Departamento de Estatística

Universidade Federal de Juiz de Fora

Probabilidade

Departamento de Estatística

Breve Histórico

Antoine Gombaud, auto denominado Chevalier de Méré, era um jogador inveterado que tinha boas conexões com intelectuais da renascença;

Utilizou seus conhecimentos para melhorar seu rendimento em jogos de azar, um deles era um jogo em que eram feitas apostas na presença, ou não, de ao menos um resultado 6 ao lançar um dado 4 vezes;

Pelos seus cálculos ele teria uma probabilidade de 2/3 de ganhar ao apostar na presença de ao menos um 6, sendo assim, ele apostou consistentemente na presença do 6 e ganhou bastante dinheiro utilizando essa estratégia;

Viando aumentar seus ganhos ele resolveu apostar em um jogo que consistia em apostar na saída de dois 6 ao lançar 2 dados 24 vezes, utilizando o mesmo raciocínio, ele chegou à conclusão de que teria 2/3 de probabilidade de vencer ao apostar na saída de ao menos um par de 6, como resultado, perdeu muito dinheiro.

Breve Histórico

Querendo entender o erro em seu raciocínio escreveu uma carta para o Blaise Pascal em 1654

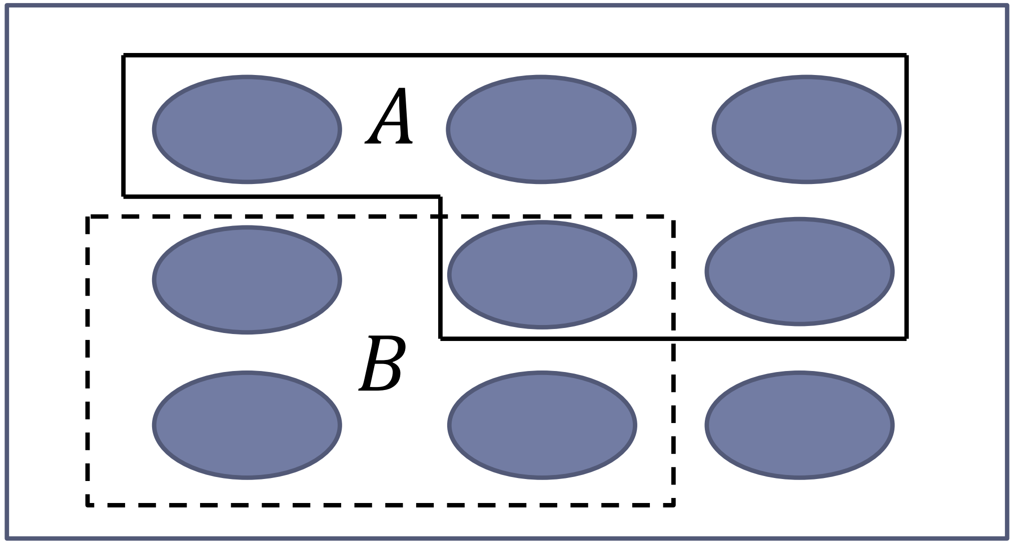
O que deu início à correspondência entre Pascal e Pierre Fermat e o desenvolvimento da teoria da probabilidade.

Introdução

- Embora a probabilidade tenha se iniciado com aplicações em jogos de azar, ela pode ser aplicada em qualquer situação de incerteza:
  - Qual será o clima de amanhã?
  - Qual será o sexo do primeiro filho de determinado casal?
  - Qual a chance de determinada pessoa desenvolver um tipo de câncer?
  - Que tipo de negócio um empreendedor deve abrir?
  - Onde investir o dinheiro economizado?
  - Qual será o próximo prefeito de determinada cidade?
  - ...
- Usando a teoria da probabilidade, é possível quantificar a chance de determinado resultado ocorrer.

Introdução

- A base matemática para a probabilidade é construída utilizando a teoria de conjuntos.
  - **<u>Definição</u>**: O espaço amostral S de um experimento é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimentos. Um evento A é um subconjunto do espaço amostral S, e diz-se que A ocorreu se o resultado efetivo do experimento pertencer a A.



Fonte: (Blitzstein e Hwang, 2015)

Espaço Amostral

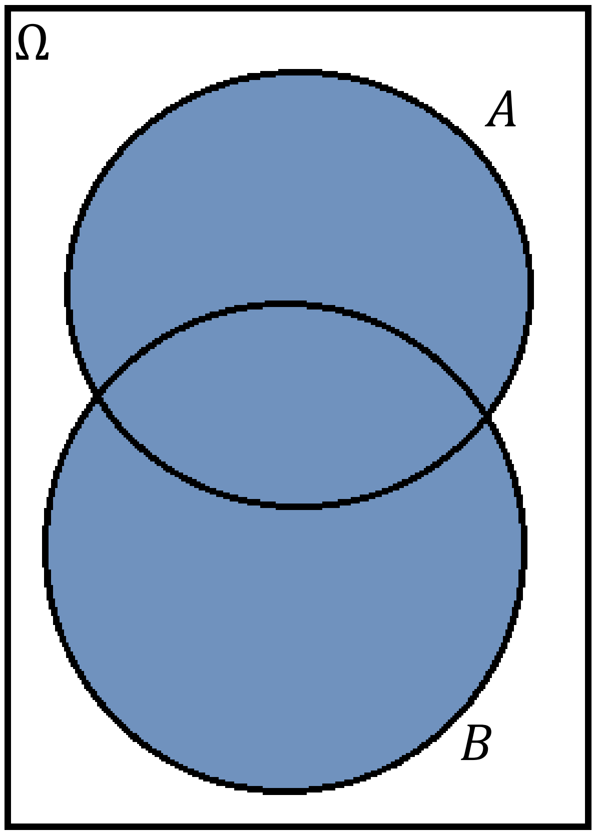
- O espaço amostral de um experimento pode ser finito ou infinito.
- Espaço amostral finito
  - Experimento 1- lançar um dado e observar a face voltada para cima ($S = \{1,2,3,4,5,6\}$)
  - Experimento 2 - extrair uma peça de uma linha de produção e a classificar como perfeita ou não ($S = \{\text{sim}, \text{não}\}$)

