Variáveis Aleatórias

Departamento de Estatística

Variável Aleatória

- Muitas vezes é de interesse associar valores numéricos aos resultados de um experimento aleatório.
- Para alguns experimentos os resultados já são representados por valores numéricos:
  - Número de pacientes atendidos em determinado pronto socorro.
- Porém isso não é verdade para todos os experimentos:
  - Observa-se o sexo do primogênito representado pela letra M para masculino e F para feminino.
- Em probabilidade a função que associa a cada ponto do espaço amostral um número real é denominada variável aleatória.

Variável Aleatória

- Número de óbitos na UTI, dado que o número máximo de leitos é 4;
- O número de veículos que passam por um posto de pedágio durante uma hora;
- O tempo de vida até a fadiga de um cabo de aço;
- O nível de água em uma represa num dado instante;
- O número de primogênitos do sexo masculino em dez famílias.

Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

- As variáveis aleatórias que assumem valores em um conjunto enumerável são denominadas discretas e aquelas que assumem valores num intervalo da reta real são denominadas contínuas.
- Exemplo:
  - Número de óbitos na UTI, dado que o número máximo de leitos é 4;
  - O número de veículos que passam por um posto de pedágio durante uma hora;
  - O tempo de vida até a fadiga de um cabo de aço;
  - O nível de água em uma represa num dado instante;

Exercício 1

- Suponha que uma lâmpada tenha sido posta em um soquete à meia noite de determinado dia.
- O experimento será considerado terminado quando a lâmpada se queimar.
- São anotados o dia (primeiro, segundo, terceiro, ... e a hora em que a lâmpada queimou – 24h).
- Considere que se deseja saber quantas horas a lâmpada permaneceu acesa até queimar.
- Defina a variável aleatória que deve ser utilizada.

Exercício 2

- Uma fonte radioativa está emitindo partículas α. A emissão dessas partículas é observada em um dispositivo contador durante um período de tempo especificado. Qual variável aleatória pode ser utilizada nesse problema?

Distribuição de Probabilidade de Variáveis Aleatórias Discretas

- A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, definida em um espaço amostras Ω, é uma tabela que associa a cada valor de X sua probabilidade.
- $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i, i = 1,2,\ldots$
- ou ainda:

X	x_1	x_2	x_3	...
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...

- Uma distribuição de probabilidade satisfaz
  - $0 \leq p_i \leq 1$ e
  - $\sum_i p_i = 1$.

Exercício 3

- Com dados do último censo, a assistente social de um Centro de Saúde constatou que para as famílias da região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Suponha que uma família será escolhida, aleatoriamente, nessa região e o número de filhos averiguado.
- Definimos N como sendo a variável aleatória *número de filhos*.
- Descreva a distribuição de probabilidades de N.

Exercício 4

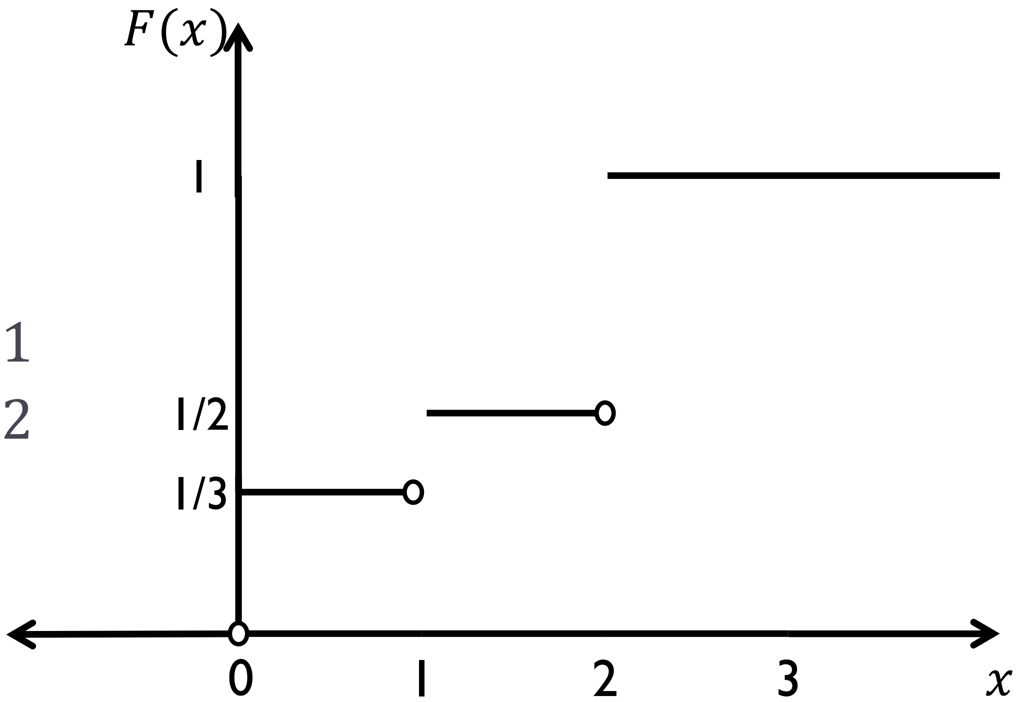
- Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido.
- Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos, na resistência do subsolo. Nos dois casos, medidas corrigidas serão necessárias, encarecendo o custo da obra.
- Com base em avaliações geológicas, admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0,1 para cada 5 metros.
- O custo básico inicial é de 100 UPCs (unidade padrão de construção) e será acrescido de $50k$, com k representando o número de alterações observadas.
- Como se comporta a variável custo das obras de fundação?
- Considere que a alteração é detectada no primeiro metro e as correções aplicadas para a perfuração dos próximos 4 metros.

