



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Testes de Hipóteses

Departamento de Estatística

Introdução

$X = \left\{ \text{concentração em } \frac{\text{unidades}}{\text{ml}} \text{ de determinada vitamina no sangue} \right\}$

$$X_S \sim N(14, 6^2)$$



$$X_E \sim N(18, 6^2)$$



$$X_D \sim N(10, 6^2)$$



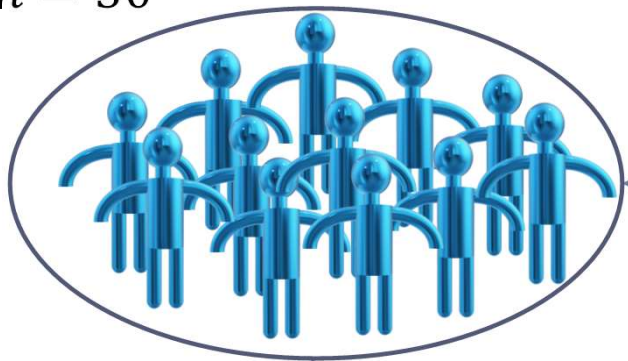
Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 1

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu = 14$

Suplemento eficaz

ou

$\mu = 10$

Suplemento não eficaz



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 2

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu = 14$

Remédio eficaz

ou

$\mu = 18$

Remédio não eficaz



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 3



$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu = 10$ Deficiência da vitamina

$\mu = 14$ Vitamina dentro do normal

$\mu = 18$ Excesso da vitamina



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Hipóteses de Interesse

- ▶ Hipótese Nula (H_0):
 - ▶ Hipótese conservadora, aquela que mantém o *status quo*, não desafia o que já se sabe, ou o que foi especificado;
- ▶ Nos nossos exemplos temos:
- ▶ Situação 1:
 - ▶ $H_0: \mu = 10$ unidades/ml,
 - ▶ pois o remédio foi dado à pessoas com deficiência da vitamina, cuja média do componente no sangue é 10 unidades/ml, ou seja, a hipótese conservadora é o remédio não faz efeito.
- ▶ Situação 2:
 - ▶ $H_0: \mu = 18$ unidades/ml,
 - ▶ pois o remédio foi dado à pessoas com excesso da vitamina, cuja média do componente no sangue é 18 unidades/ml.
- ▶ Situação 3:
 - ▶ $H_0: \mu = 14$ unidades/ml,
 - ▶ pois quando não se sabe nada sobre a população, supõe-se o normal.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Hipóteses de Interesse

- ▶ Hipótese Alternativa (H_a):
 - ▶ Hipótese inovadora, desafia o que se é conhecido, traz uma situação ou conhecimento novo;
- ▶ Nos nossos exemplos temos
- ▶ Situação 1:
 - ▶ $H_a: \mu > 10$ unidades/ml
 - ▶ Se o medicamento tiver o efeito desejado $\mu > 10$.
- ▶ Situação 2
 - ▶ $H_a: \mu < 18$ unidades/ml
 - ▶ Se o medicamento tiver o efeito desejado $\mu < 18$.
- ▶ Situação 3
 - ▶ $H_a: \mu \neq 14$ unidades/ml
 - ▶ Se a população tiver deficiência da vitamina $\mu < 14$;
 - ▶ Se a população tiver excesso da vitamina $\mu > 14$.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Hipóteses de Interesse

- ▶ **Unilaterais:**

- ▶ $H_0: \mu = a$

- ▶ $H_a: \mu < a$

- ▶ ou

- ▶ $H_0: \mu = a$

- ▶ $H_a: \mu > a$

- ▶ **Costuma-se utilizar a notação abaixo (equivalentes):**

- ▶ $H_0: \mu \geq a$

- ▶ $H_a: \mu < a$

- ▶ ou

- ▶ $H_0: \mu \leq a$

- ▶ $H_a: \mu > a$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Hipóteses de Interesse

- ▶ **Bilaterais:**

- ▶ $H_0: \mu = a$

- ▶ $H_a: \mu \neq a$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Exercício

- ▶ Identifique as hipóteses que estão sendo testadas em cada caso, informando se são uni ou bilaterais:
 - ▶ A companhia de transporte afirma que, em média, o intervalo entre sucessivos ônibus é de 15 minutos. Uma associação de usuários de transportes coletivos acha que a pontualidade é muito importante e pretende testar a afirmação da companhia;
 - ▶ Os amortecedores, de automóveis que circulam entre cidades, duram em média 30 mil quilômetros, segundo informações de algumas oficinas especializadas. Um proprietário de automóvel deseja testar essa informação;
 - ▶ Um veterinário conseguiu ganho médio diário de 3 litros de leite por vaca com uma nova composição de ração. Um pecuarista acredita que o ganho não é tão grande assim.



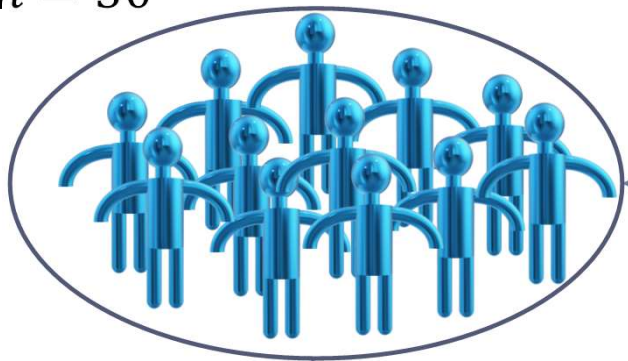
Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 1

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$$\mu > 10$$

Suplemento eficaz

(Hipótese alternativa (H_a))

ou

$$\mu \leq 10$$

Suplemento não eficaz

(Hipótese nula (H_0))

