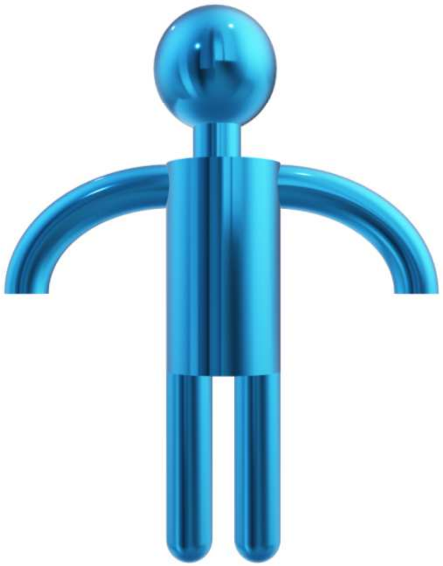
Testes de Hipóteses 2

Departamento de Estatística

Introdução

$$X = \left\{ \text{concentração em} \frac{\text{unidades}}{\text{ml}} \text{ de determinada vitamina no sangue} \right\}$$

$\mu = 10\,;\ \sigma = ?$

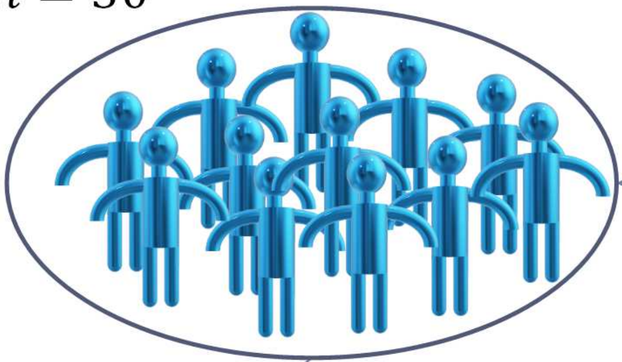


$\mu = 14\,;\ \sigma = ?$

$\mu = 18\,;\ \sigma = ?$

Situação 1

$n = 30$



$(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu > 10$ Suplemento eficaz (Hipótese alternativa (H_a))

ou

$\mu \leq 10$ Suplemento não eficaz (Hipótese nula (H_0))

$\bar{x}_{obs} = 13{,}91$ e $s = 5{,}82$

Estatística do Teste

- Como não conhecemos σ^2, a variância populacional, não podemos utilizar a distribuição Normal;
- Nesses casos, vamos utilizar a distribuição t de Student:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

  - T segue uma distribuição t de Student com $n - 1$ graus de liberdade,
  - $\bar{X}$ representa a média amostral
  - μ é a média que se deseja conhecer,
  - s é o desvio padrão amostral;
  - n é o tamanho amostral.

Resolução

- Valores importantes:
- $\bar{x}_{obs} = 13{,}91$
- $H_0: \mu \leq 10 \ vs \ H_a: \mu > 10$
- $s = 5{,}82$ (desvio padrão amostral)
- $n = 30$ (tamanho da amostra)
- $n - 1 = 29$ (graus de liberdade)
- $\alpha = 0{,}01$ (nível de significância)
- $t_{obs} = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{13{,}91-10}{5{,}82/\sqrt{30}} = \frac{3{,}91}{1{,}063} = 3{,}678$ (estatística do teste)

Cálculo do valor crítico

$$n - 1 = 29 \text{ (graus de liberdade)}$$

$$\alpha = 0{,}01 \text{ (nível de significância)}$$

$$RR: \{t | t > 2{,}462\}$$

28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,462	2,7564
30	0,2556	0,53	0,8538	1,3104	1,6973	1,812	1,9546	2,0423	2,147	2,4573	2,75
35	0,2553	0,5292	0,852	1,3062	1,6896	1,803	1,9438	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238
40	0,255	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,4233	2,7045
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	1,787	1,9244	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	1,7808	1,917	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603
120	0,2539	0,5258	0,8446	1,2886	1,6577	1,7656	1,8987	1,9799	2,0763	2,3578	2,6174
∞	0,2534	0,5246	0,842	1,2824	1,6464	1,7525	1,8829	1,9623	2,0564	2,3301	2,5808
$P(t > t_{obs}) = \alpha$	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,04**	**0,03**	**0,025**	**0,02**	**0,01**	**0,005**

Probabilidades da cauda direita

Resultados

- Como $3{,}678 = t_{obs} > t_c = 2{,}462$, conclui-se existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 1% de significância;
- Ou seja, o suplemento tem efeito.

