pode ser representado graficamente por um vetor em um plano complexo como mostrado na figura 8.1, notamos que o vetor pode se expresso em componentes cartesianas real e imaginária.

$$G = G_R + iG_i \quad (8.2)$$

Outra alternativa é que pode ser expresso em coordenadas polares usando o valor absoluto de  $\overline{G}$  (comprimento do vetor) e o ângulo  $\theta$ , no sentido anti-horário a partir do eixo real:

$$x(t) = \overline{G}e^{i\theta} \quad (8.3)$$

Ainda podemos usar as relações trigonométricas para mostrar o esboço, e fica claro que a Eq.8.2 pode ser escrita como:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (8.4)$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (8.5)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}[e^{i\theta} + e^{-i\theta}] \quad (8.6)$$

$$\sin \theta = \frac{-i}{2}[e^{i\theta} - e^{-i\theta}] \quad (8.7)$$

$$G = G_R + iG_I$$

ou

$$G = \overline{G}e^{i\theta}$$

Alunos:

Nestor Oscar Guevara Junior

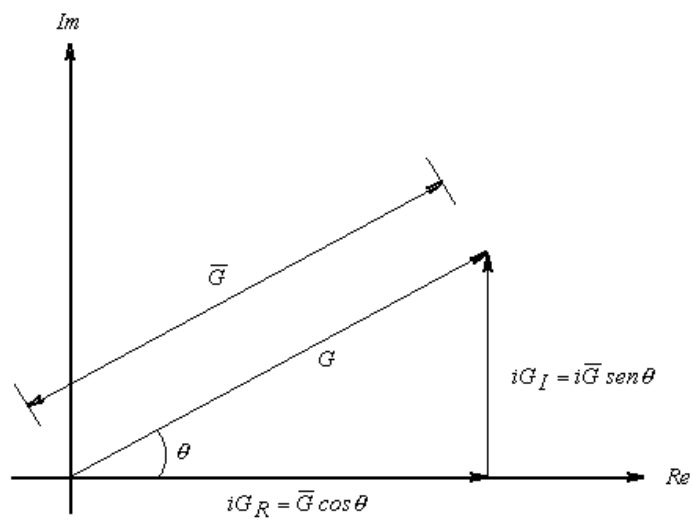


Figura 8.1: Constante complexa representada num plano complexo

Janaína Villela  
Neydson  
Carlos  
Helena Costa Ribeiro