Inferência Estatística

Departamento de Estatística

Parâmetros, Estimadores e Estimativas

- Parâmetro:
  - As quantidades da população, em geral desconhecidas, sobre as quais temos interesse, são denominadas parâmetros e, usualmente representadas por letras gregas tais como θ, μ e σ, entre outras.
- Estimador e estimativa:
  - À combinação dos elementos da amostra, construída com a finalidade de representar, ou estimar, um parâmetro de interesse na população, denominamos de *estimador*. Em geral, denotamos os estimadores por símbolos com o acento circunflexo: $\hat{\theta}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, etc.
  - Aos valores numéricos assumidos pelos estimadores denominamos *estimativas*.

Inferência Estatística

- Vamos considerar o conjunto de dados relativos aos pesos obtido em entrevistas com 898 alunos da UFJF;
- Com o objetivo puramente ilustrativo, considere que esses 898 alunos componham nossa população alvo;
- Nesse caso conhecemos a média e variância da população (parâmetros de interesse):
  - $\mu = 63{,}42$ kg
  - $\sigma^2 = 156{,}03$ kg²
  - $\sigma = 12{,}49$ kg
- Vamos retirar 5 amostras aleatórias de tamanho 30 dessa população e anotar os resultados obtidos para a variável peso.

Exemplo

- Vamos representar uma amostra de tamanho n, a ser retirada de uma população, por $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
- Amostra 1:
  - $(75; 46{,}5; 62; 56; 42; 45; 64; 54; 60; 80 \ldots)$
- Amostra 2:
  - $(84; 56; 75; 78; 49; 58; 72; 68; 59; 54; \ldots)$
- Amostra 3:
  - $(60; 62; 78; 95; 55; 73; 76; 72; 50; 56; \ldots)$
- Amostra 4:
  - $(55; 69; 55; 56; 58; 95; 46; 69{,}5; 60; 54; \ldots)$
- Amostra 5:
  - $(62; 53; 53; 80; 75; 62; 55; 50; 52; 74; \ldots)$

Exemplo

- Poderíamos utilizar, como estimativa da média populacional ($\mu = 63{,}42$ kg), os valores da média amostral ou da mediana amostral, por exemplo:
- Amostra 1:
  - $\hat{\mu}_1 = \bar{x}_1 = 62{,}15$ kg; ou
  - $\hat{\mu}_2 = md_1 = 62{,}5$ kg
- Amostra 2:
  - $\hat{\mu}_3 = \bar{x}_2 = 64{,}7$ kg; ou
  - $\hat{\mu}_4 = md_2 = 63{,}5$ kg
- Amostra 3:
  - $\hat{\mu}_5 = \bar{x}_3 = 63{,}23$ kg; ou
  - $\hat{\mu}_6 = md_3 = 60$ kg

Amostra 4:

$\hat{\mu}_7 = \bar{x}_4 = 61{,}48$ kg; ou

$\hat{\mu}_8 = md_4 = 59$ kg

Amostra 5:

$\hat{\mu}_9 = \bar{x}_5 = 62{,}9$ kg; ou

$\hat{\mu}_{10} = md_5 = 62$ kg

Inferência Estatística

- Como escolher qual estimador utilizar?
- Deve-se estudar as propriedades de um estimador.

Propriedades dos Estimadores

- Vício
  - Um estimador $\hat{\theta}$ é *não viciado* ou *não viesado* para um parâmetro θ se $E(\hat{\theta}) = \theta$. Ou seja, sum estimador é não viciado se o seu valor esperado coincide com o parâmetro de interesse.
- Consistência
  - Um estimador $\hat{\theta}$ é *consistente*, se, à medida que o tamanho da amostra aumenta, seu valor esperado converge para o parâmetro de interesse e sua variância converge para zero:
  - $\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$;
  - $\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$.
- Eficiência
  - Dados dois estimadores $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, não viciados para um parâmetro θ, dizemos que $\hat{\theta}_1$ é mais eficiente do que $\hat{\theta}_2$ se $Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$.

