Testes de Hipóteses

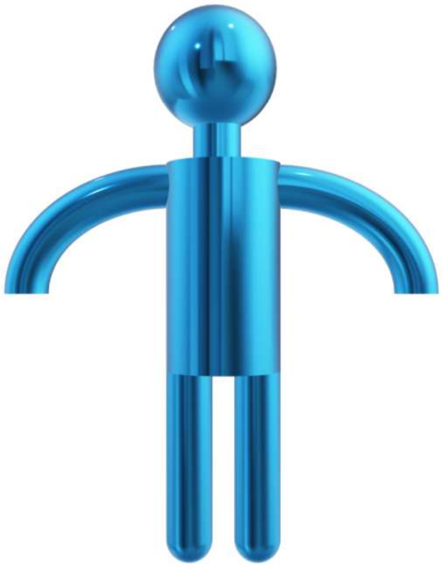
Departamento de Estatística

Introdução

$$X = \left\{ \text{concentração em} \frac{\text{unidades}}{\text{ml}} \text{ de determinada vitamina no sangue} \right\}$$

$X_S \sim N(14, 6^2)$

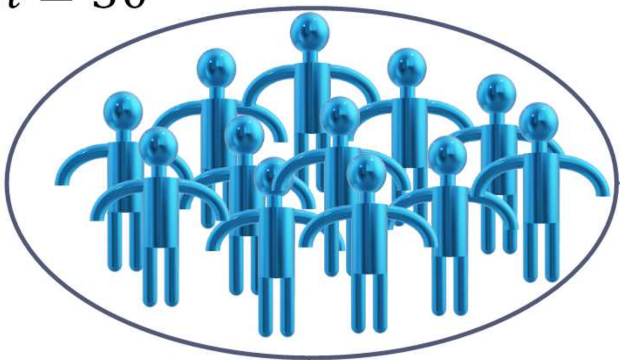
$X_D \sim N(10, 6^2)$



$X_E \sim N(18, 6^2)$

Situação 1

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

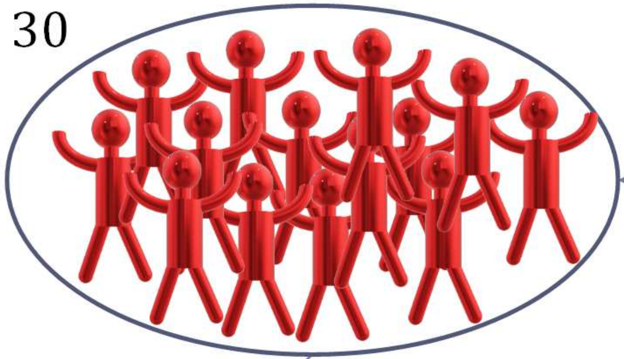
$\mu = 14$ Suplemento eficaz

ou

$\mu = 10$ Suplemento não eficaz

Situação 2

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

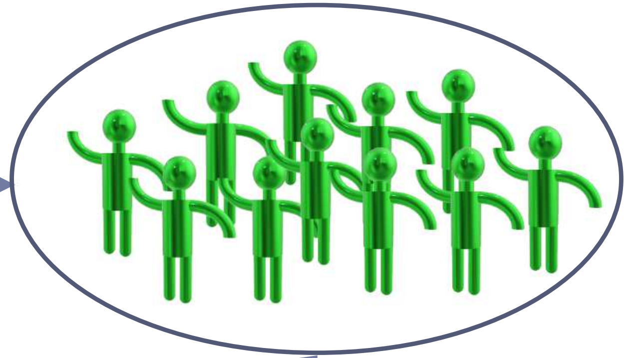
$\mu = 14$ Remédio eficaz

ou

$\mu = 18$ Remédio não eficaz

Situação 3

$n = 30$



$(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu = 10$ Deficiência da vitamina

$\mu = 14$ Vitamina dentro do normal

$\mu = 18$ Excesso da vitamina

Hipóteses de Interesse

- Hipótese Nula (H_0):
  - Hipótese conservadora, aquela que mantém o *status quo*, não desafia o que já se sabe, ou o que foi especificado;
- Nos nossos exemplos temos:
- Situação 1:
  - H_0: $\mu = 10 \text{ unidades/ml}$,
    - pois o remédio foi dado à pessoas com deficiência da vitamina, cuja média do componente no sangue é 10 unidades/ml, ou seja, a hipótese conservadora é o remédio não faz efeito.
- Situação 2:
  - H_0: $\mu = 18 \text{ unidades/ml}$,
    - pois o remédio foi dado à pessoas com excesso da vitamina, cuja média do componente no sangue é 18 unidades/ml.
- Situação 3:
  - H_0: $\mu = 14 \text{ unidades/ml}$,
    - pois quando não se sabe nada sobre a população, supõe-se o normal.

Hipóteses de Interesse

- Hipótese Alternativa (H_a):
  - Hipótese inovadora, desafia o que se é conhecido, traz uma situação ou conhecimento novo;
- Nos nossos exemplos temos
- Situação 1:
  - $H_a\colon \mu > 10 \text{ unidades/ml}$
    - Se o medicamento tiver o efeito desejado $\mu > 10$.
- Situação 2
  - $H_a\colon \mu < 18 \text{ unidades/ml}$
    - Se o medicamento tiver o efeito desejado $\mu < 18$.
- Situação 3
  - $H_a\colon \mu \neq 14 \text{ unidades/ml}$
    - Se a população tiver deficiência da vitamina $\mu < 14$;
    - Se a população tiver excesso da vitamina $\mu > 14$.

