

## Introdução

Diversos problemas que abrangem fluidos na engenharia envolvem domínios com geometrias complexas que não se ajustam facilmente às malhas retangulares usualmente empregadas em soluções numéricas através do método de diferenças finitas ou de volumes finitos. Assim, para uma boa representação de domínios irregulares é necessário o emprego de malhas muito refinadas podendo acarretar em custos computacionais excessivos.

Este trabalho apresenta a resolução de um problema de advecção-difusão em um domínio bidimensional pelo *Control Volume Finite Element Method*, que agrega funcionalidades de dois métodos numéricos muito utilizados, o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Os resultados obtidos são comparados com resultados conhecidos encontrados na literatura.

## Control Volume Finite Element Method

O CVFEM é uma técnica que utiliza malhas não-estruturadas tendo como ponto de partida uma equação de conservação na forma integral. O domínio de solução é dividido em um número finito de volumes de controle (VC) contíguos e a equação de conservação é aplicada a cada VC. Um gerador de malhas de elementos finitos capaz de tratar geometrias complexas é empregado na geração desses volumes finitos.

No presente trabalho, utilizamos o CVFEM para obtenção da forma discreta da equação de conservação de uma quantidade escalar  $\phi(x, y)$ .

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV - \int_V Q dV - \int_A \kappa \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \phi dA = 0$$

Este processo é empregado na discretização desta equação gerando um sistema de equações algébricas lineares cujas incógnitas são os valores de  $\phi$  nos nós da malha de triângulos. Assim, é possível obter a equação:

$$a_i \phi_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} \phi_{S_{i,j}} + b_i$$

Onde  $a_i$  e  $a_{i,j}$  são os coeficientes do sistema de equações para a variável  $\phi$ , e representa  $b_i$  as contribuições de fontes, termos transientes e contornos.

A imagem ao lado ilustra a relação de um nó  $i$  com os seus nós adjacentes na matriz de suportes  $S_{i,j}$ , e seu VC:

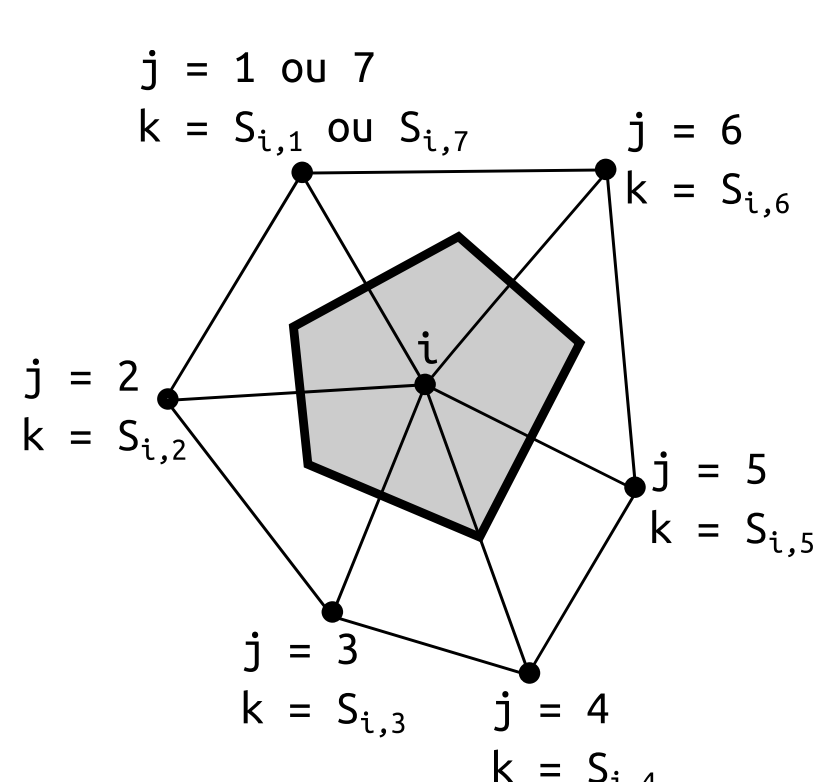


Figura 1: Volume de controle de um nó  $i$

## Referências

- [1] Voller, Vaughan R, *Basic control volume finite element methods for fluids and solids*, 2009.
- [2] Versteeg, Henk Kaarle and Malalasekera, Weeratunge, *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*, 2007.
- [3] Odone, Maicon William Niebus, *Estudos numéricos na solução de problemas de mudança de fase*, 2014.

