Estatística Descritiva
Medidas de Resumo/Box Plot

Departamento de Estatística

Resumo dos Dados

- Já vimos como resumir conjuntos de dados provenientes de variáveis qualitativas e quantitativas utilizando tabelas e gráficos;
- Para variáveis aleatórias quantitativas pode-se utilizar, além das tabelas e gráficos, medidas que resumem o conjunto de dados.

Medidas Resumo

- Medidas de Tendência Central:
  - Média;
  - Mediana;
  - Moda;
- Medidas de Posição
  - Quantis;
- Medidas de Dispersão:
  - Amplitude;
  - Variância;
  - Desvio Padrão;
  - Coeficiente de variação;
  - Distância Inter Quartil.

Medidas de Tendência Central

- Medidas em torno das quais as observações se distribuem;
- As medidas de tendência central, ou medidas de posição, mais estudadas são:
  - Média;
  - Mediana;
  - Moda.

Média

- Média ($\bar{x}$):
- Considere a amostra $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, a média observada é dada por:
- $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Exemplo – média

- Vamos usar como exemplo o conjunto de 14 idades relativas (já ordenadas) aos alunos amostrados que apresentaram nível grave de depressão (dados apresentados nas aulas anteriores):

18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26

$$\bar{x} = \frac{2 \times 18 + 19 + 3 \times 20 + 3 \times 21 + 2 \times 22 + 23 + 24 + 26}{14}$$

$$\bar{x} = \frac{295}{14} = 21{,}07 \text{ anos}$$

- Dentre os 898 alunos entrevistados, os 14 apresentando nível de depressão grave tinham idade média de 21,07 anos.

Mediana

- É o valor que ocupa a posição central dos dados ordenados.
  - Para encontrar a mediana deve-se ordenar os dados do menor para o maior;
  - A mediana relativa a um conjunto de dados pode ser definida como:
  - $$md = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Exemplo – mediana

- Considere o mesmo conjunto de dados do último exemplo
- Primeiro colocamos os dados em ordem:

						x_7
18	18	19	20	20	20	$\boxed{21}$
$\boxed{21}$	21	22	22	23	24	26
x_8						

$$n = 14 \Rightarrow md = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(\frac{14}{2}\right)} + x_{\left(\frac{14}{2}+1\right)}}{2} =$$

$$= \frac{x_7 + x_{(7+1)}}{2} = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{21+21}{2} = 21 \text{ anos}$$

- Dentre os 898 alunos entrevistados, os 14 apresentando nível de depressão grave tinham idade mediana de 21 anos.

Moda

- A moda de um conjunto de dados é a observação que aparece com maior frequência no conjunto;
- Um conjunto pode ser unimodal, bimodal ou multimodal;
- Caso todos os valores tenham a mesma frequência, não é possível determinar a moda do conjunto de valores, conjunto amodal.

Exemplo – moda

- Considere o mesmo conjunto de dados do último exemplo:

18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26

- Os valores 20 e 21, são igualmente mais frequentes, aparecendo 3 vezes, logo:
- $mo_1 = 20$ anos e $mo_2 = 21$ anos

- Dentre os 898 alunos entrevistados, os 14 apresentando nível de depressão grave tinham duas modas de idade: 20 e 21 anos.

Exercício 1

- Para cada um dos dois conjuntos dados abaixo, calcule a média, a mediana e a moda:
  - 120, 107, 95, 118, 150, 130, 132, 109, 136

Variável X	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Freq. absoluta	20	30	10	15	10	10	5	20	120

Medidas de Tendência Central

- Podem ser utilizadas conjuntamente para auxiliar a análise dos dados;
- Ou, em determinadas situações uma delas pode ser mais conveniente do que a outra:
  - No caso de haver um ou mais dados que se afastam do geral das observações (valores discrepantes ou outliers) a média passa a ser uma medida de tendência central inadequada, sendo a mediana uma medida mais indicada.
  - No caso de conjuntos multimodais ou amodais, a média ou a mediana são mais indicadas para representar a tendência central.

Exemplo – valor atípico

- Vamos usar como exemplo o conjunto de 14 idades relativas aos alunos amostrados que apresentaram nível grave de depressão considerando que o aluno com 54 anos pertencia a esse grupo (15 observações):

							x_8
18	18	19	20	20	20	21	21
21	22	22	23	24	26	54	

- $\bar{x} = \frac{2\times18+19+3\times20+\cdots+24+26+54}{15} = \frac{349}{15} = 23{,}27$ anos
- $md = x_8 = 21$ anos
- $mo_1 = 20; mo_2 = 21$ anos

Exemplo – valor atípico

- Ao inserir um valor atípico no conjunto de dados utilizado, pode perceber que:
- A média foi bastante influenciada, passou de 21,07 para 23,27 anos, se tornando inadequada;
- A mediana e a moda não sofreram alterações:
  - Mediana era 21 e se manteve 21 anos;
  - Conjunto bimodal, com modas de 20 e 21 anos antes e depois da inserção do valor atípico.