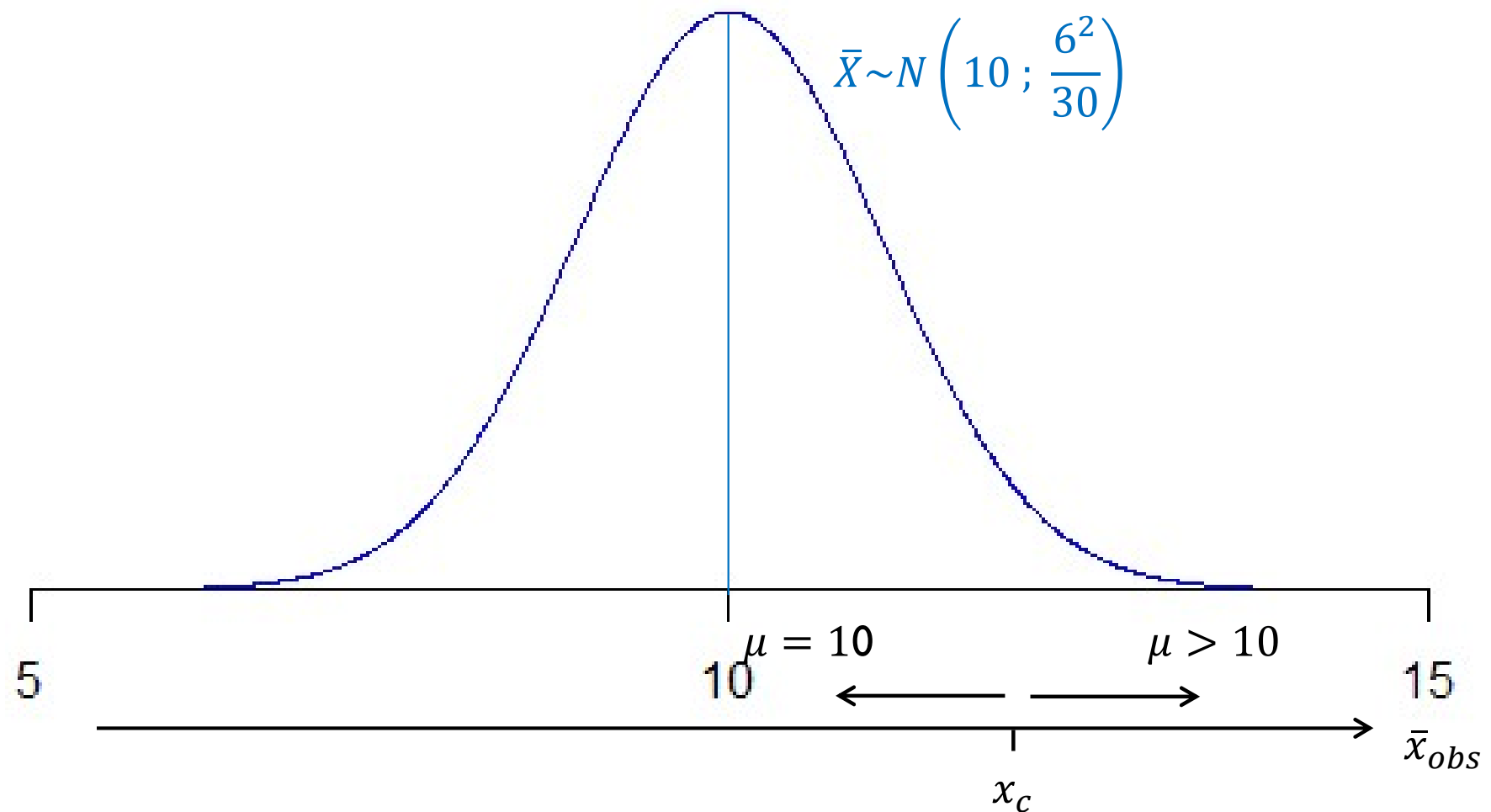


Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 1



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 1

- ▶ O que resta fazer é determinar o valor de x_c e quantificar os erros associados às possíveis conclusões;
- ▶ Mas quais são as conclusões possíveis:
 - ▶ Rejeitar a hipótese nula; ou
 - ▶ Não rejeitar a hipótese nula.
- ▶ As conclusões devem ser sempre relacionadas à hipótese nula.
- ▶ Os dois erros que podem ser cometidos ao se realizar um teste de hipóteses são:
 - ▶ Rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira; e
 - ▶ Não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa.

