

Tensores – álgebra e análise

Jens Mund

Notas de Aula, DF-UFJF, Física Matemática II – Período 2025-3

Conteúdo

1	Álgebra Linear.	2
2	Álgebra Linear de Tensores.	11
2.1	Produto Tensorial.	11
2.2	Exemplos: Tensor Kronecker, Tensor métrico, n -Forma de Volume.	13
2.3	A identificação $V \cong V^*$ via produto escalar.	15
2.4	Mudança de Base.	16
2.5	Operações com Tensores.	17
2.5.1	Exemplo: Tensor de inércia.	21
3	Sistemas de Coordenadas no Espaço Físico.	22
3.1	O Espaço Físico.	22
3.2	Sistemas de Coordenadas.	23
3.2.1	Coordenadas Cartesianas e Lineares.	23
3.2.2	Coordenadas Cilíndricas.	24
3.2.3	Coordenadas Esféricas.	24
3.2.4	Coordenadas Curvilíneas em Geral.	25
3.2.5	Mudança de Coordenadas.	26
3.3	Curvas.	27
3.4	Integrais.	28
3.4.1	Integrais de Curva.	28
3.4.2	Integrais de Superfície.	29
3.4.3	Integrais de Volume.	29
4	Análise Tensorial.	29
4.1	Campos Escalares, Vetoriais e Tensoriais.	29
4.2	Exemplos.	33
4.3	Operadores Diferenciais.	34
4.3.1	A Derivada Covariante.	34
4.3.2	O Gradiente.	36
4.3.3	A Divergência.	37
4.3.4	Operador de Laplace.	40
4.3.5	O Rotacional.	40
5	Aplicação: Tensores de Deformação e Tensão, Lei de Hooke.	42
A	Exercícios.	48

Agradecimentos. Agradeço Rodrigo Ferreira Falci e Adriano de Oliveira Zangirolami para as muitas correções!

Prefácio

A ênfase dessas notas está na representação concreta de tensores, em contraste à abordagem usual dos físicos através de componentes, a qual está bem apresentada em [12, 13]. Também achei importante separar a parte algébrica, tratando de tensores sobre algum espaço vetorial (qualquer), da análise tensorial, tratando de *campos* tensoriais no espaço físico.

1 Álgebra Linear.

Definição 1 Seja V um conjunto (“os vetores”) com uma operação $+$: $V \times V \rightarrow V$ (a “adição de vetores”) e \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (“multiplicação de vetores por escalares”). V é chamado de *espaço vetorial* (ou espaço linear) se para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $s, t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (\text{comutatividade}); \quad (1)$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad (\text{associatividade}); \quad (2)$$

$$(s + t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{u} \quad (\text{distributividade}); \quad (3)$$

$$t \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v} \quad (\text{— ” —}); \quad (4)$$

$$s \cdot (t \cdot \mathbf{u}) = (st) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{associatividade}); \quad (5)$$

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}. \quad (6)$$

Ademais, existe um vetor distinguido, $\mathbf{0}$ (“o vetor nulo”), t.q. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todos $\mathbf{u} \in V$, bem como para cada \mathbf{v} um vetor $-\mathbf{v}$, tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. \square

É costume desprezar o “.” e escrever $t\mathbf{u}$ em vez de $t \cdot \mathbf{u}$. Os números reais, neste contexto, são frequentemente chamados de “escalares”. Os elementos de um espaço vetorial são chamados de “vetores”. Uma soma de vetores da forma

$$\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{u}_i := t_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + t_n \mathbf{u}_n$$

é chamado *combinação linear* dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. O conjunto de todas combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ é chamado o *gerador* (ou a *varredura linear*) deles, denotado por

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{u}_i, t_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (7)$$

Definição 2 *i)* Um conjunto $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é chamado de *linearmente independente* se $\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ implica $t_1 = \cdots = t_n = 0$. No outro caso, ele é chamado de *linearmente dependente*.

ii) Um conjunto $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ de vetores é uma *base* de V se ele é *linearmente independente* e a sua *varredura coincide com V* . \square

Teorema e Definição 1.1 *Cada espaço vetorial possui uma base. Todas bases de um dado espaço vetorial V têm a mesma cardinalidade. Esta cardinalidade é chamada a dimensão de V .*

Dada uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, cada vetor \mathbf{v} em V possui uma única decomposição

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{a}_i. \quad (8)$$

Os coeficientes v^i são chamados as *componentes (contravariantes)* do vetor \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$. É importante observar que eles dependem da base, veja Eq. (85) embaixo.

Uma aplicação $\phi : V \rightarrow W$ entre dois espaços vetoriais V, W é chamada *linear* se ela satisfaz

$$\phi(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = s\phi(\mathbf{u}) + t\phi(\mathbf{v}). \quad (9)$$

Se ela é bijetor, ela é chamada de isomorfismo linear. Se existe tal aplicação, os espaços V e W são chamados de *isomórficos*. Observe que, dada uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ de V , a aplicação

$$\mathbf{v} \mapsto (v^1, \dots, v^n), \quad (10)$$

onde v^n são as componentes de \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, é um isomorfismo linear entre V e \mathbb{R}^n .

Produto Escalar.

Definição 3 Uma aplicação $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *produto escalar* se ela é

$$\text{simétrica:} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (11)$$

$$\text{bilinear:} \quad (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}); \quad (12)$$

$$\text{positiva definida:} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \quad (13)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ se e somente se } \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

□

(Por causa da simetria (11), a linearidade (12) também vale no segundo argumento.)

Um espaço vetorial com produto escalar é chamado de *espaço euclidiano*. Ele possui uma norma, definida por

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \geq 0, \quad (15)$$

satisfazendo $\|t\mathbf{u}\| = |t|\|\mathbf{u}\|$. O único vetor com norma zero é o vetor $\mathbf{0}$. Verifique-se que para dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} ortogonais, i.e. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, vale o “Teorema de Pitágoras”:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2. \quad (16)$$

Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, nós chamamos os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de *ortogonais*, em símbolos

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

Para um subconjunto $U \subset V$, o conjunto de vetores que são ortogonais a todos vetores em U é um subespaço linear, chamado do complemento ortogonal a U , em símbolos U^\perp :

$$U^\perp := \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ é chamado de *sistema ortogonal* se eles são mutualmente ortogonais, i.e. $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ se $i \neq j$. É simples verificar que um sistema ortogonal sempre é linearmente independente. O conjunto é chamado de *sistema ortonormal* (ou *SON*) se em adição todos \mathbf{u}_i são normalizados, i.e. têm norma 1. Isto pode ser caracterizado em símbolos por

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o chamado símbolo de Kronecker:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (17)$$

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é chamado de uma *base ortonormal* (ou *BON*) se ele é uma base e também um sistema ortonormal. Em outras palavras, se ele é um SON é o gerador dele coincide com o espaço inteiro, V . Lembramos que as componentes v^i de um vetor $\mathbf{v} \in V$ com respeito à base são definidos pela decomposição

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i. \quad (18)$$

Lema 1.2 *As componentes v^i de um vetor \mathbf{v} com respeito a uma base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ortogonal são dadas por*

$$v^i = \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{e}_i\|^2}. \quad (19)$$

Se a base for uma BON, então claramente $v^i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}$.

Demonstração. Supomos que os vetores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ são um sistema ortogonal, i.e., $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \|\mathbf{e}_k\|^2 \delta_{ki}$. Multiplicando os dois lados da eq. (18) por \mathbf{e}_k dá

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n v^i \|\mathbf{e}_i\|^2 \delta_{ki} = v^k \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

□

O exemplo principal de um espaço euclidiano é o \mathbb{R}^n , cujos elementos denotamos por n -uplas ordenadas, e.g. $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$. O produto escalar é dado por

$$(x^1, \dots, x^n) \cdot (y^1, \dots, y^n) := \sum_{i=1}^n x^i y^i.$$

A chamada *BON canônica* do \mathbb{R}^n são os vetores $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$. Qualquer espaço vetorial euclidiano V de dimensão n é isomórfico ao \mathbb{R}^n (i.e., pode ser identificado com o \mathbb{R}^n). A saber, o isomorfismo linear definido na eq. (10) preserva o produto escalar se a base (qual referem as componentes) for uma BON:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u^i v^i = (u^1, \dots, u^n) \cdot (v^1, \dots, v^n),$$

onde u^i e v^i são as componentes de \mathbf{u} e \mathbf{v} com respeito à BON.

Lema 1.3 (Projeção) *Seja $U \subset V$ um subespaço linear. Então, cada $\mathbf{v} \in V$ tem uma única decomposição*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \text{com} \quad \mathbf{v}_1 \in U \text{ e } \mathbf{v}_2 \in U^\perp. \quad (20)$$

O vetor \mathbf{v}_1 é determinado pela seguinte fórmula. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ uma BON de U t.q. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \in U$, fornecendo uma BON de U . Então,

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^r (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_i. \quad (21)$$

O vetor \mathbf{v}_1 é chamado de *projeção* de \mathbf{v} sobre U , em símbolos $\mathbf{v}_1 =: P_U \mathbf{v}$. Como $(U^\perp)^\perp = U$, a decomposição (20) pode ser encarada como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ com $\mathbf{v}_2 \in U^\perp$ e $\mathbf{v}_1 \in (U^\perp)^\perp$, então \mathbf{v}_2 é a projeção de \mathbf{v} sobre U^\perp : $\mathbf{v}_2 = P_{U^\perp} \mathbf{v}$. Isto implica que

$$P_U + P_{U^\perp} = \mathbb{I}. \quad (22)$$

Demonstração. Existência da decomposição (20): Defina \mathbf{v}_1 como na eq. (21), e $\mathbf{v}_2 := \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$. Com isto, a eq. (20) é satisfeita e \mathbf{v}_1 é claramente em U . Falta só mostrar que \mathbf{v}_2 está em U^\perp . Para estes fins, calcule para \mathbf{e}_i , $1 \leq i \leq r$,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_i \cdot \left\{ \mathbf{v} - \sum_{j=1}^r (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_j \right\} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} - \sum_{j=1}^r (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

pois $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Isto mostra que $\mathbf{v}_2 \in U^\perp$.

Unicidade da decomposição (20): Supomos que existem outros vetores $\mathbf{v}'_1 \in U$ e $\mathbf{v}'_2 \in U^\perp$ tal que $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$. Então $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2) = \mathbf{0}$ e $0 = \|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2)\|^2 = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}'_2\|^2$, onde temos usado o Pitágoras (16). Isto implica $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2$. \square

A aplicação $P_U : \mathbf{v} \mapsto P_U \mathbf{v}$ é uma aplicação linear, a chamada *projeção ortogonal* sobre U . No caso U é unidimensional, gerado por um vetor \mathbf{u} , escrevemos $P_{\mathbf{u}}$ em vez de P_U . Neste caso, o vetor normalizado $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ constitui uma BON de U , e então a eq. (21) implica que a projeção $P_{\mathbf{u}}$ é dado por

$$P_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}. \quad (23)$$

O Lema tem uma consequência importante, a chamada desigualdade de Cauchy e Schwarz:

Lema 1.4 (Cauchy-Schwarz) *Para todos vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} vale*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|. \quad (24)$$

A igualdade “=” vale se e somente se \mathbf{u} e \mathbf{v} são co-lineares.

Demonstração. Dado $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, decomponos \mathbf{v} como

$$\mathbf{v} = P_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \mathbf{v}_2,$$

onde $\mathbf{v}_2 \perp P_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ conforme o Lema 1.3. Pelo Pitágoras (16), $\|\mathbf{v}\|^2$ é a soma da norma quadrada de $P_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ mais a norma quadrada de \mathbf{v}_2 . Como esta norma é positiva, vale $\|\mathbf{v}\| \geq \|P_{\mathbf{u}} \mathbf{v}\|$. Mas $\|P_{\mathbf{u}} \mathbf{v}\| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|/\|\mathbf{u}\|$ pela eq. (23). Isto mostra eq. (24). A igualdade “=” vale obviamente se e somente se $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, o seja, se \mathbf{u} e \mathbf{v} são co-lineares. \square

Como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2, \end{aligned}$$

nos temos a *desigualdade triangular*:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \quad (25)$$

Orientação de BONs. Supomos que nos temos duas BONs $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$. Fazendo a decomposição dos \mathbf{e}_j com respeito à base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, temos

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i R_j^i, \quad (26)$$

(compare com Eq. (84)). O fato que as duas bases são ortonormais implica que

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_{k,l} R_i^k R_j^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \sum_k R_i^k R_j^k = (R^T R)_j^i, \quad (27)$$

onde nos consideramos R_j^k como coeficientes de uma matriz R como na Eq. (30), e R^T denota a matriz transposta. A Eq. (27) significa que $R^T R$ é a matriz-unidade,¹ e conseqüentemente a determinante de $R^T R$ é um. Por outro lado, $\det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = \det(R)^2$, então a matriz R que relaciona as duas bases segundo Eq. (26) deve ter determinate $+1$ ou -1 . Ademais, composição de mudanças de base corresponde ao produto de matrizes, a saber: Vamos por enquanto denotar a matriz R na eq. (26) de $R_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e'_1, \dots, e'_n\}}$. Se consideramos uma terceira BON $\{e''_1, \dots, e''_n\}$, então vale

$$R_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e''_1, \dots, e''_n\}} = R_{\{e'_1, \dots, e'_n\}}^{\{e''_1, \dots, e''_n\}} \circ R_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e'_1, \dots, e'_n\}}.$$

Isto implica (exercício!) que a relação

$$\{e_1, \dots, e_n\} \sim \{e'_1, \dots, e'_n\} \quad :\Leftrightarrow \quad \det R_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e'_1, \dots, e'_n\}} = +1$$

é uma relação de equivalência, e que existem duas classes respectivos de BONs, onde cada par de BONs dentro de uma classe é relacionado por uma matriz R com determinante $+1$. Por convenção, chamamos uma daquelas classes as BONs com *orientação positiva* (ou BONs orientadas), e a outra classe as BONs com orientação negativa.