Medidas de Tendência Central

- Nem sempre se trabalha, ou se tem interesse, no conjunto de dados originais, obtidos por medidas diretas;
- Comumente, o interesse está em uma função dessas medidas diretas, sendo necessário considerar os valores originais multiplicados ou acrescidos de constantes para obter um novo conjunto de valores (medidas indiretas);
- Veremos, a seguir, como as medidas de tendência central se alteram e como podem ser obtidas a partir do conjunto original (medidas diretas).

Exemplo – medidas indiretas

- Vamos manter o exemplo das 14 idades dos alunos apresentando depressão grave.
- Vamos imaginar, porém, que por algum motivo o pesquisador esteja interessado nessa idade dada em meses (y), não em anos (x), termos então:
- $y = 12x + 6$ meses
- Para obter a idade em meses, basta multiplicar a idade em anos por 12 e adicionar uma correção de 6 meses (imaginando que alguns alunos acabaram de fazer aniversário e outros estão perto dos seus próximos aniversários).

Exemplo – medidas indiretas

- Vejamos como ficariam as idades em meses:

$18 \times 12 + 6$	$18 \times 12 + 6$	$19 \times 12 + 6$	$20 \times 12 + 6$	$20 \times 12 + 6$	$20 \times 12 + 6$	$21 \times 12 + 6$
$21 \times 12 + 6$	$21 \times 12 + 6$	$22 \times 12 + 6$	$22 \times 12 + 6$	$23 \times 12 + 6$	$24 \times 12 + 6$	$26 \times 12 + 6$

$$\bar{y} = \frac{2 \times (18 \times 12 + 6) + (19 \times 12 + 6) + \cdots + (26 \times 12 + 6)}{14} =$$

$$\bar{y} = \frac{295 \times 12 + 14 \times 6}{14} = 21{,}07 \times 12 + 6$$

$$md_y = \frac{(21 \times 12 + 6) + (21 \times 12 + 6)}{2} = 21 \times 12 + 6$$

$$mo_{y_1} = 20 \times 12 + 6 \text{ e } mo_{y_2} = 21 \times 12 + 6$$

Medidas de Tendência Central

- Considerando o exemplo 3, pode-se perceber que:
  - A multiplicação de uma constante 12 resultou em que as novas medidas de tendência central são as antigas multiplicadas por 12;
    - Generalizando:
    - A multiplicação de uma constante c resulta em que as novas medidas de tendência central serão as antigas multiplicadas por c.
  - O acréscimo de uma quantidade 6 teve o efeito de somar essa mesma constante às medidas de tendência central;
    - Generalizando:
    - O acréscimo de uma quantidade e tem o efeito de somar essa mesma constante às medidas de tendência central.

Exercício 2

- Um estudante está procurando um estágio para o próximo ano. As companhias A e B têm programas de estágios e oferecem uma remuneração por 20 horas semanais com as seguintes características (em salários mínimos):

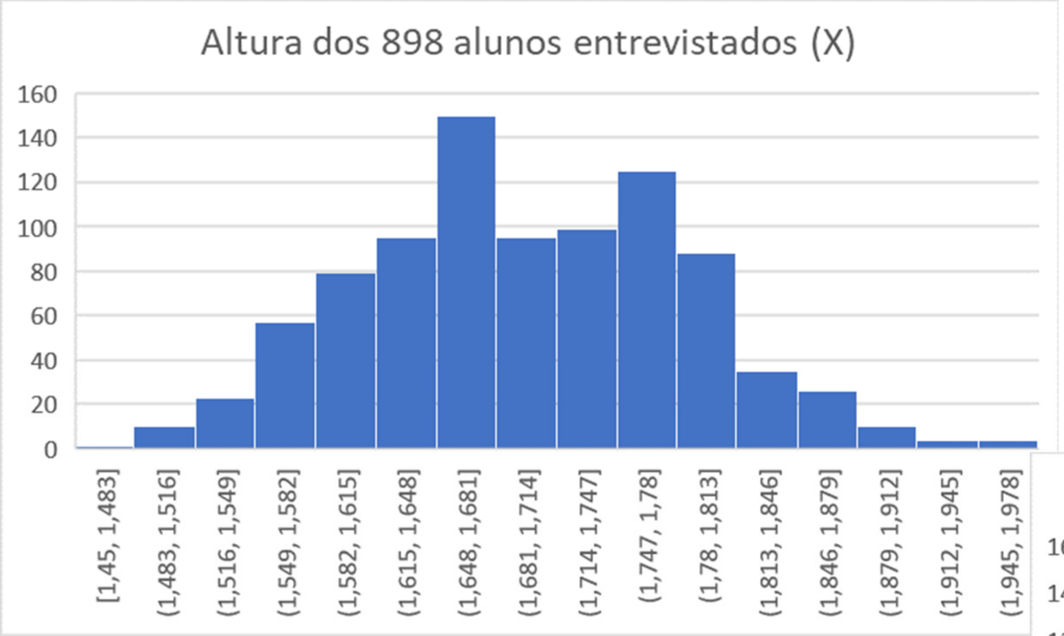
Companhia	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$
Média	2,5	2,0
Mediana	1,7	1,9
Moda	1,5	1,9

- Qual companhia o aluno deverá escolher? Justifique.

