5.3. Resposta dinâmica a partir das equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x + D.u \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace

$$\begin{cases} s.X(s) - x(0) = A.X(s) + B.U(s) \\ Y(s) = C.X(s) + D.U(s) \end{cases}$$

$x(0) \rightsquigarrow$ condição inicial

$$(s.I - A).X(s) = x(0) + B.U(s)$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}.B.U(s) + (s.I-A)^{-1}.x(0) \\ Y(s) = [C.(sI-A)^{-1}.B + D].U(s) + C.(s.I-A)^{-1}.x(0) \end{cases}$$

Exemplo: determine a descrição em espaço de estados e a função de transferência para o sistema representado pela equação diferencial

$$\dddot{y} + 6.\ddot{y} + 11.\dot{y} + 6.y = 6.u$$

Resolução

$$x_1 = \ddot{y} \qquad x_2 = \dot{y} \qquad x_3 = y$$

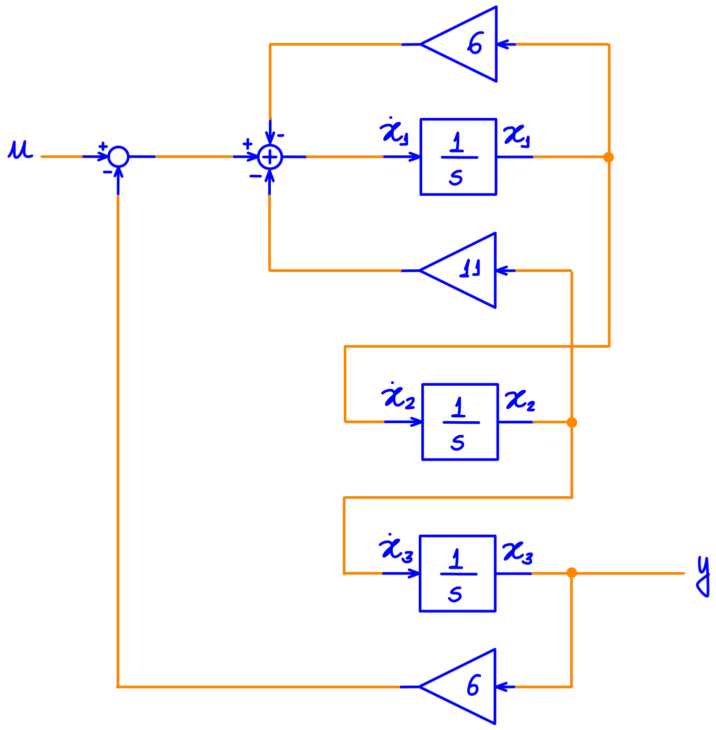
$$\dot{x}_1 + 6.x_1 + 11.x_2 + 6.x_3 = 6.u \qquad \dot{x}_2 = x_1 \qquad \dot{x}_3 = x_2$$

$$\dot{x}_1 = -6.x_1 - 11.x_2 - 6.x_3 + 6.u \qquad \dot{x}_2 = x_1 \qquad \dot{x}_3 = x_2$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}.x + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}.u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C}.x + \underbrace{0}_{D}.u$$

Diagrama de simulação



$$C.(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}.\begin{bmatrix} 1 & s+6 & s^2+6s+11 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C.(sI-A).B = \frac{6}{s^3+6s^2+11.s+6}$$

Função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C.(s.I-A)^{-1}.B + D$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+6 & 11 & 6 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = s.s.(s+6) + 11.s + 6 = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$cof(sI-A) = \begin{bmatrix} s^2 & s & 1 \\ -(11s+6) & s(s+6) & s+6 \\ s^2+6s+11 & 6 & s^2+6.s+11 \end{bmatrix}$$

$$Adj(sI-A) = \begin{bmatrix} s^2 & -(11s+6) & s^2+6s+11 \\ s & s(s+6) & 6 \\ 1 & s+6 & s^2+6s+11 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

[num, den] = ss2tf(A,B,C,D)

[z, p, k] = tf2zp(num, den)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

5.4. Representação no espaço de estados

Considere o sistema

$$y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} . \dot{y} + a_n . y = b_0 . u^{(n)} + b_1 . u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} . \dot{u} + b_n . u$$

Portanto,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 . s^n + b_1 . s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} . s + b_n}{s^n + a_1 . s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} . s + a_n}$$

Exemplo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3.s+2}$$

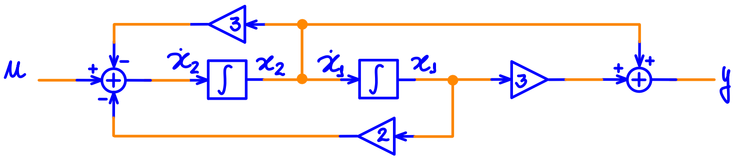
A. Forma canônica controlável

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n . b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} . b_0 & \cdots & b_1 - a_1 . b_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 . u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} . x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} . x$$



Característica central: cada variável de estado é conectada por realimentação à entrada de controle.

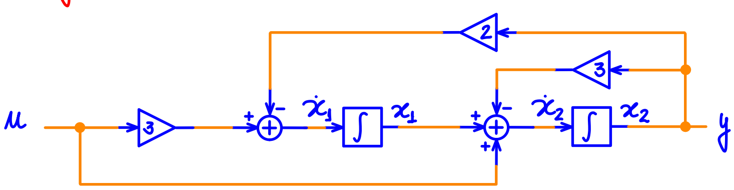
B. Forma canônica observável

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n . b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} . b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 . b_0 \end{bmatrix} . u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 . u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} . x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} . u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} . x$$



Característica central: Todos os laços de realimentação vêm da saída, ou sinal observado. Uma de suas vantagens é que os ganhos do estimador de estado podem ser obtidos dela por inspeção.

C. Forma canônica diagonal

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0.s^m + b_1.s^{m-1} + \dots + b_{m-1}.s + b_m}{(s+p_1).(s+p_2)\dots(s+p_{m-1}).(s+p_m)} = b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \dots + \frac{c_m}{s+p_m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -p_m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . u$$

$$y = [\, c_1 \; c_2 \cdots c_m \,] . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + b_0.u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

$$c_1 = \left.\frac{s+3}{s+2}\right|_{s=-1} = 2 \qquad c_2 = \left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2} = -1$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} . u$$

$$y = [\, 2 \; -1 \,] . x$$

D. Forma canônica de Jordan

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0.s^m + b_1.s^{m-1} + \dots + b_{m-1}.s + b_m}{(s+p_1)^3.(s+p_4)(s+p_5)\dots(s+p_m)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \frac{c_5}{s+p_5} + \dots + \frac{c_m}{s+p_m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & & & \\ & -p_1 & & & & \\ & & -p_1 & & & \\ & & & -p_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -p_m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} . u$$

$$y = [\, c_1 \; c_2 \cdots c_m \,] . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + b_0.u$$