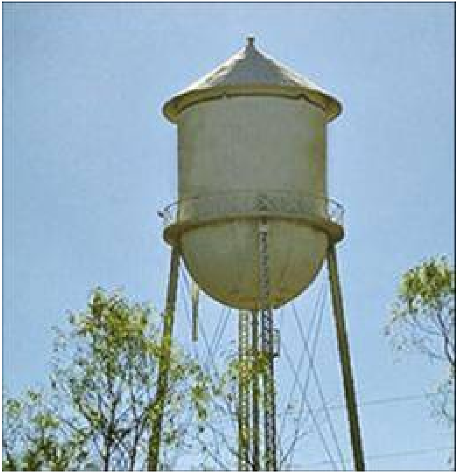
MECÂNICA - MAC010

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional

25 de novembro de 2009

Superfícies e volumes de revolução



Teoremas de Pappus-Guldinus

No século IV d.C., Pappus, um matemático grego de Alexandria, desenvolveu duas fórmulas que fornecem meios relativamente simples de calcular áreas e volumes, respectivamente, de superfícies e volumes de revolução. Estas fórmulas são atalhos para cálculos que, de outra forma, seriam extensos.

Teoremas de Pappus-Guldinus para áreas

Se um arco C de uma curva suave localizada em um plano for girado em um ângulo θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta o arco C, a área de superfície gerada pelo arco C à medida que ele gira o ângulo θ é igual ao comprimento de C vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de C durante a rotação θ.

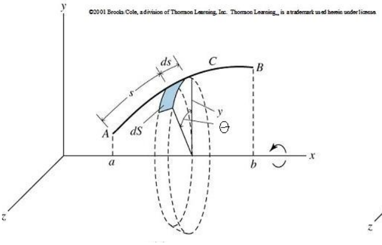
Teoremas de Pappus-Guldinus para áreas

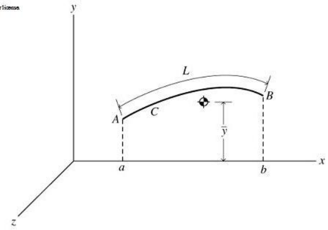
Se um arco C de uma curva suave localizada em um plano for girado em um ângulo θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta o arco C, a área de superfície gerada pelo arco C à medida que ele gira o ângulo θ é igual ao comprimento de C vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de C durante a rotação θ.

Se o comprimento do arco é L e ρ é a distância do eixo de rotação ao centróide do arco, a área da superfície S gerada pelo arco à medida que ele gira de um ângulo θ é:

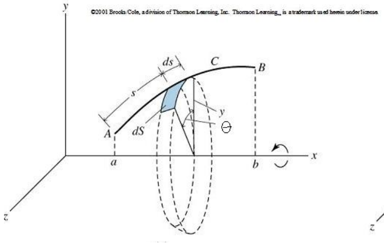
$$S = L\rho\theta$$

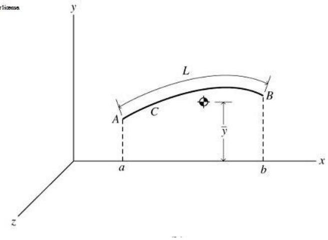
Demonstração





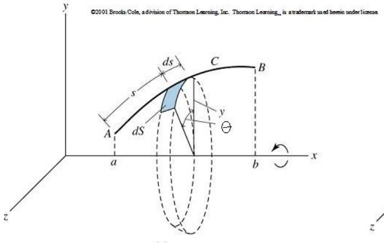
Demonstração

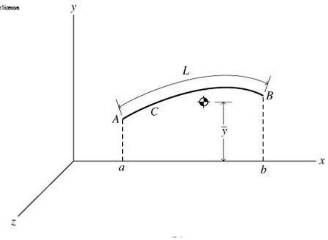




$$dS = \theta y ds$$

Demonstração





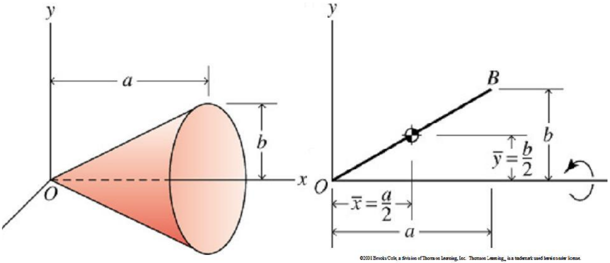
$$dS = \theta y ds \rightsquigarrow S = \int_a^b dS = \theta \int_a^b y ds$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \tilde{y} ds}{L} \rightarrow \bar{y} L = \int_a^b \tilde{y} ds = \int_a^b y ds$$

$$S = L\bar{y}\theta \ \ para \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \ \text{c.q.d.}$$

Exemplo

Deduzir a fórmula para a área S da superfície externa do cone reto circular sólido.



Teoremas de Pappus-Guldinus para volumes

Se uma área A localizada em um plano for girada em um ângulo θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta a área A, o volume gerado pela área A à medida que ela gira o ângulo θ é igual à área A vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de A durante a rotação θ.

