

MECÂNICA - MAC010

Dep. de Mecânica Aplicada e Computacional

2 de novembro de 2009

1
2
3
4
5

Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

1 1

2 2

3 3

4 4

5 5

6 Centro de gravidade, centróide, centro de massa de um corpo

1
2
3
4
5

Centro de gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

Centro de gravidade, Centro de massa e Centróide de um corpo

- Aplicações;
- Conceitos e definições;
- Determinação da localização.

1
2
3
4
5

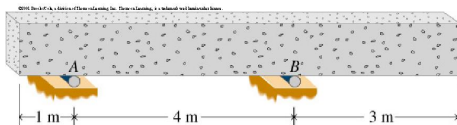
Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo



Para projetar a estrutura de apoio de um tanque de água, é necessário conhecer os pesos do tanque, da água e a localização das resultantes das cargas distribuídas.



Carros esportivos podem capotar ao fazer curvas muito fechadas. Um aspecto importante no projeto destes veículos é o centro de massa - determinante para a maior ou menor estabilidade do carro.



A linha de ação da resultante de carregamentos distribuídos se localiza no centróide da área do carregamento.

1

2

3

4

5

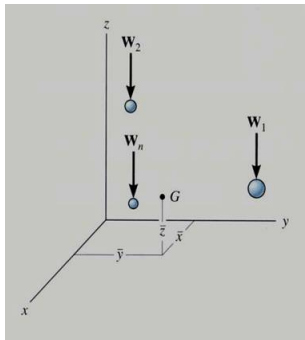
Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

Conceitos

Eixo de gravidade de um corpo é a linha de ação da resultante da força gravitacional que age sobre este.

Conceitos

Um corpo rígido pode ser visto como uma coleção de pontos.

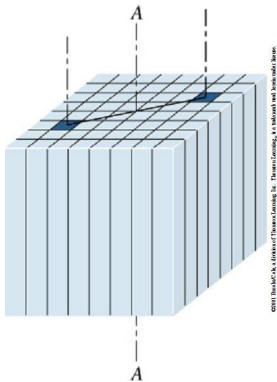


O peso de cada partícula é a força gravitacional da Terra -
pode-se considerar que os pesos das partículas que formam
um corpo é um sistema de **forças paralelas**.

O eixo de gravidade de um corpo é **vertical**.

Conceitos

Exemplo: em um bloco cúbico feito de material homogêneo, porções de mesmo volume têm o mesmo peso. O vetor peso resultante de dois prismas simetricamente localizados em relação ao eixo de simetria do cubo coincide com o eixo do prisma - conclui-se que o eixo de gravidade do cubo coincide com o eixo vertical central



Teoremas

Se um corpo homogêneo possui um plano vertical de simetria, o eixo de gravidade está localizado neste plano.

Exemplo: avião e navio, se o peso estiver distribuído simetricamente.

Teoremas

Se um corpo homogêneo possui um plano vertical de simetria, o eixo de gravidade está localizado neste plano.

Exemplo: avião e navio, se o peso estiver distribuído simetricamente.

Se um corpo homogêneo possui dois planos verticais de simetria, o eixo de gravidade está localizado na linha de intersecção destes planos.

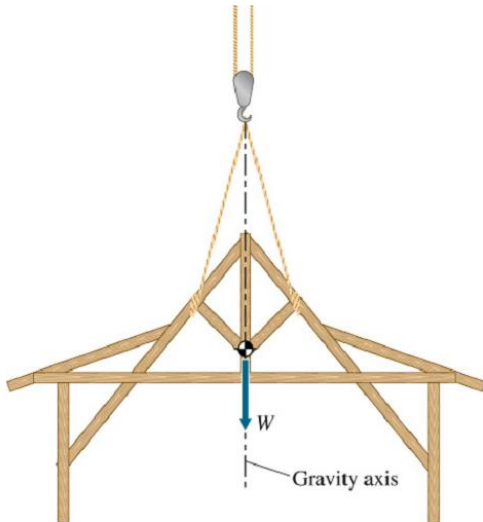
Exemplo: corpos esféricos e cúbicos feitos de material homogêneo.

Teoremas

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5

Centro de gravidade, centróide, centro de massa de um corpo

©2001 Thomson/Thomson Learning, Inc. Thomson Learning, é o líder mundial em materiais de ensino.