## O Problema

O caso estudado parte do problema de advecção-difusão estacionário e sem fontes dado pela equação:

$$\frac{\partial v_x \phi}{\partial x} + \frac{\partial v_y \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

A geometria do problema é um quarto de uma coroa circular, e considerando um campo de velocidades e difusividade variando radialmente e não incluindo fontes esta equação fica reduzida a um problema unidimensional de modo que temos sua solução exata para comparação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad v = \frac{1}{r} \quad \kappa = \frac{1}{r} \quad R_{interno} \leq r \leq R_{externo}$$

Quando  $\phi_{interno} = 1$ ,  $\phi_{externo} = 0$ ,  $R_{interno} = 1$  e  $R_{externo} = 2$ , temos a solução analítica:

$$\phi = \frac{e^r - e^2}{e - e^2}$$

O problema em questão foi proposto e resolvido por [1] com uma implementação em Matlab, incluindo a geração de uma malha de elementos, figura 2-a e solução numérica via CVFEM. A partir desse desenvolvimento a linguagem de programação Python3 foi aqui utilizada para esta solução numérica e para o tratamento de dados de uma malha de elementos, figura 2-b, gerada pelo software Gmsh, composta, predominantemente, por triângulos acutângulos de forma irregular. No primeiro caso a malha tinha 800 elementos e 441 nós, enquanto, no segundo caso, a malha possuía 624 elementos e 347 nós.

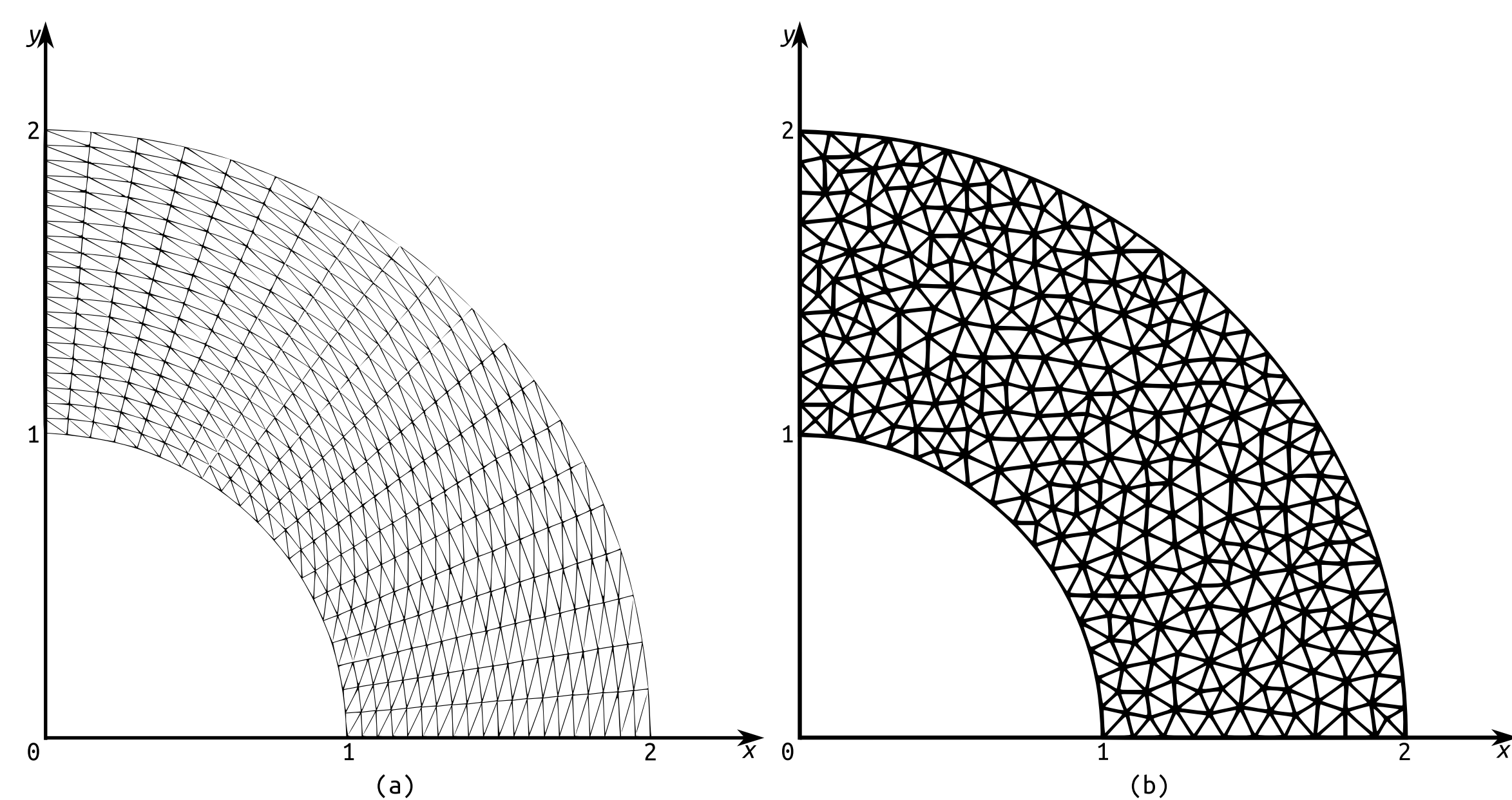


Figura 2: Malha gerada por Voller[1] a esquerda. Malha gerada pelo software Gmsh a direita.

## Resultados e Conclusões

Para validação dos resultados, realizou-se a comparação de três resultados: solução analítica, solução apresentada por [1] com a malha da figura 2-a e com uma malha gerada pelo Gmsh, figura 2-b. A figura a seguir apresenta um corte da função  $\phi$  para os três casos abordados.

