

# MECÂNICA - MAC010

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional

25 de novembro de 2009

# Superfícies e volumes de revolução



# Teoremas de Pappus-Guldinus

No século IV d.C., Pappus, um matemático grego de Alexandria, desenvolveu duas fórmulas que fornecem meios relativamente simples de calcular áreas e volumes, respectivamente, de superfícies e volumes de revolução. Estas fórmulas são atalhos para cálculos que, de outra forma, seriam extensos.

# Teoremas de Pappus-Guldinus para áreas

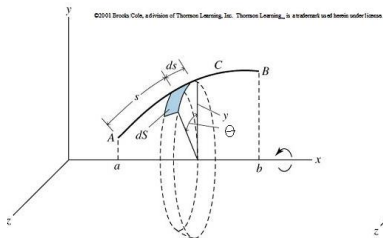
Se um arco  $C$  de uma curva suave localizada em um plano for girado em um ângulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta o arco  $C$ , a área de superfície gerada pelo arco  $C$  à medida que ele gira o ângulo  $\theta$  é igual ao comprimento de  $C$  vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de  $C$  durante a rotação  $\theta$ .

## Teoremas de Pappus-Guldinus para áreas

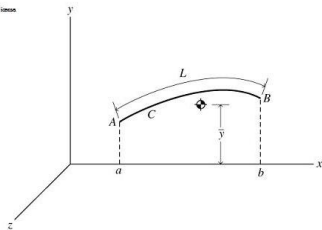
Se um arco  $C$  de uma curva suave localizada em um plano for girado em um ângulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta o arco  $C$ , a área de superfície gerada pelo arco  $C$  à medida que ele gira o ângulo  $\theta$  é igual ao comprimento de  $C$  vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de  $C$  durante a rotação  $\theta$ .

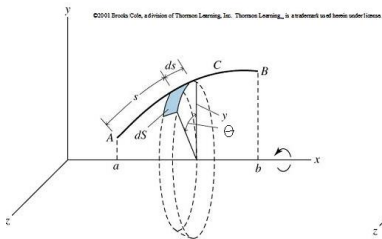
Se o comprimento do arco é  $L$  e  $\rho$  é a distância do eixo de rotação ao centróide do arco, a área da superfície  $S$  gerada pelo arco à medida que ele gira de um ângulo  $\theta$  é:

$$S = L\rho\theta$$

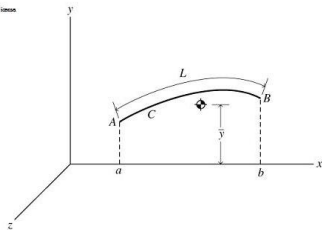


## Demonstração

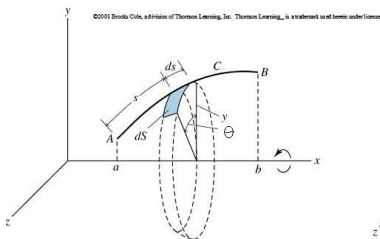




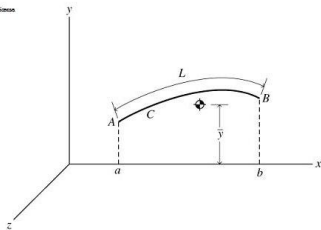
## Demonstração



$$dS = \theta y ds$$



## Demonstração



$$dS = \theta y ds \rightsquigarrow S = \int_a^b dS = \theta \int_a^b y ds$$

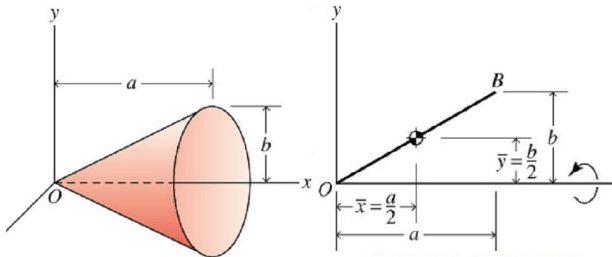
$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \tilde{y} ds}{L} \rightarrow \bar{y} L = \int_a^b \tilde{y} ds = \int_a^b y ds$$

$$S = L \bar{y} \theta \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ c.q.d.}$$



## Exemplo

Deduzir a fórmula para a área  $S$  da superfície externa do cone reto circular sólido.