Simetria

- Um conjunto de dados é dito simétrico se os dados se distribuem igualmente ao redor da média;
- Pode-se dizer que um conjunto de dados é simétrico quando a média, mediana e moda são dadas pelo mesmo valor;
- O conhecimento da simetria de um conjunto auxilia a interpretação do mesmo.

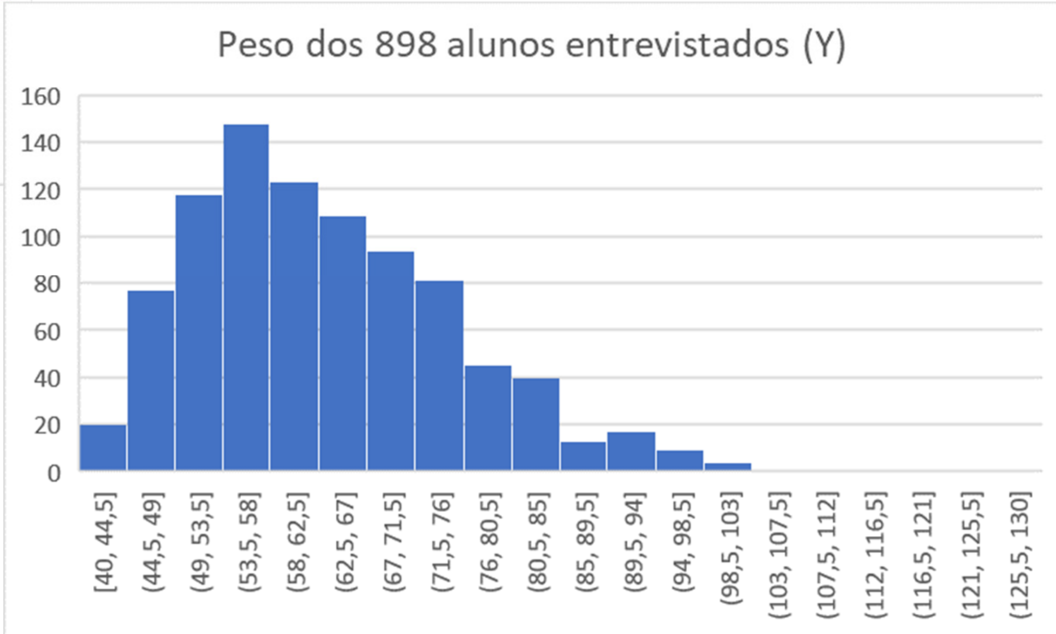
Simetria



$\bar{x} = 1{,}70$ metros

$md(X) = 1{,}70$ metros

$mo(X) = 1{,}65$ metros



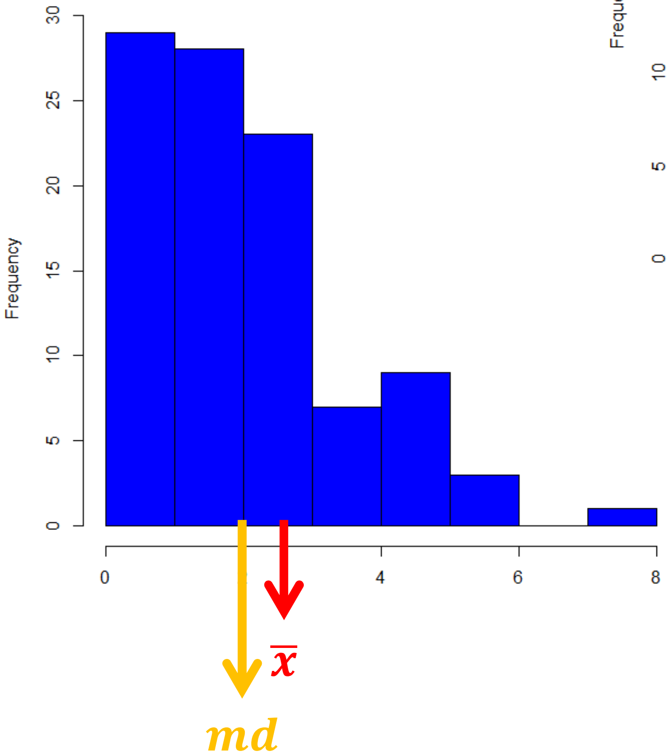
$\bar{y} = 63{,}42$ kg