Hipóteses de Interesse

- Unilaterais:
  - $H_0: \mu = a$
  - $H_a: \mu < a$
    - ou
  - $H_0: \mu = a$
  - $H_a: \mu > a$
- Costuma-se utilizar a notação abaixo (equivalentes):
  - $H_0: \mu \geq a$
  - $H_a: \mu < a$
    - ou
  - $H_0: \mu \leq a$
  - $H_a: \mu > a$

Hipóteses de Interesse

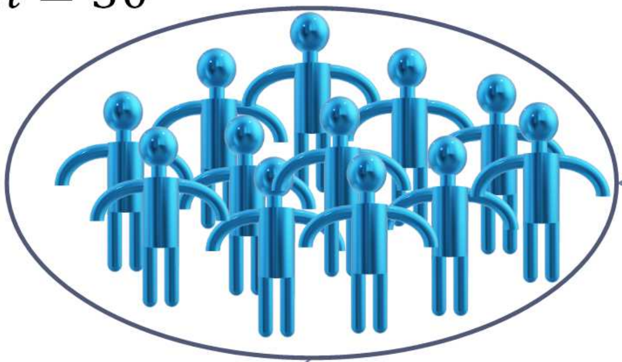
- Bilaterais:
  - $H_0: \mu = a$
  - $H_a: \mu \neq a$

Exercício

- Identifique as hipóteses que estão sendo testadas em cada caso, informando se são uni ou bilaterais:
  - A companhia de transporte afirma que, em média, o intervalo entre sucessivos ônibus é de 15 minutos. Uma associação de usuários de transportes coletivos acha que a pontualidade é muito importante e pretende testar a afirmação da companhia;
  - Os amortecedores, de automóveis que circulam entre cidades, duram em média 30 mil quilômetros, segundo informações de algumas oficinas especializadas. Um proprietário de automóvel deseja testar essa informação;
  - Um veterinário conseguiu ganho médio diário de 3 litros de leite por vaca com uma nova composição de ração. Um pecuarista acredita que o ganho não é tão grande assim.

Situação 1

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

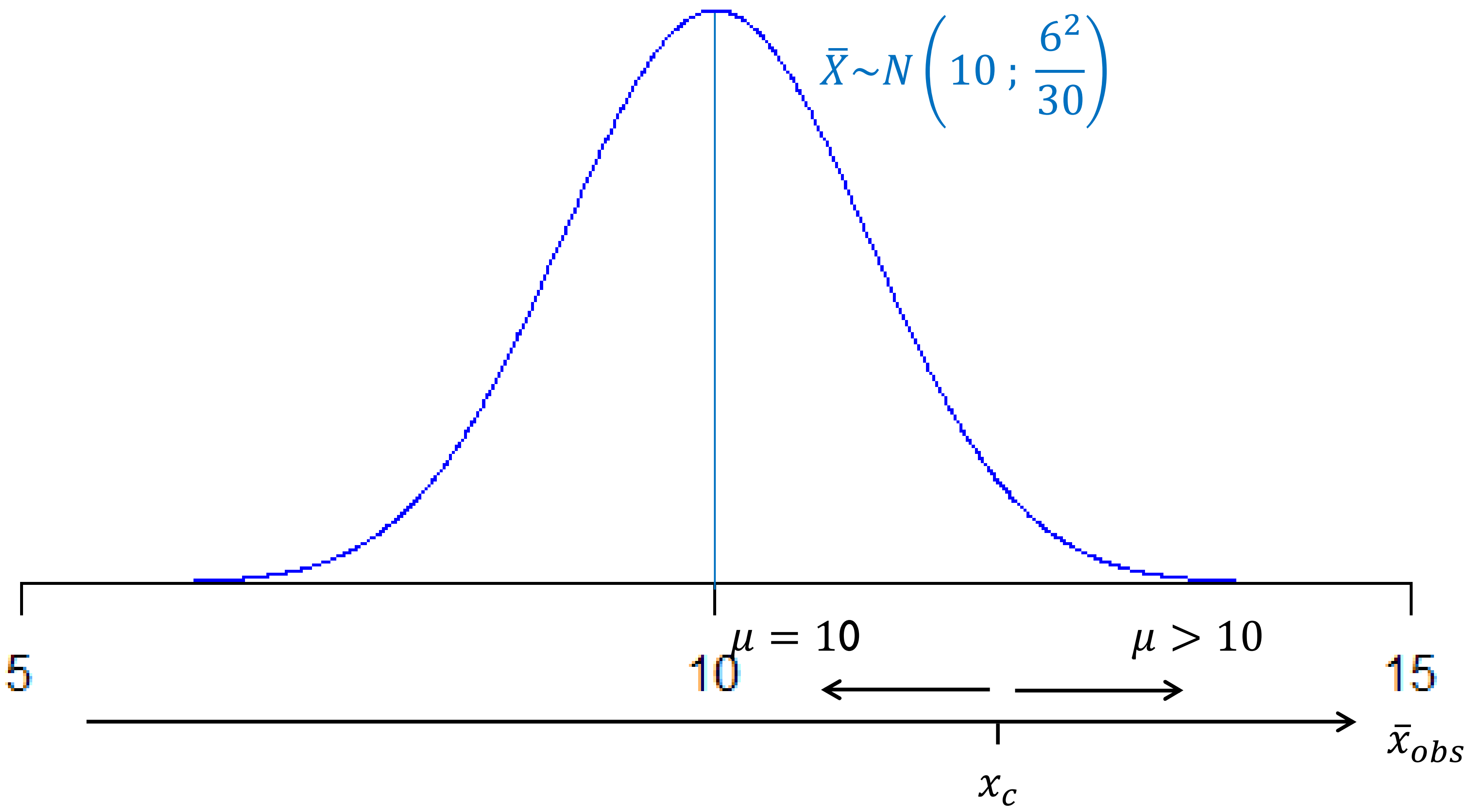
$\bar{x}_{obs}$

$\mu > 10$ Suplemento eficaz (Hipótese alternativa (H_a))

ou

$\mu \leq 10$ Suplemento não eficaz (Hipótese nula (H_0))

Situação 1



Situação 1

- O que resta fazer é determinar o valor de x_c e quantificar os erros associados às possíveis conclusões;
- Mas quais são as conclusões possíveis:
  - Rejeitar a hipótese nula; ou
  - Não rejeitar a hipótese nula.
- As conclusões devem ser sempre relacionadas à hipótese nula.
- Os dois erros que podem ser cometidos ao se realizar um teste de hipóteses são:
  - Rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira; e
  - Não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa.