# Teoremas de Pappus-Guldinus para volumes

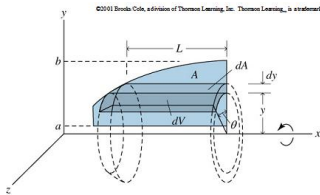
Se uma área  $A$  localizada em um plano for girada em um ângulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta a área  $A$ , o volume gerado pela área  $A$  à medida que ela gira o ângulo  $\theta$  é igual à área  $A$  vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de  $A$  durante a rotação  $\theta$ .

# Teoremas de Pappus-Guldinus para volumes

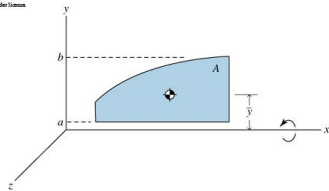
Se uma área  $A$  localizada em um plano for girada em um ângulo  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) em torno de um eixo localizado no plano e que não intercepta a área  $A$ , o volume gerado pela área  $A$  à medida que ela gira o ângulo  $\theta$  é igual à área  $A$  vezes o comprimento do caminho percorrido pelo centróide de  $A$  durante a rotação  $\theta$ .

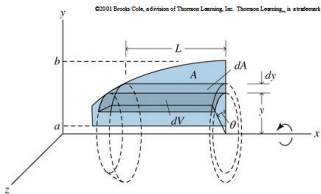
Se  $\rho$  é a distância do eixo de rotação ao centróide da área plana, o volume  $V$  gerado pela área à medida que ela gira de um ângulo  $\theta$  é:

$$V = A\rho\theta$$

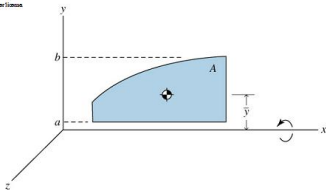


## Demonstração





## Demonstração



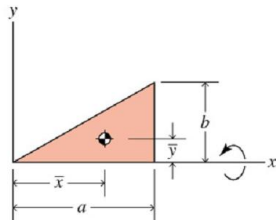
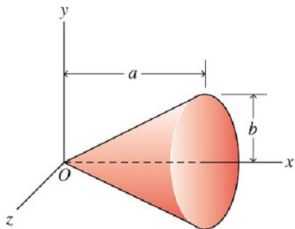
$$dV = dA dy = (L dy) \theta y \rightsquigarrow V = \int_a^b \theta y L dy = \theta \int_a^b y L dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{A} \rightarrow \bar{y} L = \int_a^b y L dy$$

$$V = A \bar{y} \theta \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ c.q.d.}$$

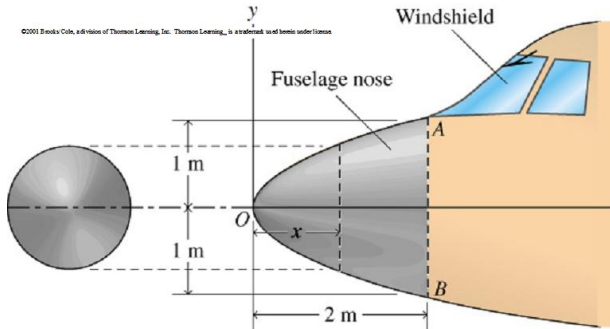
## Exemplo

Deduzir a fórmula para o volume  $V$  do cone reto circular sólido.