Estimadores para média, proporção e variância

Parâmetro	Estimador	Propriedades
μ	$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$	Não viciado e consistente
π	$\hat{\pi} = \frac{frequência\ amostral\ com\ a\ característica}{n}$	Não viciado e consistente
σ^2	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	Não viciado e consistente

Distribuições Amostrais

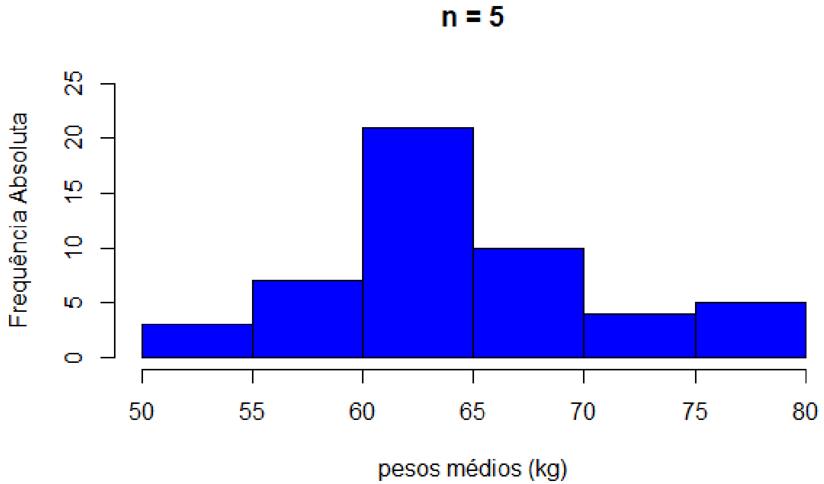
- Estimadores são funções de variáveis aleatórias, sendo assim, eles também são variáveis aleatórias;
- Vamos estudar a distribuição de probabilidade de um dos estimadores mais utilizados:
  - A média amostral

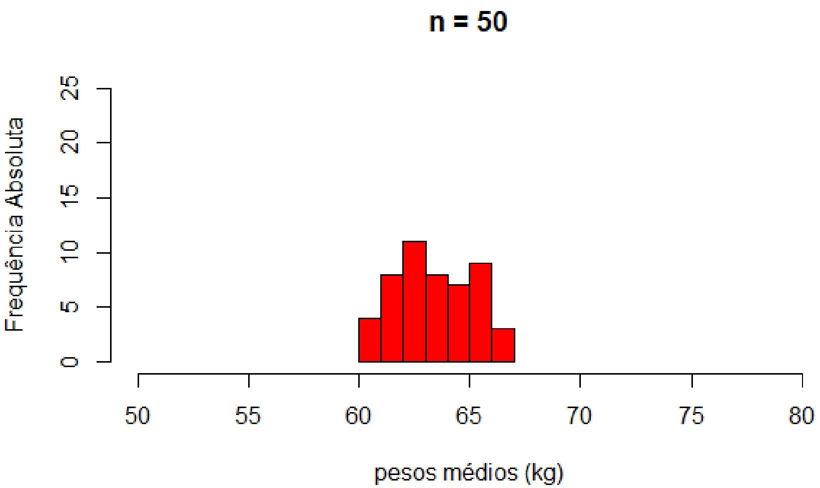
Distribuição da Média Amostral

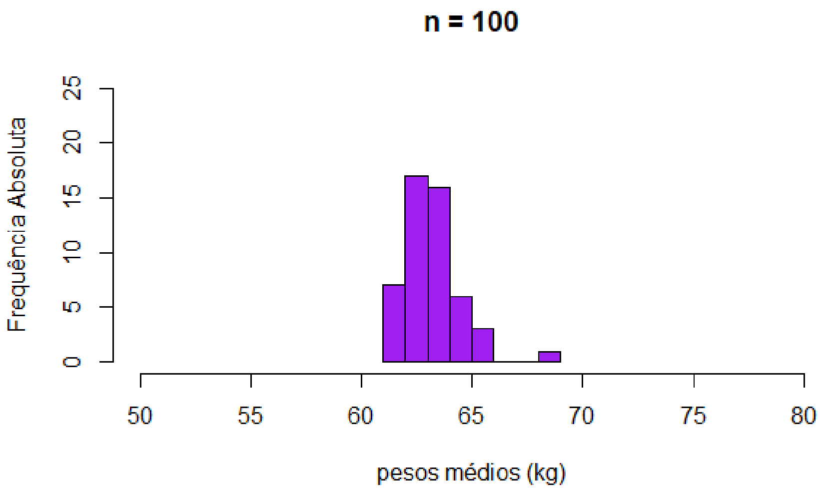
- Considere X como a variável aleatória que representa o peso (em kg) dos 898 alunos da UFJF que consideramos como nossa população alvo na aula passada;
- Sabemos que X tem média igual a 63,42 kg e variância igual a 156,03 kg²;
- Se forem retiradas 50 amostras dessa população, e calculadas as médias para cada amostra, teremos 50 valores, possivelmente, distintos que poderiam ser considerados como estimativas da média da população;
- $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{50}$;
- Podemos considerar as médias obtidas como uma nova variável aleatória $\bar{X}$.