Analogia no processo criminal

Realidade

Resultado do Julgamento

H_0

Inocente

Inocente

Culpado

Culpado

H_a

Inocente

Culpado

Definição

- Erro do tipo I:
  - Consiste em rejeitar a hipótese nula H_0 quando ela é verdadeira.
  - Geralmente representado por α.
  - Em virtude de H_0 especificar um único valor do parâmetro, existe um único valor de α.
- Erro do tipo II:
  - Envolve a não-rejeição de H_0 quando H_0 é falsa.
  - Geralmente representado por β.
  - Como H_a não especifica um valor para o parâmetro de interesse, existe um valor diferente de β para cada valor do parâmetro consistente com H_a.

Erros

- Uma parte fundamental do teste de hipóteses é controlar a probabilidade de cometermos o erro do tipo I:

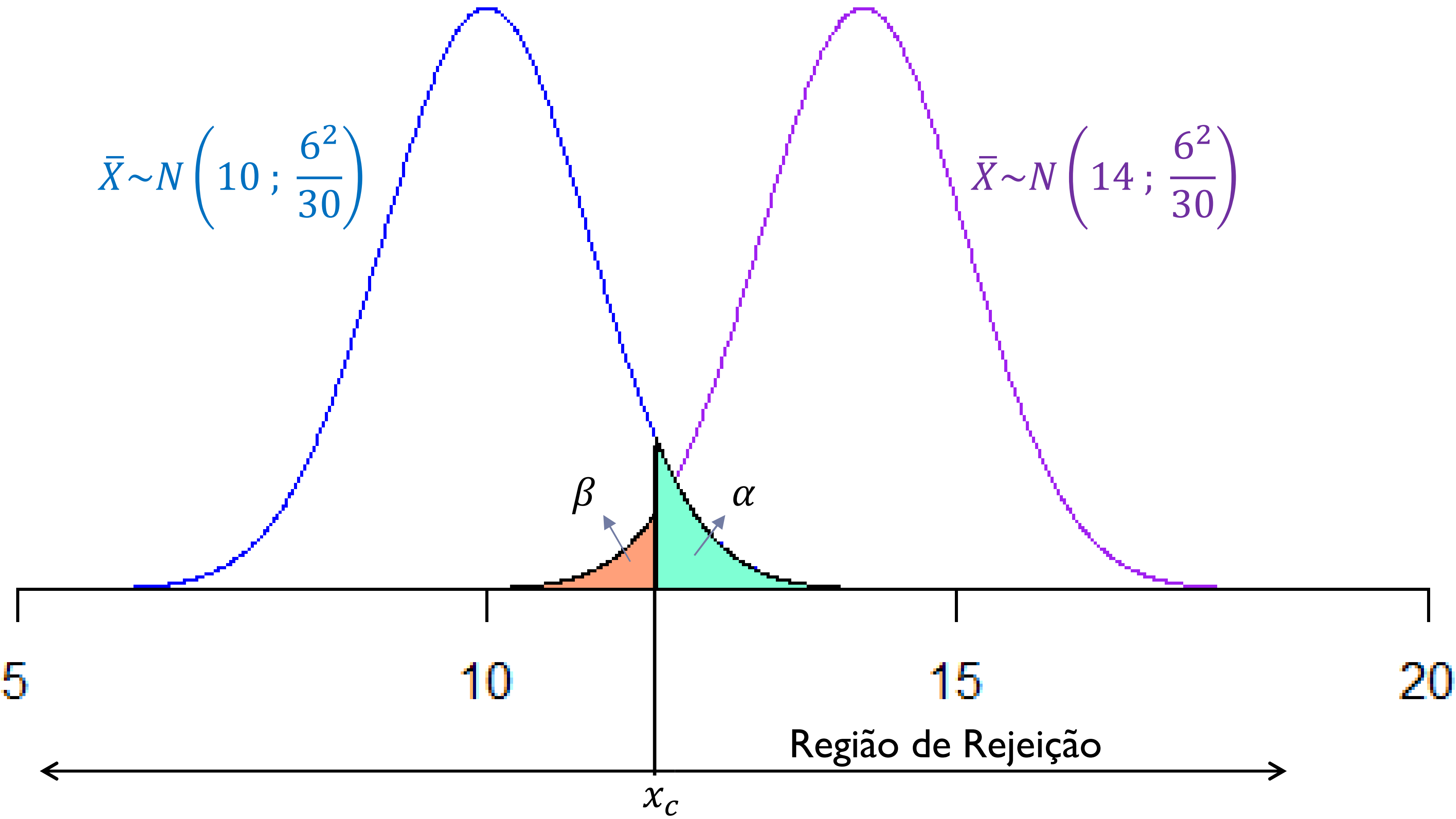
Decisão	Situação	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro Tipo I	Sem Erro
Não rejeitar H_0	Sem Erro	Erro Tipo II

- Erro de tipo I: Rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira;
- $P(rejeitar\ H_0|H_0\ \text{é}\ verdadeira) = \alpha.$
- Erro de tipo II: Não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa;
- $P(não\ rejeitar\ H_0|H_0\ \text{é}\ falsa) = \beta.$

Erros

- Considerando as hipóteses:
  - H_0: O suplemento não é eficaz, ou H_0: $\mu \leq 10$
  - H_a: O suplemento é eficaz, ou H_a: $\mu > 10$
- Temos:
  - $\alpha = P$(concluir que o suplemento é eficaz quando na verdade ele não é)
  - $\beta = P$(concluir que o suplemento não é eficaz quando na verdade ele é)
- O ideal seria ter α e β próximos a zero;
- Infelizmente, a tendência ao diminuir α é aumentarmos β.