## Exercício proposto

Um fabricante de aviões tem um pedido de 100 pequenos aviões para uma linha aérea. Ao projetar o avião, o engenheiro projetista deve estimar a quantidade necessária de lâmina de alumínio para cobrir o nariz da fuselagem do avião. O nariz tem comprimento de 2m horizontalmente do pára-brisa até a ponta  $O$ . A profundidade do nariz também é de 2m e a seção transversal, em qualquer distância  $x$  da ponta, é aproximadamente circular. Como o engenheiro pode estimar a quantidade necessária de lâmina de alumínio através do teorema de Pappus-Guldinus?



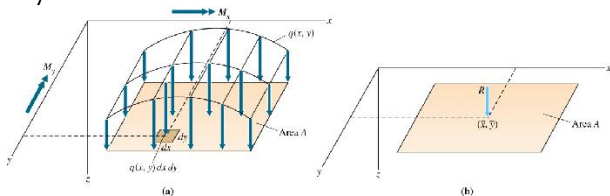
# Resultante de um carregamento distribuído geral

A **resultante** e a linha de ação de uma carga distribuída sobre um **plano** podem ser encontradas por analogia à localização do **centróide de um volume**.



# Resultante de um carregamento distribuído geral

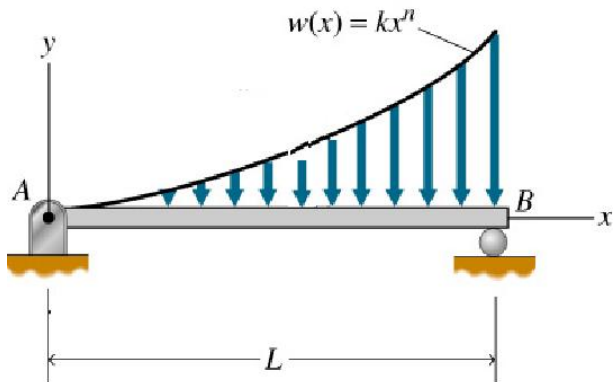
A **resultante** e a linha de ação de uma carga distribuída sobre um **plano** podem ser encontradas por analogia à localização do **centróide de um volume**.



©2009 Roger W. Oke, a division of Pearson Education, Inc. Pearson Education, Inc. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or by any information storage or retrieval system, without permission in writing from Pearson Education, Inc.

## Exemplo

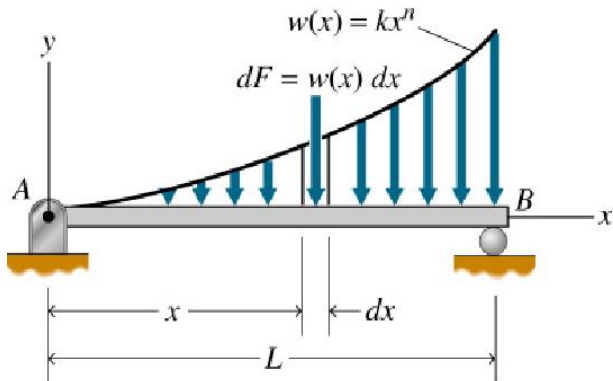
Determinar a intensidade e a localização da resultante do carregamento distribuído abaixo.



©2001 Royal Society of Civil Engineers. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced without the prior written permission of the Royal Society of Civil Engineers.

## Exemplo

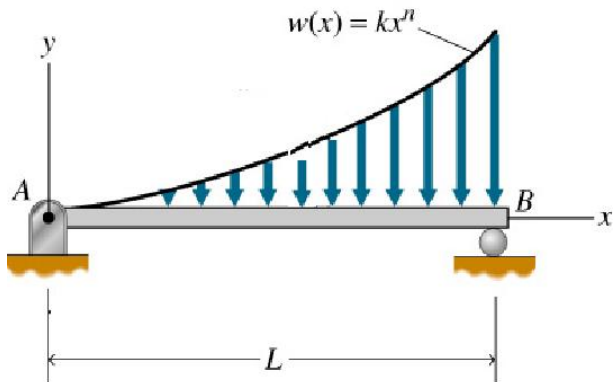
Determinar a intensidade e a localização da resultante do carregamento distribuído abaixo.