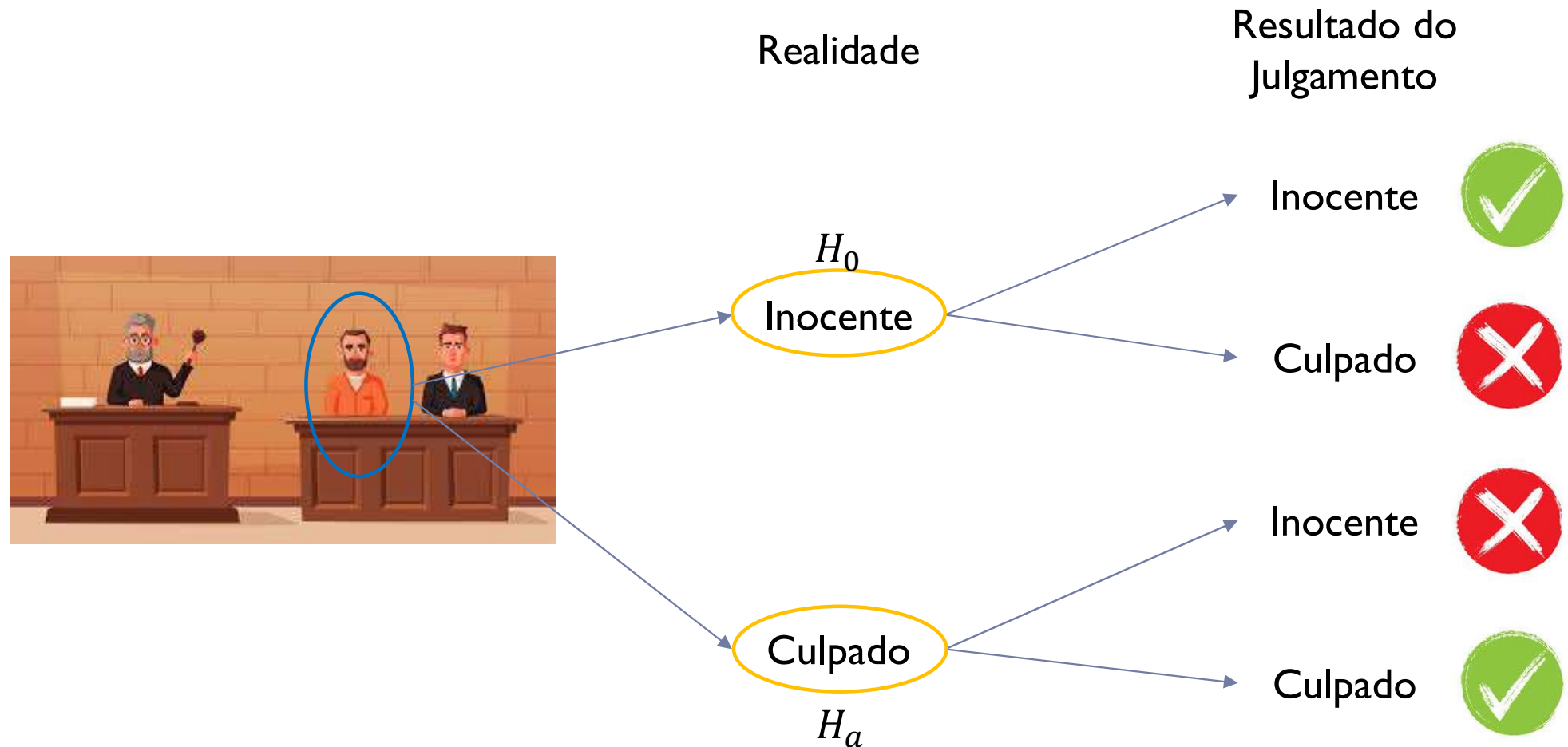


Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Analogia no processo criminal



Definição

▶ Erro do tipo I:

- ▶ Consiste em rejeitar a hipótese nula H_0 quando ela é verdadeira.
- ▶ Geralmente representado por α .
- ▶ Em virtude de H_0 especificar um único valor do parâmetro, existe um único valor de α .

▶ Erro do tipo II:

- ▶ Envolve a não-rejeição de H_0 quando H_0 é falsa.
- ▶ Geralmente representado por β .
- ▶ Como H_a não especifica um valor para o parâmetro de interesse, existe um valor diferente de β para cada valor do parâmetro consistente com H_a .



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Erros

- ▶ Uma parte fundamental do teste de hipóteses é controlar a probabilidade de cometermos o erro do tipo I:

Decisão	Situação	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro Tipo I	Sem Erro
Não rejeitar H_0	Sem Erro	Erro Tipo II

- ▶ Erro de tipo I: Rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira;
- ▶ $P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$.
- ▶ Erro de tipo II: Não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa;
- ▶ $P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) = \beta$.



Erros

- ▶ Considerando as hipóteses:
 - ▶ H_0 : O suplemento não é eficaz, ou $H_0: \mu \leq 10$
 - ▶ H_a : O suplemento é eficaz, ou $H_a: \mu > 10$
- ▶ Temos:
 - ▶ $\alpha = P(\text{concluir que o suplemento é eficaz quando na verdade ele não é})$
 - ▶ $\beta = P(\text{concluir que o suplemento não é eficaz quando na verdade ele é})$
- ▶ O ideal seria ter α e β próximos a zero;
- ▶ Infelizmente, a tendência ao diminuir α é aumentarmos β .