Erros



$\bar{X} \sim N\left(10\,;\,\frac{6^2}{30}\right)$
$\bar{X} \sim N\left(14\,;\,\frac{6^2}{30}\right)$
β
α
5
10
15
20
Região de Rejeição
x_c

Região Crítica

- A região dos números reais maiores que x_c é denominada *Região de Rejeição* ou *Região Crítica* e representada por RC:
- $RC = \{x \in \mathbb{R}: x > x_c\}$

Cálculo do valor crítico

- Como encontrar o valor x_c?
- Deve-se fixar o valor de α, que a partir de agora será denominado *nível de significância* do teste;
- Usa-se o conhecimento da distribuição de probabilidade da média amostral:
- Para casos em que a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, e/ou $n \geq 30$.
- $\bar{X} \sim N\left(\mu\ ;\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$, em que:
  - μ é a média que se deseja conhecer,
  - σ^2 é a variância populacional (conhecida);
  - n é o tamanho amostral.

Cálculo do valor crítico

- No nosso exemplo, temos que foi retirada uma amostra de tamanho 30 da população de indivíduos com deficiência da vitamina, logo:
- $X \sim N(10, 6^2)$ e $n = 30$.
- Vamos usar $\alpha = 0{,}05$.
- Queremos conhecer o valor de μ para a distribuição da média amostral $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{6^2}{30}\right)$ e fizemos as seguintes hipóteses:
  - H_0: O suplemento não é eficaz, ou H_0: $\mu \leq 10$
  - H_a: O suplemento é eficaz, ou H_a: $\mu > 10$
- Queremos encontrar x_c de maneira que:
- $P\left(\bar{x} > x_c \middle| \bar{X} \sim N\left(10, \frac{6^2}{30}\right)\right) = 0{,}05$

Cálculo do valor crítico

$$P\left(\bar{x} > x_c \middle| \bar{X} \sim N\left(10, \frac{6^2}{30}\right)\right) = 0{,}05$$

$$P(Z \geq 1{,}645) = 0{,}05$$

$$1{,}645 = \frac{x_c - 10}{6/\sqrt{30}}$$

$$1{,}645 \times 6/\sqrt{30} + 10 = x_c$$

$$x_c = 11{,}8$$

$$RR: \{x | x > 11{,}8\}$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z					
	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495

imal de z_c

Resultados

- Digamos que a média observada na amostra tenha sido 12,5 unidades/ml;
- Como $12{,}5 = \bar{x}_{obs} > x_c = 11{,}8$, conclui-se que existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 5% de significância;
- Ou seja, conclui-se que o suplemento vitamínico é eficiente.

Estatística do Teste

- Testes de Hipóteses para a média (σ^2 conhecido)
  - Estatística do teste: Normal
  - Deve-se relacionar o valor da média amostral observada com o valor respectivo da distribuição normal padrão:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

  - E verificar se a estatística do teste se encontra dentro ou fora da região de rejeição, também definida na distribuição normal padrão.

Cálculo da Estatística do Teste

- Digamos que a média observada na amostra tenha sido 12,5 unidades/ml;
- Cálculo da estatística do teste:

$$Z = \frac{12{,}5 - 10}{6/\sqrt{30}} = 2{,}28$$

Cálculo da Região Crítica

$$RR_1 : \{z | z > 1{,}645\}$$

Regiões de rejeição equivalentes, chegamos às mesmas conclusões utilizando a média observada e a RR_2 ou a estatística do teste e a RR_1.

$$RR_2 : \{x | x > 11{,}8\}$$

$P(Z \geq z_c)$				Segunda decimal de	
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495

Resultados

- Como $2{,}28 = z_{obs} > z_c = 1{,}645$, conclui-se que existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 5% de significância;
- Ou seja, o suplemento é eficaz.

p-valor

- Uma forma de relatar o resultado de um teste de hipóteses é dizer se a hipótese nula foi, ou não, rejeitada a um nível de significância especificado;
- Esse tipo de afirmação nem sempre é adequado, pois não informa se o valor da estatística estava próximo ou afastado do valor limite da região de rejeição;
- O p-valor fornece informação sobre a força da evidência contra H_0, e permite que o pesquisador tire sua conclusão em qualquer nível de significância α.

p-valor (Definição)

- É a probabilidade calculada, assumindo-se que H_0 seja verdadeira, de se obter um valor igual ao da estatística de teste observada, ou tão contraditória à H_0 quanto.
- Quanto menor for o p-valor observado, mais contraditórias a H_0 são as evidências coletadas.
- Uma vez que o p-valor tenha sido calculado, a conclusão, em qualquer nível α de significância, resulta da comparação do p-valor a α:
  - $p - valor \leq \alpha \Longrightarrow$ implica na rejeição de H_0 a um nível α;
  - $p - valor > \alpha \Longrightarrow$ implica na não-rejeição de H_0 a um nível α.

Cálculo do p-valor

- Estou considerando que foi observada uma média amostral igual à 12,5 unidades/ml;
- A estatística do teste observada foi de 2,28;
- Queremos conhecer o p-valor relativo à média amostral observada, considerando as seguintes hipóteses:
  - H_0: O suplemento não é eficaz, ou H_0: $\mu \leq 10$
  - H_a: O suplemento é eficaz, ou H_a: $\mu > 10$
- Queremos encontrar o p-valor de maneira que:
- $P\left(\bar{x} > 12{,}5 \middle| \bar{X} \sim N\left(10, \frac{6^2}{30}\right)\right) = p - valor$
- Ou seja
- $P(z_{obs} > 2{,}28 | Z \sim N(0,1)) = p - valor$

p-valor

$$P(z_{obs} > 2{,}28) = p - valor$$

$$p - valor = 0{,}0113$$

Parte inteira e p

2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	$\boxed{0{,}0113}$	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$P(Z \geq z_c)$	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**

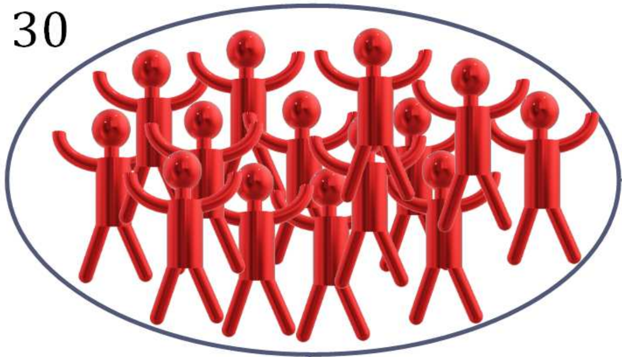
Segunda decimal de z.

