

MECÂNICA - MAC010

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional

2 de dezembro de 2009

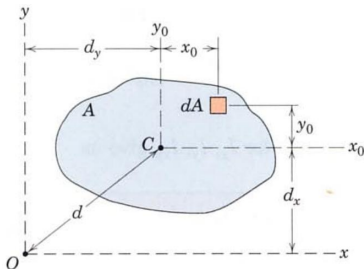
Produto de inércia de áreas

O momento de inércia de uma área é diferente para cada eixo em relação ao qual ele é calculado.

Em algumas aplicações estruturais ou mecânicas é preciso conhecer a **orientação dos eixos em relação aos quais se tem, respectivamente, o máximo e o mínimo momentos de inércia.**

Para este fim, é necessário calcular o **produto de inércia** e os **momentos de inércia** da área em relação a um par de eixos x,y .

Definição



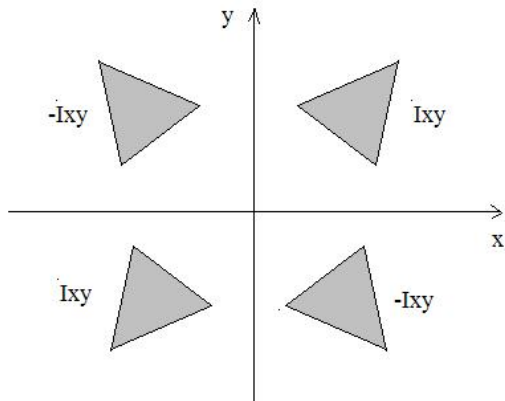
O **Produto de inércia** de um elemento de área dA localizado no ponto de coordenadas x, y é: $dI_{xy} = xydA$
Então, para a área A , o **produto de inércia** é:

$$I_{xy} = \int_A xydA$$

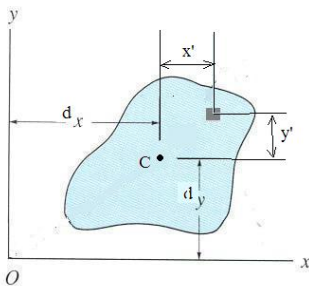
Características

O produto de inércia tem unidade de comprimento elevado à quarta potência.

Pode ser: positivo, negativo ou nulo (quando x ou y é um eixo de simetria).

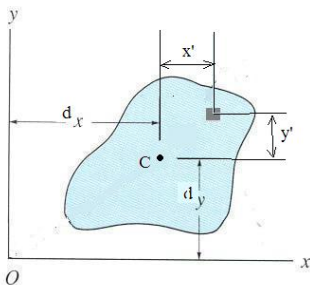


Teorema dos eixos paralelos



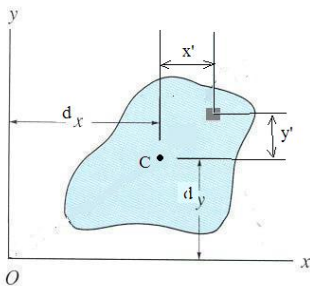
$$I_{xy} = \int_A xy dA =$$

Teorema dos eixos paralelos



$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (x' + \Delta_x)(y' + \Delta_y) dA$$

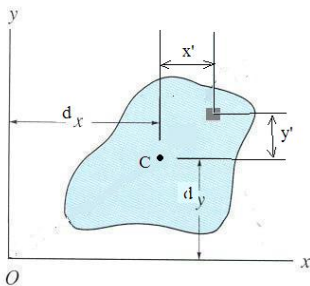
Teorema dos eixos paralelos



$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (x' + \Delta_x)(y' + \Delta_y) dA$$

$$I_{xy} = \int_A x'y' dA + \Delta_x \int_A y' dA + \Delta_y \int_A x' dA + \Delta_x \Delta_y \int_A dA$$

Teorema dos eixos paralelos



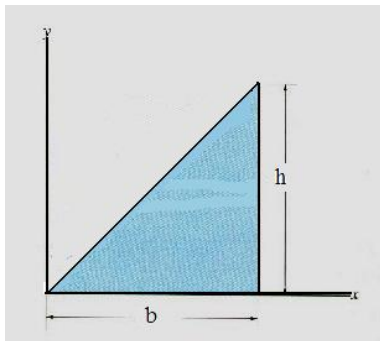
$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (x' + \Delta_x)(y' + \Delta_y) dA$$

$$I_{xy} = \int_A x'y' dA + \Delta_x \int_A y' dA + \Delta_y \int_A x' dA + \Delta_x \Delta_y \int_A dA$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A\Delta_x\Delta_y$$

Exemplo

Determinar I_{xy} empregando o teorema dos eixos paralelos.