Distribuição da Média Amostral

- Histogramas das médias das idades obtidas para 50 amostras aleatórias retiradas da população de 898 alunos ($\mu = 63{,}42$ kg). Considerando tamanhos amostrais de:







Teorema Central do Limite

- Suponha uma amostra aleatória simples de tamanho n retirada de uma população com média μ e variância σ^2 (note que a distribuição de probabilidade da variável aleatória não é especificada). Representando tal amostra por n variáveis aleatórias independentes $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e, denotando sua média por $\bar{X}$, temos que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} Z$$

- com $Z \sim N(0,1)$.

Teorema Central do Limite

- Garante que para n grande a distribuição da média amostral, devidamente padronizada, segue uma distribuição Normal Padrão;
- Esse teorema permite que utilizemos a distribuição Normal para estudar $\bar{X}$ probabilisticamente;
- Estudos, envolvendo simulações, mostram que, em muitos casos, valores de n ao redor de 30 fornecem aproximações bastante boas para aplicações práticas.

Exercício 1

- O fabricante de uma lâmpada afirma que seu produto tem vida média de 1600 horas, com desvio padrão de 250 horas. O dono de uma empresa compra 100 lâmpadas desse fabricante. Qual é a probabilidade de que a vida média dessas lâmpadas ultrapasse 1650 horas?

Exercício 2

- Sabe-se que a altura dos alunos da UFJF tem média igual a 1,60 m e variância de 0,25 m^2. Assumindo que os dados segue a distribuição normal, que foi selecionado uma amostras de tamanho 5 para o estudo da distribuição amostral da média. Determine:
  - A distribuição de probabilidade da altura dos alunos da UFJF.
  - A distribuição de probabilidade amostral da média das alturas dos alunos da UFJF.
  - A probabilidade da altura de um aluno selecionado aleatoriamente seja maior que 1,50.
  - A probabilidade da média das altura dos alunos da UFJF ser menor que 1,89.

Teorema Central do Limite - Aplicação

- Suponha que:
- π represente a proporção de indivíduos com determinada característica em uma população (valor desconhecido)
- $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ represente o estimador dessa proporção, considerando uma amostra da tamanho n, dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\textit{número de indiv. na amostra com dada característica}}{n}$$

- Tem-se que:
- $E(\hat{\pi}) = \pi$ e $Var(\hat{\pi}) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$
- Considerando o Teorema Central do Limite, tem-se que para n suficientemente grande:

$$\frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$$

Exercício 3

- Uma grande empresa, que possui 2.500 funcionários, sorteará 100 funcionários para participarem de um processo de capacitação. Sabe-se que na empresa há 1800 homens e 700 mulheres. Qual a probabilidade da proporção de mulheres na amostra estar entre 30% e 40%?

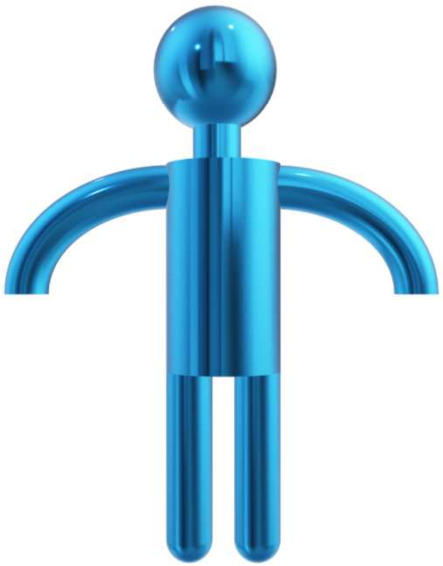
Exemplo

$$X = \left\{ \text{concentração em} \frac{\text{unidades}}{\text{ml}} \text{ de determinada vitamina no sangue} \right\}$$