Resultados

- Como o p-valor foi igual a 0,0113, conclui-se que existem fortes evidências para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0 $(p - valor = 1{,}13\%)$, baseado no valor da média amostral obtido, é inferior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância);
- Ou seja, pode-se concluir, ainda com mais certeza, que o suplemento vitamínico é eficiente.

Situação 2

$n = 30$



$(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

$\mu < 18$ Remédio eficaz (Hipótese alternativa (H_a))

ou

$\mu \geq 18$ Remédio não eficaz (Hipótese nula (H_0))

$\bar{x}_{obs} = 16{,}5 \text{ unidades/ml}$ $\alpha = 0{,}01$

Resolução

- Valores importantes:
- $\bar{x}_{obs} = 16{,}5$
- $\mu = 18$ (hipótese nula)
- $\sigma^2 = 6^2$ (variância populacional)
- $n = 30$ (tamanho da amostra)
- $\alpha = 0{,}01$ (nível de significância)
- Estatística do teste:

$$Z = \frac{16{,}5 - 18}{{}^{6}\!/_{\sqrt{30}}} = -1{,}37$$

- $H_0: \mu \geq 18$
- $H_a: \mu < 18$

Regiões de Rejeição

$$P(Z < -2{,}33) = P(Z > 2{,}33) \cong 0{,}01$$

$$z_c = -2{,}33$$

$$x_c = -2{,}33 \times \frac{6}{\sqrt{30}} + 18 = 15{,}45$$

$$RR_1: \{z | z < -2{,}33\}$$

$$RR_2: \{x | x < 15{,}45\}$$

$$H_a: \mu < 18$$

$P(Z \geq z_c)$	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099

nteira e primeira decimal de z_c

Resultados

- Como $16{,}5 = \bar{x}_{obs} \notin RR_2\colon \{x|x < 15{,}45\}$, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 1% de significância;
- Chegaríamos na mesma conclusão ao comparar $-1{,}37 = z_{obs} \notin RR_1\colon \{z|z < -2{,}33\}$;
- Ou seja, não se pôde confirmar a eficiência do medicamento.

Cálculo do p-valor

$$H_a: \mu < 18$$

$$p - valor = P(Z < -1{,}37) = P(Z > 1{,}37) = 0{,}0853 > 0{,}01$$

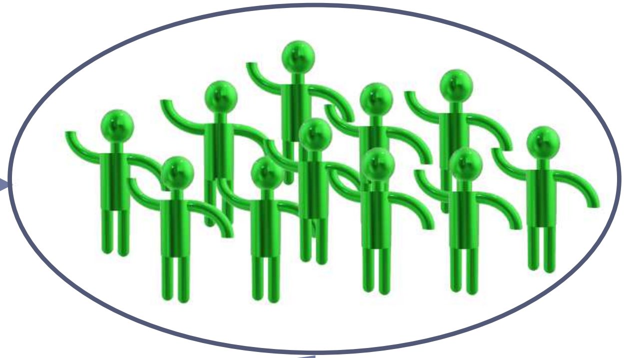
$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c							
	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853

Resultados

- Como o p-valor foi igual a 0,085, conclui-se que não existem evidências o suficiente para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0 $(p - valor = 8{,}5\%)$, baseado no valor da média amostral obtido, é superior ao erro considerado como aceitável de 1% (nível de significância).