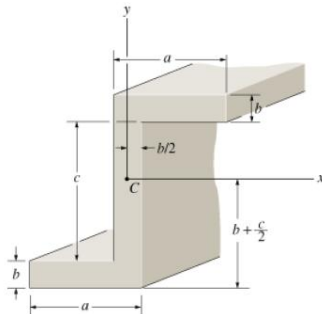
Exercício proposto

Determinar o produto de inércia da área da seção transversal da viga mostrada abaixo em relação aos eixos que passam pelo centróide C .

$$a := 4\text{in}$$

$$b := 1\text{in}$$

$$c := 5\text{in}$$

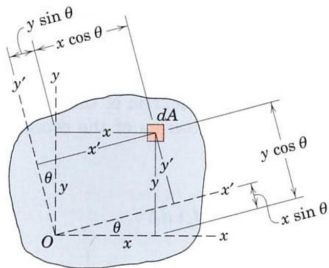


Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

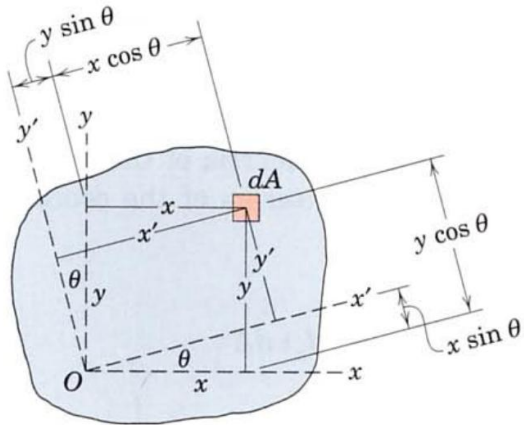
São empregadas **leis de transformação** que relacionam os momentos e o produto de inércia de uma área em relação a um par de eixos inclinados x' e y' com os relativos a um sistema x,y .

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

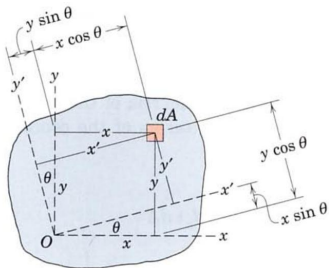
São empregadas **leis de transformação** que relacionam os momentos e o produto de inércia de uma área em relação a um par de eixos inclinados x' e y' com os relativos a um sistema x, y .



Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados



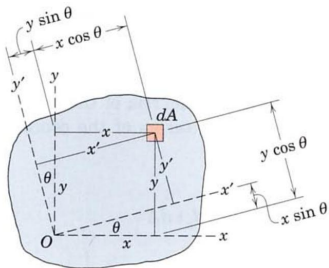
Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados



Leis de transformação:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados



Leis de transformação:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y' dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y' dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y' dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

Expandindo e integrando:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y' dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

Expandindo e integrando:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momentos e produto de inércia de dA em relação a x' e y' :

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y' dA = (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) dA$$

Expandindo e integrando:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{x'y'} = I_x \sin \theta \cos \theta - I_y \sin \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ e } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ e } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ e } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ e } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

$$J_O = I_{x'} + I_{y'} =$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ e } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

$$J_O = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

Produto de inércia de uma área em relação a eixos inclinados

Identidades trigonométricas:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ e } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Momento polar de inércia em relação ao eixo z que passa pela origem O:

$$J_O = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

J_O independe da orientação dos eixos x' e y' .

Momentos principais de inércia de uma área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

Momentos principais de inércia de uma
área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Momentos principais de inércia de uma
área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta = -2I_{xy} \cos 2\theta$$

Momentos principais de inércia de uma
área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta = -2I_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

Momentos principais de inércia de uma
área

São os valores máximos e mínimos dos momentos de inércia da área em relação a eixos com origem em um determinado ponto O - eixos principais de inércia.

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta = -2I_{xy} \cos 2\theta$$

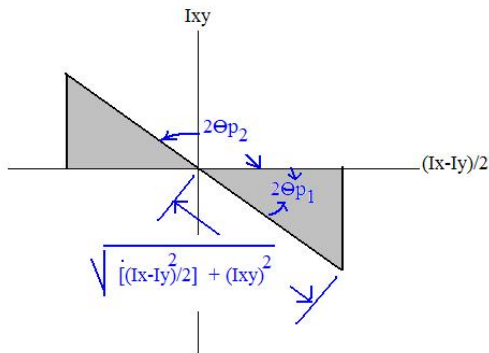
$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$

Momentos principais de inércia de uma
área

Dada a origem O , os eixos principais de inércia têm orientação definida pelo ângulo θ_p .

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}$$



Momentos principais de inércia de uma

área

Para θ_{p_1} :

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$
$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1} :

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2} :

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1} :

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2} :

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1} :

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2} :

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$I_{x'y'} = 0 \rightarrow$

Momentos principais de inércia de uma área

Para θ_{p_1} :

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{-I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Para θ_{p_2} :

$$\sin 2\theta_{p_2} = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

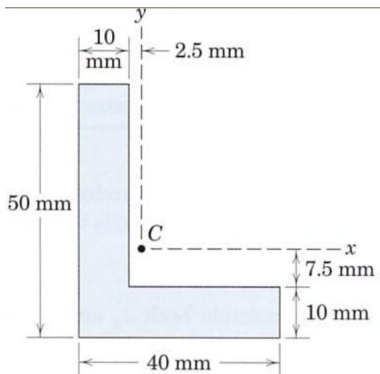
$$\cos 2\theta_{p_2} = -\frac{I_x - I_y}{2\sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$I_{x'y'} = 0 \rightarrow$ todo eixo de simetria é eixo principal de inércia.

Exemplo

Determinar as orientações dos eixos principais de inércia passando pelo centróide da seção L e determine os momentos de inércia máximo e mínimo correspondentes.



Raio de giração

Raio de giração de uma área plana é uma grandeza usada em projetos de colunas (pilares). A definição é dada por:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

O raio de giração é usado para calcular o índice de esbeltez de barras, que define o comportamento do elemento estrutural em problemas relacionados à estabilidade (flambagem).