Função de Distribuição de Probabilidade

- A *função de distribuição* ou *função acumulada de probabilidade* de uma variável aleatória discreta X é definida, para qualquer número real x, pela seguinte expressão:
  - $F(x) = P(X \leq x)$

Exemplo

- Suponha que a variável aleatória X tome os três valores $0, 1$ e 2, com probabilidades ${}^1/_3$, ${}^1/_6$ e ${}^1/_2$, respectivamente.
- A função de distribuição de X pode ser representada de duas maneiras:
  - $$F(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x < 0 \\ {}^1/_3, \text{se } 0 \leq x < 1 \\ {}^1/_2, \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1, \text{se x} \geq 2 \end{cases}$$



Observações

- Se X for uma variável aleatória discreta, com um número finito de valores possíveis, o gráfico da fd será constituído por segmentos horizontais (nesse caso, a fd se denomina **função em degraus**). A função F é contínua, exceto nos valores possíveis de X, nesses valores o gráfico dará um "salto" de $p(x_i)$ de magnitude.

Exercício 5

- Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No estudo, as crianças recebiam uma dose de vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose da vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas. Os resultados estão na tabela a seguir.

Doses	1	2	3	4	5
Freq.	245	288	256	145	66

- Supondo que uma criança dessa população é sorteada ao acaso, qual será a probabilidade dela ter recebido apenas 2 doses?
- Qual a probabilidade da criança ter recebido até 2 doses?
- Construa a função de distribuição da variável doses.

O Valor Esperado de uma Variável Aleatória Discreta

- Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ Seja $p(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Então, o **valor esperado** de X (ou **esperança** de X), denotado por $E(X)$ é definido como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i),$$

- Este número é também denominado o **valor médio** de X.

Exercício 6

- Os alunos do curso de Estatística têm um time de futebol que não é dos melhores. Admita que a função de probabilidade dos diversos saldos de gols (diferença entre gols feitos e sofridos) é a seguinte:

Saldo de gols	-4	-3	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1	0,05	0,05

- Encontre o saldo de gols esperado desse time.

Exercício 7

- Um fabricante produz peças tais que 10 por cento delas são defeituosas e 90 por cento são não-defeituosas. Se uma peça defeituosa for produzida, o fabricante perde US$1, enquanto uma peça não-defeituosa lhe dá um lucro de US$ 5. Considere a variável aleatória X como sendo o lucro líquido por peça. Qual o valor esperado de X?

Função de Variáveis Aleatórias

- Se X é uma variável aleatória discreta, então $Y = H(X)$, onde H é uma função real, também é uma variável aleatória discreta satisfazendo:

$$P(Y = y) = \sum_{x:H(x)=y} P(X = x)$$

Exercício 8

- Voltando ao exemplo do time de futebol, seja X a variável aleatória da diferença de gols e $Y = H(X)$ a variável aleatória que representa os pontos obtidos naquela partida (3 por vitória, 1 por empate, e 0 por derrota).
- Descreva H como função de X, os valores possíveis de Y e suas respectivas probabilidades.