Situação 3

$n = 30$



$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

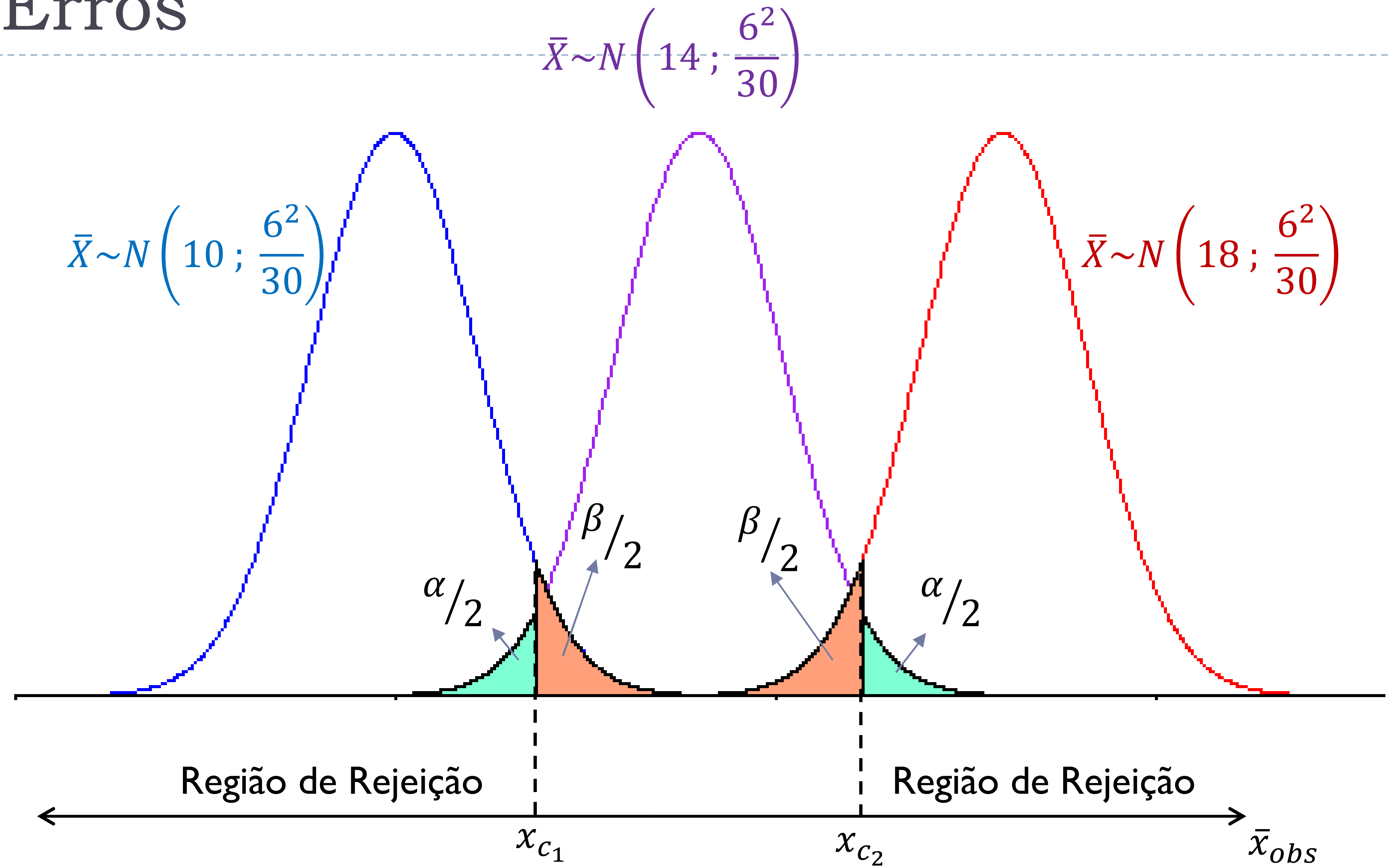
$\bar{x}_{obs}$

$\mu < 14$ Deficiência da vitamina (Hipótese alternativa (H_a))

$\mu = 14$ Vitamina dentro do normal (Hipótese nula (H_0))

$\mu > 14$ Excesso da vitamina (Hipótese alternativa (H_a))

Erros



$\bar{X} \sim N\left(14\,;\,\frac{6^2}{30}\right)$
$\bar{X} \sim N\left(10\,;\,\frac{6^2}{30}\right)$
$\bar{X} \sim N\left(18\,;\,\frac{6^2}{30}\right)$
$\beta/2$
$\beta/2$
$\alpha/2$
$\alpha/2$
Região de Rejeição
Região de Rejeição
x_{c_1}
x_{c_2}
$\bar{x}_{obs}$

Resolução

- Valores importantes:
- $\bar{x}_{obs} = 13,2$
- $\mu = 14$ (hipótese nula)
- $\sigma^2 = 6^2$ (variância populacional)
- $n = 30$ (tamanho da amostra)
- $\alpha = 0,05$ (nível de significância)

$$Z = \frac{13,2 - 14}{6/\sqrt{30}} = -0,73$$

- $H_0 : \mu = 14$
- $H_a : \mu \neq 14$

Regiões de Rejeição

$$P(Z < -1{,}96) = P(Z > 1{,}96) = 0{,}025$$

$$z_{c_1} = -1{,}96\,;\, z_{c_2} = 1{,}96$$

$$RR_1\!: \{z | z < -1{,}96 \text{ ou } z > 1{,}96\}$$

$$x_{c_1} = -1{,}96 \times \frac{6}{\sqrt{30}} + 14 = 11{,}85$$

$$x_{c_2} = 1{,}96 \times \frac{6}{\sqrt{30}} + 14 = 16{,}15$$

$$RR_2\!: \{x | x < 11{,}85 \text{ ou } x > 16{,}15\}$$

$$H_a\!: \mu \neq 14$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c						
neira decimal de z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250

Resultados

- Como $13{,}2 = \bar{x}_{obs} \in (11{,}85\ ;16{,}15)$, ou seja, não pertence à região de rejeição, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 5% de significância;
- Ou seja, conclui-se que não existe evidências para afirmar que a população tenha deficiência ou excesso da vitamina, a um nível de 5% de significância.

Cálculo do p-valor

$$p - valor = 2 \times P(Z < -0{,}73) = 2 \times P(Z > 0{,}73) = 2 \times 0{,}2327 = 0{,}4654$$

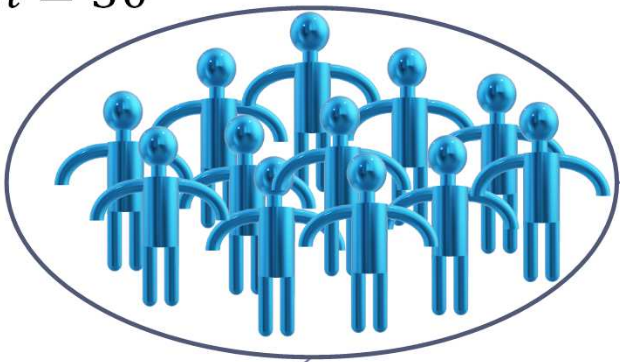
$P(Z \geq z_c)$	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327

Resultados

- Como o p-valor foi igual a 0,4654, conclui-se que não existem evidências o suficiente para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0 $(p - valor = 46{,}54\%)$, baseado no valor da média amostral obtido, é superior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).

Situação 4

$n = 30$



$(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$

$\hat{\pi}$

$\pi < 0{,}85$ Suplemento não atinge as especificações (Hipótese alternativa (H_a))

ou

$\pi \geq 0{,}85$ Suplemento eficaz em ao menos 85% dos casos (Hipótese nula (H_0))