Determinante. Recordamos que a determinante de uma matriz A_{ij} é dada por

$$\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} A_{1, i_1} \cdots A_{n, i_n},$$

onde os índices i_k correm entre 1 e n , e $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ são os chamados *símbolos de Levi-Civita*:

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} := \begin{cases} 0, & \text{se } \{i_1, \dots, i_n\} \neq \{1, \dots, n\}, \\ 1, & \text{se } (1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação par,} \\ -1, & \text{se } (1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação impar.} \end{cases} \quad (28)$$

Aquí, queremos definir a determinate de n vetores. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma BON com orientação *positiva* de V , e sejam $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ n vetores in V com decomposições

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^n A_j^i e_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (29)$$

Seja A a matriz com coeficientes A_j^i , i.e.,

$$A := \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Então definimos a determinante dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ por

$$\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) := \det(A). \quad (31)$$

Observe que isto define uma aplicação n -linear e totalmente anti-simétrica,

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n) = -\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n).$$

A anti-simetria implica que a determinante é zero se os argumentos são linearmente dependentes.

¹Tal matriz R é chamada de *ortogonal*, $R \in O(n)$. A aplicação linear correspondente a ela via $Rv \equiv R \sum_i v^i e_i := \sum_{i,j} v^i R_i^j e_j$ preserve todas distâncias (e ângulos), então é uma *rotação*.

O módulo da determinante pode ser calculado, independentemente da BON, usando a matriz G associada aos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ como seguinte:

$$G := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Lema 1.5 *Vale*

$$\det(G) = (\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n))^2. \quad (33)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \sum_k A_i^k \mathbf{e}_k \cdot \sum_l A_j^l \mathbf{e}_l = \sum_{k,l} A_i^k A_j^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \sum_k A_i^k A_j^k = \sum_k (A^T)_k^i A_j^k \\ &= (A^T A)_j^i. \end{aligned}$$

Isto implica que $\det(G) = \det(A^T A) = (\det A)^2 \equiv \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)^2$, e mostra Eq. (33). \square

O Lema implica que $\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ independe da BON modulo um sinal. A independência da BON (orientada!) pode ser mostrada também como seguinte. Seja $\{\bar{\mathbf{e}}_i, i = 1, \dots, n\}$ uma outra BON orientada. Então ela é relacionada com $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ via Eq. (26), onde R é uma matriz com determinante 1. Pela Eq. (85), as componentes A_j^i e \bar{A}_j^i do vetor \mathbf{u}_j com respeito à BON $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$, respectivamente, são relacionadas por $\bar{A}_j^i = \sum_k R_k^i A_j^k$. Isto implica (exercício!) que a matriz \bar{A} com coeficientes \bar{A}_j^i e a matriz A da Eq. (30) são relacionadas por $\bar{A} = AR$, que por sua vez implica que $\det(\bar{A}) = \det(R) \det(A)$. Mas $\det(R) = 1$, então $\det(\bar{A}) = \det(A)$, mostrando que a definição (31) é independente da BON orientada.

Observações sobre a determinante: A determinante é uma aplicação n -linear e totalmente anti-simétrica (i.e., trocar dois argumentos resulta num fator -1). Este fato, e a “normalização” $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ para uma BON orientada, fixa a aplicação completamente. Em geral, temos:

Lema 1.6 *Seja $D : V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação n -linear, totalmente anti-simétrica (aquí, n é a dimensão de V). Então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que para todos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vale*

$$D(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = c \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

(Esse fator c é o valor de D numa BON com orientação positiva.)

Demonstração. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma BON com orientação positiva, e sejam A_i^j definidos pela Eq. (29). Pela linearidade e anti-simetria da aplicação D temos

$$D(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} A_1^{i_1} \cdots A_n^{i_n} D(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} A_1^{i_1} \cdots A_n^{i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \right) D(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

onde $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ são os símbolos de Levi-Civita (28). Mas a soma em parênteses é justamente a determinante $\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, concluindo a demonstração. \square

Produto Vetorial.

O produto vetorial, valente somente em três dimensões, pode ser definido de maneira livre de componentes. Essa definição é baseada no Lemma de Riesz:

Lema 1.7 (Riesz.) *Seja V um espaço euclidiano, e $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Então existe um único vetor \mathbf{v}_η em V t.q.*

$$\eta(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_\eta \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (34)$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal em V . Defina

$$\mathbf{v}_\eta := \sum_{i=1}^n \eta(e_i) e_i. \quad (35)$$

É fácil ver que vale eq. (34). Para comprovar a unicidade, seja \mathbf{v} um outro vetor que satisfaz eq. (34). Então $\mathbf{v}_\eta \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ($= \eta(\mathbf{u})$) para todos $\mathbf{u} \in V$. Isto implica que $\mathbf{v}_\eta - \mathbf{v}$ é ortogonal a todos vetores em V , inclusive a si mesmo: $(\mathbf{v}_\eta - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v}_\eta - \mathbf{v}) = 0$. Conforme a definição de um produto escalar, ver eq. (14), isso implica $\mathbf{v}_\eta - \mathbf{v} = 0$, ou seja, $\mathbf{v}_\eta = \mathbf{v}$. \square

Dado dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, a aplicação $\mathbf{w} \mapsto \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ claramente é linear. Então o Lema 1.7 implica que existe um vetor \mathbf{x} tal que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ coincide com $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$. Esse vetor \mathbf{x} é chamado de produto vetorial de \mathbf{u} e \mathbf{v} , em símbolos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

Definição 4 O produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ é o único vetor t.q. para qualquer $\mathbf{w} \in V$ vale

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (36)$$

\square

Em termos de uma BON $\{e_1, e_2, e_3\}$ em V , $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é dado, pela Eq. (35), por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, e_i) e_i. \quad (37)$$

Proposição 1.8 O produto vetorial satisfaz

$$\text{Anti-simetria:} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}; \quad (38)$$

$$\text{Bilinearidade:} \quad (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = s(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + t(\mathbf{v} \times \mathbf{w}); \quad (39)$$

$$\text{Se } \{e_1, e_2, e_3\} \text{ é BON orientada:} \quad e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = e_1, e_3 \times e_1 = e_2; \quad (40)$$

$$\text{Identidade de Grassmann:} \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}. \quad (41)$$

Ademais, vale

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}). \quad (42)$$

As equações (38) até (40) fixam o produto vetorial. Alternativamente, o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é caracterizado por: 1. Norma: Ela satisfaz, como consequência da Eq. (42),

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \equiv (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \gamma)^2, \quad (43)$$

onde γ é o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} .² 2. Direção: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a \mathbf{u} e \mathbf{v} , com sentido t.q. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$ tem orientação positiva.

Demonstração. Eq.s (38), (39) e (40) são verificadas diretamente a partir da definição. A identidade de Grassmann (41) verifique-se num primeiro passo para uma BON. Para mostrar a eq. (42), consideramos

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{x}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w} \times \mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{x})) \cdot \mathbf{u}.$$

Aplicando a identidade de Grassmann no último termo dá a Eq. (42). \square

Na introdução do rotacional à la geometria diferencial vamos usar o seguinte fato.

²Vamos ver depois (ver Eq. (47)) que a norma de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, dada pela Eq. (43), coincide com a área do paralelogramo gerado por \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Lema 1.9 *Seja V um espaço euclidiano de dimensão três, e $\eta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear e anti-simétrica. Então existe um único vetor \mathbf{w} em V t.q.*

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \equiv \det(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (44)$$

Demonstração. Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma BON orientada em V . Defina

$$\mathbf{w} := \eta(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 + \eta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3. \quad (45)$$

Este vetor satisfaz Eq. (44), como se calcula diretamente. Para comprovar a unicidade, seja \mathbf{w}' um outro vetor que satisfaz Eq. (44). Então $\mathbf{w}'' := \mathbf{w} - \mathbf{w}'$ deve satisfazer $\mathbf{w}'' \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mas cada vetor em V é da forma $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para \mathbf{u}, \mathbf{v} apropriadas, então \mathbf{w}'' é ortogonal a todos vetores em V , inclusive sim mesmo. Isso implica $\mathbf{w}'' = 0$, ou seja, $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. \square

Volume de Paralelepípedos. Dado vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in V$, o conjunto

$$\Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) := \left\{ \sum_{i=1}^r t_i \mathbf{u}_i, t_i \in [0, 1] \right\} \quad (46)$$

é chamado o *paralelepípedo* gerado pelos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. O *volume* pode ser definido iterativamente como seguinte. Para iniciar, o volume do paralelepípedo gerado por um único vetor é a norma dele. O volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r+1}$ é o volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ (a “base”) vezes a norma da projeção de \mathbf{u}_{r+1} ao complemento ortogonal dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ (a “altura”), conforme Lema 1.3. (Observe que nos casos $r = 1$ e 2 , o “paralelepípedo” também é chamado segmento de reta ou paralelogramo, respectivamente, e o seu “volume” é o comprimento ou área, respectivamente.)

Vamos primeiro calcular a área de um paralelogramo $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ gerado pelos vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} : A “base” é a norma de \mathbf{u} , e a “altura” é a norma do vetor $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{u}$ na decomposição $\mathbf{v} = P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \mathbf{v}_2$. Então

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{base} \times \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}_2\|.$$

Pela Eq. (43), isto é a norma do vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_2$, que por sua vez coincide com $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Então a área do paralelogramo é dada por

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|. \quad (47)$$

Vamos agora calcular o volume de um paralelepípedo tri-dimensional $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ gerado pelos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$: A “base” é a área do paralelogramo $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. A “altura” é a norma da projeção de \mathbf{w} sobre o complemento ortogonal de \mathbf{u}, \mathbf{v} . O último é unidimensional, gerado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Então, a altura é $\|P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}\|$, e o volume é

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{base} \times \text{altura} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}\|.$$

Mas os vetores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}$ são colineares, então o produto das normas é justamente o módulo do produto escalar:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}\| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}| = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \equiv |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|.$$

(Na segunda equação, temos usado o fato que $\mathbf{x} \cdot P_{\mathbf{x}} \mathbf{w} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$.) Resumindo a discussão, o volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ é

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|. \quad (48)$$

Em geral, vale o seguinte (Bibliografia: [2]).

Teorema 1.10 *O volume do paralelepípedo gerado por r vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$, $r \leq \dim(V)$, é dado por*

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) = \det(G)^{\frac{1}{2}}. \quad (49)$$

Aquí, G é a matriz com componentes $G_{ij} \doteq \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$.