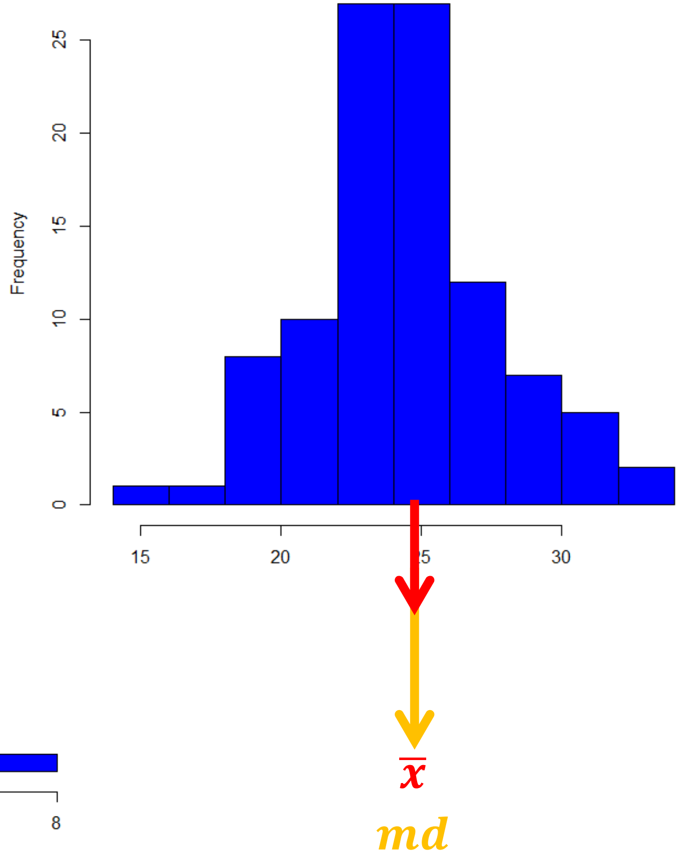
$md(Y) = 61$ kg

$mo(Y) = 60$ kg

Simetria

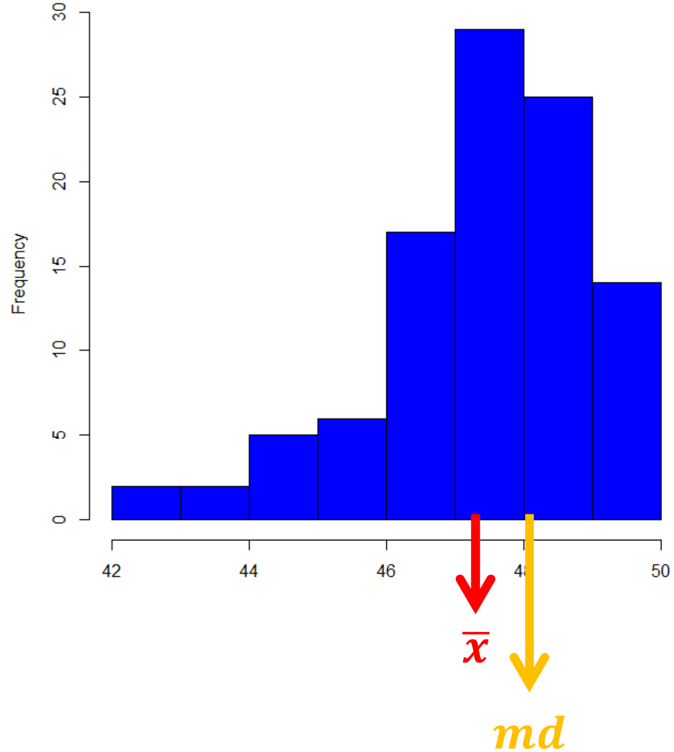
Assimetria à Direita ou Positiva





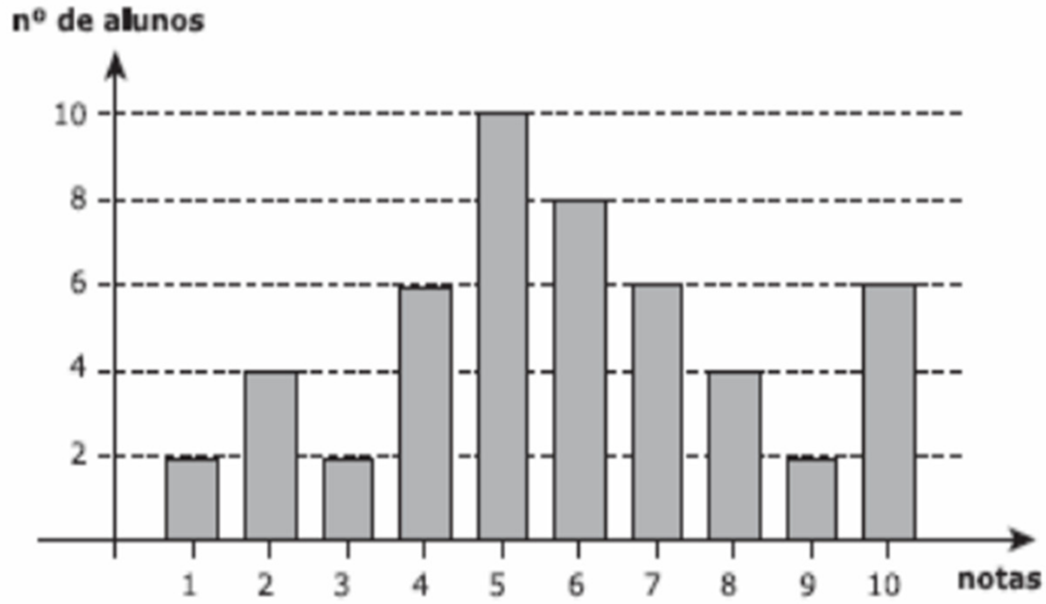
Simétrico

Assimetria à Esquerda ou Negativa



Exercício 3

- Observe no gráfico a seguir uma representação para as notas de 50 alunos do primeiro semestre de Ciências Econômicas numa determinada prova e calcule:
- A média;
- A mediana;
- A moda;



- Você consideraria esse conjunto de dados simétrico? Justifique.

