V. Análise e projeto de sistemas de controle no espaço de estados

Controle clássico: baseado na função de transferência
lugar das raízes e resposta em frequência

Controle moderno: baseado na equação de estados
equações diferenciais de primeira ordem organizadas em um vetor de estados.

5.1. Descrição de sistemas no espaço de estados

Forma padrão de variáveis de estado

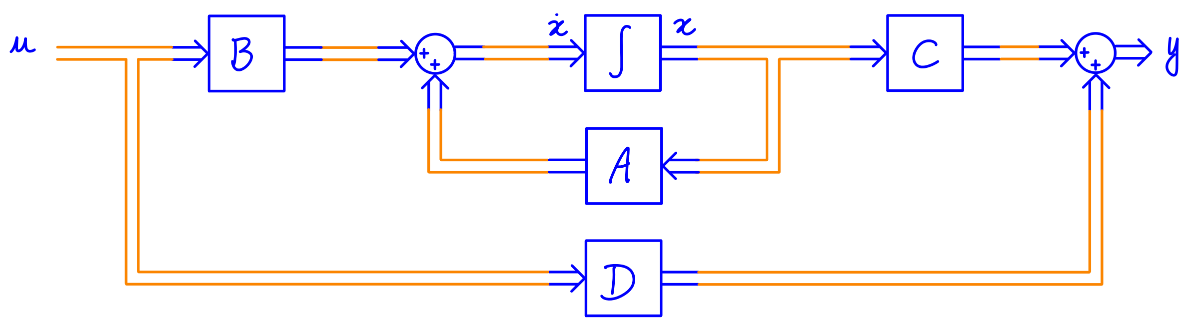
$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$$

A → matriz do sistema
B → matriz de entrada
C → matriz de saída
D → matriz de transmissão direta

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T$$

x → estado do sistema com n elementos
→ geralmente descreve diretamente a distribuição de energia interna do sistema (posição - energia potencial; velocidade - energia cinética; tensão no capacitor - energia elétrica; corrente no indutor - energia magnética).

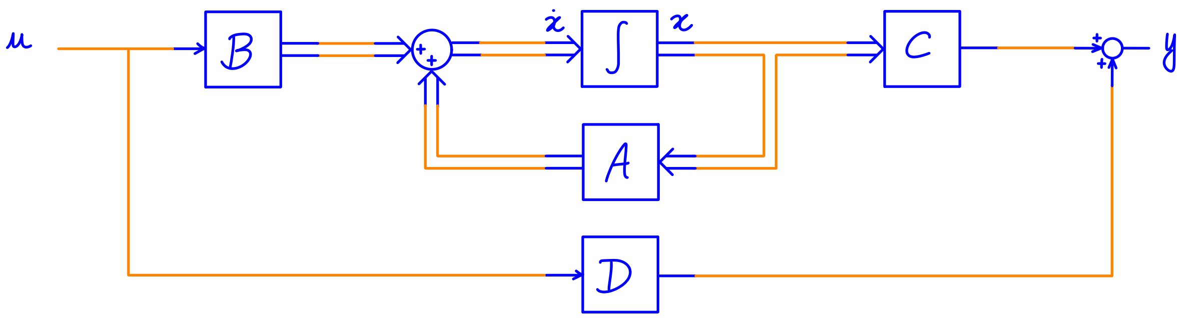
Sistema MIMO (Multiple Input - Multiple Output)



$u_{m \times 1}$; $x_{n \times 1}$; $y_{r \times 1}$

$A_{n \times n}$; $B_{n \times m}$; $C_{r \times n}$; $D_{r \times m}$

Sistema SISO (Single Input - Single Output)

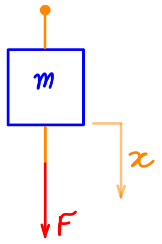


$u_{1 \times 1}$; $x_{n \times 1}$; $y_{1 \times 1}$

$A_{n \times n}$; $B_{n \times 1}$; $C_{1 \times n}$; $D_{1 \times 1}$

5.2. Analogias entre sistemas mecânicos de translação, elétrico e magnético

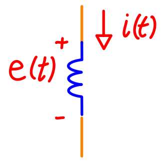
Sistema mecânico	Sistema elétrico	Sistema magnético
F (força)	e (tensão)	i (corrente)
b (coeficiente de amortecimento)	R (resistência)	G (condutância)
v (velocidade)	i (corrente)	e (tensão)
m (massa)	L (indutância)	C (capacitância)
k (constante da mola)	$1/C$	$1/L$
x (deslocamento)	q (carga)	$\varnothing$ (fluxo)



$$F(t) = m \cdot a(t)$$

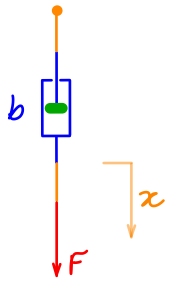
$$F(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(t) = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$