Recordando que no caso $r = n \doteq \dim V$, vale $\det(G) = \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)^2$, temos

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = |\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)|. \quad (50)$$

Demonstração. Vamos mostrar a Eq. (49) via indução através r . Para $r = 1$, claramente $\det(G) = \|\mathbf{u}_1\|^2 = \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1)^2$. Supomos agora que a afirmação vale para um certo $r \geq 1$, e mostramos que isto implica que ela vale para $r + 1$. Sejam G e \hat{G} as matrizes para r e $r + 1$ vetores, respetivamente. O vetor \mathbf{u}_{r+1} possui uma única decomposição $\mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{v} + \mathbf{a}$, onde \mathbf{v} é na varredura dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ e \mathbf{a} é ortogonal a estes vetores, conforme Lema 1.3. (Então \mathbf{a} é a projeção de \mathbf{u}_{r+1} ao complemento ortogonal dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$.) Agora um pequeno cálculo mostra que $\det(\hat{G}) = \det(G) \|\mathbf{a}\|^2$. Mas $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ é a base e $\|\mathbf{a}\|$ é a altura do paralelepípedo. Por hipótese da indução, $\det(G)^{1/2}$ é o volume da base. Então $\det(\hat{G})^{1/2}$ é igual ao volume da base vezes altura, ou seja, ao volume do paralelepípedo. Isto mostra a Eq. (49). Para mostrar Eq. (50), verificamos por um pequeno cálculo que a matriz G coincide com $A^T A$, onde A é a matriz da Eq. (30). No caso $r = n$, isto implica que $\det(G) = \det(A^T A) = (\det A)^2 \equiv \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)^2$, e mostra Eq. (50).³

Demonstração alternativa da eq. (50): O volume é invariante sob cisalhamento,

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + t\mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) = \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n),$$

e ele é homogêneo em todos argumentos,

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, t\mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) = t \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), \quad t > 0.$$

Isto implica que a aplicação $D(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) := \pm \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, onde o sinal corresponde à orientação do argumento, é n -linear e totalmente anti-simétrica. Como o volume de um paralelepípedo gerado por uma BON é 1, isto implica eq. (50) pelo Lema 1.6. \square

No caso $r = 2$, onde $\Pi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ é um paralelogramo, a determinante de G é dada por $\|\mathbf{u}_1\|^2 \|\mathbf{u}_2\|^2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1)^2$. Mas pela Eq. (43), isto é a norma quadrada do vetor $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$. Então pela Eq. (49) nos recuperamos a Eq. (47).

O Espaço Dual.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . O *espaço dual* de V , em símbolos V^* , é o espaço das aplicações lineares de V em \mathbb{K} ,

$$V^* := \{\eta : V \rightarrow \mathbb{K}, \text{ linear}\}. \quad (51)$$

Tais aplicações lineares são frequentemente chamados de *formas (lineares) de grau 1*, ou *covetores*. Este espaço é um espaço vetorial por sua vez (como cada espaço de funções), a saber pelas definições

$$(\eta_1 + \eta_2)(\mathbf{v}) := \eta_1(\mathbf{v}) + \eta_2(\mathbf{v}), \quad (s\eta)(\mathbf{v}) := s\eta(\mathbf{v}). \quad (52)$$

O zero é a aplicação $\mathbf{0}(\mathbf{v}) := 0$ para todos $\mathbf{v} \in V$.

Existe um certo isomorfismo entre V e V^* que, porem, não é canônico pois depende de uma escolha de base em V : Seja no seguinte $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ uma base em V (não necessariamente ortonormal). Como sabemos, cada vetor $\mathbf{v} \in V$ possui uma única decomposição

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{a}_i, \quad (53)$$

³Observa que isto implica de novo que $|\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)|$ é independente da BON.

definindo suas componentes (“contravariantes”) v^i . Para $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos uma forma (um covetor) $\mathbf{a}^i \in V^*$ por

$$\mathbf{a}^i(\mathbf{v}) := v^i, \quad (54)$$

onde v^i é a componente de \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ como na eq. (53). Equivalentemente, \mathbf{a}^i é caracterizado por

$$\mathbf{a}^i(\mathbf{a}_j) = \delta_j^i \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (55)$$

Proposição 1.11 *Os n covetores $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$ são uma base do espaço dual V^* , a chamada base dual. Em mais detalhes, cada $\eta \in V^*$ é da forma*

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{a}^i, \quad \text{onde } \eta_i = \eta(\mathbf{a}_i). \quad (56)$$

Os coeficientes η_i são chamados as *componentes (covariantes)* do covetor η com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$.

Demonstração. (Independência linear dos \mathbf{a}^i : *exercício.*) Para mostrar que eles geram V^* , seja $\eta \in V^*$ um covetor. Pela linearidade, temos para qualquer $\mathbf{v} \in V$ com decomposição como na eq. (53):

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta\left(\sum_{i=1}^n v^i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^n v^i \eta(\mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n \eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i(\mathbf{v}) = \left(\sum_{i=1}^n \eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i\right)(\mathbf{v}), \quad (57)$$

então η realmente é uma combinação linear como afirmado na eq. (56). \square

Esta proposição mostra que V e V^* são isomórficos (porem não numa maneira canônica). Agora vamos conhecer um isomorfismo canônico (independente de base) entre V e $(V^*)^*$. Dado $\mathbf{v} \in V$ e $\eta \in V^*$, o número $\eta(\mathbf{v})$ (“ η aplicado em \mathbf{v} ”) pode ser também encarado como “ \mathbf{v} aplicado em η ”. Em outras palavras, um vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser identificado com uma forma linear em V^* pela definição

$$\mathbf{v}(\eta) := \eta(\mathbf{v}). \quad (58)$$

Por outro lado, para cada $\phi \in (V^*)^*$ existe um vetor $\mathbf{v} \in V$ tal que para todas $\eta \in V^*$ vale $\phi(\eta) = \eta(\mathbf{v})$, a saber $\mathbf{v} := \sum_i \phi(\mathbf{a}^i) \mathbf{a}_i$. Desta maneira podemos identificar V com $(V^*)^*$:

$$V \cong (V^*)^* = \{\text{aplicações } V^* \rightarrow \mathbb{K}, \text{ lineares}\}. \quad (59)$$

2 Álgebra Linear de Tensores.

Nossa abordagem encontra-se na literatura por exemplo em [6, Cap. 5.6], [8] e [15].

2.1 Produto Tensorial.

Sejam U , V e W espaços vetoriais sobre \mathbb{K} de dimensão finita. W é chamado de um *produto tensorial* de U e V , em símbolos

$$W = U \otimes V,$$

se vale o seguinte:

i) Para todo $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{v} \in V$ existe um vetor $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in W$ tal que valem as seguintes relações:

$$(c\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \quad \mathbf{u} \otimes (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \quad c \in \mathbb{K}, \quad (60)$$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v} \quad \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2. \quad (61)$$

ii) Se $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$ é uma base em U e $\{\mathbf{b}_j \mid j \in J\}$ é uma base em V , então

$$\{\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j \mid i \in I, j \in J\}$$

é uma base em W .

Essa definição caracteriza o produto tensorial apenas módulo isomorfismo. Nos vamos trabalhar com uma representação concreta do produto tensorial.

Também vamos considerar um espaço vetorial V fixo sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de dimensão finita, n . (Mais para frente, o espaço V será o espaço de vetores deslocamento associado com o espaço físico). Chamamos os vetores $\mathbf{v} \in V$ de vetores *contravariantes*, e as formas lineares (ou covetores) $\eta \in V^*$ de vetores *covariantes*.

Recordamos que os elementos de V^* são aplicações lineares $V \rightarrow \mathbb{R}$. O produto tensorial $V^* \otimes V^*$ pode ser identificado com o espaço de aplicações bilineares de $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$V^* \otimes V^* = \{V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bilinear} \}.$$

(Isto é um espaço vetorial numa maneira análoga com eq. (52).) Para ver isso, definimos para $\eta, \mu \in V^*$ o produto $\eta \otimes \mu$ como seguinte:

$$(\eta \otimes \mu)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \eta(\mathbf{u}) \mu(\mathbf{v}). \quad (62)$$

Isso define uma aplicação bilinear, e as relações (60) e (61) são facilmente verificadas. Para verificar a propriedade ii) sobre a base, consideramos uma aplicação bilinear qualquer $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Conforme Eq.s (53), eles são da forma $\mathbf{u} = \sum_i u^i \mathbf{a}_i$ e $\mathbf{v} = \sum_j v^j \mathbf{a}_j$. Pela bilinearidade,

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} \omega(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) u^i v^j \stackrel{(a)}{=} \sum_{i,j} \omega(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \mathbf{a}^i(\mathbf{u}) \mathbf{a}^j(\mathbf{v}) \stackrel{(b)}{=} \sum_{i,j} \omega(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) (\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j)(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

(Na eq. (a) usamos (54), e na eq. (b) escrevemos $\mathbf{a}^i(\mathbf{u}) \mathbf{a}^j(\mathbf{v}) = (\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j)(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, veja Eq. (62).) Então, ω tem a forma $\omega = \sum_{i,j} \omega_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$, com $\omega_{ij} = \omega(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$, mostrando que os $\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$ geram o espaço das aplicações bilineares de $V \times V$ em \mathbb{R} . (Independência linear: Exercício!)

Esta construção funciona para qualquer espaço de aplicações ou funções.⁴ Recordando que o próprio espaço vetorial V pode ser encarado como espaço de aplicações lineares $V^* \rightarrow \mathbb{R}$ pela definição (58), essa construção leva á identificação

$$V \otimes V = \{V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bilinear} \}. \quad (63)$$

Mais geralmente, o produto tensorial de várias cópias de V e várias cópias de V^* pode ser identificado com o espaço de aplicações multilineares $V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

Definição 5 Para $r, s \in \mathbb{N}_0$, $r + s \neq 0$, definimos o espaço de *tensores do tipo* (r, s) sobre V , em símbolos $T_s^r(V)$, por

$$T_s^r(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_s \quad (64)$$

$$= \{ \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_s \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_r \rightarrow \mathbb{R}, \text{ multilinear} \}. \quad (65)$$

Para $r = 0 = s$ definimos $T_0^0(V) := \mathbb{R}$. □

⁴Por exemplo, $L^2(M) \otimes L^2(N) = L^2(M \times N)$, com $f \otimes g$ definido por $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$. Detalhes em [10, p. 52]

Obs.: Sempre usamos a identificação (59). Por exemplo, o elemento $\mathbf{u} \otimes \mu \in V \otimes V^*$ é definido como a aplicação linear de $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\mathbf{u} \otimes \mu)(\eta, \mathbf{v}) \doteq \mathbf{u}(\eta) \mu(\mathbf{v}) \equiv \eta(\mathbf{u}) \mu(\mathbf{v}). \quad (66)$$

Os elementos em $T_s^0(V)$ (ou seja, as aplicações s -lineares de $V^{\times s} \rightarrow \mathbb{R}$) que são totalmente anti-lineares são chamadas de s -formas.

Proposição 2.1 *Seja $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ uma base em V . Uma base em $T_s^r(V)$ é dada por*

$$\left\{ \mathbf{a}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{i_r} \otimes \mathbf{a}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{j_s}, \quad i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (67)$$

Em mais detalhes, cada $T \in T_s^r(V)$ é da forma

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mathbf{a}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{i_r} \otimes \mathbf{a}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{j_s}, \quad \text{onde} \quad (68)$$

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_r}, \mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_s}). \quad (69)$$

Estes números são as chamadas componentes do tensor com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Dois tensores são iguais se, e somente se, as suas componentes com respeito a uma dada base coincidem (se, e somente se, as suas componentes com respeito a qualquer outra base coincidem).

Demonstração. Fazemos a demonstração só no caso $T_1^1(V) = V \otimes V^*$. Seja $T \in V \otimes V^*$, quer dizer, T é uma aplicação bilinear de $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam $\eta \in V^*$, $\mathbf{v} \in V$. Conforme Eq.s (53), (54) e (56), eles são da forma $\eta = \sum_i \eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i$ e $\mathbf{v} = \sum_j \mathbf{a}^j(\mathbf{v}) \mathbf{a}_j$. Consequentemente,

$$T(\eta, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} \eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^j(\mathbf{v}) T(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j) = \sum_{i,j} T(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j) (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j)(\eta, \mathbf{v}).$$

(Aqui, escrevemos $\eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^j(\mathbf{v}) = (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j)(\eta, \mathbf{v})$, veja Eq. (66).) Então, T tem a forma $T = \sum_{i,j} T_j^i \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j$, com $T_j^i = T(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j)$, mostrando que os $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j$ geram $V \otimes V^*$. Agora seja c_j^k uma coleção de números tal que $\sum_{i,j} c_j^k \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j = 0$. Agindo com os dois lados desta equação no par $(\mathbf{a}^k, \mathbf{a}_l)$, mostra que os coeficientes c_j^k são todos nulos. Então, os $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j$ são linearmente independentes. \square

Em particular, um tensor é zero se, e somente se, todas suas componentes com respeito a uma base (arbitrária) são zero. Como consequência da Proposição, um tensor $T \in T_s^r(V)$ age em $\eta_1, \dots, \eta_r \in V^*$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in V$ como

$$T(\eta_1, \dots, \eta_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = \sum_{i_1, \dots, j_s=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\eta_1)_{i_1} \dots (\eta_r)_{i_r} (\mathbf{v}_1)^{j_1} \dots (\mathbf{v}_s)^{j_s}. \quad (70)$$

2.2 Exemplos: Tensor Kronecker, Tensor métrico, n -Forma de Volume.

Tensor Kronecker. A aplicação

$$\hat{\delta} : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{\delta}(\eta, \mathbf{v}) := \eta(\mathbf{v}) \quad (71)$$

é bilinear e por isso um tensor do tipo $(1, 1)$, o chamado *tensor Kronecker*. Suas componentes com respeito a *qualquer* base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ são dadas por $\hat{\delta}_j^i \equiv \hat{\delta}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}^i(\mathbf{a}_j) = \delta_j^i$. Então, suas componentes (com respeito a qualquer base) são exatamente os símbolos de Kronecker:

$$\hat{\delta}_i^j = \delta_i^j \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (72)$$

(Observe que isso implica $\hat{\delta} = \sum_i \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^i$.)