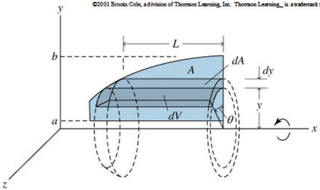
Teoremas de Pappus-Guldinus para volumes

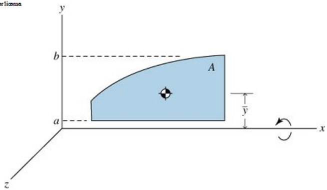
Se uma área A localizada em um plano for girada em um ângulo θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta a área A, o volume gerado pela área A à medida que ela gira o ângulo θ é igual à área A vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de A durante a rotação θ.

Se ρ é a distância do eixo de rotação ao centróide da área plana, o volume V gerado pela área à medida que ela gira de um ângulo θ é:

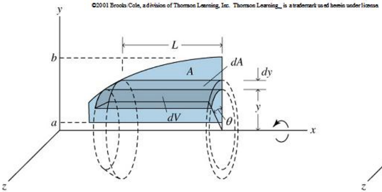
$$V = A\rho\theta$$

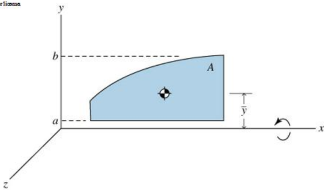
Demonstração





Demonstração





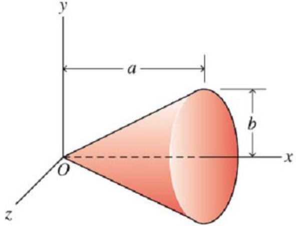
$$dV = dAdy = (Ldy)\theta y \rightsquigarrow V = \int_a^b \theta yLdy = \theta \int_a^b yLdy$$

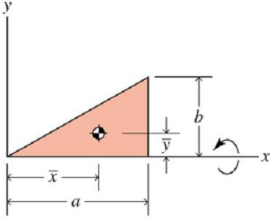
$$\overline{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\,dA}{A} \rightarrow \overline{y}L = \int_a^b yLdy$$

$$V = A\overline{y}\theta \;\; para \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi, \;\; \text{c.q.d.}$$

Exemplo

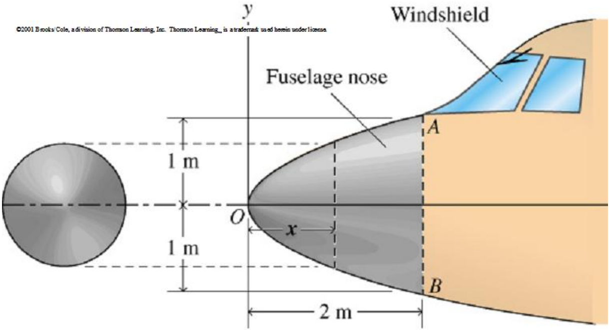
Deduzir a fórmula para o volume V do cone reto circular sólido.





Exercício proposto

Um fabricante de aviões tem um pedido de 100 pequenos aviões para uma linha aérea. Ao projetar o avião, o engenheiro projetista deve estimar a quantidade necessária de lâmina de alumínio para cobrir o nariz da fuzelagem do avião. O nariz tem comprimento de 2m horizontalmente do pára-brisa até a ponta O. A profundidade do nariz também é de 2m e a seção transversal, em qualquer distância x da ponta, é aproximadamente circular. Como o engenheiro pode estimar a quantidade necessária de lâmina de alumínio através do teorema de Pappus-Guldinus?

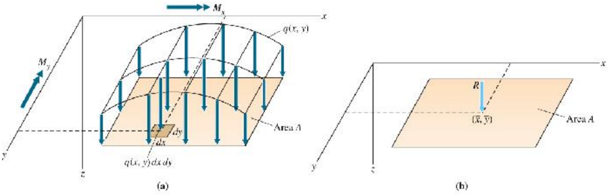


Resultante de um carregamento distribuído geral

A resultante e a linha de ação de uma carga distribuída sobre um plano podem ser encontradas por analogia à localização do centróide de um volume.

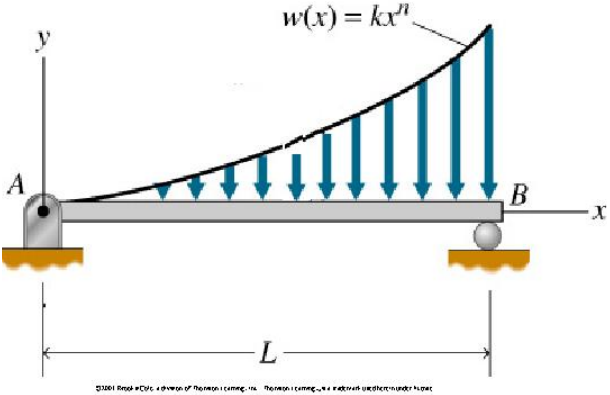
Resultante de um carregamento distribuído geral

A resultante e a linha de ação de uma carga distribuída sobre um plano podem ser encontradas por analogia à localização do centróide de um volume.