Espaço Amostral

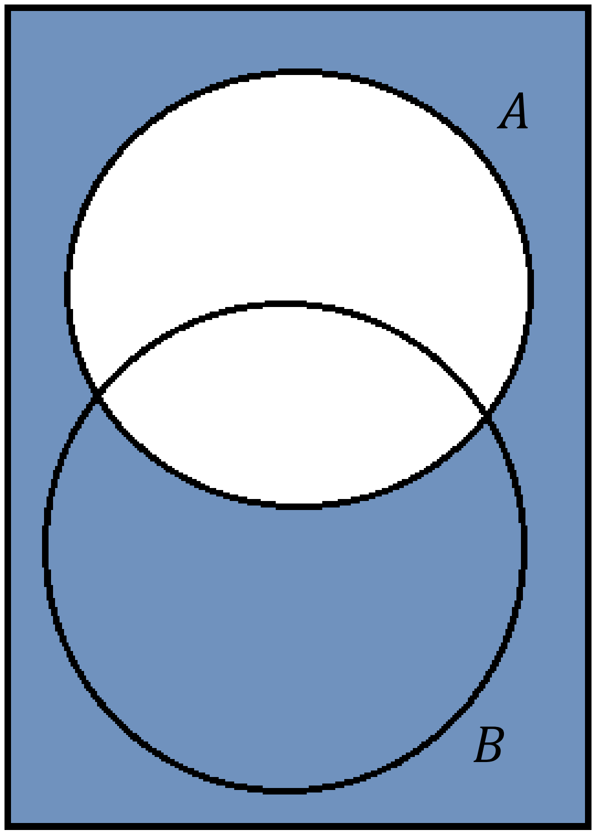
- Espaço amostral infinito
  - Infinito não-enumerável, quando a variável observada no experimento é quantitativa contínua:
    - Experimento 3 – chutar uma bola de futebol e medir a velocidade máxima que ela alcança ($S = \{x|x \geq 0\}$)
  - Infinito numerável, quando a variável observada no experimento é quantitativa discreta:
    - Experimento 4 – observar o número de carros que passam por determinado pedágio no período de uma semana ($S = \{0,1,2,3,4, \dots\}$)
      - Na prática, esses espaço amostral é finito, porém, na maioria dos casos, tratar esses espaços amostrais como infinitos, não só facilita, como possibilita, o cálculo das probabilidades de eventos específicos.

Operações entre Eventos

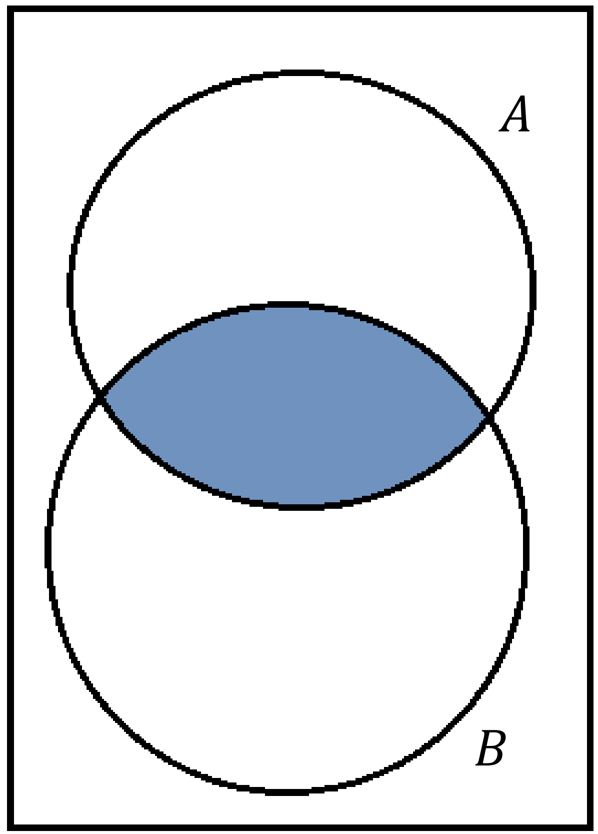
$A \cup B$



$A^c = \bar{A}$



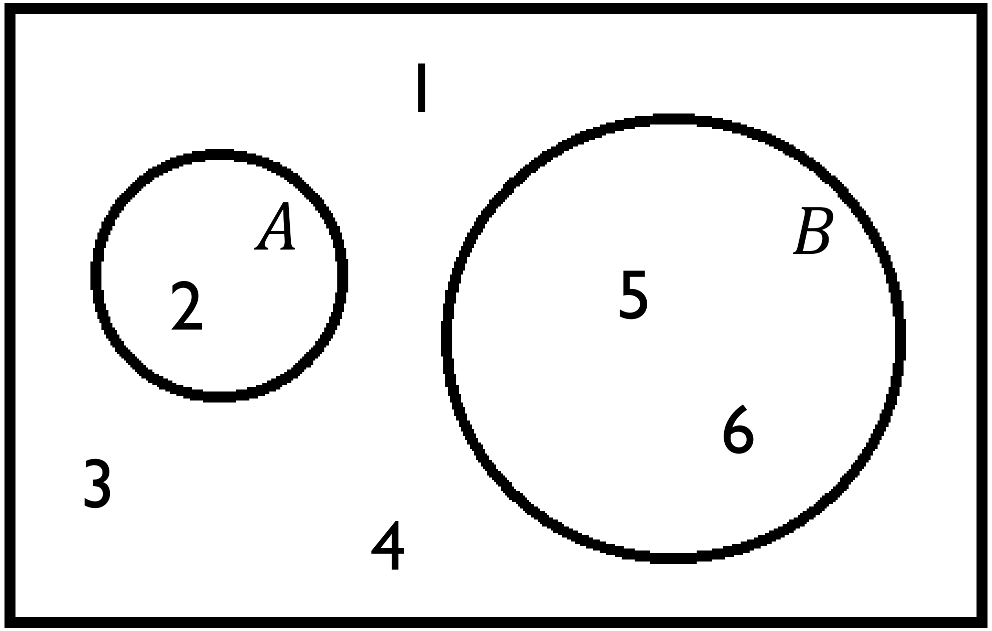
$A \cap B$



Eventos Mutuamente Exclusivos

- Eventos mutuamente exclusivos são aqueles que não podem ocorrer ao mesmo tempo.
- Exemplo:
  - Lançamento de um dado: Evento A = sair 2; Evento B = sair um valor maior do que 4.

$$A \cap B = \emptyset$$



Exercício 1

- Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral "traduza" para a linguagem da Teoria dos Conjuntos, as seguintes situações:
  - Pelo menos um dos eventos ocorre;
  - O evento A ocorre, mas B não;
  - Nenhum deles ocorre;
  - Exatamente um dos eventos ocorre.