Tensor Métrico. Lembramos que nosso V é um espaço euclidiano, com um produto escalar $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Esta aplicação é um tensor do tipo $(0, 2)$:

Definição 6 O *tensor métrico* $g \in T_2^0(V)$ é o tensor

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (73)$$

□

Pela Prop. 2.1, temos $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j$, onde $g_{ij} = g(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \equiv \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$. A base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ é ortonormal (uma BON) se, e somente se, $g_{ij} = \delta_{ij}$. (Neste caso, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u^i v^i$.)

Determinante como tensor: A n -forma de volume. Como a determinante é uma aplicação n -linear de $V \times \dots \times V$ para os números reais⁵, ela é um tensor do tipo $(0, n)$, que nós vamos denotar por $\Omega \in T_n^0(V)$ (o “elemento de volume”, ou a “ n -forma de volume”):

$$\Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (74)$$

Para determinar as componentes deste tensor precisaremos a determinante $|g|$ da matriz g com componentes $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$,

$$|g| := \det(g_{ij}) = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j). \quad (75)$$

(*Exercício:* Mostre que esta determinante é positiva.) Pelo Teorema 1.10, $|g|^{1/2}$ é o volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Temos o

Lema 2.2 As componentes de Ω com respeito a uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ com orientação positiva são dadas por

$$\Omega_{i_1 \dots i_n} = |g|^{1/2} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}. \quad (76)$$

Aquí, $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ são os símbolos de Levi-Civita (28).

Aviso! A determinante $|g|$ não é um escalar (ela depende da base), e os símbolos de Levi-Civita não são as componentes de um tensor! Só o produto define um tensor, Ω .

Demonstração. Sabemos pela eq. (69) que $\Omega_{i_1 \dots i_n} = \det(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})$. Se alguns índices coincidem, ou seja se o conjunto $\{i_1, \dots, i_n\} \neq \{1, \dots, n\}$, a determinante se anula pela antissimetria. Se todos índices são diferentes, ou seja se $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$, então o módulo $|\det(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})|$ coincide com $|g|^{1/2}$ pelo Lema 1.5. O sinal afirmado segue da antissimetria da determinante. □

Em três dimensões, o produto vetorial de dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ é relacionado com a forma Ω , a saber, suas componentes *covariantes* (ver embaixo) são dados por

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \sum_{j,k} \Omega_{ijk} u^j v^k. \quad (77)$$

Isso segue de

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i w^i = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Omega_{ijk} u^j v^k w^i.$$

⁵Recordamos que n é a dimensão do espaço V .

2.3 A identificação $V \cong V^*$ via produto escalar.

Recordamos que todo vetor $\mathbf{v} \in V$ define uma forma $\eta_{\mathbf{v}} \in V^*$, a saber $\eta_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) \doteq \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. Ela tem componentes

$$(\eta_{\mathbf{v}})_i \stackrel{(56)}{=} \eta_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = \sum_j v^j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i = \sum_j v^j g_{ji}. \quad (78)$$

É costume identificar o vetor \mathbf{v} e o covetor correspondente, $\eta_{\mathbf{v}}$, e escrever

$$v_i := (\eta_{\mathbf{v}})_i = \sum_j v^j g_{ji}, \quad (79)$$

considerando v_i e v^i como componentes contra- ou covariantes, respectivamente, de um só objeto. (Ver “Mudança do tipo” embaixo.) Vale observar que agora podemos escrever o produto escalar como $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \sum_{i,j} u^i g_{ij} v^j = \sum_i u^i v_i$, ou seja:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u^i v_i = \sum_i u_i v^i. \quad (80)$$

Reciprocamente, o Lema de Riesz 1.7 afirma que para toda forma $\eta \in V^*$ existe um vetor \mathbf{v}_{η} tal que vale a relação (34), $\eta(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_{\eta} \cdot \mathbf{u}$ para todo \mathbf{u} . Vamos calcular os componentes desse vetor \mathbf{v}_{η} . Pelo mesmo raciocínio que levou à Eq. (78), temos

$$\eta_i = \sum_j (\mathbf{v}_{\eta})^j g_{ji}. \quad (81)$$

Pelo Lema 1.5, a determinante da matriz g_{ij} é não-nula, então a matriz é invertível.⁶ Vamos denotar os elementos da matriz inversa por \tilde{g}^{ij} :

$$(\tilde{g}^{ij}) := (g_{ij})^{-1}, \quad \text{ou seja,} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{g}^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \quad (82)$$

Com isso, podemos resolver a Eq. (81) para $(\mathbf{v}_{\eta})^j$: Multiplicando os dois lados dessa equação com \tilde{g}^{ik} e somando sobre i resulta em

$$\sum_i \eta_i \tilde{g}^{ik} = \sum_j \mathbf{v}_{\eta}^j \sum_i g_{ji} \tilde{g}^{ik} = (\mathbf{v}_{\eta})^k.$$

É costume identificar um covetor $\eta \in V^*$ com o vetor \mathbf{v}_{η} correspondente, e considerar

$$\eta^i := (\mathbf{v}_{\eta})^i = \sum_j \eta_j \tilde{g}^{ji} \quad (83)$$

como componentes contravariantes de η .⁷

⁶Isso também segue do fato que o produto escalar é não-degenerado, $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ para todos $\mathbf{v} \in V$ implica $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

⁷Observe que temos

$$\mathbf{v}_{\eta} = \sum_{i,k} \eta_i \tilde{g}^{ik} \mathbf{a}_k \equiv \sum_{i,k} \eta(\mathbf{a}_i) \tilde{g}^{ik} \mathbf{a}_k,$$

e que isso coincide com a Eq. (35) no caso de uma BON.

2.4 Mudança de Base.

Obviamente, as componentes dos tensores dependem da base. Vamos ver agora como eles se transformam sob uma mudança da base $\{\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n\}$ para uma nova base $\{\bar{\mathbf{a}}_i, i = 1, \dots, n\}$. Cada $\bar{\mathbf{a}}_i$ é uma certa combinação linear dos \mathbf{a}_j ,

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j A^j_i, \quad (84)$$

e a matriz A^j_i caracteriza a mudança de base $\{\mathbf{a}_i\} \rightarrow \{\bar{\mathbf{a}}_i\}$. ($\bar{\mathbf{a}}_i$ pode ser encarado como a imagem de \mathbf{a}_i sob uma aplicação linear A definida pela própria equação acima: $\bar{\mathbf{a}}_i = A\mathbf{a}_i := \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j A^j_i$, ver Eq. (102) embaixo.)

Como primeiro passo, vamos determinar o comportamento da base dual sob esta mudança. Temos

$$\delta_j^i = \bar{\mathbf{a}}^i(\bar{\mathbf{a}}_j) = \bar{\mathbf{a}}^i\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k A^k_j\right) = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{a}_k) A^k_j.$$

Multiplicando os dois lados com $(A^{-1})^{j_l}$ e somando sobre j dá $\bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{a}_l) = \sum_j \delta_j^i (A^{-1})^{j_l} \equiv (A^{-1})^{i_l}$. Substituindo isto na expansão (56) do covetor $\bar{\mathbf{a}}^i$ com respeito à base dual $\{\mathbf{a}^j\}$, a saber $\bar{\mathbf{a}}^i = \sum_j \bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{a}_j) \mathbf{a}^j$, dá

$$\bar{\mathbf{a}}^i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})^{i_j} \mathbf{a}^j.$$

Recordamos (eq. (54)) que as componentes v^i de um vetor $\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{a}_i$ com respeito à base $\{\mathbf{a}_i\}$ são dadas por $v^i = \mathbf{a}^i(\mathbf{v})$. Pela equação acima, suas componentes \bar{v}^i com respeito à nova base $\{\bar{\mathbf{a}}_i\}$ são dadas por $\bar{v}^i = \bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{v}) = \sum_k (A^{-1})^{i_k} \mathbf{a}^k(\mathbf{v}) = \sum_k (A^{-1})^{i_k} v^k$:

$$\bar{v}^i = \sum_k (A^{-1})^{i_k} v^k. \quad (85)$$

Observe que as componentes v^i de um vetor transformam sob a matriz $(A^{-1})^t$, chamada de “contravariante” de A . Daí provem o nome “componentes contravariantes”.⁸

Da mesma maneira, para um covetor η vale, pela eq. (56), $\bar{\eta}_j = \eta(\bar{\mathbf{a}}_j) = \sum_l A^l_j \eta(\mathbf{a}_l) = \sum_l A^l_j \eta_l$:

$$\bar{\eta}_j = \sum_l A^l_j \eta_l. \quad (86)$$

Mais geralmente, a Prop. 2.1 sobre as componentes de tensores implica, com o mesmo raciocínio:

Proposição 2.3 *Seja T um tensor in $T_s^r(V)$ com componentes $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ e $\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ com respeito à base $\{\mathbf{a}_i\}$ e $\{\bar{\mathbf{a}}_i\}$, respectivamente (conforme eq.s (68), (69)). Então vale*

$$\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ l_1, \dots, l_s}} (A^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (A^{-1})^{i_r}_{k_r} A_{j_1}^{l_1} \dots A_{j_s}^{l_s} T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}. \quad (87)$$

Na física, é costume pegar esse comportamento como definição de tensores: “Um tensor do tipo (r, s) é um aparelho que associa com uma base em V uma família de números $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, chamados de componentes do tensor com respeito à base, tal que os componentes com respeito a duas bases diferentes são relacionados como em (87).”

⁸A Eq. (85) pode ser mostrado diretamente como segue:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \bar{\mathbf{a}}_j = \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \sum_{i=1}^n A^i_j \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A^i_j \bar{v}^j \right) \mathbf{a}_i.$$

Isso implica $v^i = \sum_{j=1}^n A^i_j \bar{v}^j$, equivalente com (85).

2.5 Operações com Tensores.

Vamos finalmente introduzir alguns operações com tensores.

Produto tensorial ou “externo”. A definição do espaço $T_s^r(V)$ implica que este espaço pode ser identificado com

$$T_s^r(V) = T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V), \quad \text{se } r = r_1 + r_2, \quad s = s_1 + s_2,$$

a saber com a seguinte identificação: Para $T_1 \in T_{s_1}^{r_1}(V)$ e $T_2 \in T_{s_2}^{r_2}(V)$, definimos $T_1 \otimes T_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ por

$$(T_1 \otimes T_2)(\eta_1, \dots, \eta_{r_1+r_2}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s_1+s_2}) := T_1(\eta_1, \dots, \eta_{r_1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s_1}) T_2(\eta_{r_1+1}, \dots, \eta_{r_1+r_2}, \mathbf{v}_{s_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{s_1+s_2}). \quad (88)$$

Em componentes:

$$(T_1 \otimes T_2)_{j_1 \dots j_{s_1+s_2}}^{i_1 \dots i_{r_1+r_2}} = (T_1)_{j_1 \dots j_{s_1}}^{i_1 \dots i_{r_1}} (T_2)_{j_{s_1+1} \dots j_{s_1+s_2}}^{i_{r_1+1} \dots i_{r_1+r_2}}$$

Contração. A *contração* (dos primeiros índices) é a aplicação linear $T_s^r(V) \rightarrow T_{s-1}^{r-1}(V)$ definida por

$$C_1^1 : \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s \mapsto \eta_1(\mathbf{v}_1) \mathbf{v}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_2 \otimes \dots \otimes \eta_s. \quad (89)$$

Ela joga um tensor $T \in T_s^r(V)$ com componentes $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ para o tensor $\hat{T} \in T_{s-1}^{r-1}(V)$ com componentes

$$(C_1^1 T)_{j_2 \dots j_s}^{i_2 \dots i_r} = \sum_k T_{kj_2 \dots j_s}^{ki_2 \dots i_r}.$$

Exemplo: $C_1^1 \hat{\delta} = n$.

O mesmo pode ser feito com qualquer outro par de índices.

Mudança do tipo. A aplicação $V \equiv T_0^1(V) \rightarrow T_1^0(V) \equiv V^*$, $\mathbf{v} \mapsto \eta_{\mathbf{v}}$, induz uma aplicação $T_s^r(V) \rightarrow T_{s+1}^{r-1}(V)$, a saber

$$\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{r-1} \otimes \eta_{\mathbf{v}_r} \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s.$$

Ela joga um tensor $T \in T_s^r(V)$ com componentes $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ para o tensor $\check{T} \in T_{s+1}^{r-1}(V)$ cujas componentes são

$$\check{T}_{kj_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_l T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1} l} g_{lk}. \quad (90)$$

O mesmo pode ser feito com qualquer outro par de índices. Esta operação chama-se *abaixar* um index. A aplicação inversa $V^* \rightarrow V$, $\eta \mapsto \mathbf{v}_\eta$, induz a aplicação inversa $T_s^r(V) \rightarrow T_{s-1}^{r+1}(V)$ (chamado de *elegar* um index):

$$\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \mathbf{v}_{\eta_1} \otimes \eta_2 \otimes \dots \otimes \eta_s.$$

Em componentes, isso resultando na fórmula

$$\hat{T}_{j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r k} = \sum_l \tilde{g}^{kl} T_{lj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \quad (91)$$

(Como no caso $V \cong V^*$, é costume identificar os tensores T , \hat{T} e \check{T} , e omitir os símbolos $\hat{}$ ou $\check{}$ nos lados esquerdos das equações encima.)