©2001 Royal & CVI, a division of Thomson Learning, Inc. Thomson Learning, Inc. e todos os direitos reservados.

# Exercício proposto 1

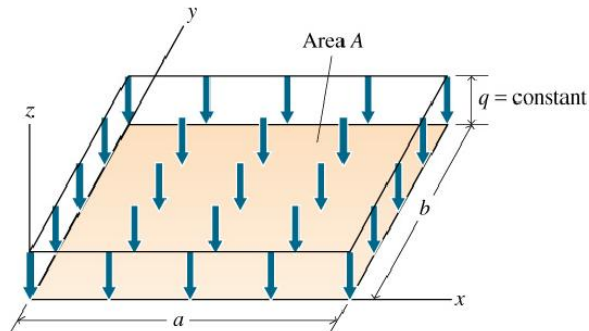
Determinar as reações de apoio.



©2001 Royal Society of Civil Engineers. All Rights Reserved. This document is the property of the Royal Society of Civil Engineers and is not to be reproduced without their permission.

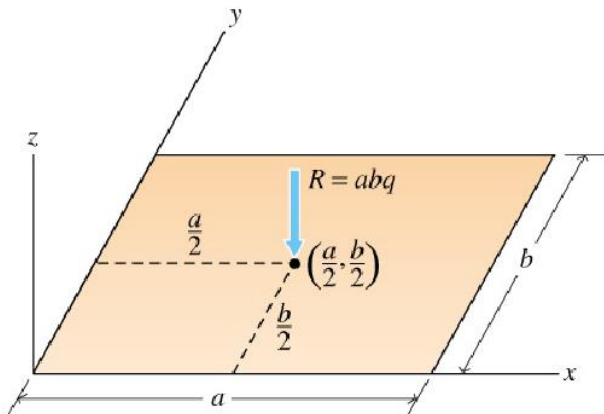
## Exemplo 2

Determinar a intensidade e a localização da resultante do carregamento distribuído abaixo.



©2001 Reed & Cole, a division of Pearson Learning, Inc. Pearson Learning, Inc. and its related products and/or services are trademarks of Pearson Education, Inc.

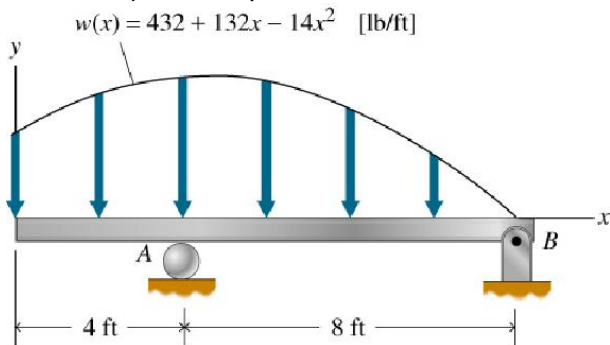
## Exemplo 2 - resolução



©2001 Intel® CD, a division of Intel Corporation. Intel, the Intel logo, Intel Inside, and Intel Inside logo are trademarks of Intel Corporation or its subsidiaries in the United States and other countries.

## Exemplo 3

Calcular as reações de apoio.



©2001 Reed & Colt, a division of Thomson Learning, Inc. Thomson Learning, Inc. All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from Thomson Learning, Inc.

## Exercício proposto

Enquanto projeta a viga do exemplo anterior, você, como engenheiro(a) do projeto, decide examinar a localização do suporte em A, que pode variar no intervalo  $0 \leq x \leq 6$  pés.

- Trace as reações de apoio em A e B como funções de  $x$ ;
- Dê a sua recomendação ao supervisor, baseado nos resultados do item anterior, quanto à melhor localização do apoio A para que este tenha a menor reação possível.