Exercício 2

- Considere os eventos A, B e C (definidos abaixo) relativos ao espaço amostral $S = \{t | t \geq 0\}$.
  - $A = \{t | t < 100\}$
  - $B = \{t | 50 \leq t \leq 200\}$
  - $C = \{t | t > 150\}$
- Encontre os conjuntos:
  - $A \cup B$,
  - $A \cap B$,
  - $A \cap (B \cup C)$,
  - $A \cap B \cap C$,
  - $(A \cup C)^c$.

Espaço Amostral Finito

- A princípio, iremos considerar, apenas, experimentos cujos espaços amostrais sejam finitos.
  - $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

Resultados Igualmente Verossímeis

- A hipótese mais comumente feita para espaços amostrais finitos é a de que todos os resultados sejam igualmente verossímeis.
  - Essa hipótese não deve ser tomada como certa, mas sim justificada para cada caso.
- Se todos os k resultados forem igualmente verossímeis, segue-se que cada probabilidade será dada por $p_i = {}^{1}/_{k}$.
  - $p_i \geq 0, i = 1,2, \dots, k;$
  - $p_i = p_j = p = \frac{1}{k}$, para quaisquer i e j, com , $i, j = 1,2, \dots, k$
  - $p_1 + p_2 + \dots + p_k = k.p = k.\frac{1}{k} = 1.$
- Logo, para qualquer evento A formado por r resultados, tem-se:
  - $P(A) = {}^{r}/_{k}.$
  - $P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A \text{ pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}{\text{número total de casos pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}.$

Exercício 3

- Em uma universidade, 2000 estudantes do curso de medicina, em determinado ano, foram classificados de acordo com o tipo de esporte que praticam. Futebol é praticado por 260 estudantes, natação por 185 estudantes e musculação por 210 estudantes, sendo que alguns estudantes praticam mais de um desses esportes. Assim, tem-se 42 estudantes que praticam natação e musculação, 12 futebol e musculação, 18 futebol e natação e 3 praticam as três modalidades. Se um desses estudantes é sorteado ao acaso, qual é a probabilidade de:
  - Praticar somente musculação;
  - Praticar pelo menos um destes esportes;
  - Praticar pelo menos dois destes esportes;
  - Não praticar nenhum destes esportes.

Definição de Probabilidade

- Definição:
  - Seja ε um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a ε. A cada evento A associaremos um número real representado por $P(A)$ e denominado ***probabilidade de A***, que satisfaça às seguintes propriedades:
    - $0 \leq P(A) \leq 1$;
    - $P(\Omega) = 1$;
    - Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
    - Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então, $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Espaço Amostral Finito

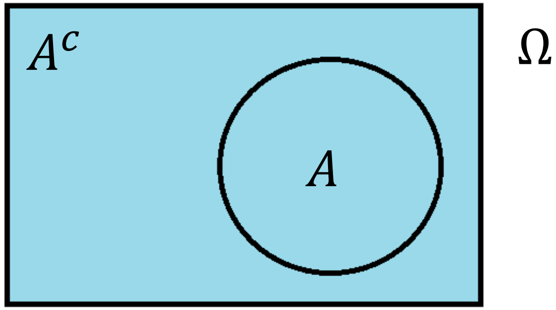
- Para encontrar $P(A)$ nesses casos, é necessário, inicialmente, considerar o evento formado por um resultado simples – evento simples, ou elementar $(A = \{a_i\})$.
  - A cada evento simples $\{a_i\}$ será associado um valor p_i, denominado probabilidade de $\{a_i\}$, que satisfaça as seguintes condições:
    - $p_i \geq 0, i = 1,2, \dots, k;$
    - $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1.$
- Em seguida pode se considerar um evento A_j constituído por r resultados, com $1 \leq r \leq k. \left(A_j = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}\}\right)$, consequentemente:
- $P(A_j) = p_{j_1} + p_{j_2} + \cdots + p_{j_r}.$

Exercício 4

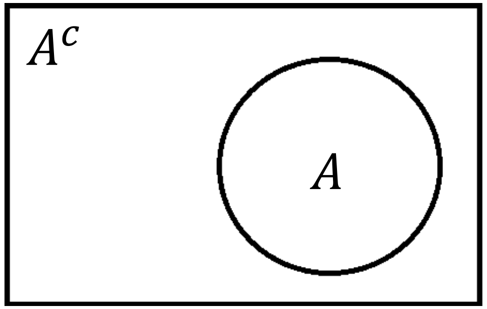
- Suponha-se que somente três resultados sejam possíveis em um determinado experimento aleatório, a saber, a_1, a_2 e a_3. Além disso, suponha-se que a_1 seja duas vezes mais provável de ocorrer que a_2, e que a_2 seja duas vezes mais provável de ocorrer que a_3. Quais as probabilidades de a_1, a_2 e a_3, cada, ocorrerem?