Por exemplo, abaixando todos índices de um tensor to tipo $(0, s)$ um depois do outro, resulta em

$$T^{k_1 \dots k_s} = \sum_{j_1, \dots, j_s} T_{j_1 \dots j_s} g^{k_1 j_1} \dots g^{k_s j_s}.$$

Vamos considerar algumas aplicações:

Lema 2.4 *i)* A mudança de tipo do tensor métrico, $g \in T_2^0(V)$ para $\hat{g} \in T_1^1(V)$ resulta no tensor Kronecker, e a mudança para $T_0^2(V)$ resulta no tensor cujos componentes coincidem com a matriz inversa $(\tilde{g}^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$:

$$\hat{g}_j^i = \hat{\delta}_j^i; \quad \hat{\delta}^{ij} = \tilde{g}^{ij}. \quad (92)$$

ii) A n -forma do volume, Ω , satisfaz:

$$\Omega^{i_1 \dots i_n} = |g|^{-1/2} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}, \quad (93)$$

$$\text{Em 3 dimensões: } \sum_k \Omega_{ijk} \Omega^{klm} = \delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l, \quad (94)$$

$$\sum_k \Omega_{ijk} \Omega^k_{lm} = g_{il} g_{jm} - g_{im} g_{jl}, \quad (95)$$

$$\sum_{k,j} \Omega_{ijk} \Omega^{kjm} = -2\delta_i^m. \quad (96)$$

A partir daqui, vamos frequentemente escrever $g^{ij} := \tilde{g}^{ij}$ e $g_j^i = \delta_j^i$.

Demonstração. Eq. (92) segue da relação (82). Para mostrar (93), calculamos

$$\Omega^{1 \dots n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} \Omega_{i_1 \dots i_n} g^{1i_1} \dots g^{ni_n} = |g|^{1/2} \sum_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} g^{1i_1} \dots g^{ni_n} = |g|^{-1/2},$$

pois a soma $\sum \varepsilon_{i_1 \dots i_n} g^{1i_1} \dots g^{ni_n}$ é nada mais do que a determinante da matriz (g^{ij}) , ou seja, $|g|^{-1}$. Junto com a anti-simetria de $\Omega^{i_1 \dots i_n}$, isto implica a eq. (93). A eq. (94) vamos mostrar numa base ortonormal. (Como os dois lados são componentes de tensores, isto è suficiente pela Prop. 2.1.) Neste caso, $|g| = 1$ e nós temos que mostrar

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Isso é mostrado por exemplo em [3, p. 683]. Baixando os índices l e m na eq. (94) resulta na eq. (95). \square

Produto escalar ou “interno”. Com a identificação de V e V^* na Secção 2.3, o produto escalar pode ser transferido para o espaço dual V^* , a saber pela definição

$$\eta \cdot \mu := \mathbf{v}_\eta \cdot \mathbf{v}_\mu \equiv \eta(\mathbf{v}_\mu) = \mu(\mathbf{v}_\eta) \quad (97)$$

para $\eta, \mu \in V^*$. Expandindo \mathbf{v}_η como na Eq. (83), temos

$$\eta \cdot \mu = \mu(\mathbf{v}_\eta) = \sum_{i,k} \eta_i \tilde{g}^{ik} \mu(\mathbf{a}_k) = \sum_{i,k} \tilde{g}^{ik} \eta_i \mu_k,$$

onde \tilde{g}^{ik} é a matriz inversa de g_{ik} .

Agora o produto escalar pode ser transferido para todos espaços tensoriais $T_s^r(V)$ pela seguinte definição. Para $\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s$ e $\mathbf{v}'_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}'_r \otimes \eta'_1 \otimes \dots \otimes \eta'_s$ em $T_s^r(V)$, definimos

$$(\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s) \cdot (\mathbf{v}'_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}'_r \otimes \eta'_1 \otimes \dots \otimes \eta'_s) := (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1) \dots (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}'_r) (\eta_1 \cdot \eta'_1) \dots (\eta_s \cdot \eta'_s).$$

Esta definição estende por bilinearidade para o espaço $T_s^r(V)$ inteiro. Em componentes, temos para $T, S \in T_s^r(V)$:

$$\begin{aligned} T \cdot S &= \sum_{i_1, \dots, i_r, k_1, \dots, k_r, j_1, \dots, j_s, l_1, \dots, l_s} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_s l_s} S_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} \\ &\equiv \sum_{k_1, \dots, k_r, j_1, \dots, j_s} T_{k_1 \dots k_r j_1 \dots j_s} S^{k_1 \dots k_r j_1 \dots j_s}. \end{aligned} \quad (98)$$

Exemplos: Vamos determinar as “normas” $T \cdot T$ para o tensor de Kronecker $\hat{\delta}$, a forma do volume Ω , e o próprio tensor métrico g :

$$\hat{\delta} \cdot \hat{\delta} = \sum_{ijkl} \delta_j^i g_{ik} \tilde{g}^{jl} \delta_l^k = \sum_{kl} g_{jk} \tilde{g}^{jk} = \sum_j \delta_j^j = n \quad (99)$$

$$g \cdot g = n \quad (100)$$

$$\Omega \cdot \Omega = n! \quad (101)$$

Endomorfismos. Denotamos por $\text{End}(V)$ o espaço dos endomorfismos lineares de V . Dado uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ de V , um endomorfismo $A \in \text{End}(V)$ corresponde a uma matriz A^j_i , definida por

$$A\mathbf{a}_i =: \sum_j A^j_i \mathbf{a}_j, \quad (102)$$

ou, equivalentemente, $(A\mathbf{v})^j = \sum_i A^j_i v^i$. Essa correspondência entre endomorfismos e matrizes preserva o produto (*exercício!*):

$$(A \circ B)^j_i = \sum_k A^j_k B^k_i. \quad (103)$$

Verifique-se facilmente (*exercício!*) que os elementos de matriz são dadas por

$$A^j_i = \mathbf{a}^j(A\mathbf{a}_i). \quad (104)$$

O espaço dos endomorfismos $\text{End}(V)$ pode ser identificado com o espaço de tensores $T_1^1(V)$ como seguinte. Dado $A \in \text{End}(V)$, define um tensor $T \in T_1^1(V)$ por

$$T(\eta, \mathbf{v}) \doteq \eta(A\mathbf{v}) \quad (105)$$

para $\eta \in V^*$, $\mathbf{v} \in V$. Inversamente: Dado $T \in T_1^1(V)$, define $A\mathbf{v} :=$ o único (*exercício!*) vetor tal que a equação acima vale para todos $\eta \in V^*$. Isto define uma aplicação linear $A \in \text{End}(V)$.⁹ É fácil ver que essa relação (105) estabelece um isomorfismo $T_1^1(V) \cong \text{End}(V)$. Os componentes do tensor T em (105) com respeito à base $\{\mathbf{a}_i\}$ coincidem com os elementos da matriz A , pois

$$T_i^j \stackrel{(69)}{=} T(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^j) \stackrel{(105)}{=} \mathbf{a}^j(A\mathbf{a}_i) \stackrel{(104)}{=} A^j_i.$$

Como sempre, é costume identificar T e A relacionados por (105).

Exemplo: O endomorfismo que corresponde ao tensor Kronecker $\hat{\delta}$, ver eq. (72), é a identidade \mathbb{I} em V , pois $\delta(\eta, \mathbf{v}) \equiv \eta(\mathbf{v}) = \eta(\mathbb{I}\mathbf{v})$. Os seus componentes δ_i^j coincidem com a matriz correspondente a \mathbb{I} (para qualquer base).

Definição 7 Seja A um endomorfismo num espaço V com produto escalar.

i) O *adjunto* de A , em símbolos A^* , é o endomorfismo unicamente caracterizado pelo fato que para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale

$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A^*\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \quad (106)$$

⁹Em particular, o endomorfismo A correspondente ao tensor $\mathbf{u} \otimes \mu \in T_1^1(V)$ é

$$A\mathbf{v} = \mu(\mathbf{v}) \mathbf{u}.$$

Na notação de Dirac: $\mathbf{u} \doteq |\mathbf{u}\rangle$ (vetor = “ket”), $\mu \doteq \langle\mu|$ (covetor = “bra”), e o endomorfismo A correspondente a $\mathbf{u} \otimes \mu$ pode ser escrito $A = |\mathbf{u}\rangle\langle\mu| : |\mathbf{v}\rangle \mapsto |\mathbf{u}\rangle\langle\mu|\mathbf{v}\rangle$ (“bracket”).

O adjunto do endomorfismo correspondente a $\mathbf{u} \otimes \mu$ é $\mathbf{v}_\mu \otimes \eta_u$. Na notação de Dirac: $(|\mathbf{u}\rangle\langle\mu|)^* = |\mu\rangle\langle\mathbf{u}|$.

O endomorfismo é chamado de *simétrico* (ou auto-adjunto) se $A = A^*$, ou seja, se para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

O endomorfismo é chamado de *antissimétrico* se $A = -A^*$, ou seja, se para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = -(A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

ii) O *transposto* de A , em símbolos A^T , é o endomorfismo de V^* unicamente caracterizado pelo fato que para todos $\eta \in V^*$ e $\mathbf{v} \in V$ vale

$$\eta(A\mathbf{v}) = (A^T\eta)(\mathbf{v}). \quad (107)$$

iii) O *traço* de um endomorfismo A , em símbolos $\text{Tr } A$, é definido por

$$\text{Tr } A := \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^i(A\mathbf{a}_i) \equiv \sum_{i=1}^n A^i_i. \quad (108)$$

onde $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ é uma base e $\{\mathbf{a}^i\}$ a base dual. \square

Obviamente, o traço de A coincide com o escalar que surge do tensor $A \in T_1^1(V)$ pela contração de índices, $\text{Tr } A = C_1^1 A = \sum_i A^i_i$.

Exercício 2.5 1. Verifique diretamente que a definição (108) independe da base! 2. Mostre que os componentes do endomorfismo adjunto A^* são relacionados com aqueles do A por

$$(A^*)^i_j = \sum_{k,l} A^k_l g^{li} g_{kj}$$

(o que poderia ser denotado por $A^{ki} g_{kj} \equiv g_{jk} A^{ki} =: A_j^i$). \square

Consideramos o endomorfismo A como tensor em $T_1^1(V)$ e abaixamos o index superior, resultando em $\check{A} \in T_2^0(V)$ com componentes (veja (90))

$$\check{A}_{kj} = A^i_j g_{ki}. \quad (109)$$

Sem componentes, esse tensor \check{A} é relacionado com o endomorfismo A como

$$\check{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}. \quad (110)$$

(Demonstração: $\mathbf{a}_k \cdot A\mathbf{a}_j = \sum_i A^i_j \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_i = \sum_i A^i_j g_{ki} = \check{A}_{kj} = \check{A}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j)$.)

Lema 2.6 i) Um endomorfismo A é auto-adjunto se, e somente se, o tensor $\check{A} \in T_2^0(V)$ correspondente é simétrico, $\check{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \check{A}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, equivalentemente: Se a matriz de seus componentes covariantes (109) é simétrica.¹⁰

$$\check{A}_{ij} = \check{A}_{ji}.$$

ii) Seja V um espaço euclidiano tridimensional. Um endomorfismo A é antissimétrico se, e somente se, existe um vetor $\boldsymbol{\omega} \in V$ tal que para todos $\mathbf{u} \in V$ vale

$$A\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}.$$

¹⁰Isto é equivalente com $A^j_i = A^i_j$ só se a base for ortonormal!