Cálculo do p-valor

$$t_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{13{,}91 - 10}{5{,}82/\sqrt{30}} = \frac{3{,}91}{1{,}063} = 3{,}678$$

$$H_0: \mu \leq 10 \; vs \; H_a: \mu > 10$$

$$P(t > 3{,}678) < P(t > 2{,}7564) = 0{,}005$$

28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,462	2,7564
30	0,2556	0,53	0,8538	1,3104	1,6973	1,812	1,9546	2,0423	2,147	2,4573	2,75
35	0,2553	0,5292	0,852	1,3062	1,6896	1,803	1,9438	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238
40	0,255	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,4233	2,7045
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	1,787	1,9244	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	1,7808	1,917	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603
120	0,2539	0,5258	0,8446	1,2886	1,6577	1,7656	1,8987	1,9799	2,0763	2,3578	2,6174
∞	0,2534	0,5246	0,842	1,2824	1,6464	1,7525	1,8829	1,9623	2,0564	2,3301	2,5808
$P(t > t_{obs}) = \alpha$	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,04**	**0,03**	**0,025**	**0,02**	**0,01**	**0,005**

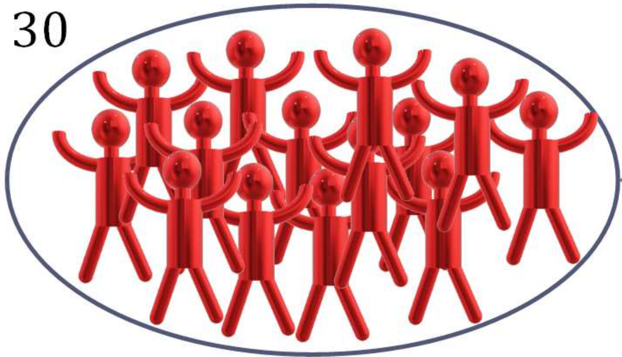
Probabilidades da cauda direita

Conclusão

- Como o p-valor foi pequeno o suficiente para ser considerado nulo pela calculadora, e como essa calculadora trabalha com até 3 casas decimais, costuma-se dizer que p-valor < 0,001.
- Conclui-se, então, que existem fortes evidências para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0 ($p - valor < 0{,}1\%$), baseado no valor da média amostral obtido, é bem inferior ao erro considerado como aceitável de 1% (nível de significância).

Situação 2

$n = 30$



$(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu < 18$ Remédio eficaz (Hipótese alternativa (H_a))

ou

$\mu \geq 18$ Remédio não eficaz (Hipótese nula (H_0))

$\bar{x}_{obs} = 16{,}07$ e $s = 5{,}51$ $\alpha = 0{,}05$

Resolução

- Valores importantes:
- $\bar{x}_{obs} = 16{,}07$
- $H_0: \mu \geq 18 \; vs \; H_a: \mu < 18$
- $s = 5{,}51$ (desvio padrão amostral)
- $n = 30$ (tamanho da amostra)
- $n - 1 = 29$ (graus de liberdade)
- $\alpha = 0{,}05$ (nível de significância)
- $t_{obs} = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{16{,}07-18}{5{,}51/\sqrt{30}} = \frac{-1{,}93}{1{,}006} = -1{,}918$ (estatística do teste)

Cálculo do valor crítico

$n - 1 = 29$ (graus de liberdade)

$\alpha = 0{,}05$ (nível de significância)

$RR: \{t | t < -1{,}6991\}$

28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,462	2,7564
30	0,2556	0,53	0,8538	1,3104	1,6973	1,812	1,9546	2,0423	2,147	2,4573	2,75
35	0,2553	0,5292	0,852	1,3062	1,6896	1,803	1,9438	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238
40	0,255	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,4233	2,7045
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	1,787	1,9244	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	1,7808	1,917	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603
120	0,2539	0,5258	0,8446	1,2886	1,6577	1,7656	1,8987	1,9799	2,0763	2,3578	2,6174
∞	0,2534	0,5246	0,842	1,2824	1,6464	1,7525	1,8829	1,9623	2,0564	2,3301	2,5808
$P(t > t_{obs}) = \alpha$	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,04**	**0,03**	**0,025**	**0,02**	**0,01**	**0,005**

Probabilidades da cauda direita

Resultados

- Como $-1{,}918 = t_{obs} < t_c = -1{,}6991$, conclui-se que existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 5% de significância;
- Ou seja, o medicamento diminuiu a concentração da vitamina no sangue dos voluntários.

Cálculo do p-valor

$$t_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{16{,}07 - 18}{5{,}51/\sqrt{30}} = \frac{-1{,}93}{1{,}006} = -1{,}918$$

$$H_0: \mu \geq 18 \; vs \; H_a: \mu < 18$$

$$0{,}03 < P(t < -1{,}918) < 0{,}04$$

28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,462	2,7564
30	0,2556	0,53	0,8538	1,3104	1,6973	1,812	1,9546	2,0423	2,147	2,4573	2,75
35	0,2553	0,5292	0,852	1,3062	1,6896	1,803	1,9438	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238
40	0,255	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,4233	2,7045
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	1,787	1,9244	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	1,7808	1,917	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603
120	0,2539	0,5258	0,8446	1,2886	1,6577	1,7656	1,8987	1,9799	2,0763	2,3578	2,6174
∞	0,2534	0,5246	0,842	1,2824	1,6464	1,7525	1,8829	1,9623	2,0564	2,3301	2,5808
$P(t > t_{obs}) = \alpha$	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,04**	**0,03**	**0,025**	**0,02**	**0,01**	**0,005**