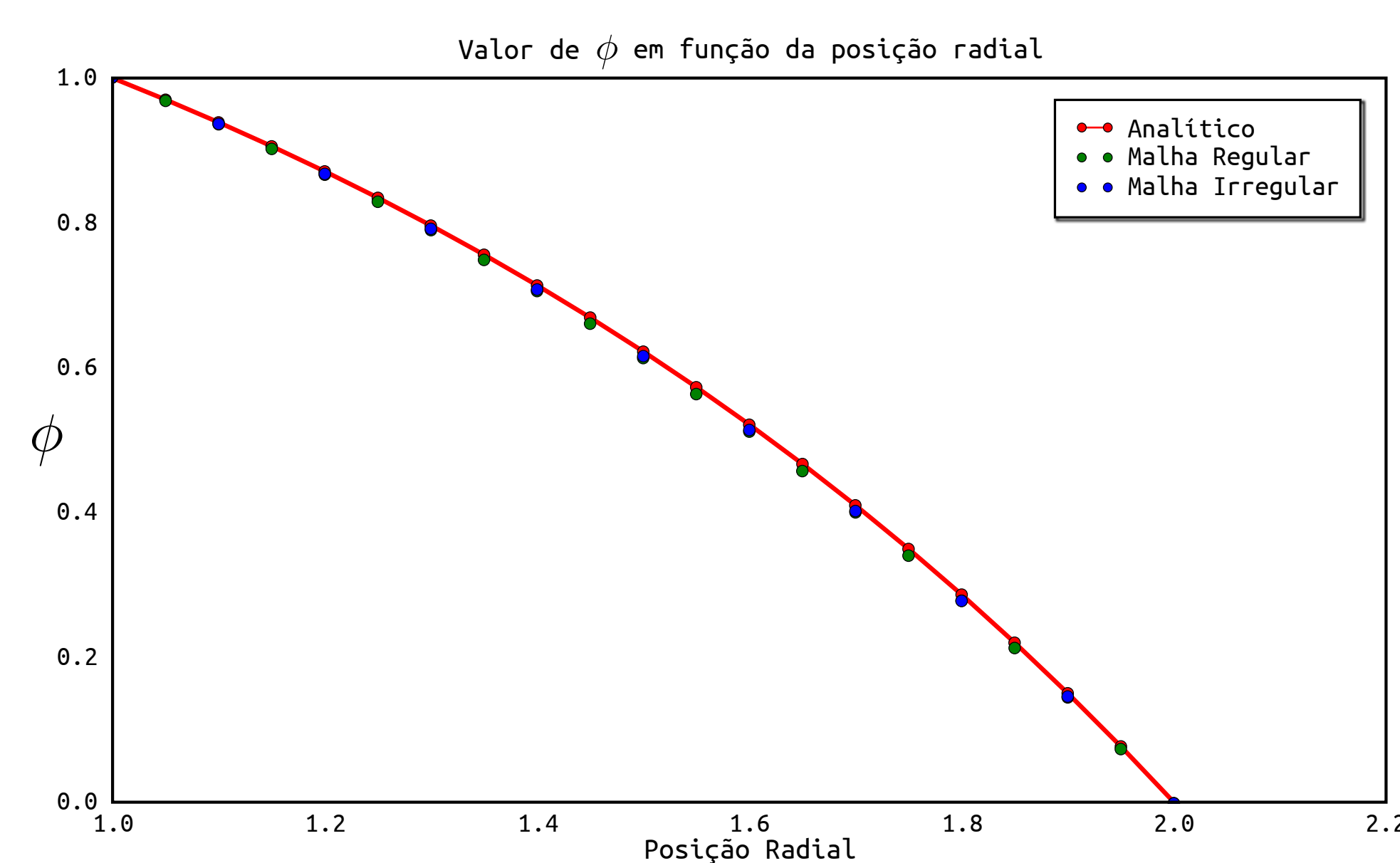


Figura 3: Gráfico com as soluções analítica, CVFEM em malha regular e CVFEM em malha irregular.

Os resultados indicam uma boa aproximação da solução analítica pelo CVFEM em ambos os casos. Entretanto, a malha irregular mostrou mais pontos próximos à solução analítica apesar de possuir menos elementos e menos nós do que a malha regular.

x	Analítico	CVFEM - regular	CVFEM - irregular
1	1	1	1
1.1	0.93879	0.93633	0.93695
1.3	0.79639	0.79013	0.79203
1.5	0.62246	0.61353	0.61595
1.7	0.41002	0.40045	0.40219
1.9	0.15054	0.14479	0.14614
2	0	5.9682e-20	3.9094e-20

O método CVFEM apresentado reúne qualidades do Método dos Volumes Finitos como a facilidade da geração das equações discretas para um problema com as facilidades de tratamento de domínios irregulares do Método dos Elementos Finitos. Pode ser aplicado a problemas transientes e não lineares do mesmo modo que pode-se fazê-lo com o Método dos Volumes Finitos. Outras aplicações mais gerais estão sendo estudadas para futuros trabalhos.