2.5.1 Exemplo: Tensor de inércia.

Consideramos um corpo rígido girando. Escolhemos um ponto o no referencial do corpo como origem e especificamos os pontos p no corpo pelos vetores posição $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p) = o\vec{p}$. É possível mostrar que para todo tempo t existe um vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \mathbf{n}(t)$, tal que para todo vetor posição $\mathbf{r}(t)$ a velocidade instantânea é dada por¹¹

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (111)$$

Conseqüentemente, o momento angular total \mathbf{L} do corpo com respeito à origem o é dado por

$$\mathbf{L} = \int_G \varrho(p) \mathbf{r}(p) \times \dot{\mathbf{r}}(p) dV(p) = \int_G \varrho(p) \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV,$$

onde ϱ é a densidade do corpo e G é a região ocupada pelo corpo. Este vetor depende linearmente do vetor $\boldsymbol{\omega}$, ou seja: $\mathbf{L} = \hat{I}_o \boldsymbol{\omega}$, onde \hat{I}_o é o endomorfismo¹²

$$\hat{I}_o \mathbf{u} \doteq \int_G \varrho(p) \mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) dV = \int_G \varrho(p) (r^2 \mathbf{u} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{r}) dV. \quad (113)$$

Os elementos da matriz correspondente (ou seja, os componentes do tensor $I_o \in T_1^1(V)$ correspondente) são dados por

$$I^i_j = \mathbf{a}^i(\hat{I} \mathbf{a}_j) = \int_G \varrho(p) (\delta_j^i r(p)^2 - r^i(p) r_j(p)) dV(p),$$

onde r^i e r_j são as componentes contra- respectivamente covariantes do vetor posição $\mathbf{r}(p)$, e $r(p)^2 = \|\mathbf{r}(p)\|^2$. É fácil verificar que o endomorfismo \hat{I} é auto-adjunto (exercício!) e daí possui uma BON de auto-vetores. As retas passando por o com essas direções são chamadas de *eixos principais de inércia*.¹³

A energia cinética (se o centro de massa está em repouso) é dada por

$$K = \frac{1}{2} \int_G \varrho(p) \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(p)\|^2 dV(p).$$

Como $\|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\|^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}))$, isso é justamente $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{I}_0 \boldsymbol{\omega}$. Usando o tensor I_0 do tipo $(0, 2)$ correspondente a \hat{I}_0 depois de baixar um index, isso é:

$$K = \frac{1}{2} I_o(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \omega^2.$$

(Aqui, escrevemos $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ e usamos a bilinearidade de I_o .) Esse tensor $I_o \in T_2^0(V)$ é chamado de *tensor de inércia*, em detalhes:

$$I_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \doteq \int \varrho(p) \underbrace{(\mathbf{u} \times \mathbf{r}(p)) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}(p))}_{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})} dV(p). \quad (114)$$

¹¹Como o corpo é rígido, a evolução temporal $\mathbf{r}(t) = R(t)\mathbf{r}$ preserva todos produtos escalares $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$:

$$0 = \frac{d}{dt} (R(t)\mathbf{r} \cdot R(t)\mathbf{r}') = \dot{R}(t)\mathbf{r} \cdot R(t)\mathbf{r}' + R(t)\mathbf{r} \cdot \dot{R}(t)\mathbf{r}',$$

onde escrevemos $\frac{d}{dt} R(t) = \dot{R}(t)$. Daí, o endomorfismo $\dot{R}(t)$ é anti-simétrico, e pelo Lema 2.6 pode ser escrito como $\dot{R}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

¹²O endomorfismo \hat{I} pode também ser descrito como seguinte: O vetor $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \equiv r^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}$ é justamente r^2 vezes a projeção de $\boldsymbol{\omega}$ no complemento ortogonal de \mathbf{r} , em símbolos $r^2 P_{\mathbf{r}}^\perp \boldsymbol{\omega}$. Daí, podemos escrever

$$\hat{I}_o = \int_G \varrho(p) r(p)^2 P_{\mathbf{r}(p)}^\perp dV. \quad (115)$$

¹³Apenas se $o =$ centro de massa?

(A segunda linha segue da Eq. (42).) Os componentes são

$$I_{ij} = \int_G \varrho(p) (g_{ij}(p) r(p)^2 - r_i(p) r_j(p)) dV(p).$$

Ele é simétrico, $I_{ij} = I_{ji}$, e deve ser assim pelo Lema 2.6, pois o endomorfismo \hat{I}_o é auto-adjunto. O número $I_o(\mathbf{n}, \mathbf{n})$ é chamado de *momento de inércia* com respeito ao eixo $o + \mathbb{R}\mathbf{n}$.

Em coordenadas cilíndricas adaptadas ao eixo, $\hat{\mathbf{z}} := \mathbf{n}$ (veja Sec. 3.2.2 e 3.4.3), temos

$$I_o(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = (I_o)_{zz} = \int_G \varrho(p) (r(p)^2 - z(p)^2) dV(p) \equiv \int_G \varrho(p) s(p)^3 ds d\varphi dz,$$

onde denotamos a distância entre um ponto p e o eixo $o + \mathbb{R}\mathbf{n}$ por $s(p)$ (em vez de ϱ como antes, pois esse já denota a densidade no contexto presente.)

3 Sistemas de Coordenadas no Espaço Físico.

3.1 O Espaço Físico.

Denotamos o espaço físico por E , e pontos em E por o, p, q, \dots . Dado dois pontos o e p em E , consideramos o segmento de reta orientado entre o e p (começando em o e com ponta em p). Aquela “flecha” chamamos o *vetor deslocamento* entre o e p , notado por \vec{op} . Na geometria elementar aprendemos que as seguintes construções são possíveis com régua e compasso.

(1) Translação paralela. Uma flecha \vec{op} começando em o pode ser transportada de o para qualquer outro ponto o_1 por *translação paralela*. A ponta desta flecha marca um certo ponto p_1 , então a flecha transladada é da forma $\vec{o_1 p_1}$. (Figura!) Nos *identificamos* a flecha \vec{op} e a flecha transladada $\vec{o_1 p_1}$. A classe de todas flechas que provêm de \vec{op} por translação paralela será então considerada *um vector deslocamento*. Vetores deslocamento notamos geralmente por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$, e o conjunto de todos vetores deslocamento denotamos por V .¹⁴ Com isso, um ponto $p \in E$ e um vetor deslocamento $\mathbf{v} \in V$ determinam um único ponto q t.q. $\vec{pq} = \mathbf{v}$ (A saber, q é marcado pela ponta da flecha \mathbf{v} , transladada tal que ela começa em p). Nesta situação, escrevemos $q = p + \mathbf{v}$. Experimentalmente, verifique-se que esse “deslocamento” é comutativo:¹⁵

$$(o + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = (o + \mathbf{v}) + \mathbf{u}. \quad (115)$$

(2) Medir a distância entre quaisquer dois pontos p, q , notado por $\text{dist}(p, q)$. Com isso, também podemos medir o ângulo $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} .

(3) Construir a projeção ortogonal de um vetor \mathbf{v} sobre um outro vetor \mathbf{u} , notado por $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. (Figura!)

Estes fatos implicam que o conjunto V de vetores deslocamento é um espaço vetorial, com norma e produto escalar. A adição de vetores é definida como seguinte: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é definido como a única seta t.q. $o + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (o + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$. (A Eq. (115) implica a comutatividade $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.) O elemento neutral $\mathbf{0}$ é o vetor deslocamento “com comprimento 0”, caracterizado pelo fato que vale $p + \mathbf{0} = p$ para todos $p \in E$. $-\mathbf{u}$ é o único vetor tal que $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Para $t \geq 0$, $t\mathbf{u}$ é o vetor \mathbf{u} , esticado pelo fator t . Isto, junto com a definição do inverso $-\mathbf{u}$, fixa operacionalmente a multiplicação de vetores por escalares. (*Exercício:* Verificar que V realmente é um espaço vetorial com estas definições.) A norma de vetores é dada por

$$\|\vec{pq}\| := \text{dist}(p, q). \quad (116)$$

¹⁴Alternativamente, podemos discriminar um ponto $o \in E$ (a origem) e definir V como o conjunto de todos vetores deslocamento que começam em o .

¹⁵Realmente, isso vale só se o campo gravitacional e a aceleração do laboratório são desprezíveis. Em geral, o espaço (–tempo) é curvo. Neste caso, para cada ponto p ainda pode ser definido o conjunto de “vetores” começando em p (o chamado espaço tangente em p), mas a translação paralela depende do caminho, então os vetores tangenciais começando em p e aqueles começando num outro ponto não podem ser naturalmente identificados. Consequentemente, a comutatividade (115) vale só aproximadamente.

Esta norma satisfaz a identidade do paralelograma, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$. Este fato permite a definição de um produto escalar satisfazendo a relação (15), a saber:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2) \quad (117)$$

$$= \pm \|\mathbf{u}\| \|P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\| \equiv \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \gamma. \quad (118)$$

A segunda linha é uma relação mais pragmática que pressupõe a construção da projeção $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. Lá, γ é o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} ; e o sinal na primeira equação é positivo se \mathbf{u} e $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ têm o mesmo sentido, e negativo no outro caso.

Na linguagem dos matemáticos, tudo isso implica que o espaço físico E (se gravitação e aceleração são desprezíveis) tem a estrutura de um *espaço afim euclidiano* (da dimensão três).¹⁶ Observamos finalmente que E pode ser identificado com V , depois de escolher um ponto $o \in E$ (a *origem* ou *referencial*). A saber, dado o cada ponto $p \in E$ tem o seu *vetor posição*

$$\mathbf{r}(p) := \vec{o}p \in V. \quad (119)$$

Como a correspondência $p \leftrightarrow \mathbf{r}(p)$ é unívoca, E pode ser identificado com V dessa maneira. Observe que o vetor deslocamento entre p e q é dado por $\vec{p}q = \mathbf{r}(q) - \mathbf{r}(p)$, então temos

$$\text{dist}(p, q) = \|\mathbf{r}(q) - \mathbf{r}(p)\|.$$

3.2 Sistemas de Coordenadas.

Coordenadas servem para especificar pontos no espaço num dado referencial de uma maneira quantitativa: Depois de especificar um sistema de coordenadas, todo ponto no espaço tridimensional é unicamente especificado por três números. A escolha de um sistema de Coordenadas depende da geometria e simetria da situação. Por exemplo, as coordenadas Cartesianas são úteis em situações homogêneas (com simetria translacional em todas direções). Em situações com simetria rotacional em torno de um eixo, ou em torno de um ponto discriminado, as coordenadas cilíndricas ou esféricas, respectivamente, são mais úteis. Em outras situações as vezes outras coordenadas são mais úteis, adaptadas à geometria da situação (coordenadas elípticas, hiperbólicas, ...).

Vamos recapitular primeiro as coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, e depois discutir sistemas de coordenadas (curvilíneas) em geral.

No seguinte, E e V denotam o espaço físico e o espaço de vetores deslocamento, respetivamente. Nos deixamos a dimensão, n , aberta (na prática, claramente $n = 2$ ou 3).

3.2.1 Coordenadas Cartesianas e Lineares.

Depois de escolher uma origem $o \in E$ e uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ em V , para cada $p \in E$ o vetor-posição $\mathbf{r}(p) = \vec{o}p$ possui uma única decomposição

$$\mathbf{r}(p) = \sum_{i=1}^n x^i(p) \mathbf{a}_i. \quad (120)$$

¹⁶Um conjunto E é um *espaço afim* se existe um espaço vetorial V e uma aplicação $E \times V \rightarrow E$, $(p, \mathbf{v}) \rightarrow p + \mathbf{v}$, t.q. vale:

i) Para cada $p, q \in E$ existe um $\mathbf{v} \in V$ t.q. $q = p + \mathbf{v}$. (Notação: $\mathbf{v} =: \vec{p}q$.)

ii) Para $p \in E$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale $p + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (p + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$.

iii) Para $p \in E$, a equação $p + \mathbf{v} = p$ vale se e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Um espaço afim E é chamado de espaço afim *euclidiano* se V possui um produto escalar. A *dimensão* de E é definido pela dimensão de V .

Observe que o vetor $\mathbf{v} = \vec{p}q$ do item i) é único pelo item iii).

Os n números $x^i(p)$ definidos de tal maneira são chamados de *coordenadas lineares* do ponto p com respeito à base $\{\mathbf{a}_i\}$. (Em outras palavras, aqueles coordenadas são os componentes do vetor-posição com respeito à esta base.) No caso quando a base é ortonormal (ou seja, uma BON), os $x^i(p)$ são chamados de *coordenadas Cartesianas*.¹⁷ Neste caso, é costume escrever $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} =: \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ ou $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ ou $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, e $\{x^1, x^2, x^3\} = \{x, y, z\}$.