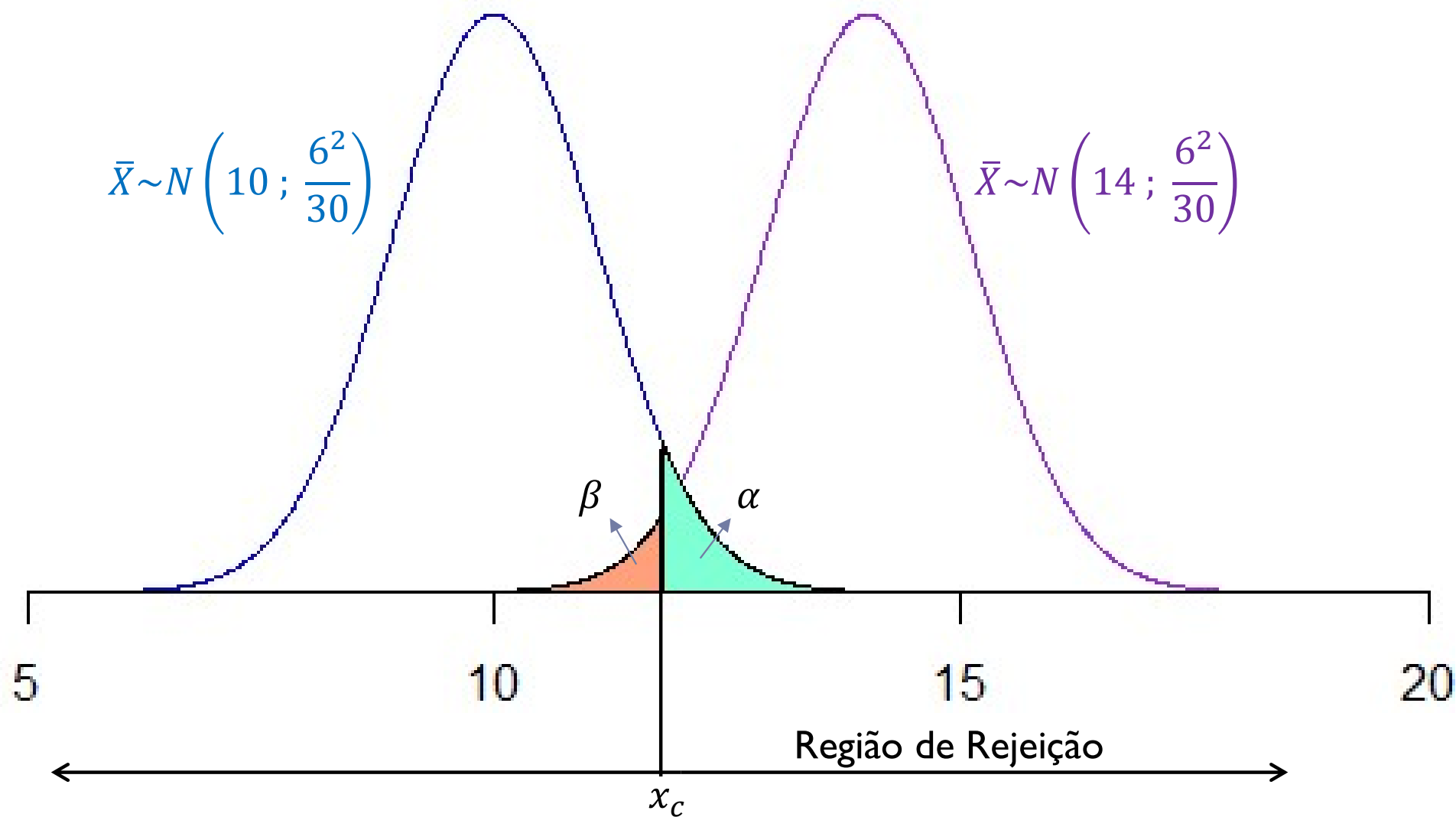


Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Erros



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Região Crítica

- ▶ A região dos números reais maiores que x_c é denominada *Região de Rejeição* ou *Região Crítica* e representada por RC:
- ▶ $RC = \{x \in \mathbb{R}: x > x_c\}$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do valor crítico

- ▶ Como encontrar o valor x_c ?
- ▶ Deve-se fixar o valor de α , que a partir de agora será denominado *nível de significância* do teste;
- ▶ Usa-se o conhecimento da distribuição de probabilidade da média amostral:
- ▶ Para casos em que a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, e/ou $n \geq 30$.
- ▶ $\bar{X} \sim N\left(\mu ; \frac{\sigma^2}{n}\right)$, em que:
 - ▶ μ é a média que se deseja conhecer,
 - ▶ σ^2 é a variância populacional (conhecida);
 - ▶ n é o tamanho amostral.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do valor crítico

- ▶ No nosso exemplo, temos que foi retirada uma amostra de tamanho 30 da população de indivíduos com deficiência da vitamina, logo:
- ▶ $X \sim N(10, 6^2)$ e $n = 30$.
- ▶ Vamos usar $\alpha = 0,05$.
- ▶ Queremos conhecer o valor de μ para a distribuição da média amostral $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{6^2}{30}\right)$ e fizemos as seguintes hipóteses:
 - ▶ H_0 : O suplemento não é eficaz, ou $H_0: \mu \leq 10$
 - ▶ H_a : O suplemento é eficaz, ou $H_a: \mu > 10$
- ▶ Queremos encontrar x_c de maneira que:
 - ▶ $P\left(\bar{x} > x_c \mid \bar{X} \sim N\left(10, \frac{6^2}{30}\right)\right) = 0,05$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do valor crítico

$$P\left(\bar{x} > x_c \mid \bar{X} \sim N\left(10, \frac{6^2}{30}\right)\right) = 0,05$$

$$P(Z \geq 1,645) = 0,05$$

$$1,645 = \frac{x_c - 10}{6/\sqrt{30}}$$

$$1,645 \times 6/\sqrt{30} + 10 = x_c$$

$$x_c = 11,8$$

$$RR: \{x \mid x > 11,8\}$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c					
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Digamos que a média observada na amostra tenha sido 12,5 unidades/ml;
- ▶ Como $12,5 = \bar{x}_{obs} > x_c = 11,8$, conclui-se que existe evidência para rejeitar H_0 , a um nível de 5% de significância;
- ▶ Ou seja, conclui-se que o suplemento vitamínico é eficiente.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Estatística do Teste

- ▶ Testes de Hipóteses para a média (σ^2 conhecido)
 - ▶ Estatística do teste: Normal
 - ▶ Deve-se relacionar o valor da média amostral observada com o valor respectivo da distribuição normal padrão:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- ▶ E verificar se a estatística do teste se encontra dentro ou fora da região de rejeição, também definida na distribuição normal padrão.



Cálculo da Estatística do Teste

- ▶ Digamos que a média observada na amostra tenha sido 12,5 unidades/ml;
- ▶ Cálculo da estatística do teste:

$$Z = \frac{12,5 - 10}{6/\sqrt{30}} = 2,28$$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo da Região Crítica

$$RR_1: \{z | z > 1,645\}$$

Regiões de rejeição equivalentes, chegamos às mesmas conclusões utilizando a média observada e a RR_2 ou a estatística do teste e a RR_1 .

$$RR_2: \{x | x > 11,8\}$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c					
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Como $2,28 = z_{obs} > z_c = 1,645$, conclui-se que existe evidência para rejeitar H_0 , a um nível de 5% de significância;
- ▶ Ou seja, o suplemento é eficaz.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



p-valor

- ▶ Uma forma de relatar o resultado de um teste de hipóteses é dizer se a hipótese nula foi, ou não, rejeitada a um nível de significância especificado;
- ▶ Esse tipo de afirmação nem sempre é adequado, pois não informa se o valor da estatística estava próximo ou afastado do valor limite da região de rejeição;
- ▶ O p-valor fornece informação sobre a força da evidência contra H_0 , e permite que o pesquisador tire sua conclusão em qualquer nível de significância α .



