Probabilidade

Departamento de Estatística

Breve Histórico

Antoine Gombaud, auto denominado Chevalier de Méré, era um jogador inveterado que tinha boas conexões com intelectuais da renascença;

Utilizou seus conhecimentos para melhorar seu rendimento em jogos de azar, um deles era um jogo em que eram feitas apostas na presença, ou não, de ao menos um resultado 6 ao lançar um dado 4 vezes;

Pelos seus cálculos ele teria uma probabilidade de 2/3 de ganhar ao apostar na presença de ao menos um 6, sendo assim, ele apostou consistentemente na presença do 6 e ganhou bastante dinheiro utilizando essa estratégia;

Viando aumentar seus ganhos ele resolveu apostar em um jogo que consistia em apostar na saída de dois 6 ao lançar 2 dados 24 vezes, utilizando o mesmo raciocínio, ele chegou à conclusão de que teria 2/3 de probabilidade de vencer ao apostar na saída de ao menos um par de 6, como resultado, perdeu muito dinheiro.

Breve Histórico

Querendo entender o erro em seu raciocínio escreveu uma carta para o Blaise Pascal em 1654

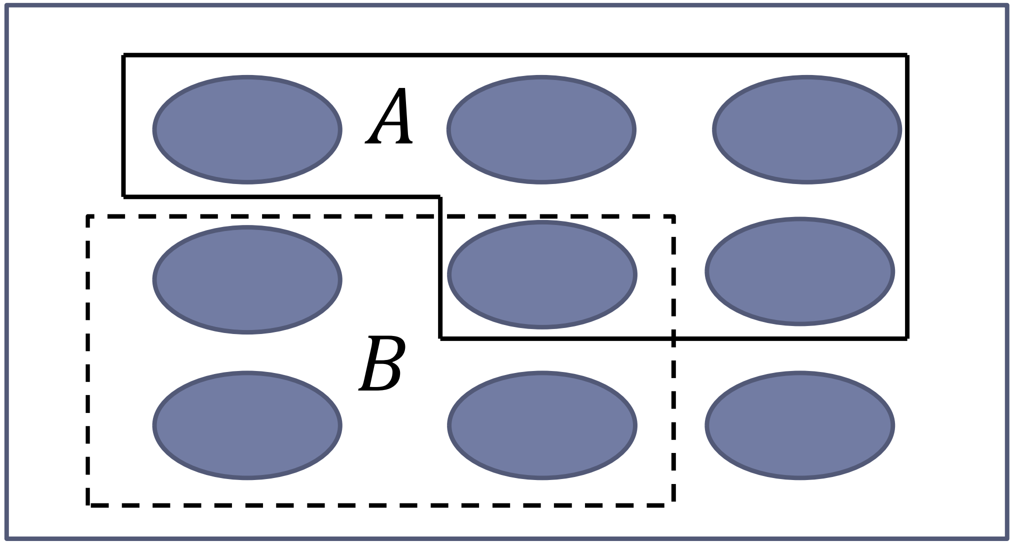
O que deu início à correspondência entre Pascal e Pierre Fermat e o desenvolvimento da teoria da probabilidade.

Introdução

- Embora a probabilidade tenha se iniciado com aplicações em jogos de azar, ela pode ser aplicada em qualquer situação de incerteza:
  - Qual será o clima de amanhã?
  - Qual será o sexo do primeiro filho de determinado casal?
  - Qual a chance de determinada pessoa desenvolver um tipo de câncer?
  - Que tipo de negócio um empreendedor deve abrir?
  - Onde investir o dinheiro economizado?
  - Qual será o próximo prefeito de determinada cidade?
  - ...
- Usando a teoria da probabilidade, é possível quantificar a chance de determinado resultado ocorrer.

Introdução

- A base matemática para a probabilidade é construída utilizando a teoria de conjuntos.
  - **<u>Definição</u>**: O espaço amostral S de um experimento é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimentos. Um evento A é um subconjunto do espaço amostral S, e diz-se que A ocorreu se o resultado efetivo do experimento pertencer a A.



Fonte: (Blitzstein e Hwang, 2015)

Espaço Amostral

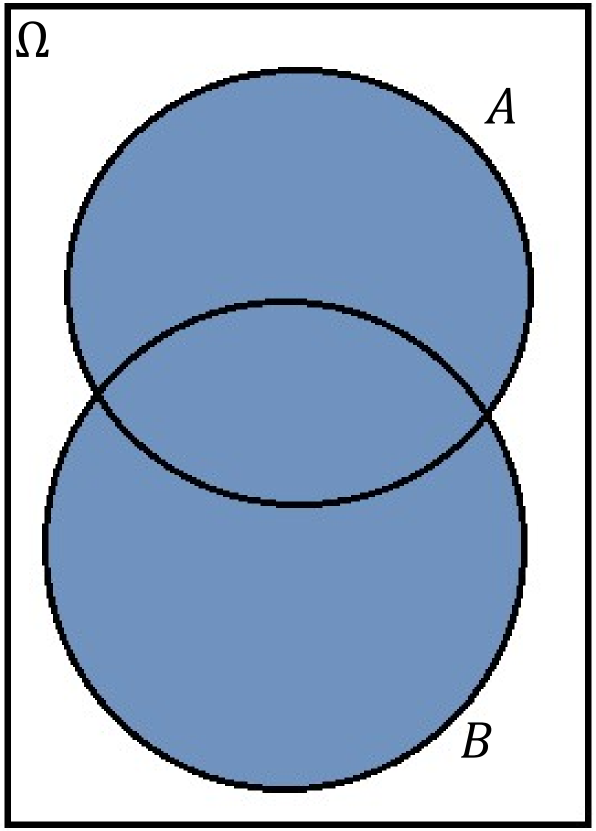
- O espaço amostral de um experimento pode ser finito ou infinito.
- Espaço amostral finito
  - Experimento 1- lançar um dado e observar a face voltada para cima ($S = \{1,2,3,4,5,6\}$)
  - Experimento 2 - extrair uma peça de uma linha de produção e a classificar como perfeita ou não ($S = \{\text{sim}, \text{não}\}$)