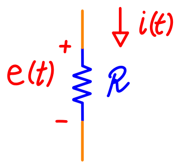
$$e(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$e(t) = L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$$



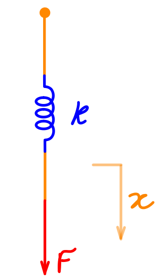
$$F(t) = b \cdot v(t)$$

$$F(t) = b \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

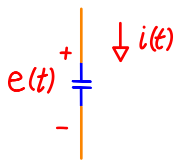


$$e(t) = R \cdot i(t)$$

$$e(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt}$$



$$F(t) = k \cdot x(t)$$

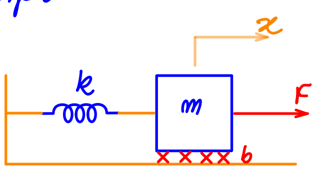


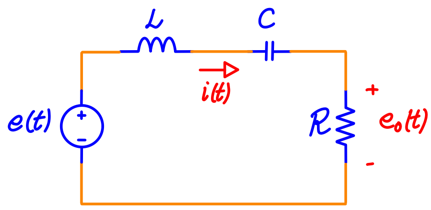
$$q(t) = C \cdot e(t) \quad \Rightarrow \quad e(t) = \frac{1}{C} \cdot q(t)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = C \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{de(t)}{dt} \qquad e(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)\,dt$$

Exemplo





$$F(t) = b \cdot v(t) + k \cdot x(t) + m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$e(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$e(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t)\,dt + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$x_1(t) = i(t)$

$x_2(t) = v_C(t)$

$u(t) = e(t)$

$y(t) = e_o(t)$

$$\begin{cases} u = L\,\dot{x}_1 + x_2 + R \cdot x_1 \\ x_1 = C \cdot \dot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} \cdot x_1 - \frac{1}{L} \cdot x_2 + \frac{1}{L} \cdot u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} \cdot x_1 \end{cases}$$

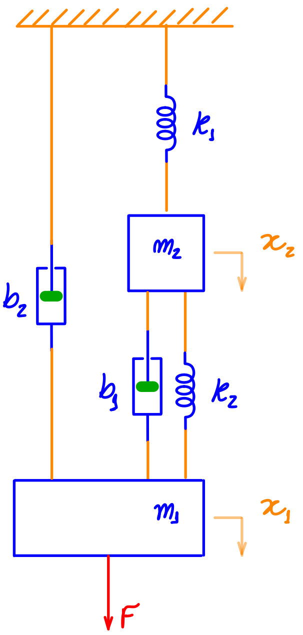
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \cdot x$$

Regras de construção de circuito elétrico análogo ao sistema mecânico

1) Cada junção se transforma em uma malha;
2) Os elementos que formam uma junção se transformam em elementos elétricos equivalentes.
3) Os elementos mecânicos comuns à duas junções se transformam em elementos elétricos comuns a duas malhas.

Exemplo:

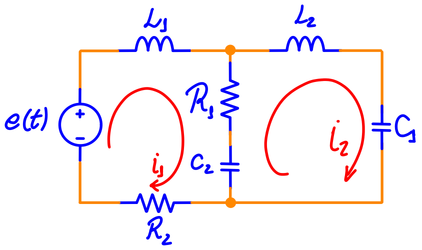


$$F = m_1 \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} + b_1 \cdot \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) + K_2(x_1 - x_2) + b_2 \cdot \frac{dx_1}{dt}$$

$$0 = b_1 \cdot \left[\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right] + K_2 \cdot (x_2 - x_1) + K_1 \cdot x_2 + m_2 \cdot \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$e(t) = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + R_1 \cdot (i_1 - i_2) + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_1\, dt - \frac{1}{C_2} \int i_2 \cdot dt + R_2 \cdot i_1$$

$$0 = R_1 \cdot (i_2 - i_1) + \frac{1}{C_2} \cdot \int (i_2 - i_1)\, dt + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_2 \cdot dt + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$



Em equações de estado