Algumas Propriedades

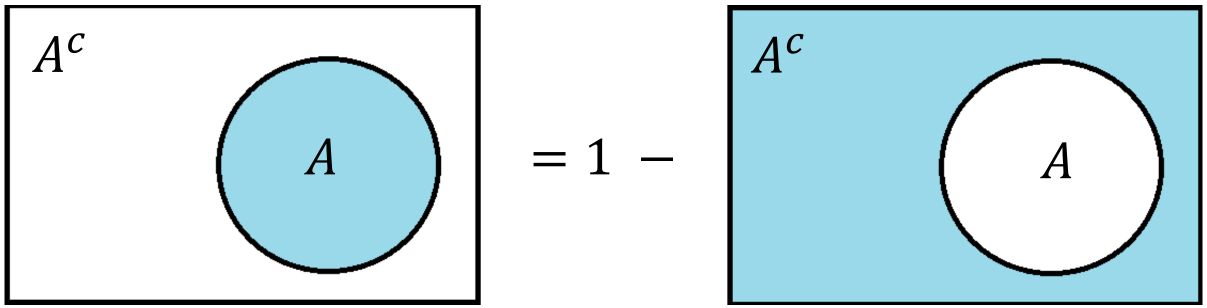
- $P(A \cup A^c) = 1;$



- $P(A \cap A^c) = 0;$

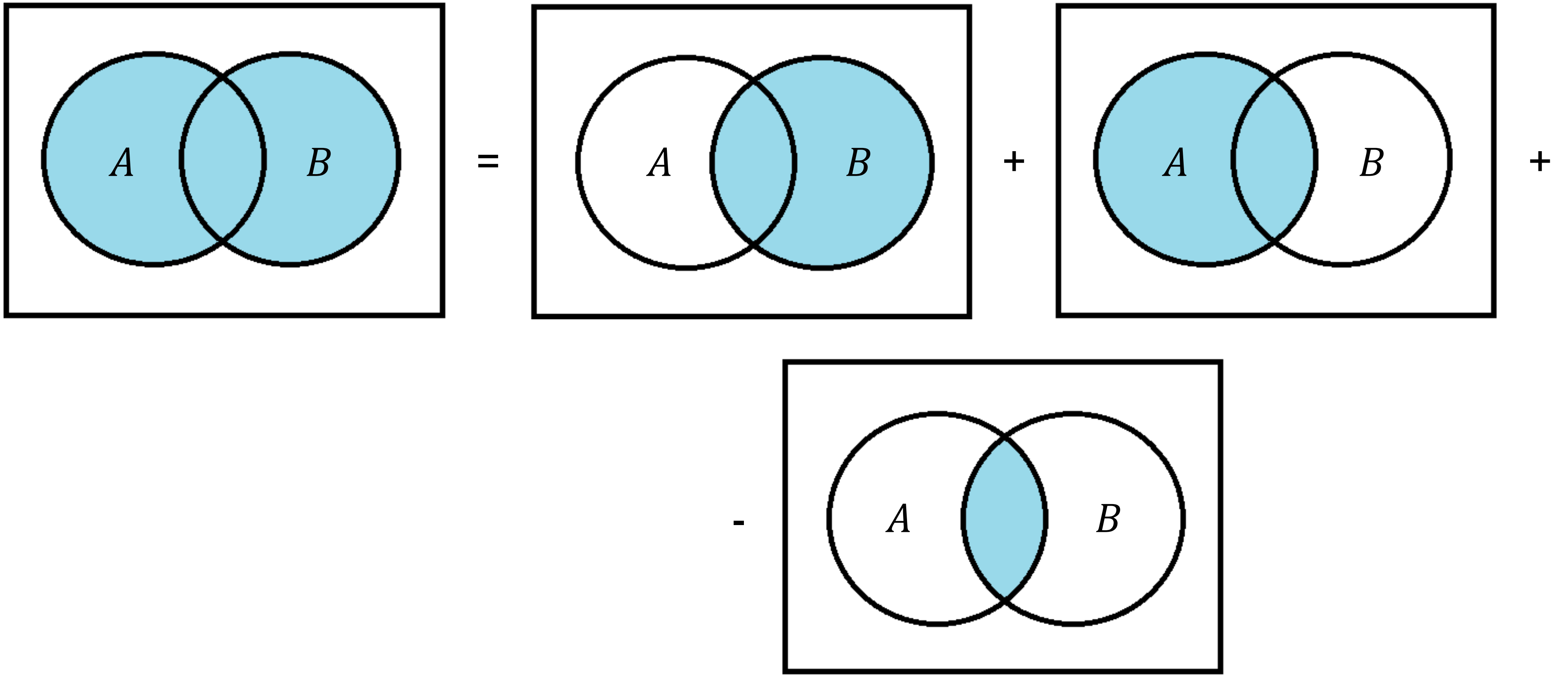


- $P(A) = 1 - P(A^c).$



Algumas Propriedades

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;



Exercício 5

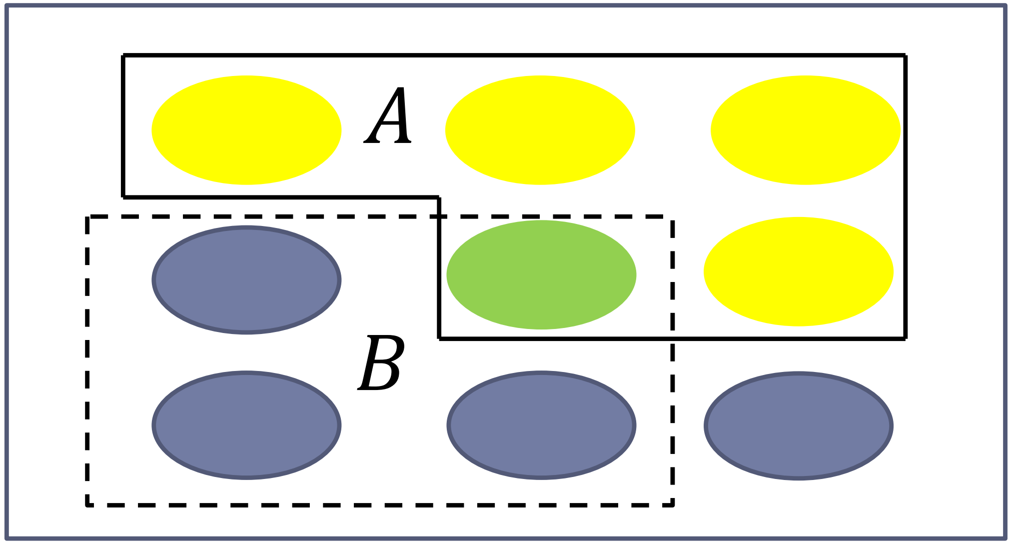
- Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, tais que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0{,}5$ e $P(A \cap B) = 0{,}1$.
- Determine o valor de p.

Probabilidade Condicional (definição)

- Muitas vezes existe o interesse em determinar a probabilidade de um evento B, dado que já se conhece o resultado de um outro evento A;
- A probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A $\left(P(B|A)\right)$ é dada pela seguinte expressão:
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, desde que $P(A) > 0$.
- Para $P(A) = 0$, temos $P(B|A) = P(B)$.

Probabilidade Condicional (conceito)

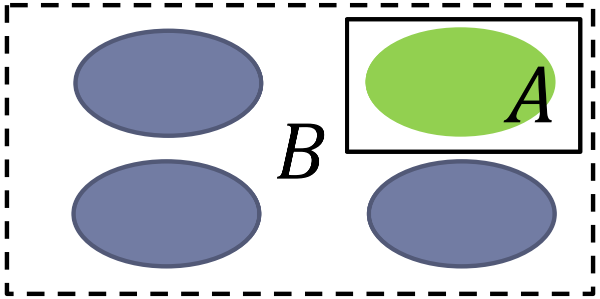
- Espaço amostral original, suposto igualmente provável.



$$P(A) = \frac{5}{9} \qquad P(B) = \frac{4}{9}$$

$$P\left(A \cap B = \frac{1}{9}\right)$$

- Quero calcular a probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B ocorreu



$$P(A|B) = \frac{1}{4}$$

Fonte: (Blitzstein e Hwang, 2015)

Exercício 6

- Uma classe de estatística teve a seguinte distribuição das notas finais: 4 do sexo masculino e 6 do sexo feminino foram reprovados, 8 do sexo masculino e 14 do sexo feminino foram aprovados. Para um aluno sorteado dessa classe, denote por M se o aluno escolhido for do sexo masculino e por A se o aluno foi aprovado. Calcule:
  - $P(A \cup M^c)$, $P(A^c \cap M^c)$
  - $P(A|M)$, $P\ (M^c|A)$, $P(M|A)$

Regra Multiplicativa

- Sai diretamente da probabilidade condicional:
- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$
- Essa regra é de grande utilidade na verificação de dependência entre os eventos envolvidos.