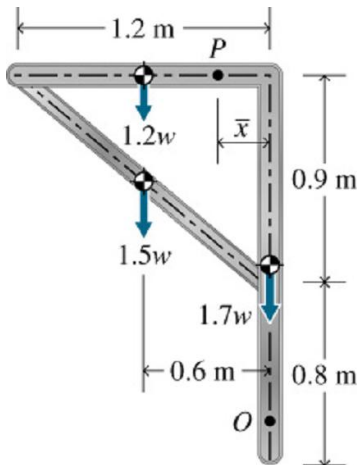


Conceitos

Se um sistema pode ser dividido em um número finito de partes cujos eixos de gravidade e pesos são conhecidos, é possível determinar o eixo de gravidade do corpo através da teoria das forças paralelas.

Exemplo 1

Determinar o eixo de gravidade da estrutura abaixo, composta por barras de um mesmo material homogêneo e mesma seção transversal.



©2010 Thomson Learning, a division of Thomson Learning, a Thomson and Herrincher Group.

1
2
3
4
5

Centro de gravidade, centróide, centro de massa de um corpo

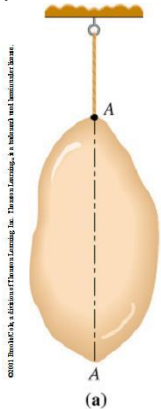
Exemplo 2

Uma chata que pesa 500kN carrega um transformador que pesa 150kN e está localizado de forma não-simétrica no convés, como mostrado na vista superior da chata. Os eixos de gravidade do transformador e da chata são perpendiculares ao plano xy ; as coordenadas do ponto onde o eixo de gravidade do transformador intercepta o plano xy são $(20, 8)$ pés e as coordenadas do ponto em que o eixo de gravidade da chata intercepta o plano xy são $(50, 12)$ pés. Localizar o eixo de gravidade do sistema.



CG em coordenadas cartesianas

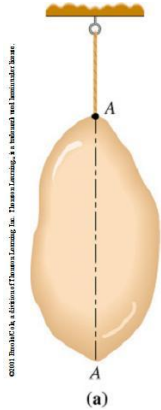
Suponha que um corpo é suspenso por uma corda em um ponto A:



- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
- Centro de gravidade, centróide, centro de massa de um corpo

CG em coordenadas cartesianas

Suponha que um corpo é suspenso por uma corda em um ponto A:



A linha vertical A-A é um eixo de gravidade.

CG em coordenadas cartesianas

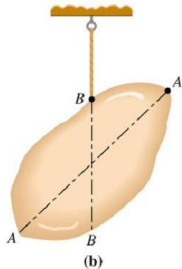
Em seguida, suspenda o corpo pela mesma corda, mas presa no ponto B:

1
2
3
4
5

Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

CG em coordenadas cartesianas

Em seguida, suspenso o corpo pela mesma corda, mas presa no ponto B:

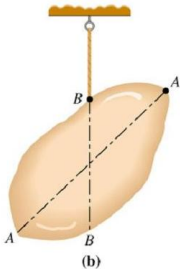


1
2
3
4
5

Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

CG em coordenadas cartesianas

Em seguida, suspenda o corpo pela mesma corda, mas presa no ponto B:



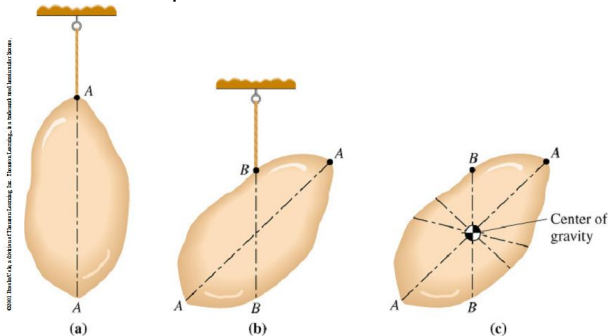
A linha vertical B-B é um eixo de gravidade.

1
2
3
4
5

Centro de gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

CG em coordenadas cartesianas

Repetindo este processo várias vezes, obtém-se vários eixos de gravidade do corpo.



O centro de gravidade de um corpo é o ponto de intersecção de todos os eixos de gravidade do corpo.

CG em coordenadas cartesianas

- Se um corpo for suspenso pelo centro de gravidade, ele estará em equilíbrio em qualquer orientação;

1
2
3
4
5

Centro de gravidade, centróide, centro de massa de um corpo

CG em coordenadas cartesianas

- Se um corpo for suspenso pelo centro de gravidade, ele estará em equilíbrio em qualquer orientação;
- Se qualquer eixo de gravidade de um corpo for determinado, o centro de gravidade está localizado nesse eixo;

1
2
3
4
5

Centro de gravidade, centróide, centro de massa de um corpo

CG em coordenadas cartesianas

- Se um corpo for suspenso pelo centro de gravidade, ele estará em equilíbrio em qualquer orientação;
- Se qualquer eixo de gravidade de um corpo for determinado, o centro de gravidade está localizado nesse eixo;
- Se determinarmos dois eixos de gravidade quaisquer, correspondentes a duas orientações distintas do corpo, o centro de gravidade é a intersecção destes eixos.