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



p-valor (Definição)

- ▶ É a probabilidade calculada, assumindo-se que H_0 seja verdadeira, de se obter um valor igual ao da estatística de teste observada, ou tão contraditória à H_0 quanto.
- ▶ Quanto menor for o p-valor observado, mais contraditórias a H_0 são as evidências coletadas.
- ▶ Uma vez que o p-valor tenha sido calculado, a conclusão, em qualquer nível α de significância, resulta da comparação do p-valor a α :
 - ▶ $p - \text{valor} \leq \alpha \Rightarrow$ implica na rejeição de H_0 a um nível α ;
 - ▶ $p - \text{valor} > \alpha \Rightarrow$ implica na não-rejeição de H_0 a um nível α .



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do p-valor

- ▶ Estou considerando que foi observada uma média amostral igual à 12,5 unidades/ml;
- ▶ A estatística do teste observada foi de 2,28;
- ▶ Queremos conhecer o p-valor relativo à média amostral observada, considerando as seguintes hipóteses:
 - ▶ H_0 : O suplemento não é eficaz, ou $H_0: \mu \leq 10$
 - ▶ H_a : O suplemento é eficaz, ou $H_a: \mu > 10$
- ▶ Queremos encontrar o p-valor de maneira que:
- ▶ $P\left(\bar{x} > 12,5 \mid \bar{X} \sim N\left(10, \frac{6^2}{30}\right)\right) = p - \text{valor}$
- ▶ Ou seja
- ▶ $P(z_{obs} > 2,28 \mid Z \sim N(0,1)) = p - \text{valor}$



p-valor

$$P(z_{obs} > 2,28) = p - valor$$

$$p - valor = 0,0113$$

Parte inteira e p	2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
	2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
	2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
	2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
	2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
	2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
	2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
	2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
	2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
	3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
	3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
	3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
	3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
	3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
	3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
	3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$P(Z \geq z_c)$		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
Segunda decimal de z_c											



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Como o p-valor foi igual a 0,0113, conclui-se que existem fortes evidências para rejeitar H_0 ;
- ▶ O erro real ao rejeitar H_0 ($p - valor = 1,13\%$), baseado no valor da média amostral obtido, é inferior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância);
- ▶ Ou seja, pode-se concluir, ainda com mais certeza, que o suplemento vitamínico é eficiente.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 2

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$$\mu < 18$$

Remédio eficaz

(Hipótese alternativa (H_a))

ou

$$\mu \geq 18$$

Remédio não eficaz

(Hipótese nula (H_0))

$$\bar{x}_{obs} = 16,5 \text{ unidades/ml}$$

$$\alpha = 0,01$$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resolução

- ▶ Valores importantes:
- ▶ $\bar{x}_{obs} = 16,5$
- ▶ $\mu = 18$ (hipótese nula)
- ▶ $\sigma^2 = 6^2$ (variância populacional)
- ▶ $n = 30$ (tamanho da amostra)
- ▶ $\alpha = 0,01$ (nível de significância)
- ▶ Estatística do teste:

$$Z = \frac{16,5 - 18}{6/\sqrt{30}} = -1,37$$

- ▶ $H_0: \mu \geq 18$
- ▶ $H_a: \mu < 18$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Regiões de Rejeição

$$P(Z < -2,33) = P(Z > 2,33) \cong 0,01$$

$$z_c = -2,33$$

$$x_c = -2,33 \times \frac{6}{\sqrt{30}} + 18 = 15,45$$

$$RR_1: \{z | z < -2,33\}$$

$$RR_2: \{x | x < 15,45\}$$

$$H_a: \mu < 18$$

$P(Z \geq z_c)$	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099

nteira e primeira decimal de z_c



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Como $16,5 = \bar{x}_{obs} \notin RR_2: \{x|x < 15,45\}$, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0 , a um nível de 1% de significância;
- ▶ Chegaríamos na mesma conclusão ao comparar $-1,37 = z_{obs} \notin RR_1: \{z|z < -2,33\}$;
- ▶ Ou seja, não se pôde confirmar a eficiência do medicamento.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do p-valor

$$H_a: \mu < 18$$

$$p - \text{valor} = P(Z < -1,37) = P(Z > 1,37) = 0,0853 > 0,01$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c							
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Como o p-valor foi igual a 0,085, conclui-se que não existem evidências o suficiente para rejeitar H_0 ;
- ▶ O erro real ao rejeitar H_0 ($p - valor = 8,5\%$), baseado no valor da média amostral obtido, é superior ao erro considerado como aceitável de 1% (nível de significância).



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 3



$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu < 14$ Deficiência da vitamina (Hipótese alternativa (H_a))

$\mu = 14$ Vitamina dentro do normal (Hipótese nula (H_0))

$\mu > 14$ Excesso da vitamina (Hipótese alternativa (H_a))