Espaço Amostral

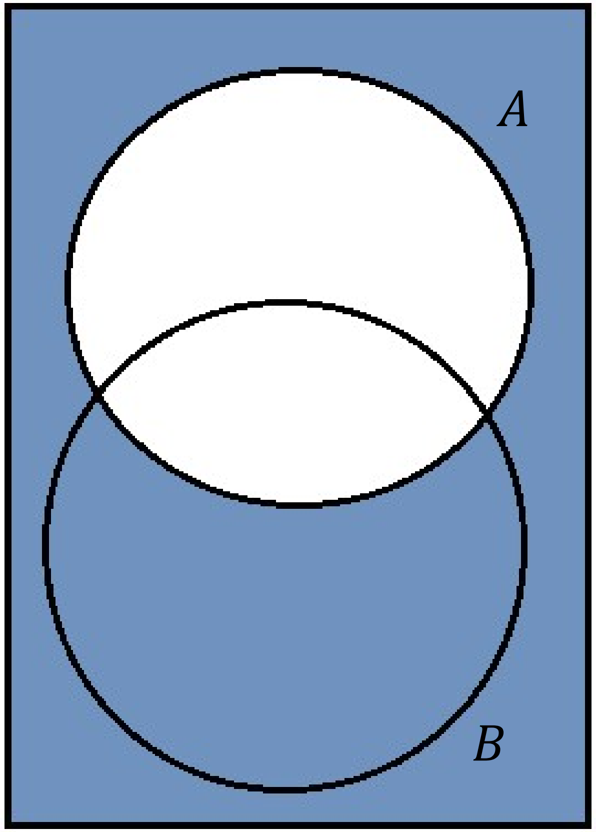
- Espaço amostral infinito
  - Infinito não-enumerável, quando a variável observada no experimento é quantitativa contínua:
    - Experimento 3 – chutar uma bola de futebol e medir a velocidade máxima que ela alcança ($S = \{x|x \geq 0\}$)
  - Infinito numerável, quando a variável observada no experimento é quantitativa discreta:
    - Experimento 4 – observar o número de carros que passam por determinado pedágio no período de uma semana ($S = \{0,1,2,3,4, \ldots\}$)
      - Na prática, esses espaço amostral é finito, porém, na maioria dos casos, tratar esses espaços amostrais como infinitos, não só facilita, como possibilita, o cálculo das probabilidades de eventos específicos.

Operações entre Eventos

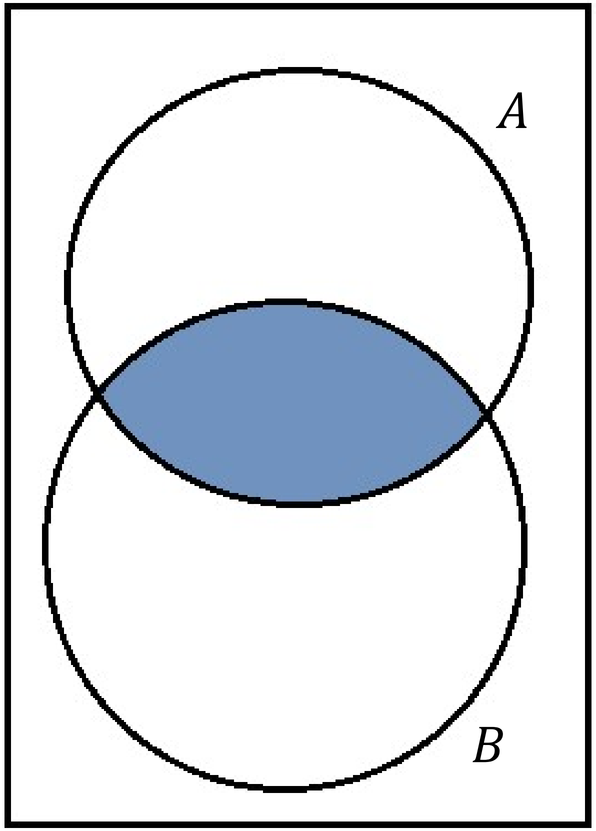
$A \cup B$



$A^c = \bar{A}$



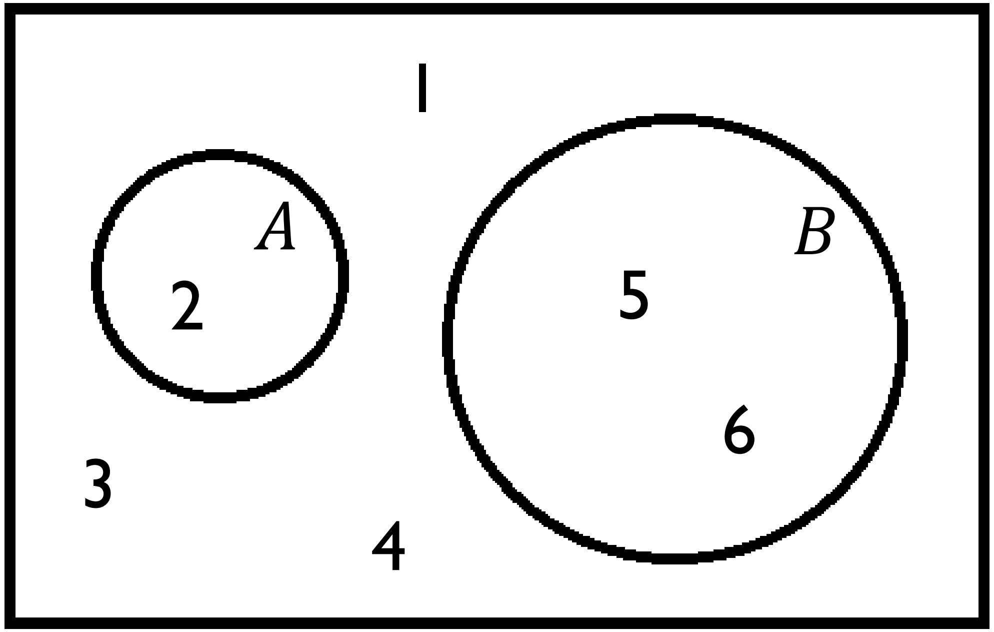
$A \cap B$



Eventos Mutuamente Exclusivos

- Eventos mutuamente exclusivos são aqueles que não podem ocorrer ao mesmo tempo.
- Exemplo:
  - Lançamento de um dado: Evento A = sair 2; Evento B = sair um valor maior do que 4.

$$A \cap B = \emptyset$$



Exercício 1

- Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral “traduza” para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:
  - Pelo menos um dos eventos ocorre;
  - O evento A ocorre, mas B não;
  - Nenhum deles ocorre;
  - Exatamente um dos eventos ocorre.

Exercício 2

- Considere os eventos A, B e C (definidos abaixo) relativos ao espaço amostral $S = \{t|t \geq 0\}$.
  - $A = \{t|t < 100\}$
  - $B = \{t|50 \leq t \leq 200\}$
  - $C = \{t|t > 150\}$
- Encontre os conjuntos:
  - $A \cup B$,
  - $A \cap B$,
  - $A \cap (B \cup C)$,
  - $A \cap B \cap C$,
  - $(A \cup C)^c$.