3.2.2 Coordenadas Cilíndricas.

Em situações com simetria rotacional em torno de uma reta R (o eixo), e translacional na direção do mesmo eixo, usamos coordenadas cilíndricas: $(u^1, u^2, u^3) = (\varrho, \varphi, z) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Elas são definidas (operacionalmente) em $E \setminus R$ como segue. Escolhemos eixos x, y e z tal que R coincide com o eixo- z . Seja $P_{x,y}\mathbf{r}(p)$ a projeção do vetor $\mathbf{r}(p)$ ao plano x - y conforme Lema 1.3. Então para $p \in E \setminus R$ definimos

$$\varrho(p) := \text{distância entre } p \text{ e } R \quad (121)$$

$$\varphi(p) := \text{ângulo de } P_{x,y}\mathbf{r}(p) \text{ com o eixo dos } x \text{ positivos} \quad (122)$$

$$z(p) := \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}(p), \quad (123)$$

onde \mathbf{e}_z é o vetor unitário na direção dos z positivos. A relação com as coordenadas Cartesianas é a seguinte. Se o ponto p tem coordenadas Cartesianas x, y, z , então

$$\varrho(p) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(p) = \arctan(y/x), \quad z(p) = z. \quad (124)$$

Inversamente, se p tem coordenadas cilíndricas ϱ, φ, z , então

$$x(p) = \varrho \cos \varphi, \quad y(p) = \varrho \sin \varphi, \quad z(p) = z. \quad (125)$$

3.2.3 Coordenadas Esféricas.

Em situações com simetria rotacional $SO(3)$ em torno de um ponto discriminado o , usamos coordenadas esféricas: $(u^1, u^2, u^3) = (r, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi]$. Elas são definidas (operacionalmente) como segue. Escolhemos eixos x, y e z tal que o coincide com a origem. Então para p em E menos o eixo- z definimos

$$r(p) := \text{dist}(o, p) = \|\mathbf{r}(p)\|, \quad (126)$$

$$\theta(p) := \text{ângulo de } \mathbf{r}(p) \text{ com o eixo dos } z \text{ positivos}, \quad (127)$$

$$\varphi(p) := \text{ângulo de } P_{x,y}\mathbf{r}(p) \text{ com o eixo dos } x \text{ positivos}, \quad (128)$$

onde $P_{x,y}\mathbf{r}(p)$ é a projeção do vetor $\mathbf{r}(p)$ ao plano x - y conforme Lema 1.3. A relação com as coordenadas Cartesianas é a seguinte. Se o ponto p tem coordenadas Cartesianas x, y, z , então

$$r(p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (129)$$

$$\theta(p) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (130)$$

$$\varphi(p) = \arctan(y/x). \quad (131)$$

Inversamente, se p tem as coordenadas esféricas r, ϑ, φ , então

$$x(p) = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y(p) = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z(p) = r \cos \theta. \quad (132)$$

¹⁷Neste caso, elas podem ser calculadas pela fórmula (19): $x^i(p) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}(p)$.

3.2.4 Coordenadas Curvilíneas em Geral.

Consideremos o exemplo de coordenadas cilíndricas. A coordenada ϱ pode ser encarada como uma aplicação $p \mapsto \varrho(p)$ de E (ou um subconjunto de E) nos números reais. Em outras palavras, a coordenada ϱ é uma função, e o mesmo vale para as outras coordenadas φ, z . Ademais, dado um ponto p , os três números $\varrho(p), \varphi(p), z(p)$ unicamente especificam p (i.e., não existe outro ponto com as mesmas 3 valores de coordenadas).

Mais geralmente, um *sistema de coordenadas* é uma n -ésima de funções

$$u^i : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

t.q. a aplicação $E \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto (u^1(p), \dots, u^n(p))$ é localmente invertível e diferenciável (mais precisamente, aquela aplicação deve ser um difeomorfismo entre um certo domínio $D \subset E$ e sua imagem em \mathbb{R}^n). Dessa maneira, o ponto p pode ser identificado com a n -upla de suas coordenadas $(u^1(p), \dots, u^n(p))$. Por outro lado, depois de escolher uma origem o , um ponto p em E pode ser identificado com seu vetor-posição $\mathbf{r}(p) = \vec{op} \in V$. Por isso, o vetor-posição $\mathbf{r}(p)$ de um ponto p pode ser identificado com o n -ésimo das coordenadas do ponto, e nós podemos (e vamos) escrever

$$\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) := \mathbf{r}(p) \tag{133}$$

se p tem as coordenadas u^1, \dots, u^n . Muito úteis e importantes são as derivadas parciais dessa aplicação,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n) - \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) \} \\ &\equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n) \right|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \tag{134}$$

onde u^1, \dots, u^n são as coordenadas do ponto p .¹⁸ (Observe que isso é um vetor em V , e a definição não depende da origem $o \in E$.) O vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ tem a direção de u^i crescente (com as outras coordenadas fixas), e a sua norma é a taxa de crescimento métrico naquela direção, ver Fig. 1. Este vetor pode ser

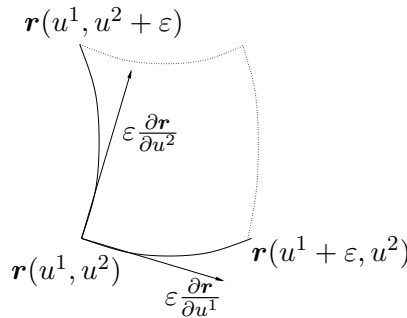


Figura 1: Os vetores da base $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$.

caracterizado pelo seguinte fato: O vetor deslocamento entre o ponto p com coordenadas u^1, \dots, u^n e o ponto com coordenadas $u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n$ coincide com $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ módulo termos da ordem ε^2 :

$$\mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n) = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) + O(\varepsilon^2). \tag{135}$$

¹⁸Esse vetor é denotado por ε_i na Eq. (2.114) em [1].

¹⁹Digamos que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ coincidem módulo termos da ordem x^n para pequenos x , em símbolos

$$f(x) = g(x) + O(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

se a função $(f(x) - g(x))/x^n$ é limitada em uma vizinhança da origem. Por exemplo, se f é duas vezes derivável, então vale $f(x) = f(0) + xf'(0) + O(x^2)$. Isto implica eq. (135).

É importante observar que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ realmente *depende do ponto p*! A única exceção são coordenadas lineares:

Exemplo 3.1 Se x^1, \dots, x^n são coordenadas lineares, correspondente a uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, então o vetor-posição de um ponto p com coordenadas $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ é dado, conforme equ.s (120) e (133), por $\mathbf{r}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{a}_i$. Consequentemente,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}(p) \equiv \frac{d}{d\varepsilon} \{x^1 \mathbf{a}_1 + \dots + (x^i + \varepsilon) \mathbf{a}_i + \dots + x^n \mathbf{a}_n\} \Big|_{\varepsilon=0} = \mathbf{a}_i, \quad (136)$$

ou seja, o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}(p)$ é simplesmente \mathbf{a}_i — em particular, constante! \square

O fato que a aplicação $p \mapsto (u^1, \dots, u^n)$ é invertível implica que, para cada p fixo, o conjunto dos n vetores

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(p), \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^n}(p) \right\} \quad (137)$$

é linearmente independente, então uma base do espaço vetorial V . Vamos chamar ela de *base de vetores correspondente* ao sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$.

3.2.5 Mudança de Coordenadas.

Muitas vezes é útil saber como os vetores de base $\partial_i \mathbf{r}$ e as componentes de vetores transformam sob uma mudança de coordenadas. Sejam então $\{u^1, \dots, u^n\}$ e $\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ duas sistemas de coordenadas. Pela regra de cadeia, as respectivas bases em V são relacionadas como seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}^i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i}(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}(p). \quad (138)$$

(Isso coincide com a Eq. (84), com $A^j_i = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i}(p)$.) Em particular em coordenadas Cartesianas, $u^j = x^j$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}(p) = \mathbf{e}_j$ pela eq. (136), vale

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}^i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial \bar{u}^i}(p) \mathbf{e}_j. \quad (139)$$

Exemplo 3.2 Calculamos a matriz $\frac{\partial x^j}{\partial \bar{u}^i}$ para o caso quando $\{x, y, z\}$ são coordenadas Cartesianas e $\{\bar{u}^i\}$ são coordenadas lineares, cilíndricas ou esféricas, respectivamente, que se referem à *mesma origem o*.

(a) Sejam \bar{x}^i coordenadas lineares com respeito a uma outra base $\bar{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j A^j_i$, ver Eq. (84). Pela Eq. (85), as coordenadas são linearmente relacionadas:

$$x^i = \sum_{j=1}^n A^i_j \bar{x}^j, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} = A^i_j.$$

(b) Para coordenadas cilíndricas $\{\varrho, \varphi, z\}$ vale

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\varrho \sin \varphi & \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \varrho \cos \varphi & \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0 & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array} \quad (140)$$

Uma particularidade útil desse sistema de coordenadas é que o vetor posição pode ser expandido, em contraste ao aviso (149) embaixo, como

$$\mathbf{r}(p) = \varrho(p) \partial_{\varrho} \mathbf{r}(p) + z(p) \partial_z \mathbf{r}(p). \quad (141)$$

(c) Para coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$ vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sen \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sen \theta \sen \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sen \theta \sen \varphi & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sen \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \sen \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sen \theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (142)$$

Uma particularidade útil desse sistema de coordenadas é que o vetor posição pode ser expandido, em contraste ao aviso (149) embaixo, como

$$\mathbf{r}(p) = r(p) \partial_r \mathbf{r}(p). \quad (143)$$

□

Componentes de Vetores. Como os $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ são uma base, cada vetor em V pode ser decomposto conforme

$$\mathbf{v} = \sum_i v^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p). \quad (144)$$

Os números $v^i(p)$ são chamados as *componentes (contravariantes)* de \mathbf{v} com respeito à base $\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(p), \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^n}(p)\}$, ou com respeito às coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$.²⁰ Vamos estudar a transformação de componentes sob uma mudança de coordenadas. Tal mudança implica uma mudança da base correspondente conforme eq. (138). Aplicando agora a Eq. (85) (com Eq. (84) substituída por (138)), temos o seguinte

Lema 3.3 (Transformação das Componentes) *Seja $\mathbf{v} \in V$ e sejam v^i e \bar{v}^i as componentes de \mathbf{v} com respeito às coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ e $\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$, respetivamente. Então vale*

$$\bar{v}^i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}(p) v^j(p). \quad (145)$$

3.3 Curvas.

Uma *curva* parametrizada é uma aplicação de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ para E , $t \mapsto \mathbf{r}(t)$. O *vetor tangente*, em símbolos $\dot{\mathbf{r}}(t)$, no ponto $\mathbf{r}(t)$ da curva é definido por

$$\dot{\mathbf{r}}(t) := \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{\mathbf{r}(t + \varepsilon) - \mathbf{r}(t)\}. \quad (146)$$

(Observe que isso é um vetor em V , e a definição não depende da origem $o \in E$.) Se o parâmetro t tem o significado do tempo, o vetor tangente $\dot{\mathbf{r}}(t)$ tem a interpretação da velocidade instantânea,

²⁰Obs.: 1. Mesmo o vetor \mathbf{v} sendo constante (não dependente do ponto p), as suas componentes $v^i(p)$ dependem do ponto p , justamente por que os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ dependem de p . 2. É importante não confundir as componentes $v^i(p)$ do vetor \mathbf{v} e as coordenadas $u^i(p)$ do ponto p ! Apenas para coordenadas lineares, as componentes do vetor posição $\mathbf{r}(p)$ coincidem com as coordenadas $x^i(p)$ do ponto p .

frequentemente denotado por $\mathbf{v}(t)$. Neste caso, a segunda derivada $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$ é a aceleração, denotado por $\mathbf{a}(t)$.

Na prática, uma curva $\mathbf{r}(t)$ é dada pelas coordenadas $u^i(t) := u^i(\mathbf{r}(t))$. Aplicando a regra de cadeia em $\frac{d}{dt} \mathbf{r}(u^1(t), \dots)$, vimos que seu vetor tangente tem a decomposição

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{u}^i(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(t), \quad (147)$$

então os componentes contravariantes (definidas pela Eq. (144)) de $\dot{\mathbf{r}}(t)$ são dados por $\dot{u}^i(t)$.²¹ Se a curva é dada em termos de coordenadas *Cartesianas* $(x(t), y(t), z(t))$, temos pela eq. (136)

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x + \dot{y}(t) \mathbf{e}_y + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z.$$

Exemplo 3.4 A curva reta passando pelo ponto p no tempo $t = 0$ com velocidade \mathbf{v} é dada por

$$\mathbf{r}(t) = p + t\mathbf{v}, \quad \text{e consequentemente} \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}.$$

Escrevendo $\mathbf{v} = \sum_i v^i(t) \partial_i \mathbf{r}(t)$ e comparando com eq. (147), vimos que neste caso as componentes de $\dot{\mathbf{r}}(t)$ são dadas por

$$\dot{u}^i(t) = v^i(p + t\mathbf{v}). \quad (148)$$

□

Aviso: Em constraste à eq. (147), vale

$$\mathbf{r}(p) \neq \sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p), \quad (149)$$

em geral! (Única exceção: Coordenadas lineares, como por exemplo Cartesianas.)

Para derivadas de curvas num espaço vetorial (como por exemplo a aceleração) vale a regra do produto nas seguintes formas.