Propriedades do Valor Esperado

- Seja X uma variável aleatória e seja $Y = H(X)$, tem-se

$$E(Y) = E[H(X)] = \sum_{i=0}^{\infty} H(x_i)p(x_i)\,.$$

- Seja $X = C$, em que C é uma constante, então,

$$E(X) = C.$$

- Suponha-se que C seja uma constante e X seja uma variável aleatória. Então,

$$E(CX) = CE(X).$$

Exercício 9

- Seja X uma variável aleatória que pode receber os valores $-1{,}0$ e 1 com as respectivas probabilidades:
  - $P(X = -1) = 0{,}2 \quad P(X = 0) = 0{,}5 \quad P(X = 1) = 0{,}3$
- Calcule $E(X^2)$.

A Variância de uma Variável Aleatória

- Seja X uma variável aleatória. Definimos a **variância** de X, denotada por $Var(X)$ ou ${\sigma_X}^2$, da seguinte maneira:

$$Var(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- A raiz quadrada positiva de $Var(X)$ é denominada o **desvio-padrão** de X, e é denotado por σ_X.

Exercício 10

- O serviço de meteorologia classifica o tipo de céu que é visível, em termos de "grau de nebulosidade". Uma escala de 11 categorias é empregada: 0, 1, 2, ..., 10, em que 0 representa um céu perfeitamente claro, 10 representa um céu completamente encoberto, enquanto os outros valores representam as diferentes condições intermediárias. Suponha-se que tal classificação seja feita em uma determinada estação meteorológica, em um determinado dia e hora. Seja X a variável aleatória que pode tomar um dos 11 valores acima. Admita-se que a distribuição de probabilidade de X seja:
- $p(0) = p(10) = 0{,}05; p(1) = p(2) = p(8) = p(9) = 0{,}15;$ $p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 0{,}06$
- Calcule a esperança e a variância de X.

Propriedades da Variância de uma Variável Aleatória

- Se C for uma constante,
$$V(X + C) = V(X).$$
- Se C for uma constante,
$$V(CX) = C^2V(X).$$
- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variáveis aleatórias independentes. Então,
$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n).$$

Distribuição Bernoulli

- Dizemos que uma variável X segue uma distribuição de Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Com p representando a probabilidade de *sucesso*, $0 \leq p \leq 1$, sua distribuição de probabilidade é dada por:

X	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

- Ou, de modo resumido:
  - $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0,1.$

Distribuição Binomial

- Considere a repetição de n ensaios de Bernoulli independentes e com a mesma probabilidade de sucesso p.
- A variável aleatória X que conta o número total de sucessos é denominada **Binomial** com parâmetros n e p.
- A distribuição de probabilidade de X é dada por:
  - $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1, \dots, n.$
- Com $\binom{n}{k}$ representando o coeficiente binomial calculado por:
  - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Distribuição Binomial

- Usaremos a notação $X \sim \text{Bin}(n, p)$ para indicar que a variável aleatória X segue uma distribuição binomial com parâmetros n e p.
- **Resultado:** Seja X uma variável aleatória com distribuição Binomial $(X \sim \text{Bin}(n; p))$. Então,
  - $E(X) = np$;
  - $Var(X) = np(1-p)$.

Exercício 11

- Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que têm essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. Fazendo alguma suposição que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:
- Todos serem curados;
- Pelo menos dois não serem curados;
- Ao menos 10 ficarem livres da doença.

Exercício 12

- Uma máquina impressora tem uma probabilidade constante de 0,05 de entrar em pane, em um dia qualquer, independentemente de ter tido uma pane ou não no dia (ou dias) anterior. Durante uma semana de 5 dias úteis, se a máquina não entrar em pane, um lucro de $\$S$ será obtido; se 1 ou 2 panes ocorrerem, um lucro de $\$R$ será alcançado ($R < S$); e se 3 ou mais panes ocorrerem, um lucro de $\$(-L)$ será obtido. (Admita-se que R, S e L sejam maiores do que zero; também se supõe que, se a máquina entrar em pane em qualquer dia, ela permanecerá parada durante o resto do dia.) Seja X o lucro obtido por semana de cinco dias úteis.
- Qual o lucro médio esperado por semana?