Definição de Probabilidade

- Definição:
  - Seja ε um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a ε. A cada evento A associaremos um número real representado por $P(A)$ e denominado ***probabilidade de A***, que satisfaça às seguintes propriedades:
    - $0 \leq P(A) \leq 1$;
    - $P(\Omega) = 1$;
    - Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
    - Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então, $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Espaço Amostral Finito

- A princípio, iremos considerar, apenas, experimentos cujos espaços amostrais sejam finitos.
  - $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

Espaço Amostral Finito

- Para encontrar $P(A)$ nesses casos, é necessário, inicialmente, considerar o evento formado por um resultado simples – evento simples, ou elementar $(A = \{a_i\})$.
  - A cada evento simples $\{a_i\}$ será associado um valor p_i, denominado probabilidade de $\{a_i\}$, que satisfaça as seguintes condições:
    - $p_i \geq 0, i = 1,2, \dots, k$;
    - $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.
- Em seguida pode se considerar um evento A_j constituído por r resultados, com $1 \leq r \leq k$. $\left(A_j = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}\}\right)$, consequentemente:
- $P\left(A_j\right) = p_{j_1} + p_{j_2} + \cdots + p_{j_r}$.

Exercício 3

- Suponha-se que somente três resultados sejam possíveis em um determinado experimento aleatório, a saber, a_1, a_2 e a_3. Além disso, suponha-se que a_1 seja duas vezes mais provável de ocorrer que a_2, e que a_2 seja duas vezes mais provável de ocorrer que a_3. Quais as probabilidades de a_1, a_2 e a_3, cada, ocorrerem?

Resultados Igualmente Verossímeis

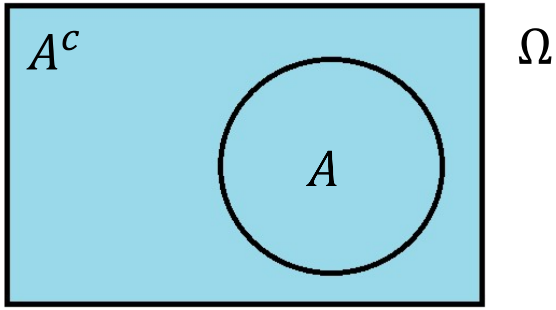
- A hipótese mais comumente feita para espaços amostrais finitos é a de que todos os resultados sejam igualmente verossímeis.
  - Essa hipótese não deve ser tomada como certa, mas sim justificada para cada caso.
- Se todos os k resultados forem igualmente verossímeis, segue-se que cada probabilidade será dada por $p_i = {}^{1}/_{k}$.
  - $p_i \geq 0, i = 1,2, \dots, k$;
  - $p_i = p_j = p = \frac{1}{k}$, para quaisquer i e j, com , $i, j = 1,2, \dots, k$
  - $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = k.p = k.\frac{1}{k} = 1$.
- Logo, para qualquer evento A formado por r resultados, tem-se:
  - $P(A) = {}^{r}/_{k}$.
  - $P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A \text{ pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}{\text{número total de casos pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}$.

Exercício 4

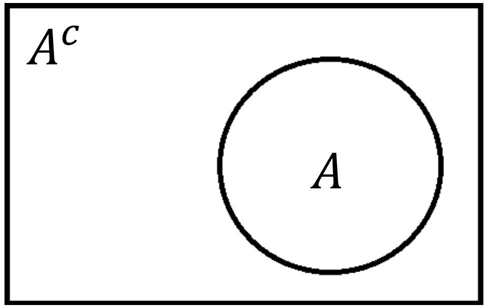
- Em uma universidade, 2000 estudantes do curso de medicina, em determinado ano, foram classificados de acordo com o tipo de esporte que praticam. Futebol é praticado por 260 estudantes, natação por 185 estudantes e musculação por 210 estudantes, sendo que alguns estudantes praticam mais de um desses esportes. Assim, tem-se 42 estudantes que praticam natação e musculação, 12 futebol e musculação, 18 futebol e natação e 3 praticam as três modalidades. Se um desses estudantes é sorteado ao acaso, qual é a probabilidade de:
  - Praticar somente musculação;
  - Praticar pelo menos um destes esportes;
  - Praticar pelo menos dois destes esportes;
  - Não praticar nenhum destes esportes.