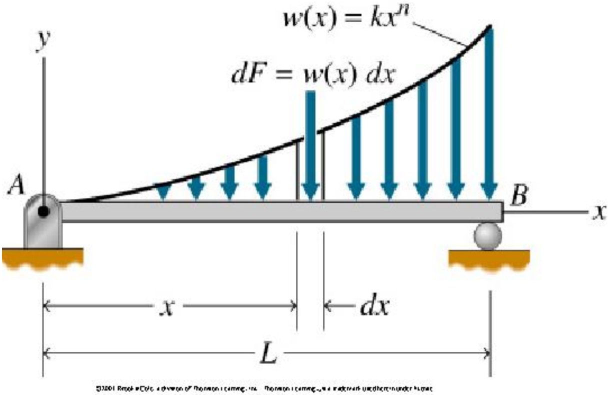
Exemplo

Determinar a intensidade e a localização da resultante do carregamento distribuído abaixo.



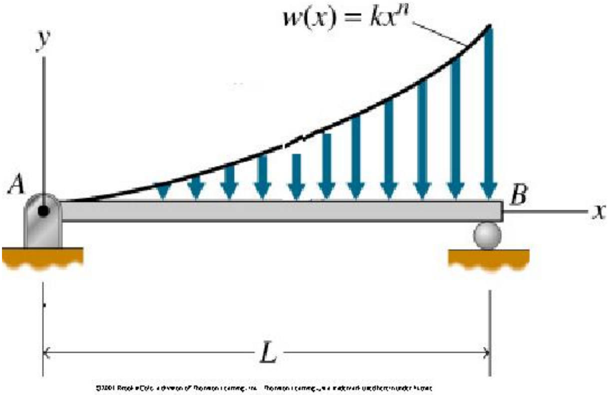
Exemplo

Determinar a intensidade e a localização da resultante do carregamento distribuído abaixo.



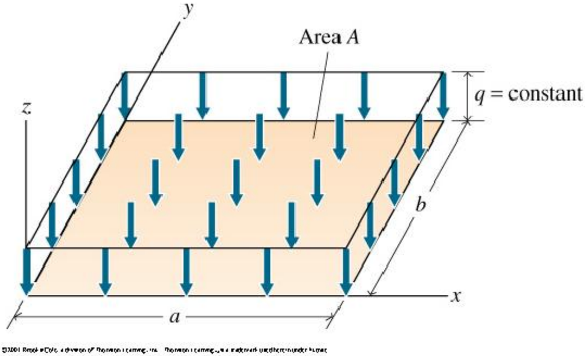
Exercício proposto 1

Determinar as reações de apoio.

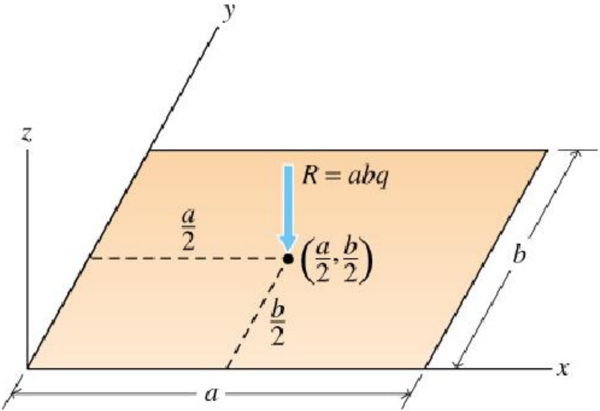


Exemplo 2

Determinar a intensidade e a localização da resultante do carregamento distribuído abaixo.



Exemplo 2 - resolução

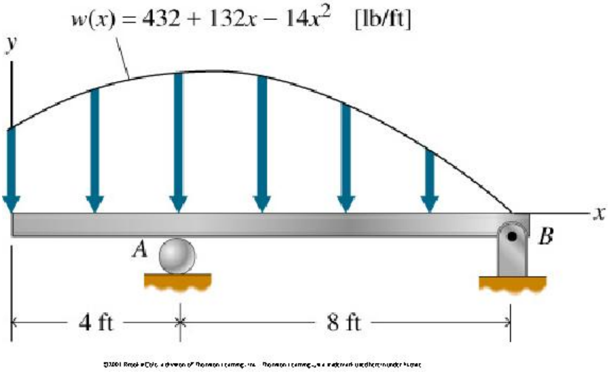


MECÂNICA - MAC010

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional

Exemplo 3

Calcular as reações de apoio.



Exercício proposto

Enquanto projeta a viga do exemplo anterior, você, como engenheiro(a) do projeto, decide examinar a localização do suporte em A, que pode variar no intervalo $0 \leq x \leq 6$ pés.

- Trace as reações de apoio em A e B como funções de x;
- Dê a sua recomendação ao supervisor, baseado nos resultados do item anterior, quanto à melhor localização do apoio A para que este tenha a menor reação possível.