Eventos Independentes

- Dois eventos são considerados independentes quando a ocorrência de um não influencia na ocorrência ou não-ocorrência do outro;
- Logo, se dois eventos, A e B, são independentes tem-se:
- $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$;
- Ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
  - OBS: Os termos mutuamente exclusivos e independentes não são sinonimos; basta lembrar que eventos mutuamente exclusivos não possuem interseção.

Exercício 7

- Uma família tem duas crianças, e é sabido que ao menos uma das crianças é uma menina. Qual a probabilidade de ambas as crianças serem meninas, dada a informação acima? Qual a probabilidade de ambas serem meninas se é sabido que a mais velha é menina?

Exercício 8

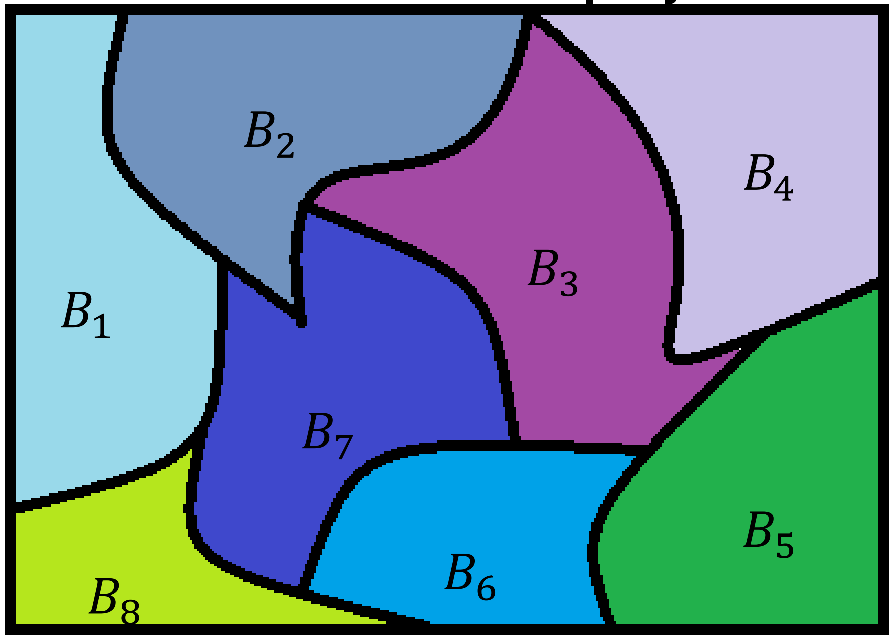
- Chevalier de Mèrè ganhou dinheiro com a estratégia de apostar na presença de ao menos um resultado igual a 6 a lançar o mesmo dado 4 vezes e que perdeu dinheiro ao apostar na presença de ao menos um par de 6 ao lançar os mesmos 2 dados 24 vezes. Para os 2 jogos ele acreditava que a sua probabilidade de ganho era de 2/3. Qual a probabilidade correta de ganhar nesses 2 jogos? Chevalier de Mèrè estava correto em seus cálculos?

Exercício 9

- Se $P(A \cup B) = 0{,}8; P(A) = 0{,}5$ e $P(B) = x$, determine o valor de x no caso de:
- No caso destes dois eventos serem independentes;
- No caso destes dois eventos serem mutuamente exclusivos.

Partição do Espaço Amostral

- Uma partição do espaço amostral é dada por um conjunto de eventos mutuamente exclusivos que quando unidos formam o espaço amostral:



- $\Omega = \bigcup_{k=1}^{8} B_k$

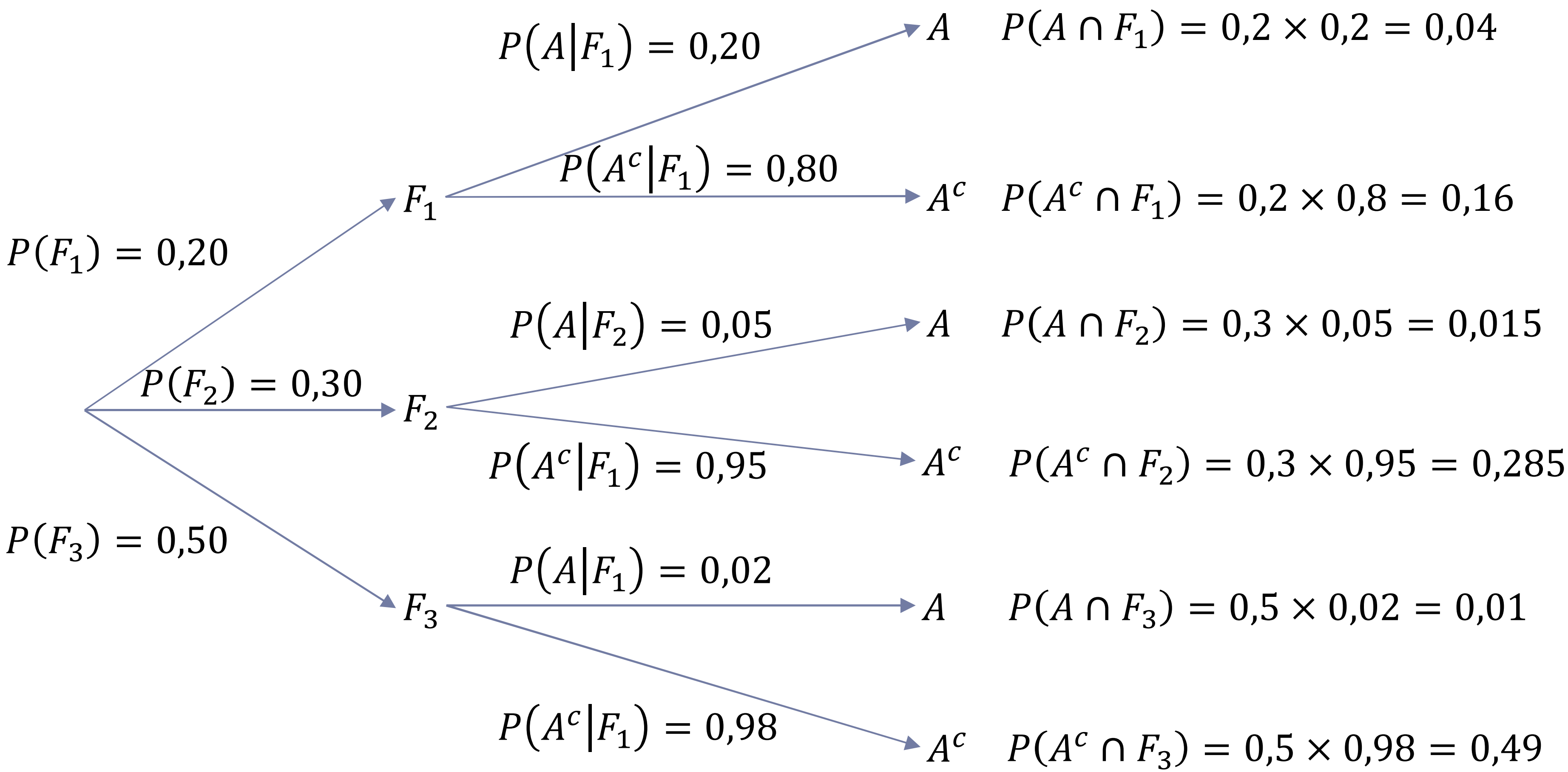
Exemplo

- Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazenda F_2 e 50% de F_3.
- Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.
- Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.
- Para um galão escolhido ao acaso, vamos analisar o leite para decidir sobre sua adulteração ou não.

Exemplo

- Se denotarmos por A o evento "o leite está adulterado", temos:
  - $P(F_1) = 0{,}20$ e $P(A|F_1) = 0{,}20$
  - $P(F_2) = 0{,}30$ e $P(A|F_2) = 0{,}05$
  - $P(F_3) = 0{,}50$ e $P(A|F_3) = 0{,}02$
- Além disso, F_1, F_2 e F_3 formam uma partição do espaço amostral, já que uma dada amostra de leite vem, necessariamente, de uma e apenas uma das três fazendas.

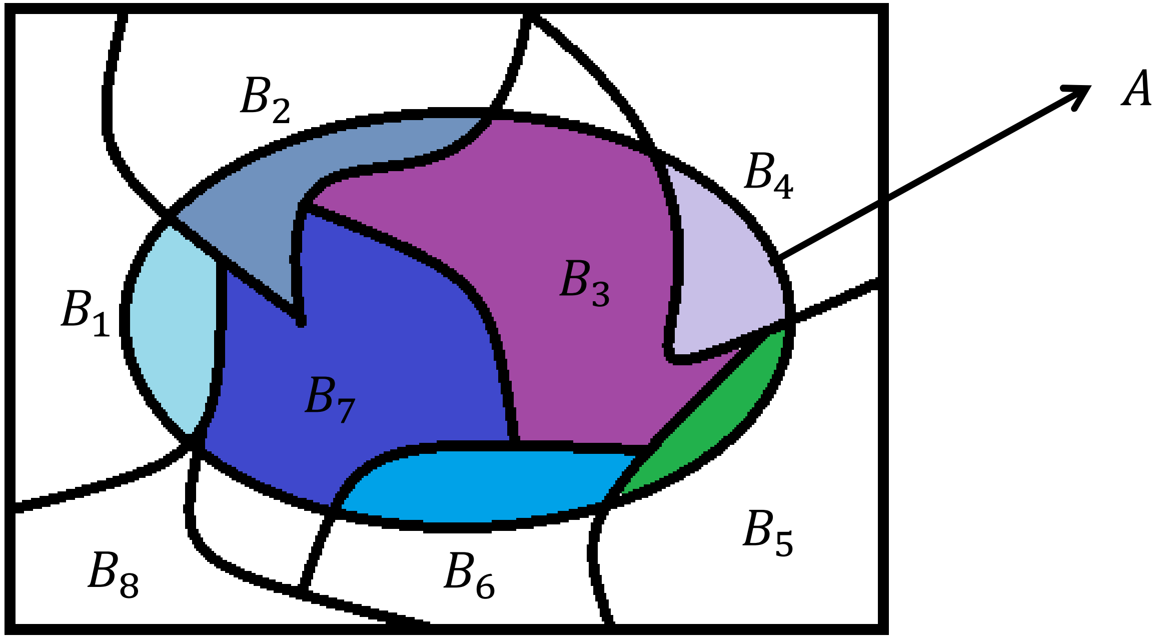
Exemplo



$P(A|F_1) = 0,20$
A
$P(A \cap F_1) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$
$P(A^c|F_1) = 0,80$
F_1
A^c
$P(A^c \cap F_1) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$
$P(F_1) = 0,20$
$P(A|F_2) = 0,05$
A
$P(A \cap F_2) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$
$P(F_2) = 0,30$
F_2
$P(A^c|F_1) = 0,95$
A^c
$P(A^c \cap F_2) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$
$P(F_3) = 0,50$
$P(A|F_1) = 0,02$
F_3
A
$P(A \cap F_3) = 0,5 \times 0,02 = 0,01$
$P(A^c|F_1) = 0,98$
A^c
$P(A^c \cap F_3) = 0,5 \times 0,98 = 0,49$

Teorema da Probabilidade Total

- Dado um evento A e uma partição do espaço amostra $(B_1, \dots, B_k)$ tem-se:

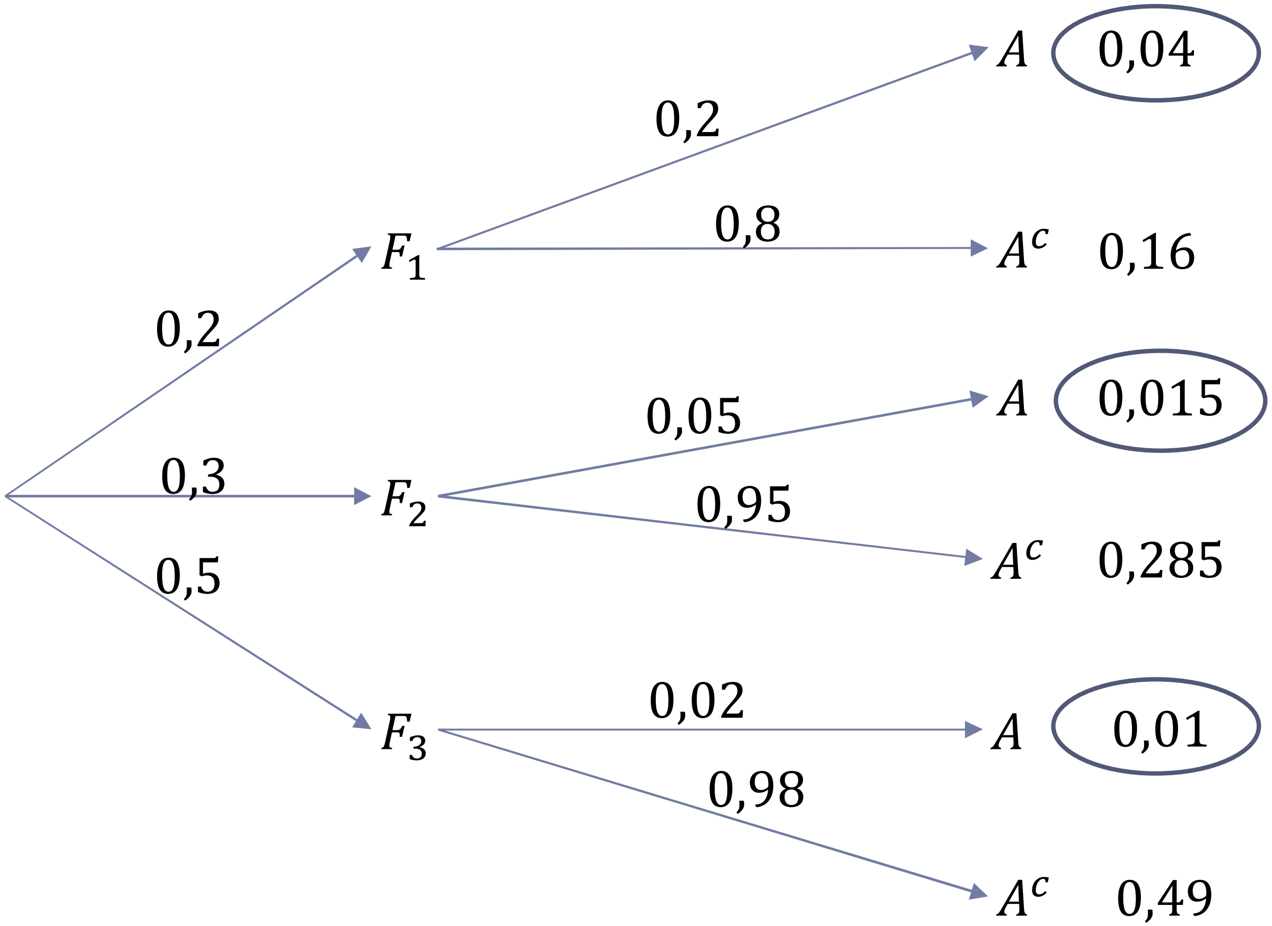


- $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$

Exemplo

- Temos as seguintes informações do enunciado:
  - $P(F_1) = 0{,}20$ e $P(A|F_1) = 0{,}20$
  - $P(F_2) = 0{,}30$ e $P(A|F_2) = 0{,}05$
  - $P(F_3) = 0{,}50$ e $P(A|F_3) = 0{,}02$
- Queremos saber a probabilidade do evento A "o leite está adulterado" ocorrer:
  - $P(A) = P(A \cap F_1) + P(A \cap F_2) + P(A \cap F_3)$
  - $P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3)$
  - $P(A) = 0{,}20 \cdot 0{,}20 + 0{,}05 \cdot 0{,}30 + 0{,}02 \cdot 0{,}50$
  - $P(A) = 0{,}04 + 0{,}015 + 0{,}01$
  - $P(A) = 0{,}065$

Exemplo

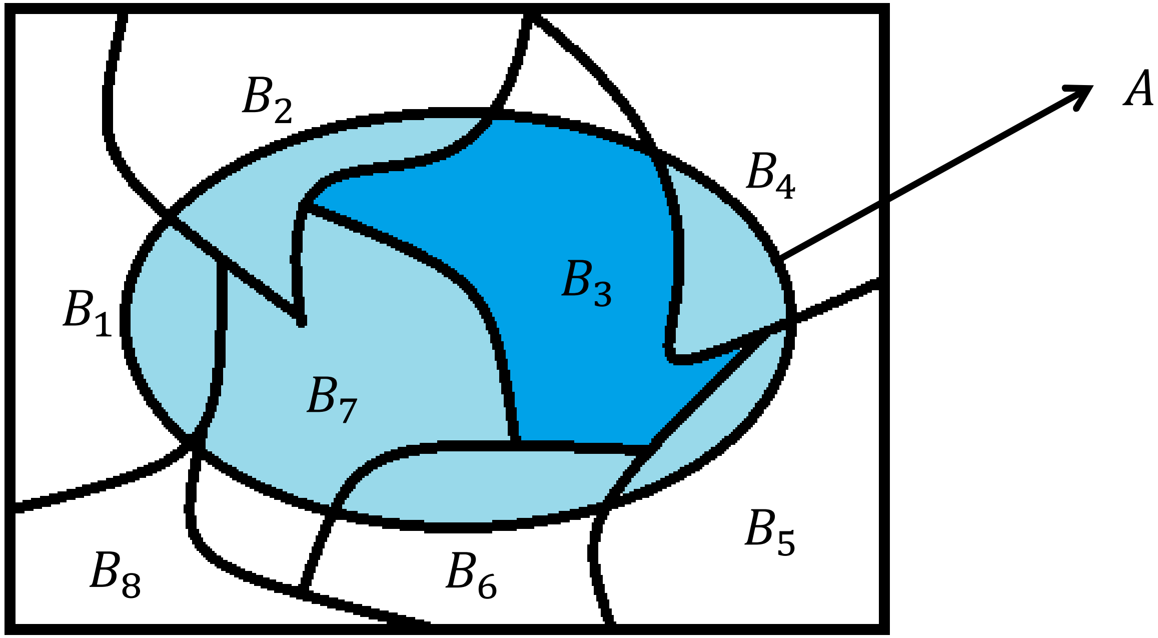


$$P(A) = 0{,}04 + 0{,}015 + 0{,}01$$

$$P(A) = 0{,}065$$

Teorema de Bayes

- Dado um evento A e uma partição do espaço amostra $(B_1, \ldots, B_k)$ tem-se:

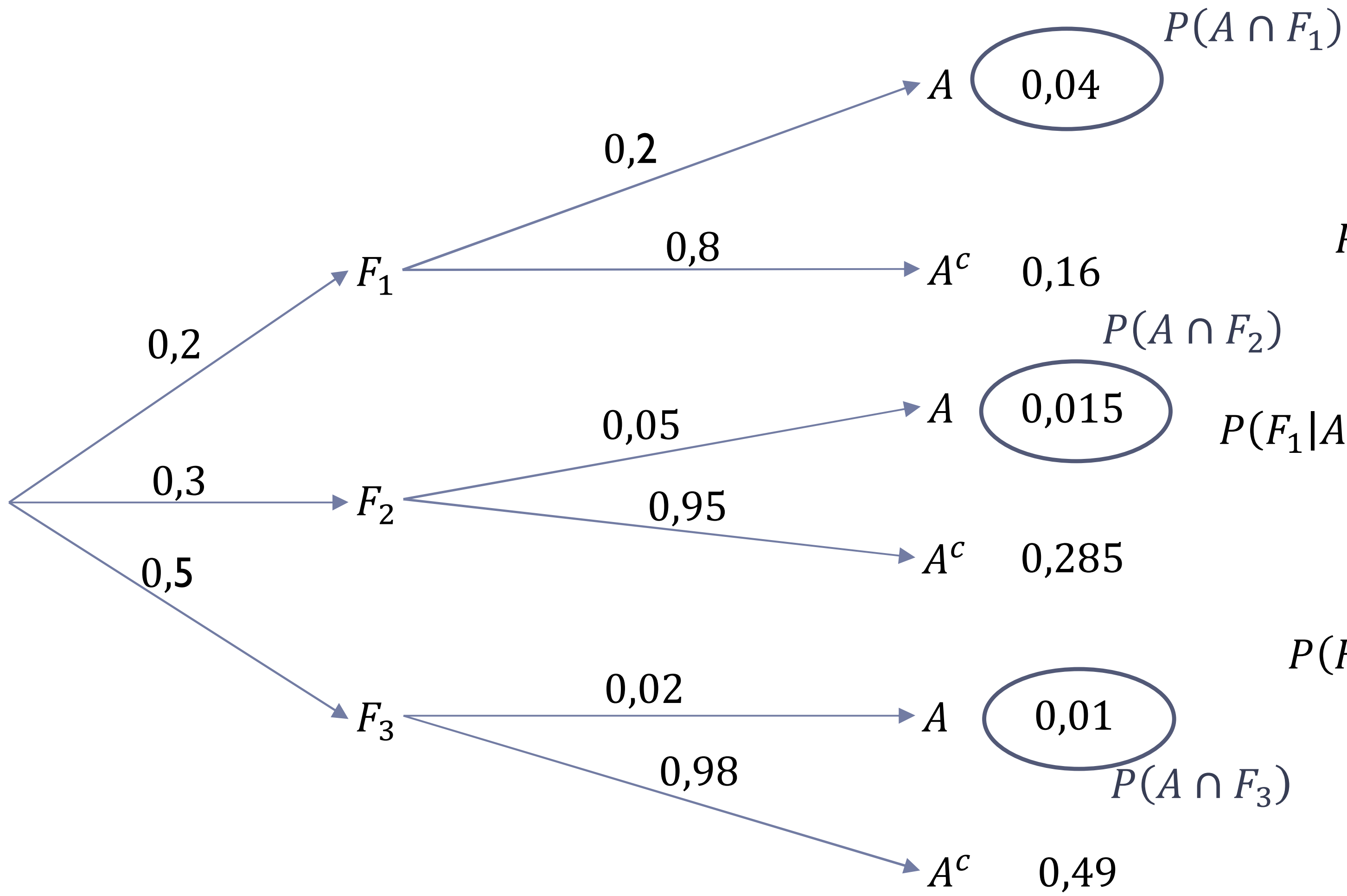


- $P(B_k|A) = \dfrac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$

Exemplo

- Podemos, ainda, estar interessados em saber qual a probabilidade de que a amostra adulterada ter sido obtida do leite fornecido pela fazenda F_1, ou seja, $P(F_1|A)$:
  - $P(F_1|A) = \frac{P(A \cap F_1)}{P(A)}$
  - $P(F_1|A) = \frac{P(A|F_1)P(F_1)}{P(A|F_1)P(F_1)+P(A|F_2)P(F_2)+P(A|F_3)P(F_3)}$
  - $P(F_1|A) = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}20}{0{,}20 \cdot 0{,}20+0{,}05 \cdot 0{,}30+0{,}02 \cdot 0{,}50}$
  - $P(F_1|A) = \frac{0{,}04}{0{,}065} = 0{,}615$

Exemplo



$$P(F_1|A) = \frac{P(A \cap F_1)}{P(A)}$$

$$P(F_1|A) = \frac{0{,}04}{0{,}04 + 0{,}015 + 0{,}01}$$

$$P(F_1|A) = \frac{0{,}04}{0{,}065} = 0{,}615$$

Exercício 10

- Três candidatos disputam as eleições para o Governo do Estado. O candidato do partido de direita tem 30% de probabilidade de vitória, o de centro tem 30% e o da esquerda 40%. Em sendo eleito, a probabilidade de dar, efetivamente, prioridade para Educação e Saúde é de 0,4; 0,6 e 0,9 para os candidatos de direita, centro e esquerda, respectivamente.
  - Qual é a probabilidade de não ser dada prioridade a essas áreas no próximo governo?
  - Se a área teve prioridade, qual a probabilidade do candidato de direita ter ganho a eleição?

Exercício 11

- Uma família viaja ao litoral para passar um fim de semana. A probabilidade de congestionamento na estrada é de 0,6. Havendo congestionamento, a probabilidade dos seus dois filhos brigarem no carro é de 0,8 e, sem congestionamento, a briga pode aparecer com probabilidade 0,4. Quando há briga, com ou sem congestionamento, a probabilidade do pai perder a paciência com os filhos é de 0,7. É claro que havendo congestionamento o pai pode perder a paciência com os filhos mesmo sem brigas, o que aconteceria com probabilidade 0,5. Quando não há nem congestionamento, nem briga, o pai dirige tranquilo e não perde a paciência. Determine a probabilidade de:
  - Não ter havido congestionamento se o pai não perdeu a paciência com seus filhos;
  - Ter havido briga, dado que o pai perdeu a paciência.

Referência

- Blitzstein, J. K.; Hwang, J. Introduction to Probability. New York: Chapman & Hall, 2015.