Algumas Propriedades

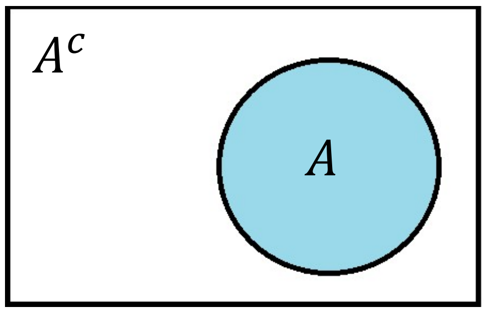
- $P(A \cup A^c) = 1;$



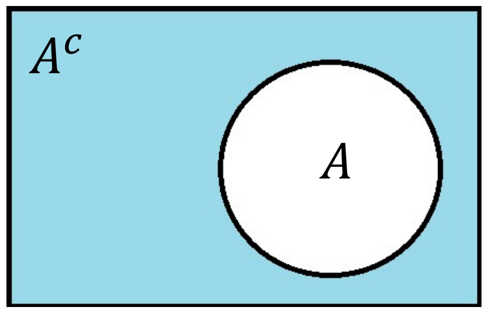
- $P(A \cap A^c) = 0;$



- $P(A) = 1 - P(A^c).$

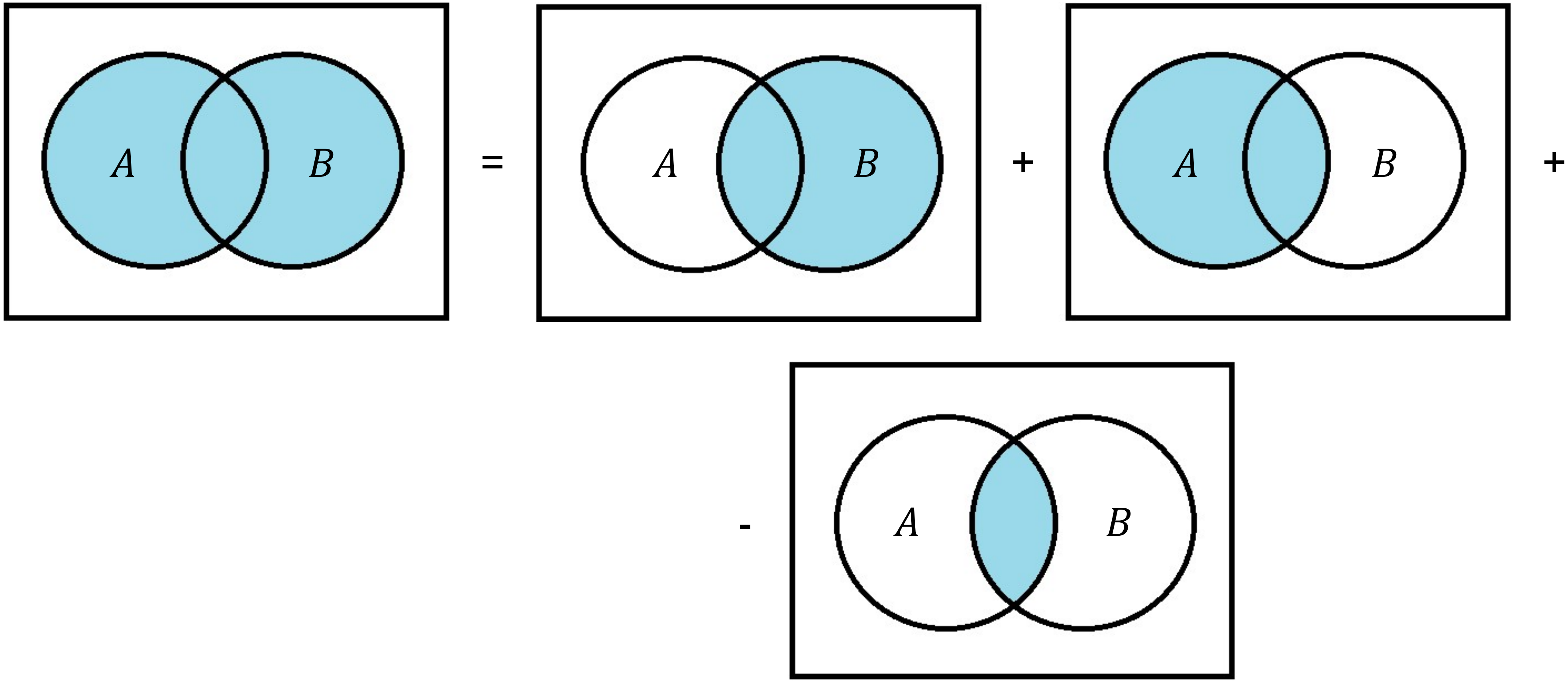


$= 1 -$



Algumas Propriedades

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;



Exercício 5

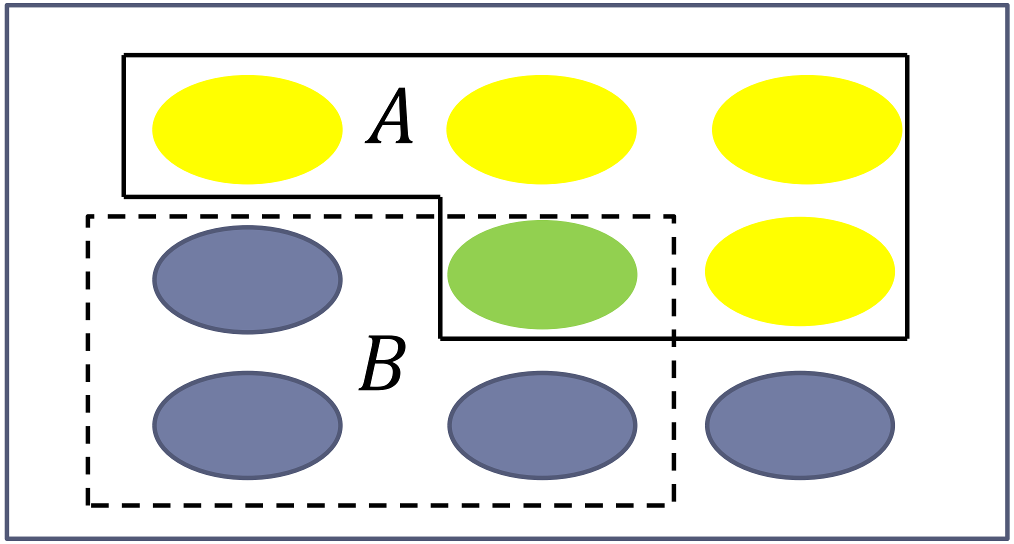
- Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, tais que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0{,}5$ e $P(A \cap B) = 0{,}1$.
- Determine o valor de p.

Probabilidade Condicional (definição)

- Muitas vezes existe o interesse em determinar a probabilidade de um evento B, dado que já se conhece o resultado de um outro evento A;
- A probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A $\left(P(B|A)\right)$ é dada pela seguinte expressão:
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, desde que $P(A) > 0$.
- Para $P(A) = 0$, temos $P(B|A) = P(B)$.

Probabilidade Condicional (conceito)

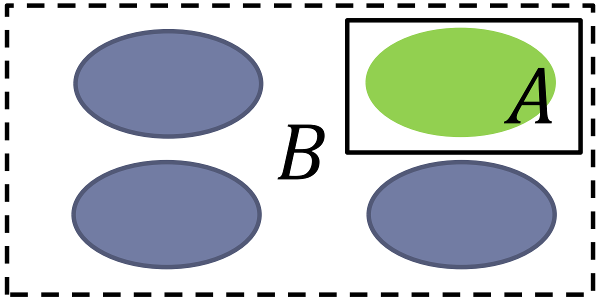
- Espaço amostral original, suposto igualmente provável.



$$P(A) = \frac{5}{9} \qquad P(B) = \frac{4}{9}$$

$$P\left(A \cap B = \frac{1}{9}\right)$$

- Quero calcular a probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B ocorreu



$$P(A|B) = \frac{1}{4}$$

- Fonte: (Blitzstein e Hwang, 2015)

Exercício 6

- Uma classe de estatística teve a seguinte distribuição das notas finais: 4 do sexo masculino e 6 do sexo feminino foram reprovados, 8 do sexo masculino e 14 do sexo feminino foram aprovados. Para um aluno sorteado dessa classe, denote por M se o aluno escolhido for do sexo masculino e por A se o aluno foi aprovado. Calcule:
  - $P(A \cup M^c)$, $P(A^c \cap M^c)$
  - $P(A|M)$, $P\ (M^c|A)$, $P(M|A)$

Regra Multiplicativa

- Sai diretamente da probabilidade condicional:
- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$
- Essa regra é de grande utilidade na verificação de dependência entre os eventos envolvidos.