Quantis

- Medida de posição que indica quantos porcento dos dados estão abaixo ou acima dela;
- Comumente indicado por $q(p)$, em que p é uma proporção qualquer ($0 \leq p \leq 100$), tal que $p\%$ das observações sejam menores ou iguais a $q(p)$.
- $q(0) =$ mínimo;
- $q(10) =$ primeiro decil ou 10° percentil;
- $q(25) =$ primeiro quartil (Q_1) ou 25° percentil;
- $q(50) =$ mediana ou segundo quartil (Q_2) ;
- $q(75) =$ terceiro quartil (Q_3) ;
- $q(80) =$ oitavo decil;
- $q(95) =$ 95° percentil.

Quantis

- Assim como para a mediana, o primeiro passo para encontrar o quantil desejado é ordenar os dados;
- Existem técnicas distintas para encontrar os quantis desejados;
- Uma das técnicas é:
- Utilizar a regra de três para encontrar a posição do valor representando o quantil desejado $j = np/100$:
- Caso o valor $j = np/100$ seja um **valor inteiro** deve-se calcular $q_{(p)} = \frac{x_{(j)}+x_{(j+1)}}{2}$;
- Caso o valor $j = np/100$ não seja um valor inteiro, deve-se utilizar o valor $q_{(p)} = x_{(j+1)}$, em que j é o maior inteiro menor do que $np/100$.

Exemplo – quantis

- Considere o mesmo conjunto de dados (14 idades) utilizado anteriormente:
- $q(10) =$ primeiro decil ou 10° percentil;
  - Posição: $j = {}^{10\times 14}/_{100} = 1{,}4$, não é inteiro, logo $q(10) = x_{1+1} = x_2$
- $q(25) =$ primeiro quartil (Q_1) ou 25° percentil;
  - Posição: $j = {}^{25\times 14}/_{100} = 3{,}5$, não é inteiro, logo $Q_1 = x_{3+1} = x_4$
- $q(50) =$ mediana (md) ou segundo quartil (Q_2);
  - Posição: $j = {}^{50\times 14}/_{100} = 7$, é inteiro, logo $Q_2 = \frac{x_7+x_8}{2}$
- $q(75) =$ terceiro quartil (Q_3);
  - Posição: $j = {}^{75\times 14}/_{100} = 10{,}5$, não é inteiro, logo $Q_3 = x_{10+1} = x_{11}$
- $q(80) =$ oitavo decil;
  - Posição: $j = {}^{80\times 14}/_{100} = 11{,}2$, não é inteiro, logo $q(80) = x_{11+1} = x_{12}$

Exemplo – quantis

- $q(10) = x_2 = 18$ anos
- $Q_1 = x_4 = 20$ anos
- $Q_2 = \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{21+21}{2} = 21$ anos
- $Q_3 = x_{11} = 22$ anos
- $q(80) = x_{12} = 23$ anos

	x_2		x_4			x_7
18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26
x_8			x_{11}	x_{12}		

Resumo dos 5 números

- Resumo dado por 5 valores que ajuda a entender a variabilidade e simetria dos dados:
  - Mínimo;
  - Primeiro Quartil;
  - Mediana;
  - Terceiro Quartil;
  - Máximo.

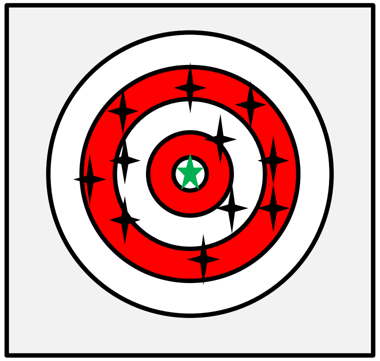
Exemplo - Resumo dos 5 números

- Considerando os quantis encontrados anteriormente, temos:
  - Mínimo = 18 anos
  - Primeiro Quartil = 20 anos
  - Mediana = 21 anos
  - Terceiro Quartil = 22 anos
  - Máximo = 26 anos

x_1			x_4			x_7
18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26
x_8			x_{11}			x_{14}

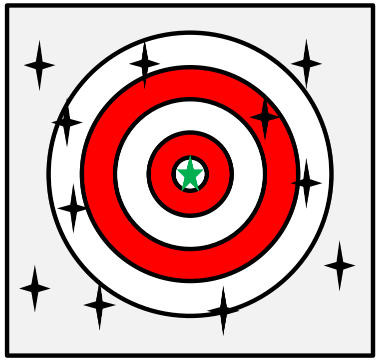
Medidas de Dispersão

- As medidas de tendência central indicam em torno de qual valor os dados se distribuem;
- No entanto, não fornecem informações sobre a dispersão desses dados, não se sabe se num geral os dados estão próximos ou afastados da medida de tendência central;
- É necessário obter medidas específicas de dispersão para ter uma ideia de como os dados se comportam com relação à medida de tendência central.