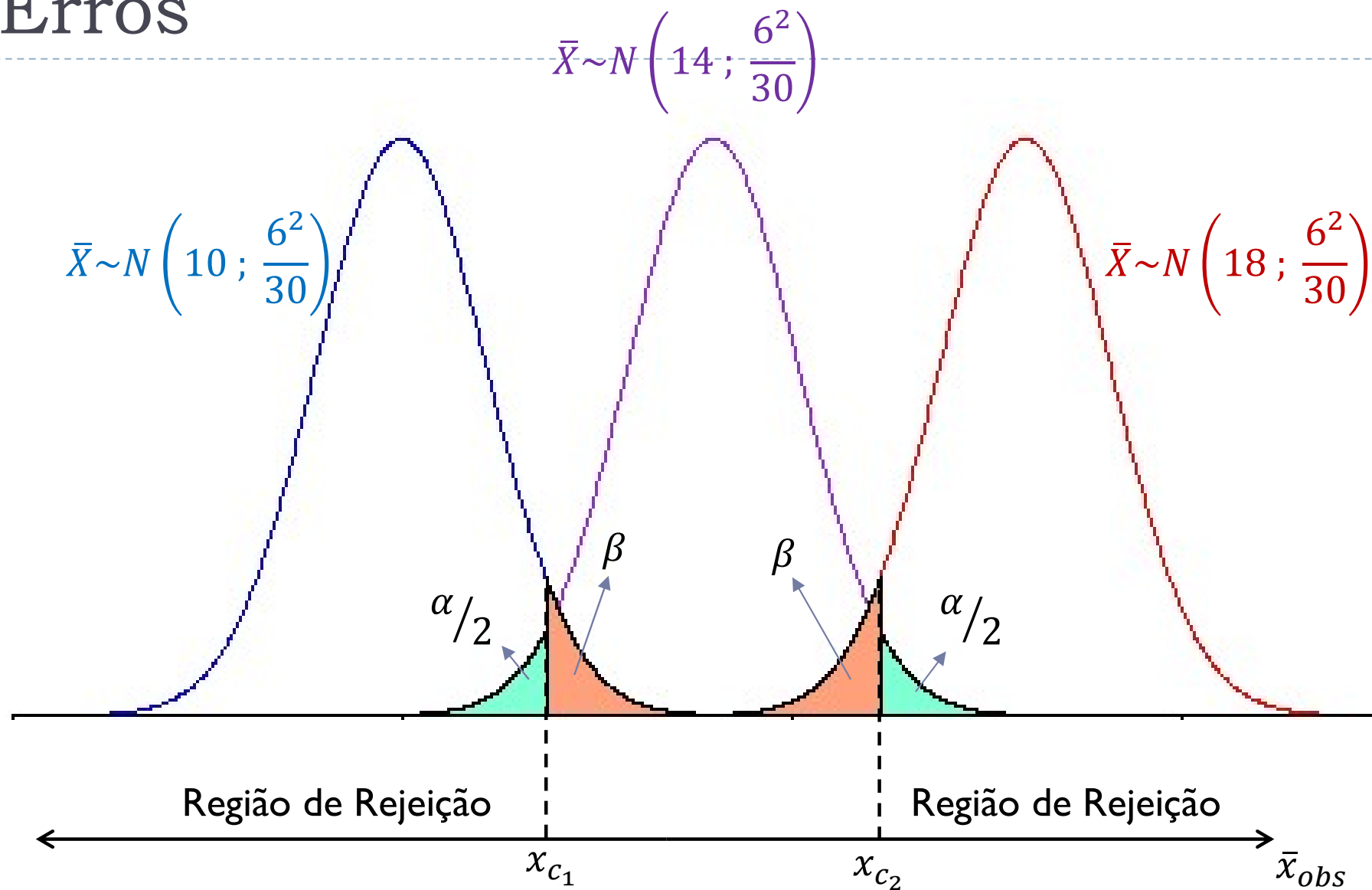


Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Erros



Resolução

▶ Valores importantes:

▶ $\bar{x}_{obs} = 13,2$

▶ $\mu = 14$ (hipótese nula)

▶ $\sigma^2 = 6^2$ (variância populacional)

▶ $n = 30$ (tamanho da amostra)

▶ $\alpha = 0,05$ (nível de significância)

$$Z = \frac{13,2 - 14}{6/\sqrt{30}} = -0,73$$

▶ $H_0: \mu = 14$

▶ $H_a: \mu \neq 14$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Regiões de Rejeição

$$P(Z < -1,96) = P(Z > 1,96) = 0,025$$

$$z_{c_1} = -1,96 ; z_{c_2} = 1,96$$

$$RR_1: \{z | z < -1,96 \text{ ou } z > 1,96\}$$

$$x_{c_1} = -1,96 \times \frac{6}{\sqrt{30}} + 14 = 11,85$$

$$x_{c_2} = 1,96 \times \frac{6}{\sqrt{30}} + 14 = 16,15$$

$$RR_2: \{x | x < 11,85 \text{ ou } x > 16,15\}$$

$$H_a: \mu \neq 14$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c						
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250

neira decimal de z_c



Resultados

- ▶ Como $13,2 = \bar{x}_{obs} \in (11,85 ; 16,15)$, ou seja, não pertence à região de rejeição, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0 , a um nível de 5% de significância;
- ▶ Ou seja, conclui-se que não existe evidências para afirmar que a população tenha deficiência ou excesso da vitamina, a um nível de 5% de significância.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do p-valor

$$p - \text{valor} = 2 \times P(Z < -0,73) = 2 \times P(Z > 0,73) = 2 \times 0,2327 = 0,4654$$

$P(Z \geq z_c)$	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Como o p-valor foi igual a 0,4654, conclui-se que não existem evidências o suficiente para rejeitar H_0 ;
- ▶ O erro real ao rejeitar H_0 ($p - valor = 46,54\%$), baseado no valor da média amostral obtido, é superior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).



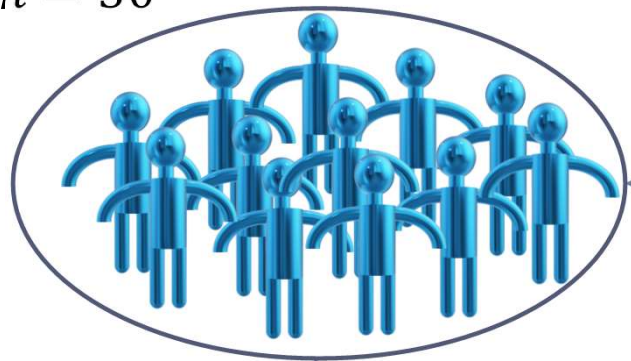
Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 4

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\hat{\pi}$

$$\pi < 0,85$$

ou

$$\pi \geq 0,85$$

Suplemento não atinge
as especificações

(Hipótese alternativa (H_a))

Suplemento eficaz em ao
menos 85% dos casos

(Hipótese nula (H_0))



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Testes de Hipóteses para Proporções

- ▶ Variável Aleatória $\hat{\pi}$: proporção de indivíduos com concentração adequada de determinada vitamina no sangue;
- ▶ Para amostras de tamanho suficientemente grande ($n \geq 30$) tem-se que a variável aleatória $\hat{\pi}$ segue uma distribuição normal com:
- ▶ Média: π ;
- ▶ Desvio-padrão: $\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
- ▶ Resumindo: $\hat{\pi} \sim N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