Exercício 7

- Uma urna contem duas bolas brancas e três vermelhas. Suponha que são sorteadas duas bolas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de:
- As duas bolas sorteadas serem vermelhas?
- A primeira ser branca e a segunda vermelha?
- Uma ser branca e a outra vermelha (independentemente de ordem)?

Eventos Independentes

- Dois eventos são considerados independentes quando a ocorrência de um não influencia na ocorrência ou não-ocorrência do outro;
- Logo, se dois eventos, A e B, são independentes tem-se:
- $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$;
- Ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
  - OBS: Os termos mutuamente exclusivos e independentes não são sinonimos; basta lembrar que eventos mutuamente exclusivos não possuem interseção.

Algumas Propriedades

- Independência: se os eventos A e B são independentes, então A, B, A^C e B^C serão independentes entre si:
  - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A^C \cap B^C) = P(A^C) \cdot \mathrm{P}(B^C)$
  - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap B^C) = P(A) \cdot \mathrm{P}(B^C)$
  - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A^C \cap B) = P(A^C) \cdot \mathrm{P}(B)$
- Regra multiplicativa: Considere três eventos A, B e C de um mesmo espaço amostral, então:
  - $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B \cap C)$ ou
  - $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$

Generalizando

- Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos independentes, então:
  - $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$

- Regra multiplicativa para n eventos:
  - $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) =$
    $P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

Exercício 8

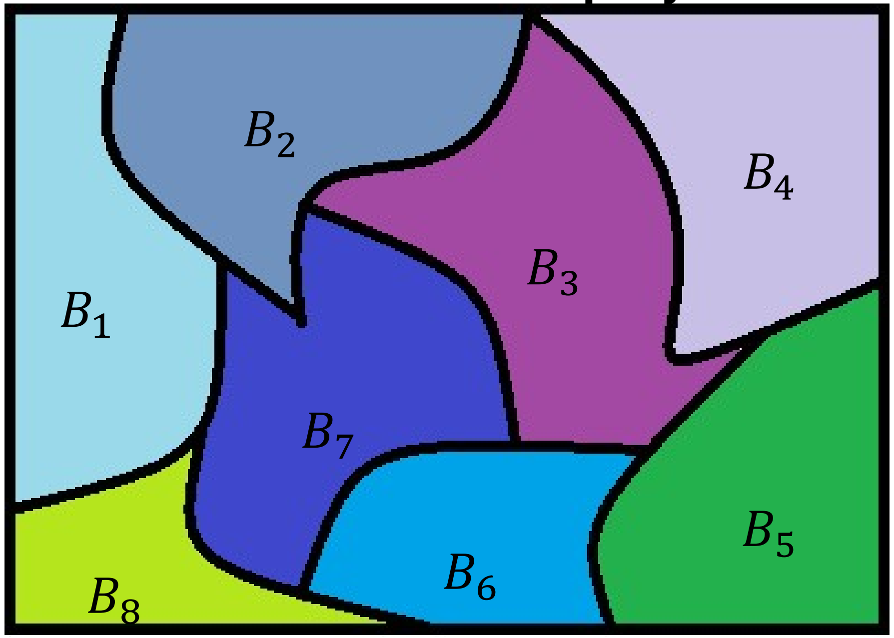
- Chevalier de Mèrè ganhou dinheiro com a estratégia de apostar na presença de ao menos um resultado igual a 6 a lançar o mesmo dado 4 vezes e que perdeu dinheiro ao apostar na presença de ao menos um par de 6 ao lançar os mesmos 2 dados 24 vezes. Para os 2 jogos ele acreditava que a sua probabilidade de ganho era de 2/3. Qual a probabilidade correta de ganhar nesses 2 jogos? Chevalier de Mèrè estava correto em seus cálculos?

Exercício 9

- Se $P(A \cup B) = 0{,}8; P(A) = 0{,}5$ e $P(B) = x$, determine o valor de x no caso de:
- No caso destes dois eventos serem independentes;
- No caso destes dois eventos serem mutuamente exclusivos.

Partição do Espaço Amostral

- Uma partição do espaço amostral é dada por um conjunto de eventos mutuamente exclusivos que quando unidos formam o espaço amostral:



- $\Omega = \bigcup_{k=1}^{8} B_k$

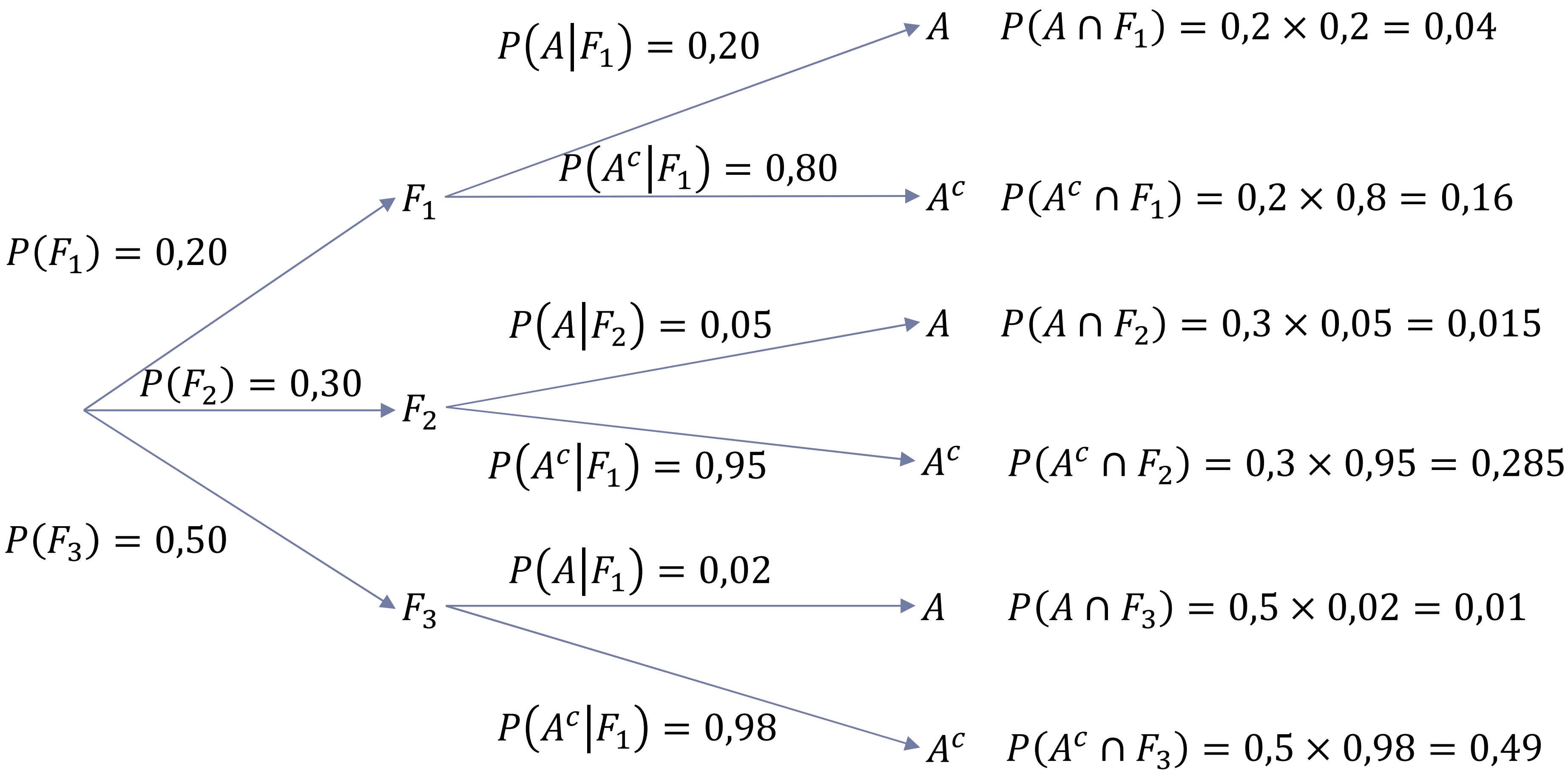
Exemplo

- Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazenda F_2 e 50% de F_3.
- Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.
- Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.
- Para um galão escolhido ao acaso, vamos analisar o leite para decidir sobre sua adulteração ou não.

Exemplo

- Se denotarmos por A o evento "o leite está adulterado", temos:
  - $P(F_1) = 0{,}20$ e $P(A|F_1) = 0{,}20$
  - $P(F_2) = 0{,}30$ e $P(A|F_2) = 0{,}05$
  - $P(F_3) = 0{,}50$ e $P(A|F_3) = 0{,}02$
- Além disso, F_1, F_2 e F_3 formam uma partição do espaço amostral, já que uma dada amostra de leite vem, necessariamente, de uma e apenas uma das três fazendas.

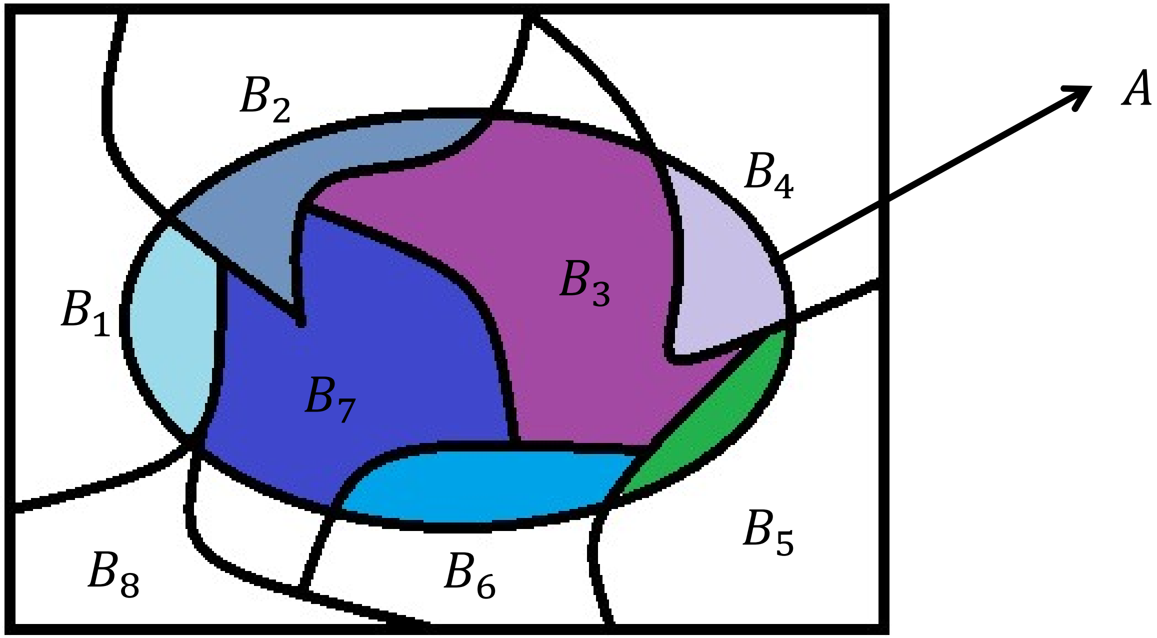
Exemplo



$P(F_1) = 0{,}20$
$P(F_2) = 0{,}30$
$P(F_3) = 0{,}50$
F_1
F_2
F_3
$P(A|F_1) = 0{,}20$
$P(A^c|F_1) = 0{,}80$
$P(A|F_2) = 0{,}05$
$P(A^c|F_1) = 0{,}95$
$P(A|F_1) = 0{,}02$
$P(A^c|F_1) = 0{,}98$
A
A^c
$P(A \cap F_1) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$
$P(A^c \cap F_1) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$
$P(A \cap F_2) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$
$P(A^c \cap F_2) = 0{,}3 \times 0{,}95 = 0{,}285$
$P(A \cap F_3) = 0{,}5 \times 0{,}02 = 0{,}01$
$P(A^c \cap F_3) = 0{,}5 \times 0{,}98 = 0{,}49$

Teorema da Probabilidade Total

- Dado um evento A e uma partição do espaço amostra $(B_1, \ldots, B_k)$ tem-se:

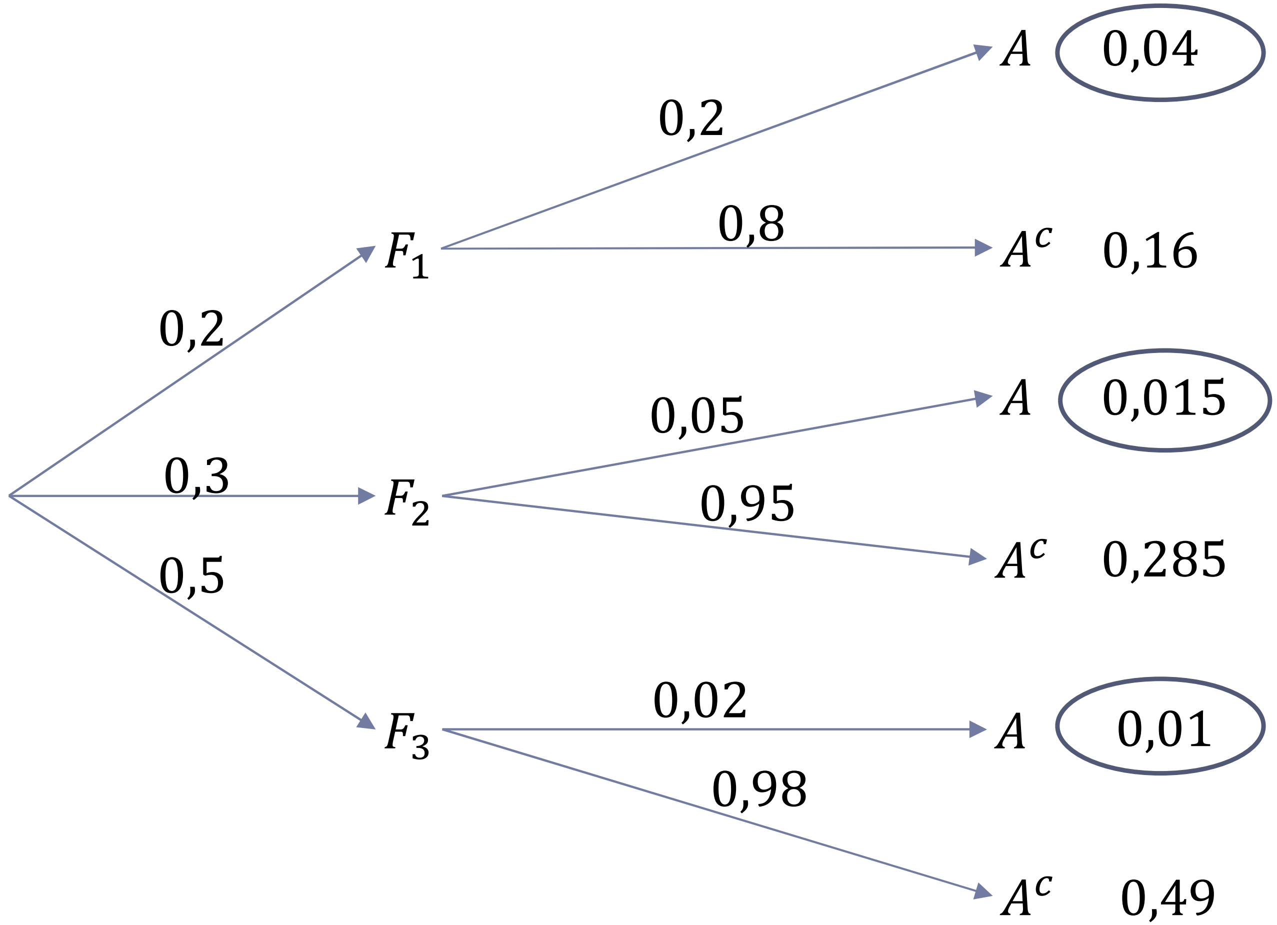


- $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$

Exemplo

- Temos as seguintes informações do enunciado:
  - $P(F_1) = 0{,}20$ e $P(A|F_1) = 0{,}20$
  - $P(F_2) = 0{,}30$ e $P(A|F_2) = 0{,}05$
  - $P(F_3) = 0{,}50$ e $P(A|F_3) = 0{,}02$
- Queremos saber a probabilidade do evento A "o leite está adulterado" ocorrer:
  - $P(A) = P(A \cap F_1) + P(A \cap F_2) + P(A \cap F_3)$
  - $P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3)$
  - $P(A) = 0{,}20 \cdot 0{,}20 + 0{,}05 \cdot 0{,}30 + 0{,}02 \cdot 0{,}50$
  - $P(A) = 0{,}04 + 0{,}015 + 0{,}01$
  - $P(A) = 0{,}065$

Exemplo

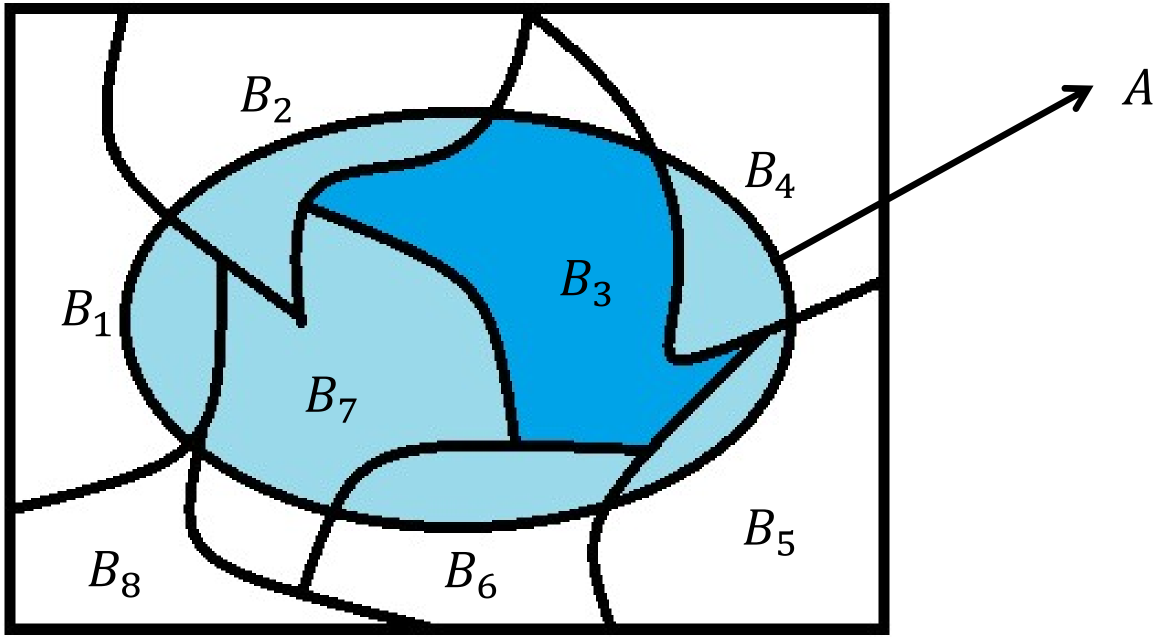


$$P(A) = 0{,}04 + 0{,}015 + 0{,}01$$

$$P(A) = 0{,}065$$

Teorema de Bayes

- Dado um evento A e uma partição do espaço amostra $(B_1, \dots, B_k)$ tem-se:

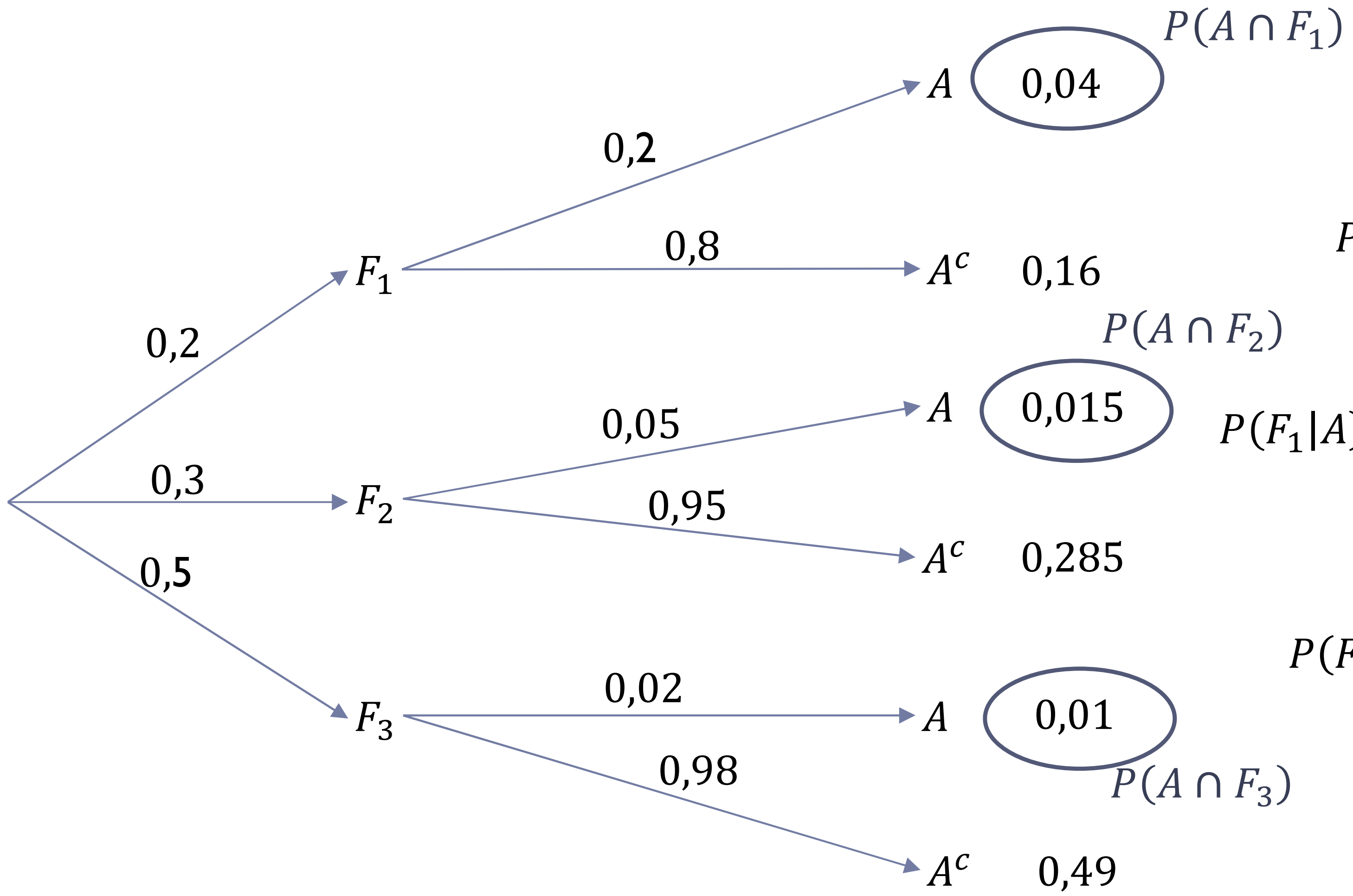


- $P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$

Exemplo

- Podemos, ainda, estar interessados em saber qual a probabilidade de que a amostra adulterada ter sido obtida do leite fornecido pela fazenda F_1, ou seja, $P(F_1|A)$:
  - $P(F_1|A) = \frac{P(A \cap F_1)}{P(A)}$
  - $P(F_1|A) = \frac{P(A|F_1)P(F_1)}{P(A|F_1)P(F_1)+P(A|F_2)P(F_2)+P(A|F_3)P(F_3)}$
  - $P(F_1|A) = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}20}{0{,}20 \cdot 0{,}20 + \ {,}05 \cdot 0{,}30 + 0{,}02 \cdot 0{,}50}$
  - $P(F_1|A) = \frac{0{,}04}{0{,}065} = 0{,}615$

Exemplo



$$P(F_1|A) = \frac{P(A \cap F_1)}{P(A)}$$

$$P(F_1|A) = \frac{0{,}04}{0{,}04 + 0{,}015 + 0{,}01}$$

$$P(F_1|A) = \frac{0{,}04}{0{,}065} = 0{,}615$$

Exercício 10

- Três candidatos disputam as eleições para o Governo do Estado. O candidato do partido de direita tem 30% de probabilidade de vitória, o de centro tem 30% e o da esquerda 40%. Em sendo eleito, a probabilidade de dar, efetivamente, prioridade para Educação e Saúde é de 0,4; 0,6 e 0,9 para os candidatos de direita, centro e esquerda, respectivamente.
  - Qual é a probabilidade de não ser dada prioridade a essas áreas no próximo governo?
  - Se a área teve prioridade, qual a probabilidade do candidato de direita ter ganho a eleição?

Exercício 11

- Uma família viaja ao litoral para passar um fim de semana. A probabilidade de congestionamento na estrada é de 0,6. Havendo congestionamento, a probabilidade dos seus dois filhos brigarem no carro é de 0,8 e, sem congestionamento, a briga pode aparecer com probabilidade 0,4. Quando há briga, com ou sem congestionamento, a probabilidade do pai perder a paciência com os filhos é de 0,7. É claro que havendo congestionamento o pai pode perder a paciência com os filhos mesmo sem brigas, o que aconteceria com probabilidade 0,5. Quando não há nem congestionamento, nem briga, o pai dirige tranquilo e não perde a paciência. Determine a probabilidade de:
  - Não ter havido congestionamento se o pai não perdeu a paciência com seus filhos;
  - Ter havido briga, dado que o pai perdeu a paciência.

Referência

- Blitzstein, J. K.; Hwang, J. Introduction to Probability. New York: Chapman & Hall, 2015.