Medida de tendência central

Observações



Medidas de Dispersão

- Algumas das medidas de dispersão, ou de variabilidade, mais utilizadas são:
  - Amplitude;
  - Variância;
  - Desvio Padrão;
  - Coeficiente de variação.

Amplitude

- Fornece uma descrição da variabilidade de um conjunto de dados;
- A amplitude é dada pela diferença entre os valores máximo e mínimo de um conjunto de dados;
- Assim como a média, a amplitude apresenta uma grande sensibilidade à valores atípicos.

Exemplo – amplitude

- Vamos continuar utilizando o conjunto das 14 idades dos alunos com nível de depressão grave, já ordenadas e apresentadas abaixo:

18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26

$$amplitude = 26 - 18 = 8 \text{ anos}$$

Variância

- A variância de um conjunto de dados objetiva quantificar a variabilidade ao redor da média aritmética das observações.
- A variância de uma amostra é dada por:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- A variância possui um inconveniente: se as observações forem medidas em cm a variância será dada em cm^2. A unidade de medida da variância será sempre a unidade de medida das observações elevada ao quadrado.

Exemplo – variância

- Vamos mais uma vez trabalhar com o mesmo conjunto das 14 idades:

Média:
21,07 anos

18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26

$$s^2 = \frac{2 \times (18 - 21{,}07)^2 + (19 - 21{,}07)^2 + \cdots + (24 - 21{,}07)^2 + (26 - 21{,}07)^2}{13}$$

$$s^2 = \frac{(-3{,}07)^2 + (-2{,}07)^2 + \cdots + (2{,}93)^2 + (4{,}93)^2}{13} = \frac{64{,}93}{13} = 4{,}99 \text{ anos}^2$$

Exemplo – variância

x_i	F.Abs. (f_i)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
18	2	-3,07	9,43	18,87
19	1	-2,07	4,29	4,29
20	3	-1,07	1,15	3,44
21	3	-0,07	0,01	0,02
22	2	0,93	0,86	1,72
23	1	1,93	3,72	3,72
24	1	2,93	8,58	8,58
26	1	4,93	24,29	24,29
Total	14			64,93

$\bar{x} = 21{,}07$ anos

$s^2 = \frac{64{,}93}{13} = 4{,}99$ anos²

Desvio Padrão

- O desvio padrão é dado pela raiz quadrada da variância:
- $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$
- A grande vantagem do desvio padrão é o fato dele ter a mesma unidade de medida das observações;
- Assim como a variância o desvio padrão fornece uma medida de variabilidade ao redor da média do conjunto observado;
- No entanto o valor dado pelo desvio padrão costuma ser mais direto para a compreensão do quanto os dados se distanciam da sua média aritmética.

Exemplo – desvio padrão

- Considere o mesmo conjunto de dados das 14 idades observadas dentro do grupo dos alunos apresentando depressão grave:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}99} = 2{,}23 \text{ anos}$$

Coeficiente de Variação

- Em alguns casos é interessante relacionar a média aritmética com o desvio padrão.
- O coeficiente de variação fornece uma medida livre de dimensão e representada como uma percentagem, indicando a importância da variação dos dados:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\%$$

- Como o coeficiente de variação não possui dimensão, ele pode ser utilizado para comparar a variabilidade entre dois conjuntos de dados distintos;
- Quanto menor o CV, maior a homogeneidade entre os dados.

Exemplo – Coeficiente de variação

- Considere os dados dos pesos (X) e alturas (Y) dos 14 alunos com nível de depressão grave entrevistados:
- Tem-se:
  - $\bar{x} = 64{,}13\ kg; s_x = 12{,}38\ kg;$
  - $\bar{y} = 1{,}68\ m; s_y = 0{,}06\ m.$
- $CV_x = \frac{12{,}38}{64{,}13} \times 100\% = 19{,}30\%$
- $CV_y = \frac{0{,}06}{1{,}68} \times 100\% = 3{,}81\%$

Medidas Indiretas

- Assim como para medidas de tendência central, é importante saber como trabalhar com medidas de dispersão (variância e desvio padrão) para dados obtidos de maneira indireta;
- Vamos utilizar o mesmo cenário criado para as medidas de tendência central:
  - Imagina-se que o pesquisador tenha interesse em conhecer a idade dos alunos com nível de depressão grave em meses;
  - Para isso, ele multiplicou a idade dos alunos por 12 meses e adicionou 6 meses a todas as idades.