Testes de Hipóteses para Proporções

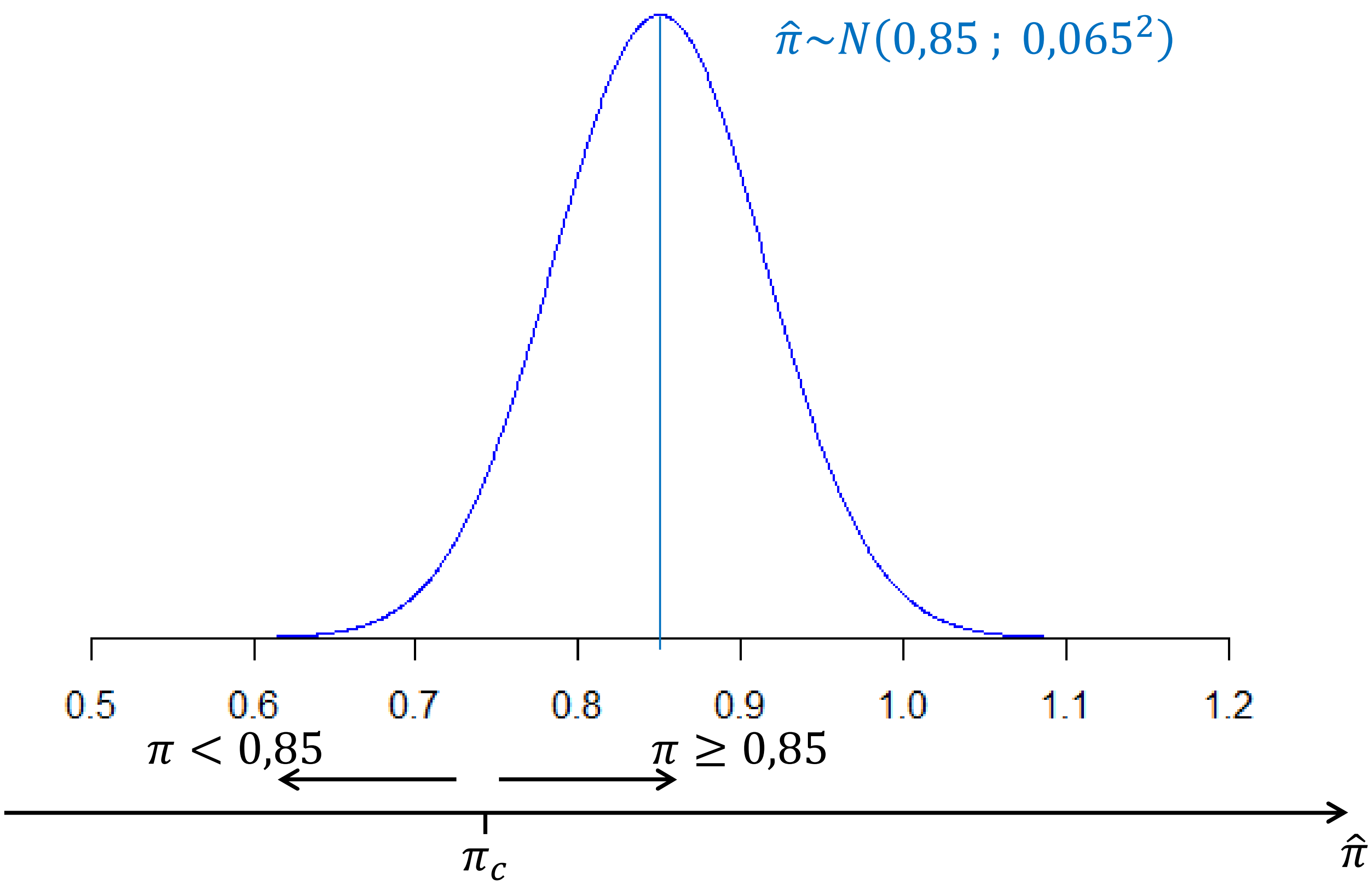
- Variável Aleatória $\hat{\pi}$: proporção de indivíduos com concentração adequada de determinada vitamina no sangue;
- Para amostras de tamanho suficientemente grande ($n \geq 30$) tem-se que a variável aleatória $\hat{\pi}$ segue uma distribuição normal com:
- Média: π;
- Desvio-padrão: $\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$
- Resumindo: $\hat{\pi} \sim N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$.

Situação 4

- Temos:
- $H_0: \pi \geq 0{,}85$
- $H_a: \pi < 0{,}85$
- $n = 30$
- $\hat{\pi}$ é relativo à proporção de pessoas que, após o tratamento, passaram a ter a concentração adequada da vitamina no sangue.
- Tem-se que:

$$\hat{\pi} \sim N\left(0{,}85\ ;\ \frac{0{,}85(0{,}15)}{30}\right) \text{ ou } \hat{\pi} \sim N(0{,}85\ ;\ 0{,}065^2)$$

Situação 4



$\hat{\pi} \sim N(0{,}85\ ;\ 0{,}065^2)$
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
$\pi < 0{,}85$
$\pi \geq 0{,}85$
π_c
$\hat{\pi}$

Erros

- Considerando as hipóteses:
  - H_0: O suplemento é eficaz em pelo menos 85% dos casos, ou
    - $H_0: \pi \geq 0{,}85$
  - H_a: O suplemento não atinge as especificações, ou
    - H_a: $\pi < 0{,}85$
- Temos:
  - $\alpha = P$(concluir que o suplemento não está dentro das especificações quando na verdade ele está)
  - $\beta = P$(concluir que o suplemento respeita as especificações quando na verdade ele não as respeita)
- Vamos considerar um nível de 5% de significância.

Estatística do Teste

- Testes de Hipóteses para a Proporção
  - Estatística do teste: Normal
  - Deve-se relacionar o valor da média amostral observada com o valor respectivo da distribuição normal padrão:

$$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

  - E verificar se a estatística do teste se encontra dentro ou fora da região de rejeição, também definida na distribuição normal padrão.

Regiões de Rejeição

$$P(\hat{\pi} < \pi_c | \hat{\pi} \sim N(0{,}85, 0{,}065^2)) = 0{,}05$$

$$P(Z < -1{,}645) = 0{,}05$$

$$RR_1\colon \{z | z < -1{,}645\}$$

$$-1{,}645 = \frac{\pi_c - 0{,}85}{0{,}065}$$

$$-1{,}645 \times 0{,}065 + 0{,}85 = \pi_c$$

$$\pi_c = 0{,}74$$

$$RR_2\colon \{\pi | \pi < 0{,}74\}$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z					
imal de z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495

$$H_a\colon \pi < 0{,}85$$

Resultados

- Digamos que a proporção observada na amostra tenha sido 79%;
- Como $0{,}79 = \hat{\pi} > \pi_c = 0{,}74$, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 5% de significância;
- Ou seja, não foram encontradas evidências fortes o suficiente para contradizer as especificações dadas pela empresa farmacêutica.