1
2
3
4
5

Centro de gravidade, centróide, centro de massa de um corpo

CG em coordenadas cartesianas

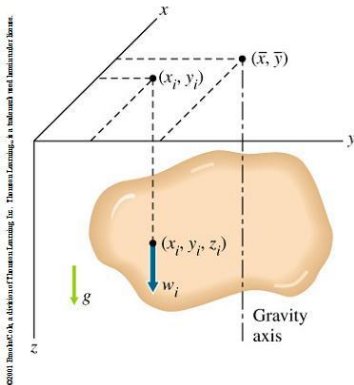
Método para determinação das coordenadas do CG: ao invés de considerar como o eixo de gravidade varia quando o corpo é girado, vamos imaginar o corpo fixo e a orientação da força da gravidade variando.

1
2
3
4
5

Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

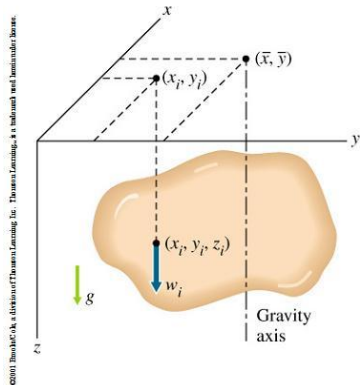
CG em coordenadas cartesianas

Método para determinação das coordenadas do CG: ao invés de considerar como o eixo de gravidade varia quando o corpo é girado, vamos imaginar o corpo fixo e a orientação da força da gravidade variando.



(a)

CG em coordenadas cartesianas

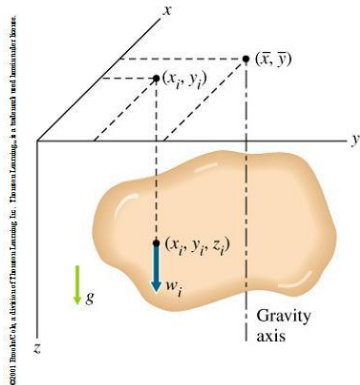


(a)

Para localizar o CG, o corpo é considerado como um agregado de partículas i com pesos w_1, w_2, w_3, \dots

Admite-se inicialmente a gravidade agindo na direção z positiva.

CG em coordenadas cartesianas



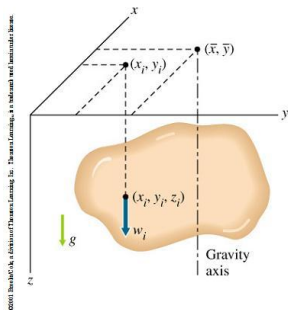
(a)

O momento provocado pelo peso w_i do i -ésimo elemento em relação aos eixos x e y são:

$$M_{xi} = w_i y_i$$

$$M_{yi} = -w_i x_i$$

CG em coordenadas cartesianas



(a)

Os momentos do peso de todo o corpo em relação aos eixos x e y são:

$$M_x = \sum w_i y_i \quad M_y = - \sum w_i x_i$$

CG em coordenadas cartesianas

O vetor resultante do peso (W) exerce o mesmo momento em relação aos eixos x e y e está aplicado no CG do corpo, de coordenadas \bar{x} e \bar{y} :

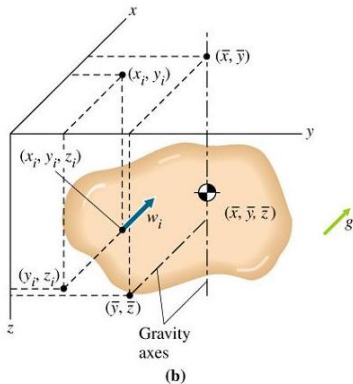
$$M_x = \sum w_i y_i = W\bar{y} \quad M_y = - \sum w_i x_i = -W\bar{x}$$

Daí:

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{W} \quad \bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{W}$$

CG em coordenadas cartesianas

Para determinar a terceira coordenada \bar{z} , supõe-se que a gravidade age na direção positiva de x .



$$M_y = \sum w_i z_i = W \bar{z} \quad \bar{z} = \frac{\sum w_i z_i}{W}$$

CG em coordenadas cartesianas

Coordenadas do CG:

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{W}$$

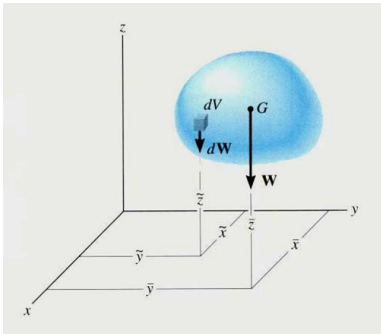
$$\bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{W}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum w_i z_i}{W}$$

1
2
3
4
5
Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

CG por integração

Considerando uma partícula arbitrária localizada em $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$:



$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW}$$

CG por integração

O peso infinitesimal dW deve ser expresso em função do volume infinitesimal dV . Se γ é o *peso específico* do corpo, dado em peso por unidade de volume, então: $dW = \gamma dV$, e:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} \gamma dV}{\int_V \gamma dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} \gamma dV}{\int_V \gamma dV}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} \gamma dV}{\int_V \gamma dV}$$

CG por integração

O peso específico γ de corpos homogêneos é constante, e daí:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$

O CG de corpos homogêneos coincide com o **centróide**, que é uma propriedade geométrica de um volume.

CG por integração

Podem ser determinados centróides de volume, área e linha

Procedimento geral para determinação de centróide de área:

- Escolher um elemento diferencial dA apropriado, em um ponto genérico (x, y) (em geral, se y é facilmente expresso em termos de x , emprega-se um elemento retangular vertical, senão, um elemento horizontal);

CG por integração

Podem ser determinados centróides de volume, área e linha

Procedimento geral para determinação de centróide de área:

- Escolher um elemento diferencial dA apropriado, em um ponto genérico (x, y) (em geral, se y é facilmente expresso em termos de x , emprega-se um elemento retangular vertical, senão, um elemento horizontal);
- Expressar dA em termos do elemento de diferenciação dx (ou dy);

CG por integração

Podem ser determinados centróides de volume, área e linha

Procedimento geral para determinação de centróide de área:

- Escolher um elemento diferencial dA apropriado, em um ponto genérico (x, y) (em geral, se y é facilmente expresso em termos de x , emprega-se um elemento retangular vertical, senão, um elemento horizontal);
- Expressar dA em termos do elemento de diferenciação dx (ou dy);
- Determinar as coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) do centróide do elemento retangular em termos das coordenadas genéricas (x, y) ;

CG por integração

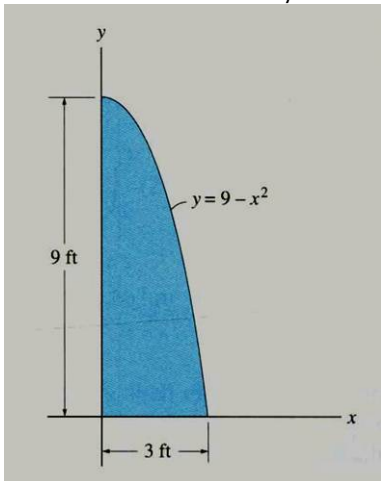
Podem ser determinados centróides de volume, área e linha

Procedimento geral para determinação de centróide de área:

- Escolher um elemento diferencial dA apropriado, em um ponto genérico (x, y) (em geral, se y é facilmente expresso em termos de x , emprega-se um elemento retangular vertical, senão, um elemento horizontal);
- Expressar dA em termos do elemento de diferenciação dx (ou dy);
- Determinar as coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) do centróide do elemento retangular em termos das coordenadas genéricas (x, y) ;
- Expressar todas as variáveis e os limites de integração na fórmula usando ou x ou y , dependendo de o elemento de diferenciação ser em termos de dx ou de dy , respectivamente, e integrar.

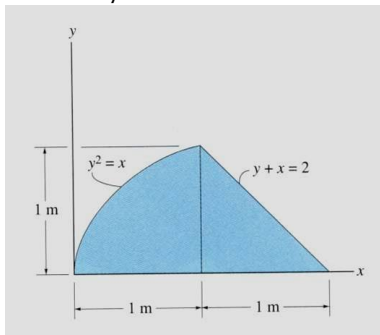
Exemplo 1

Determinar a localização do centróide da área ilustrada.



Exemplo 2

Determinar a localização do centróide da área ilustrada.



1
2
3
4
5

Centro de
gravidade,
centróide, centro
de massa de um
corpo

Exemplo 3

Determinar a localização do centróide da linha ilustrada.