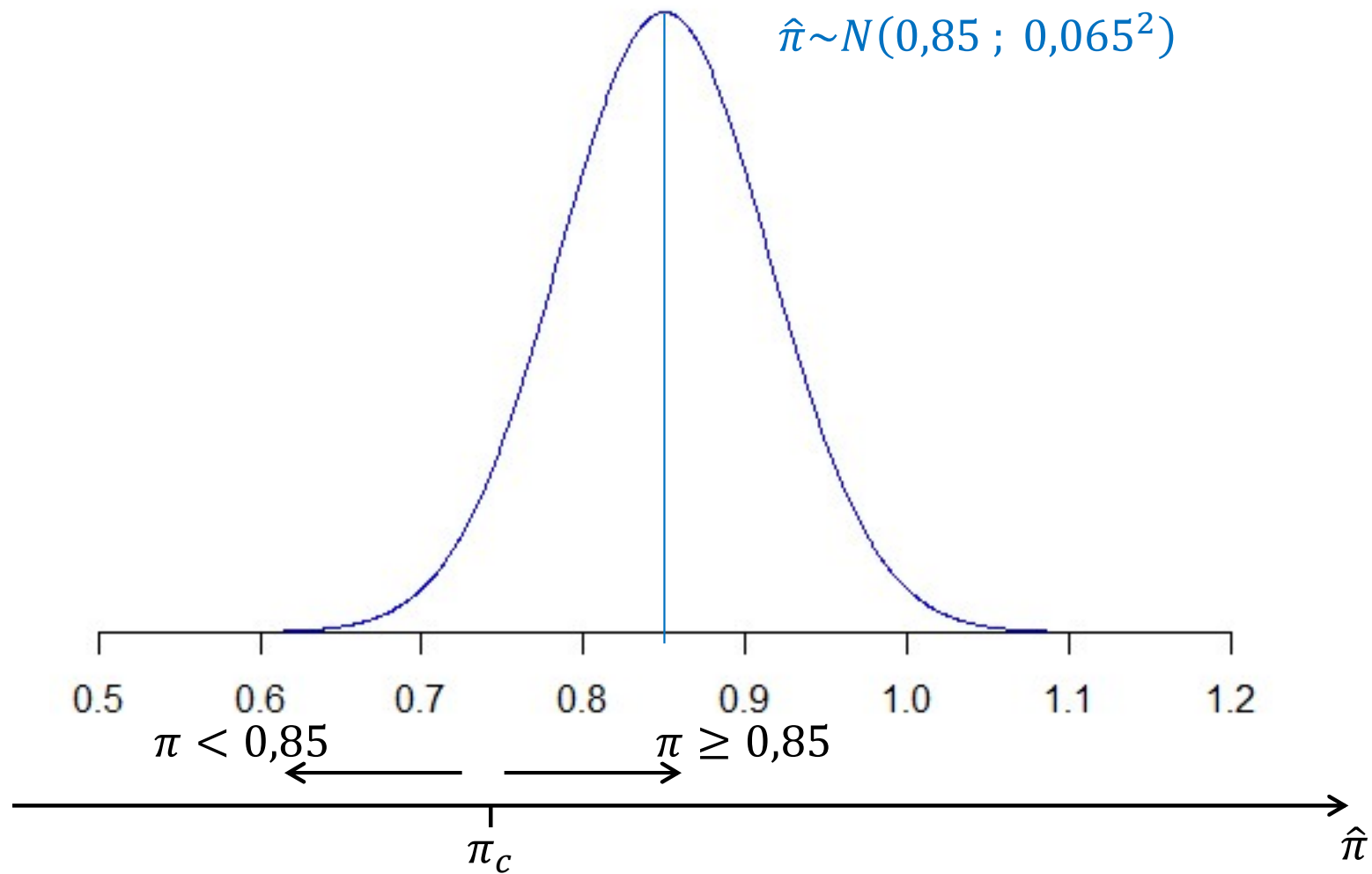
Situação 4

- ▶ Temos:
- ▶ $H_0: \pi \geq 0,85$
- ▶ $H_a: \pi < 0,85$
- ▶ $n = 30$
- ▶ $\hat{\pi}$ é relativo à proporção de pessoas que, após o tratamento, passaram a ter a concentração adequada da vitamina no sangue.
- ▶ Tem-se que:

$$\hat{\pi} \sim N\left(0,85 ; \frac{0,85(0,15)}{30}\right) \text{ ou } \hat{\pi} \sim N(0,85 ; 0,065^2)$$



Situação 4



Erros

- ▶ Considerando as hipóteses:
 - ▶ H_0 : O suplemento é eficaz em pelo menos 85% dos casos, ou
 - ▶ $H_0: \pi \geq 0,85$
 - ▶ H_a : O suplemento não atinge as especificações, ou
 - ▶ $H_a: \pi < 0,85$
- ▶ Temos:
 - ▶ $\alpha = P(\text{concluir que o suplemento não está dentro das especificações quando na verdade ele está})$
 - ▶ $\beta = P(\text{concluir que o suplemento respeita as especificações quando na verdade ele não as respeita})$
- ▶ Vamos considerar um nível de 5% de significância.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Estatística do Teste

- ▶ Testes de Hipóteses para a Proporção

- ▶ Estatística do teste: Normal

- ▶ Deve-se relacionar o valor da média amostral observada com o valor respectivo da distribuição normal padrão:

$$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}}$$

- ▶ E verificar se a estatística do teste se encontra dentro ou fora da região de rejeição, também definida na distribuição normal padrão.