Cálculo do p-valor

Encontrando a estatística do teste:

$$z = \frac{0{,}79 - 0{,}85}{0{,}065} = \frac{-0{,}06}{0{,}065} = -0{,}92$$

$$p - valor = P(Z < -0{,}92) = P(Z > 0{,}92) = 0{,}1788 > 0{,}05$$

$H_a: \pi < 0{,}85$

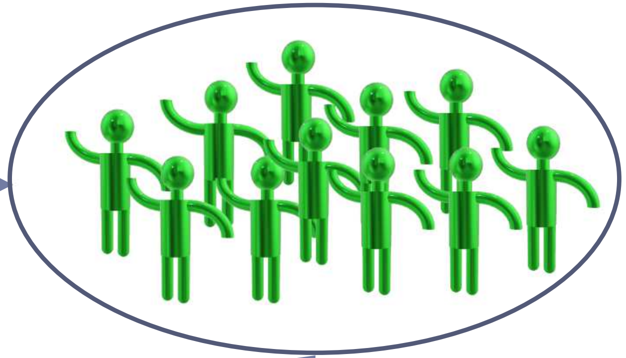
$P(Z \geq z_c)$	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,4960	0,4920
0,1	0,4602	0,4562	0,4522
0,2	0,4207	0,4168	0,4129
0,3	0,3821	0,3783	0,3745
0,4	0,3446	0,3409	0,3372
0,5	0,3085	0,3050	0,3015
0,6	0,2743	0,2709	0,2676
0,7	0,2420	0,2389	0,2358
0,8	0,2119	0,2090	0,2061
0,9	0,1841	0,1814	0,1788

Resultados

- Como o p-valor foi igual a 0,1788, conclui-se que não existem evidências para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0 ($p - valor = 17{,}88\%$), baseado no valor da proporção amostral obtido, é superior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).

Situação 5

$n = 30$



$(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$

$\hat{\pi}$

$\pi < 75$ (Hipótese alternativa (H_a))

$\pi = 75$ Prevalência de indivíduos saudáveis na UF em questão. (Hipótese nula (H_0))

$\pi > 75$ (Hipótese alternativa (H_a))

Resolução

- Valores importantes:
- $n = 30$ (tamanho da amostra)
- $\hat{\pi} = 80\%$
- $\pi = 75\%$ (hipótese nula)
- Estatística do teste:

$$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{0{,}8 - 0{,}75}{\sqrt{\frac{0{,}75(1-0{,}75)}{30}}} = 0{,}63$$

- $\alpha = 0{,}05$ (nível de significância)
- $H_0\colon \pi = 0{,}75$
- $H_a\colon \pi \neq 0{,}75$

Regiões de Rejeição

$$P(Z < -1{,}96) = P(Z > 1{,}96) = 0{,}025$$

$$z_{c_1} = -1{,}96\,;\, z_{c_2} = 1{,}96$$

$$RR_1\colon \{z | z < -1{,}96 \text{ ou } z > 1{,}96\}$$

$$\pi_{c_1} = -1{,}96 \times 0{,}079 + 0{,}75 = 0{,}595$$

$$\pi_{c_2} = 1{,}96 \times 0{,}079 + 0{,}75 = 0{,}905$$

$$RR_2\colon \{\pi | \pi < 0{,}595 \text{ ou } \pi > 0{,}905\}$$

$P(Z \geq z_c)$	Segunda decimal de z_c						
neira decimal de z_c	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250

Resultados

- Como $0{,}63 = z_{obs} \in (-1{,}96\ ;\ 1{,}96)$, conclui-se que não existe evidência para rejeitar H_0, a um nível de 5% de significância;
- Ou seja, conclui-se que não existe evidências para afirmar que a população tenha uma prevalência de indivíduos com a concentração adequada da vitamina no sangue, diferente daquela observada no estado em que se encontra a cidade em questão.

Cálculo do p-valor

$$p - valor = 2 \times P(Z > 0{,}63) = 2 \times 0{,}2643 = 0{,}5286$$

$P(Z \geq z_c)$	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327

Resultados

- Como o p-valor foi igual a 0,5286, conclui-se que não existem evidências o suficiente para rejeitar H_0;
- O erro real ao rejeitar H_0 $(p - valor = 52{,}86\%)$, baseado no valor da proporção amostral obtida, é superior ao erro considerado como aceitável de 5% (nível de significância).

Exercício 1

- Um estudo foi desenvolvido para avaliar o salário de empregadas domésticas na cidade de São Paulo. Foram sorteadas e entrevistadas 200 trabalhadoras. Admita que o desvio-padrão dessa variável na cidade é de 0,8 salários mínimos.
  - Deseja-se testar se a média é igual a 3 salários mínimos ou é menor. Formule as hipóteses adequadas;
  - Para um nível de significância de 3%, construa a região crítica.
  - Se a amostra forneceu média de 2,5 salários mínimos, qual seria a conclusão?

Exercício 2

- Suponha que um laboratório alegue que uma determinada droga que ele comercialize é eficiente em pelo menos 80% dos casos em que é utilizada. Suponha que, para comprovar a alegação do laboratório, um organismo de controle testou 180 pacientes, verificando a eficiência da droga em 147 casos. Teste a eficiência alegada pelo laboratório a um nível de 1% de significância.

Exercício 3

- Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido em cobaias, que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos:

9,1	9,3	7,2	7,5	13,3	10,9	7,2	9,9	8,0	8,6

- Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, uma distribuição normal com média 8 e desvio padrão seja 2 segundos. O pesquisador desconfia, entretanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Conduza um teste de hipóteses a um nível de 4% de significância.
- Qual informação dada pelo enunciado permitiu a utilização do teste feito?

Exercício 4

- Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida, através de poços artesianos no nordeste é salobra. Há muitas controvérsias sobre essa informação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor. Para eliminar a dúvida, 400 poços foram sorteados e observou-se, em 120 deles, água salobra.
- Qual seria a conclusão, ao nível de 3% de significância?