Exemplo – Variância

x_i	y_i	**F.Abs. (f_i)**	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$f_i(y_i - \bar{y})^2$
18	$18 \times 12 + 6$	2	$-3{,}07 \times 12$	$9{,}43 \times 12^2$	$18{,}87 \times 12^2$
19	$19 \times 12 + 6$	1	$-2{,}0719 \times 12$	$4{,}29 \times 12^2$	$4{,}29 \times 12^2$
20	$20 \times 12 + 6$	3	$-1{,}07 \times 12$	$1{,}15 \times 12^2$	$3{,}44 \times 12^2$
21	$21 \times 12 + 6$	3	$-0{,}07 \times 12$	$0{,}01 \times 12^2$	$0{,}02 \times 12^2$
22	$22 \times 12 + 6$	2	$0{,}93 \times 12$	$0{,}86 \times 12^2$	$1{,}72 \times 12^2$
23	$23 \times 12 + 6$	1	$1{,}93 \times 12$	$3{,}72 \times 12^2$	$3{,}72 \times 12^2$
24	$24 \times 12 + 6$	1	$2{,}93 \times 12$	$8{,}58 \times 12^2$	$8{,}58 \times 12^2$
26	$26 \times 12 + 6$	1	$4{,}93 \times 12$	$24{,}29 \times 12^2$	$24{,}29 \times 12^2$
Total		14			$64{,}93 \times 12^2$

$\bar{y} = 21{,}07 \times 12 + 6$ anos e $s^2 = 4{,}99 \times 12^2$ anos²

Exemplo – Desvio Padrão

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}99 \times 12^2} = \sqrt{4{,}99} \times 12$$

$$s = 2{,}23 \times 12 \text{ anos}$$

Medidas de Dispersão

- Considerando o exemplo 6, pode-se perceber que:
  - A multiplicação de uma constante 12 resultou em que:
    - a nova variância é a antiga multiplicada por 12^2;
    - O novo desvio padrão é o antigo multiplicado por 12.
  - O acréscimo por uma quantidade 6 não causou alteração no novo cálculo da variância e por consequência no cálculo do desvio padrão.
- Generalizando:
  - A multiplicação de uma constante c resulta em:
    - a nova variância ser a antiga multiplicada por c^2;
    - O novo desvio padrão ser o antigo multiplicado por c.
  - O acréscimo por uma quantidade e não causa alteração no novo cálculo da variância ou do desvio padrão.

Exercício 4

- Os dados abaixo se referem, respectivamente à idade de alunos e tempo em segundos gasto para desenvolver uma atividade. Calcule a amplitude total, o desvio padrão e o coeficiente de variação dos dois conjuntos de dados abaixo e discuta em qual dos grupos a variabilidade é maior?
  - Idade dos alunos: 8, 9, 10, 10, 10, 11, 12
  - Tempo para desenvolver a atividade: 68, 69, 70, 70, 70, 71, 72

Exercício 5

- Uma amostra de temperaturas iniciais de uma determinada reação química resultou em uma média amostral (°C) de 87,3 e um desvio padrão amostral de 1,04. Quais são a média e o desvio padrão em °F? (DICA: F=9/5 C+32)

Distância Interquartil ou Amplitude Interquartil

- A Distância Interquartil (DIQ) é uma medida semelhante à amplitude já estudada, a diferença é que nesse caso, ao invés de utilizar os valores máximo e mínimo, utiliza-se os valores do Primeiro e Terceiro Quartis da seguinte maneira:
- $DIQ = Q_3 - Q_1$

Exemplo - DIQ

- Já foi obtido o resumo de cinco números, dado por:
  - Mínimo = 18 anos
  - Q_1= 20 anos
  - md_{obs}= 21 anos
  - Q_3= 22 anos
  - Máximo = 26 anos
- Logo:
- $DIQ = 22 - 20 = 2$ anos

Valores Atípicos (Outliers)

- Podem ser considerados atípicos aqueles valores que não estão incluídos no intervalo denominado Região de Observações Típicas (ROT), definido por:
- $ROT = (Q_1 - 1{,}5DIQ\ ;\ Q_3 + 1{,}5DIQ)$

Exemplo – Valores Atípicos

- Já foram obtidos os valores:
  - $Q_1 = 20$ anos;
  - $Q_3 = 22$ anos; e
  - $DIQ = 2$ anos.
- Logo:

$$ROT = (20 - 1{,}5 \times 2\,;22 + 1{,}5 \times 2)$$
$$ROT = (20 - 3\,;22 + 3)$$
$$ROT = (17;25)$$

18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26

- Como o valor máximo não está contido na ROT, conclui-se que ele é um valore atípico.

Box Plot

- Exibe um resumo dos dados de maneira simplificada;
- O Box-Plot possui informação sobre o resumo dos 5 números e sobre os valores atípicos;
- De maneira simplificada informa sobre, entre outras coisas, a variabilidade e a simetria dos dados.

Exemplo – resumo dos 5 números

- Considere o mesmo conjunto de dados das idades dos alunos com nível de depressão grave:

$$min = 18$$
$$Q_1 = 20$$
$$md_{obs} = 21$$
$$Q_3 = 22$$
$$max = 26$$

- Valor atípico: 26.