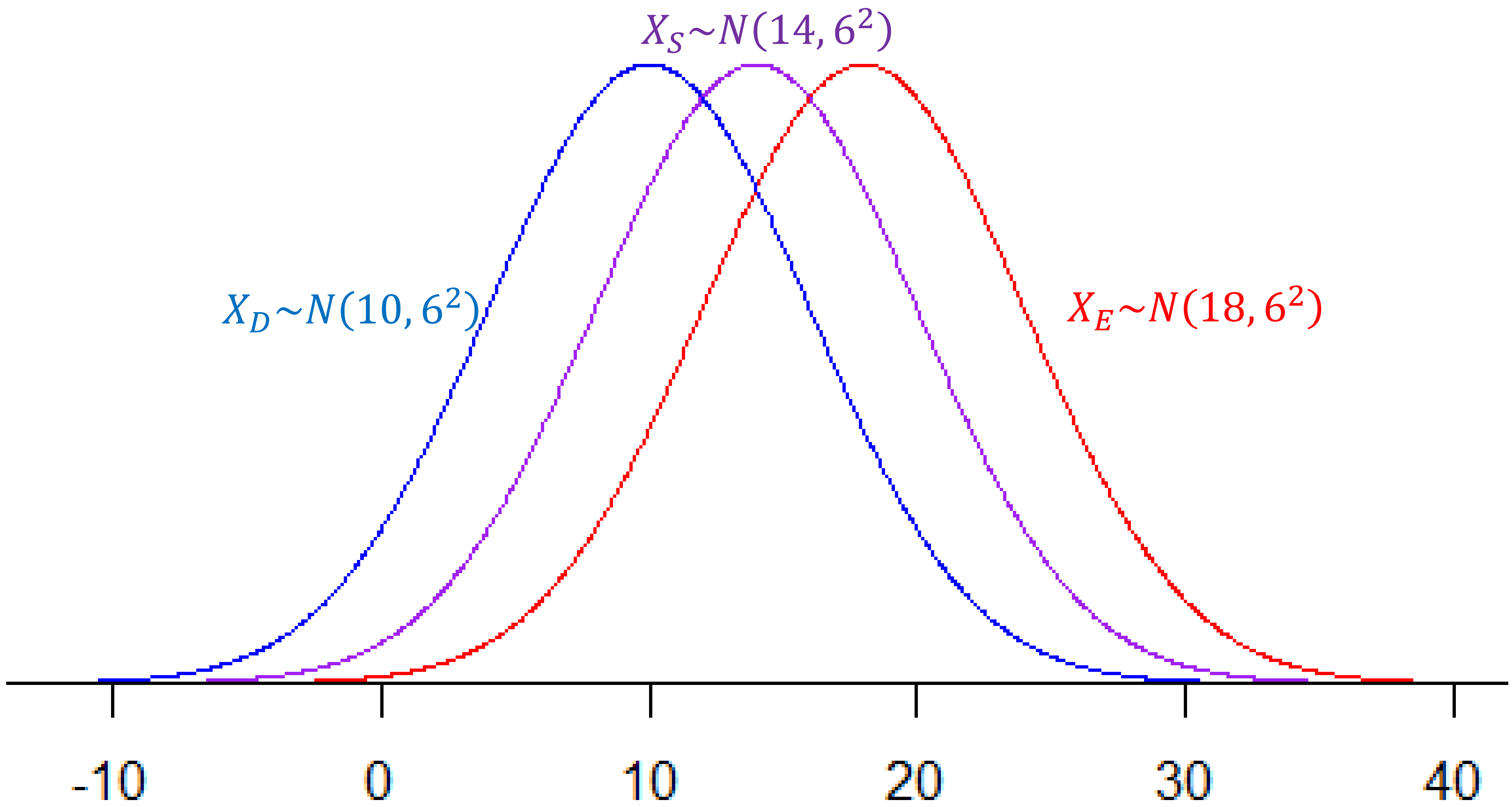
$X_S \sim N(14, 6^2)$

$X_D \sim N(10, 6^2)$

$X_E \sim N(18, 6^2)$

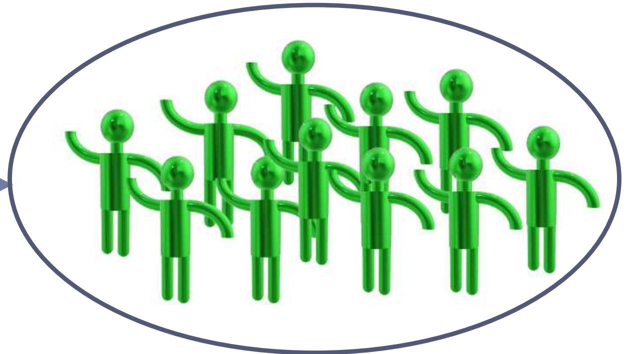


Exemplo



Exemplo

$n = 30$



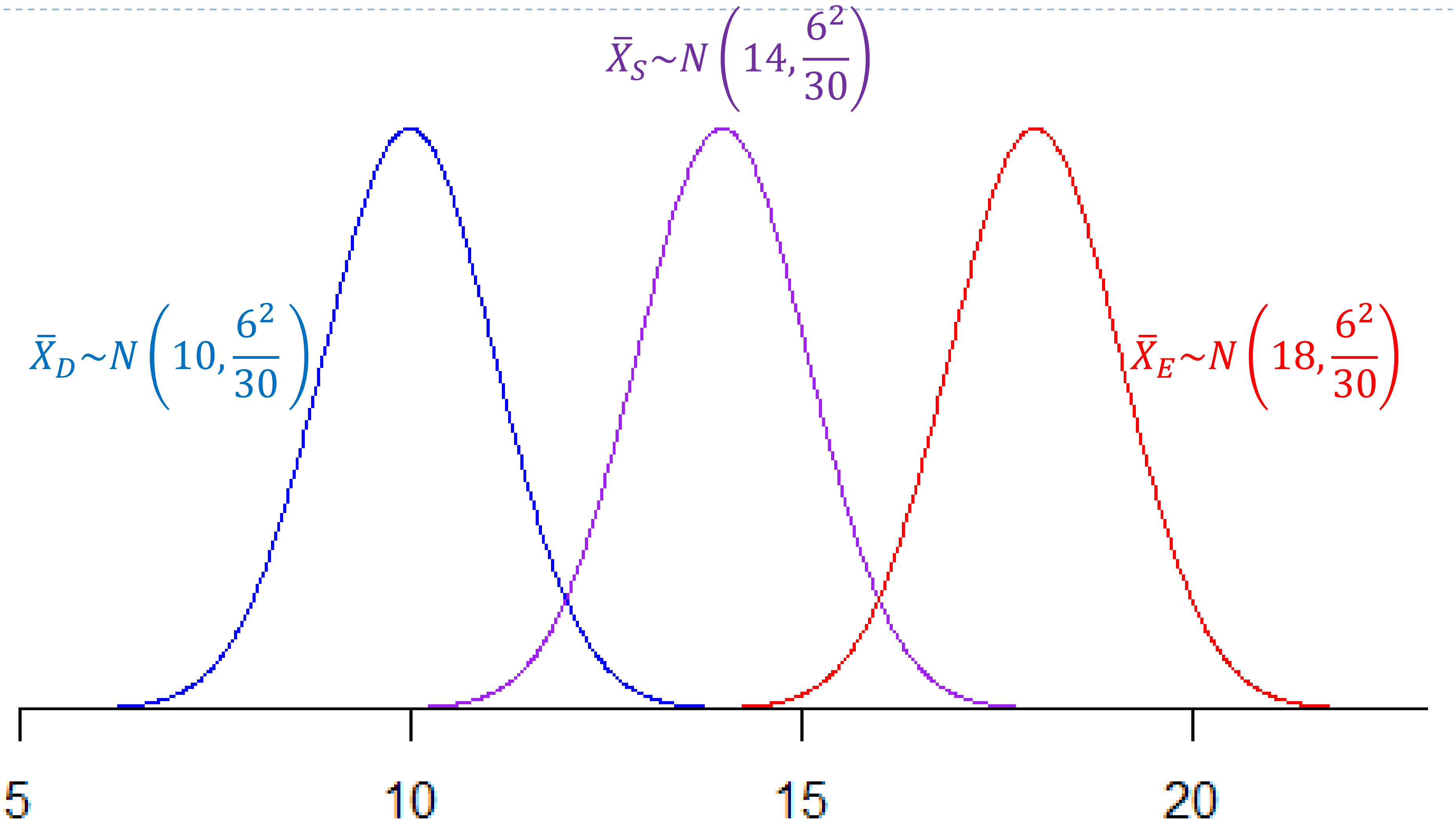
$(X_1, X_2, \dots, X_{30})$

$\bar{x}_{obs}$

A média amostral pode ser utilizada para fazer inferência sobre o valor μ da população

$\mu = 10$ $\mu = 14$ $\mu = 18$

Exemplo



$\bar{X}_S \sim N\left(14, \frac{6^2}{30}\right)$
$\bar{X}_D \sim N\left(10, \frac{6^2}{30}\right)$
$\bar{X}_E \sim N\left(18, \frac{6^2}{30}\right)$
5
10
15
20