Regiões de Rejeição

$$P(\hat{\pi} < \pi_c | \hat{\pi} \sim N(0,85, 0,065^2)) = 0,05$$

$$P(Z < -1,645) = 0,05$$

$$RR_1: \{z | z < -1,645\}$$

$$-1,645 = \frac{\pi_c - 0,85}{0,065}$$

$$-1,645 \times 0,065 + 0,85 = \pi_c$$

$$\pi_c = 0,74$$

$$RR_2: \{\pi | \pi < 0,74\}$$

$$H_a: \pi < 0,85$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c					
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Digamos que a proporção observada na amostra tenha sido 79%;
- ▶ Como $0,79 = \hat{\pi} > \pi_c = 0,74$, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0 , a um nível de 5% de significância;
- ▶ Ou seja, não foram encontradas evidências fortes o suficiente para contradizer as especificações dadas pela empresa farmacêutica.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do p-valor

Encontrando a estatística do teste:

$$z = \frac{0,79 - 0,85}{0,065} = \frac{-0,06}{0,065} = -0,92$$

$$p - \text{valor} = P(Z < -0,92) = P(Z > 0,92) = 0,1788 > 0,05$$

$$H_a: \pi < 0,85$$

$P(Z \geq z_c)$	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,4960	0,4920
0,1	0,4602	0,4562	0,4522
0,2	0,4207	0,4168	0,4129
0,3	0,3821	0,3783	0,3745
0,4	0,3446	0,3409	0,3372
0,5	0,3085	0,3050	0,3015
0,6	0,2743	0,2709	0,2676
0,7	0,2420	0,2389	0,2358
0,8	0,2119	0,2090	0,2061
0,9	0,1841	0,1814	0,1788



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Como o p-valor foi igual a 0,1788, conclui-se que não existem evidências para rejeitar H_0 ;
- ▶ O erro real ao rejeitar H_0 ($p - valor = 17,88\%$), baseado no valor da proporção amostral obtido, é superior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Situação 5



$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\hat{\pi}$

$\pi < 75$

$\pi = 75$

$\pi > 75$

Prevalência de indivíduos saudáveis na UF em questão.

(Hipótese alternativa (H_a))

(Hipótese nula (H_0))

(Hipótese alternativa (H_a))



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resolução

- ▶ Valores importantes:
- ▶ $n = 30$ (tamanho da amostra)
- ▶ $\hat{\pi} = 80\%$
- ▶ $\pi = 75\%$ (hipótese nula)
- ▶ Estatística do teste:

$$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}} = \frac{0,8 - 0,75}{\sqrt{\frac{0,75(1 - 0,75)}{30}}} = 0,63$$

- ▶ $\alpha = 0,05$ (nível de significância)
- ▶ $H_0: \pi = 0,75$
- ▶ $H_a: \pi \neq 0,75$



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Regiões de Rejeição

$$P(Z < -1,96) = P(Z > 1,96) = 0,025$$

$$z_{c_1} = -1,96 ; z_{c_2} = 1,96$$

$$RR_1: \{z | z < -1,96 \text{ ou } z > 1,96\}$$

$$\pi_{c_1} = -1,96 \times 0,079 + 0,75 = 0,595$$

$$\pi_{c_2} = 1,96 \times 0,079 + 0,75 = 0,905$$

$$RR_2: \{\pi | \pi < 0,595 \text{ ou } \pi > 0,905\}$$

$P(Z \geq z_c)$		Segunda decimal de z_c						
		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
025	0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761
	0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364
	0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974
	0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594
	0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228
	0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877
	0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546
	0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236
	0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949
595	0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685
	1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446
	1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230
05	1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038
	1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869
	1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721
	1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594
	1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485
	1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392
	1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314
	1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250

neira decimal de z_c



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Resultados

- ▶ Como $0,63 = z_{obs} \in (-1,96 ; 1,96)$, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0 , a um nível de 5% de significância;
- ▶ Ou seja, conclui-se que não existe evidências para afirmar que a população tenha uma prevalência de indivíduos com a concentração adequada da vitamina no sangue, diferente daquela observada no estado em que se encontra a cidade em questão.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Cálculo do p-valor

$$p - \text{valor} = 2 \times P(Z > 0,63) = 2 \times 0,2643 = 0,5286$$

$P(Z \geq z_c)$	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327



Resultados

- ▶ Como o p-valor foi igual a 0,5286, conclui-se que não existem evidências o suficiente para rejeitar H_0 ;
- ▶ O erro real ao rejeitar H_0 ($p - valor = 52,86\%$), baseado no valor da proporção amostral obtida, é superior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Exercício 1

- ▶ Um estudo foi desenvolvido para avaliar o salário de empregadas domésticas na cidade de São Paulo. Foram sorteadas e entrevistadas 200 trabalhadoras. Admita que o desvio-padrão dessa variável na cidade é de 0,8 salários mínimos.
 - ▶ Deseja-se testar se a média é igual a 3 salários mínimos ou é menor. Formule as hipóteses adequadas;
 - ▶ Para um nível de significância de 3%, construa a região crítica.
 - ▶ Se a amostra forneceu média de 2,5 salários mínimos, qual seria a conclusão?



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Exercício 2

- ▶ Suponha que um laboratório alegue que uma determinada droga que ele comercialize é eficiente em pelo menos 80% dos casos em que é utilizada. Suponha que, para comprovar a alegação do laboratório, um organismo de controle testou 180 pacientes, verificando a eficiência da droga em 147 casos. Teste a eficiência alegada pelo laboratório a um nível de 1% de significância.



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Exercício 3

- ▶ Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido em cobaias, que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos:

9,1	9,3	7,2	7,5	13,3	10,9	7,2	9,9	8,0	8,6
-----	-----	-----	-----	------	------	-----	-----	-----	-----

- ▶ Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, uma distribuição normal com média 8 e desvio padrão seja 2 segundos. O pesquisador desconfia, entretanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Conduza um teste de hipóteses a um nível de 4% de significância.
- ▶ Qual informação dada pelo enunciado permitiu a utilização do teste feito?



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA



Exercício 4

- ▶ Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida, através de poços artesianos no nordeste é salobra. Há muitas controvérsias sobre essa informação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor. Para eliminar a dúvida, 400 poços foram sorteados e observou-se, em 120 deles, água salobra.
- ▶ Qual seria a conclusão, ao nível de 3% de significância?



Departamento de Estatística

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