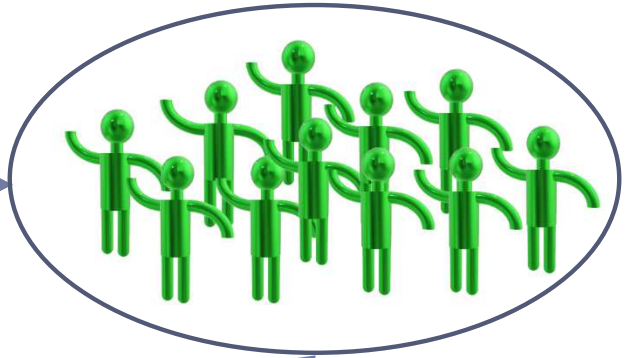
Probabilidades da cauda direita

Resultados

- Como o p-valor foi entre 3% e 4%, conclui-se que existem evidências o suficiente para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0, baseado no valor da média amostral obtido, é inferior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).

Situação 3

$n = 30$



$(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu < 14$ Deficiência da vitamina (Hipótese alternativa (H_a))

$\mu = 14$ Vitamina dentro do normal (Hipótese nula (H_0))

$\mu > 14$ Excesso da vitamina (Hipótese alternativa (H_a))

$\bar{x}_{obs} = 12{,}65$ e $s = 5{,}93$ $\alpha = 0{,}05$

Resolução

- Valores importantes:
- $\bar{x}_{obs} = 12{,}65$
- $H_0: \mu = 14 \; vs \; H_a: \mu \neq 14$
- $s = 5{,}93$ (desvio padrão amostral)
- $n = 30$ (tamanho da amostra)
- $n - 1 = 29$ (graus de liberdade)
- $\alpha = 0{,}05$ (nível de significância)
- $t_{obs} = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{12{,}65-14}{5{,}93/\sqrt{30}} = \frac{-1{,}35}{1{,}083} = -1{,}247$ (estatística do teste)

Cálculo do valor crítico

$n - 1 = 29$ (graus de liberdade)

$\alpha = 0{,}05$ (nível de significância)

$RR: \{t | t < -2{,}0452 \text{ ou } t > 2{,}0452\}$

28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,462	2,7564
30	0,2556	0,53	0,8538	1,3104	1,6973	1,812	1,9546	2,0423	2,147	2,4573	2,75
35	0,2553	0,5292	0,852	1,3062	1,6896	1,803	1,9438	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238
40	0,255	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,4233	2,7045
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	1,787	1,9244	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	1,7808	1,917	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603
120	0,2539	0,5258	0,8446	1,2886	1,6577	1,7656	1,8987	1,9799	2,0763	2,3578	2,6174
∞	0,2534	0,5246	0,842	1,2824	1,6464	1,7525	1,8829	1,9623	2,0564	2,3301	2,5808
$P(t > t_{obs}) = \alpha$	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,04**	**0,03**	**0,025**	**0,02**	**0,01**	**0,005**

Probabilidades da cauda direita

Resultados

- Como $-1{,}247 = t \in (-2{,}0452\,;2{,}0452)$, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 5% de significância;
- Ou seja, conclui-se que não existe evidência para afirmar que a população tenha deficiência ou excesso da vitamina, a um nível de 5% de significância.

Cálculo do p-valor

$$t_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{12{,}65 - 14}{5{,}93/\sqrt{30}} = \frac{-1{,}35}{1{,}083} = -1{,}247$$

$$H_0: \mu = 14 \ vs \ H_a: \mu \neq 14$$

$$0{,}2 < 2 \times P(t < -1{,}247) < 0{,}4$$

28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	1,8166	1,9601	2,0484	2,1539	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	1,8142	1,9573	2,0452	2,1503	2,462	2,7564
30	0,2556	0,53	0,8538	1,3104	1,6973	1,812	1,9546	2,0423	2,147	2,4573	2,75
35	0,2553	0,5292	0,852	1,3062	1,6896	1,803	1,9438	2,0301	2,1332	2,4377	2,7238
40	0,255	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	1,7963	1,9357	2,0211	2,1229	2,4233	2,7045
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	1,787	1,9244	2,0086	2,1087	2,4033	2,6778
60	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	1,7808	1,917	2,0003	2,0994	2,3901	2,6603
120	0,2539	0,5258	0,8446	1,2886	1,6577	1,7656	1,8987	1,9799	2,0763	2,3578	2,6174
∞	0,2534	0,5246	0,842	1,2824	1,6464	1,7525	1,8829	1,9623	2,0564	2,3301	2,5808
$P(t > t_{obs}) = \alpha$	**0,4**	**0,3**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,04**	**0,03**	**0,025**	**0,02**	**0,01**	**0,005**

Probabilidades da cauda direita

Resultados

- Como o p-valor foi entre 0,2 e 0,4, conclui-se que não existem evidências o suficiente para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0, baseado no valor da média amostral obtido, é superior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).

Exercício 1

- Uma amostra com 10 observações de uma variável aleatória normal forneceu média de 5,5 e variância igual a 4. Deseja-se testar, ao nível de significância de 5%, se a média na população é igual ou é menor que 6. Qual é a conclusão?