18	18	19	20	20	20	21
21	21	22	22	23	24	26

Exemplo – Box Plot

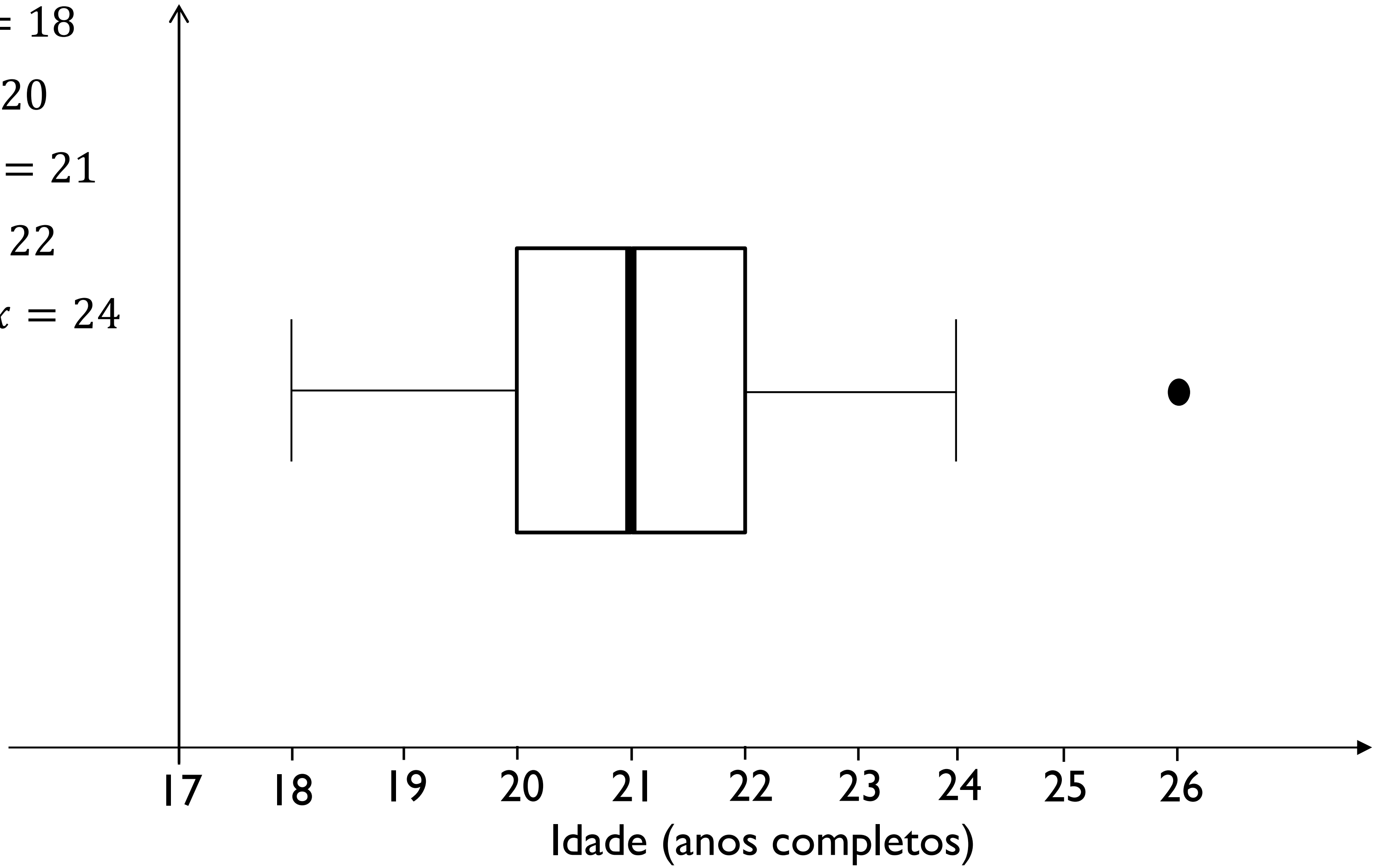
$min = 18$

$Q_1 = 20$

$md_{obs} = 21$

$Q_3 = 22$

$novo\ max = 24$



Box Plot

- Na presença de valores atípicos o box plot necessita de novo máximo e/ou mínimo, representando os valores atípicos como pontos fora da caixa;
- Existem algumas maneiras distintas de selecionar esses novos valores de máximo e/ou mínimo;
- Nessa disciplina, vamos utilizar um método que considero bastante intuitivo, que é utilizar o menor e/ou o maior valor do conjunto de dados que não é considerado como atípico;
- Como foi feito no exemplo anterior.

Exercício 6

- O gráfico de dispersão abaixo fornece informações sobre as notas obtidas em um exame de estatística e em um exame de matemática para cada um dos 12 alunos de uma turma do ensino médio. Utilizando essas informações construa um gráfico com os boxplot para as notas de cada exame (lado a lado) e adicione a média utilizando o símbolo *.