Lema 3.5 *Sejam $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ curvas no espaço vetorial V , e $f(t)$ uma função. Então vale*

$$\frac{d}{dt} (f(t) \mathbf{v}(t)) = \dot{f}(t) \mathbf{v}(t) + f(t) \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (150)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (151)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t). \quad (152)$$

3.4 Integrais.

3.4.1 Integrais de Curva.

Definição 8 Seja C uma curva com parametrização $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$.

i) O *cumprimento* da curva, $l(C)$, é definido por

$$l(C) := \int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt. \quad (153)$$

ii) Dado um campo vetorial \mathbf{A} , o integral de \mathbf{A} sobre a curva C , em símbolos $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, é definido por

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt. \quad (154)$$

□

Estes definições são independentes da parametrização.

²¹Nós escrevemos $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(t)$ em vez de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(\mathbf{r}(t))$.

3.4.2 Integrais de Superfície.

Definição 9 *i)* Uma *superfície* parametrizada é uma aplicação suave de um certo subconjunto fechado $K \subset \mathbb{R}^2$ para E , $(s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t) \in E$, t.q. os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t)$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t)$ são linearmente independentes. A imagem S desta aplicação,

$$S := \{p \in E \mid \exists (s, t) : p = \mathbf{r}(s, t)\}, \quad (155)$$

é chamada uma superfície. Para $p = \mathbf{r}(s, t) \in S$, escrevemos $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(p)$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(p)$ em vez de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t)$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t)$. Mais, o vetor unitário

$$\mathbf{n}(p) := \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(p)}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(p) \right\|} \quad (156)$$

é chamado do *vetor normal* à superfície. Ele é perpendicular (...) à superfície (dessa maneira discriminando um dos dois lados da superfície). Uma superfície junto com um campo vetorial normal (ou com um dos lados discriminados) chama-se *superfície orientada*.

ii) A *área* da superfície S , em símbolos $A(S)$, é definido por

$$A(S) := \int \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt. \quad (157)$$

iii) Seja \mathbf{A} um campo vetorial. O *fluxo* de \mathbf{A} através da superfície S , em símbolos $\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, é definido por

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} := \int \int_K \mathbf{A}(\mathbf{r}(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right) ds dt. \quad (158)$$

□

3.4.3 Integrais de Volume.

Seja $\{u^1, u^2, u^3\}$ um sistema de coordenadas numa região $G \subset E$ e valores num domínio $G_0 \subset \mathbb{R}^3$. (I.e., $p \in G$ implica $(u^1(p), u^2(p), u^3(p)) \in G_0$. Alternativamente, a aplicação $(u^1, u^2, u^3) \mapsto \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$ conforme equ. (133) pode ser encarada como uma parametrização da região G , em analogia com parametrizações de curvas e superfícies.) O *integral de volume* de uma função f sobre G é definido por

$$\int_G f dV := \int \int \int_{G_0} f(\mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)) \underbrace{|\det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r})|}_{dV(u^1, u^2, u^3)} du^1 du^2 du^3. \quad (159)$$

$$dV(u^1, u^2, u^3) \quad (160)$$

Recordamos que a determinante $\det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r})$ é o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}$ (dado que eles são orientados), e coincide com o raiz $|g|$ da determinante da matriz g_{ij} . Por exemplo, em termos de coordenadas esféricas, temos

$$dV(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (161)$$

4 Análise Tensorial.

4.1 Campos Escalares, Vetoriais e Tensoriais.

Já sabemos que as componentes de um vetor deslocamento \mathbf{v} dependem do sistema de coordenadas, e sob uma mudança de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\} \rightarrow \{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ se transformam como

$$\bar{v}^j(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i}(p). \quad (162)$$

Um aspecto importante é o seguinte: O vetor deslocamento \mathbf{v} é um objeto que obviamente não depende do sistema de coordenadas, mas as componentes dependem sim. Cada componente então é uma grandeza que depende do sistema de coordenadas.

Em contraste, uma grandeza física unidimensional²² é chamada de *escalar* se ela não depende da escolha de um sistema de coordenadas no espaço E . (Como acabamos de entender, um exemplo de uma grandeza unidimensional que *não* é um escalar seria a componente- i , $v^i(p)$, de um vetor deslocamento \mathbf{v} com respeito a um sistema de coordenadas. Pois com respeito a um outro sistema de coordenadas, a componente- i tem um outro valor $\bar{v}^i(p)$.) Depois da escolha de uma unidade, os valores de uma grandeza escalar podem ser naturalmente identificados com os números reais \mathbb{R} . Exemplos para escalares são: intervalo de tempo (na física não-relativística); massa; densidade; temperatura; queda de potencial eléctrico numa pilha.

Uma grandeza física é chamada de um *vetor*, se ela pode ser naturalmente identificada com um vetor deslocamento $\mathbf{v} \in V$; mais precisamente: Se ela resulta da multiplicação de um vetor deslocamento por um escalar. Depois da escolha de uma unidade, uma grandeza vetorial pode ser identificado com os vetores deslocamento, V . Uma definição equivalente, que frequentemente é usada na literatura, é a seguinte. “Vetores são grandezas físicas trî-dimensionais, cujas três componentes se transformam sob uma mudança de coordenadas como os componentes contravariantes de um vetor deslocamento”, ver Eq. (162). Exemplos para vetores são: velocidade ou aceleração instantânea de um corpo puntiforme num dado instante de tempo; força exercida a um corpo por uma mola; campo eléctrico num condensador de placas planas. As mesmas considerações valem para covetores e, mais geralmente, tensores. Exemplo para covetores: O vetor de onda \mathbf{k} de uma onda plana, ver [9, p. 55].

Tendo esclarecido as noções de escalar, vetor e tensor: O que são campos escalares, vetoriais e tensoriais? Em geral, um *campo* é uma grandeza que depende da posição no espaço. Mais precisamente: Um *campo escalar* é uma função f que vive no espaço E e tem como valores uma grandeza escalar. Então, depois da escolha de uma unidade do escalar respetivo, um campo escalar pode ser identificado com uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Exemplos: Densidade de um flúido; distribuição da temperatura na sala; potencial eléctrico. Um *campo vetorial* é uma aplicação que vive em E e tem como valores uma grandeza vetorial. Depois da escolha de uma unidade o campo vetorial pode ser identificado com uma aplicação $\mathbf{A} : E \rightarrow V$.²³ Exemplos: Campo de velocidades instantâneas dos constituintes moleculares de um flúido em movimento; campo eléctrico. Em particular, o campo eléctrico gerado por uma carga Q puntiforme no ponto o e dado por

$$p \mapsto \mathbf{E}(p) = \frac{kQ}{\|\vec{op}\|^3} \vec{op} = \frac{kQ}{\|\mathbf{r}(p)\|^3} \mathbf{r}(p) = \frac{kQ}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p).$$

(Na segunda equação temos identificado o com a origem, e na terceira equação temos usado coordenadas esféricas adaptadas.) Consequentemente, as componentes (esféricas) do campo \mathbf{E} são $E^r = kQ/r^2$, $E^\theta = 0$ e $E^\varphi = 0$.

Mais geralmente, um *campo tensorial* do tipo (r, s) é (depois da escolha de unidades) uma aplicação $E \rightarrow T_s^r(V)$. O espaço de tais campos é denotado por $\mathcal{T}_s^r(E)$. Então $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ aplica um ponto p para um elemento $T_p \in T_s^r(V)$, que por sua vez é uma aplicação de $V^* \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$. É costume escrever o argumento p como index, para deixar espaço para os argumentos em $V^* \times \dots \times V$:

$$T_p : (\eta, \dots, \mathbf{v}) \mapsto T_p(\eta, \dots, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $\mathcal{T}_0^0(E)$ são os campos escalares, e $\mathcal{T}_0^1(E)$ são os campos vetoriais. Os elementos de $\mathcal{T}_1^0(E)$, ou seja as aplicações $E \rightarrow V^*$, são chamados de *formas (diferenciais)* de grau 1.

Exemplos físicos: O vetor de onda \mathbf{k} deve ser mais naturalmente considerado uma forma diferencial, ver [9, p. 55]. Os Tensores de deformação, de tensão, e de Maxwell são tensores do tipo $(1, 1)$.

²²Unidimensional significa que um número (real) é suficiente para especificar o valor da grandeza.

²³Em geral, os campos f e \mathbf{A} precisam ser definidos somente num certo domínio $D \subset E$.

Matematicamente, um exemplo básico de uma forma é o diferencial de uma função, construído como seguinte. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas. A *derivada direcional* de f em p na direção $\mathbf{v} \in V$, em símbolos $(D_{\mathbf{v}}f)(p)$, é definida por

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) := \left. \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}. \quad (163)$$

(Significado físico: Taxa de variação de f na direção \mathbf{v} ; por unidade de comprimento se \mathbf{v} é unitário.)

Proposição 4.1 *i) A derivada direcional $(D_{\mathbf{v}}f)(p)$ é linear em \mathbf{v} .*

ii) Em termos de coordenadas, vale

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \quad (164)$$

iii) Se $\mathbf{r}(t)$ é qualquer curva com $\mathbf{r}(0) = p$ e $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}$, então podemos substituir $p + t\mathbf{v}$ por $\mathbf{r}(t)$ na definição (163), i.e.

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0}. \quad (165)$$

Aquí, v^i são as componentes (covariantes) de $\mathbf{v} \in V$ com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$, i.e. $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$. A proposição afirma em particular que vale

$$(D_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}} f)(p) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(p). \quad (166)$$

Demonstração. Aplicando a regra de cadeia dá

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \dot{u}^i(0) \frac{\partial f}{\partial u^i}(\mathbf{r}(0)).$$

O lado direito obviamente depende da curva $\mathbf{r}(t)$ só através $\mathbf{r}(0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(0)$, então $\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}$ se a curva $\mathbf{r}(t)$ satisfaz a hipótese de *iii*). Isto mostra *iii*). Substituindo agora $\dot{u}^i(0)$ por $v^i(p)$ conforme eq. (148) mostra Eq. (164). Aquela própria equação mostra a linearidade afirmada em *i*). Isto conclui a demonstração. \square

Devido à linearidade em \mathbf{v} , a aplicação $\mathbf{v} \mapsto (D_{\mathbf{v}}f)(p)$ pode ser considerada um covetor em $T_1^0(V)$.

Definição 10 Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O *diferencial* de f , em símbolos df , é a forma diferencial de grau 1 definido por²⁴

$$df \in \mathcal{T}_1^0(E), \quad (df)_p(\mathbf{v}) := (D_{\mathbf{v}}f)(p).$$

\square

Verifique-se facilmente que vale a regra de produto

$$d(fg) = (df)g + f(dg).$$

Os diferenciais du^i das coordenadas $u^i(p)$ são de interesse particular:

²⁴Observe que na literatura física, é comum caracterizar um campo de forças conservativo pela relação $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$, onde U é a energia potencial. Agora sabemos que o significado dessa relação é

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = -\frac{d}{ds}U(\mathbf{r}(s))$$

para qualquer curva $s \mapsto \mathbf{r}(s)$.

Lema 4.2 Seja $\{u^1, \dots, u^n\}$ um sistema de coordenadas, e $\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p), i = 1, \dots, n\}$ a base de V correspondente. Então o conjunto dos covetores $\{(du^i)_p, i = 1, \dots, n\}$ é a base dual, i.e.

$$(du^i)_p(\mathbf{v}) = v^i(p), \quad \text{ou seja,} \quad (du^i)_p\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}(p)\right) = \delta_j^i. \quad (167)$$

Demonstração. Pela definição:

$$(du^i)_p(\mathbf{v}) = (D_{\mathbf{v}}u^i)(p) = \frac{d}{dt}u^i(p + t\mathbf{v})|_{t=0}.$$

Isso coincide com $v^i(p)$, veja Eq. (148), como foi afirmado. \square

Conseqüentemente, cada forma diferencial de grau 1 é da forma

$$\underline{A}_p = \sum_i A_i(p) (du^i)_p, \quad \text{com} \quad A_i(p) = \underline{A}_p(\partial_i \mathbf{r}(p)),$$

ver eq. (56) da Proposição 1.11. Os coeficientes $A_i(p)$ são chamadas de *componentes* (covariantes) de \underline{A} com respeito ao sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$. Em particular, temos pela eq. (166):

$$(df)_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) (du^i)_p. \quad (168)$$

Pela Prop. 2.1, temos:

Corolário 4.3 Cada $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ é da forma

$$T_p = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) \partial_{i_1} \mathbf{r}(p) \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \mathbf{r}(p) \otimes (du^{j_1})_p \otimes \dots \otimes (du^{j_s})_p, \quad (169)$$

onde

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) = T_p((du^{i_1})_p, \dots, (du^{i_r})_p, \partial_{j_1} \mathbf{r}(p), \dots, \partial_{j_s} \mathbf{r}(p)). \quad (170)$$

Esses números (na verdade, funções) são chamados os *componentes* do campo tensorial T com respeito ao sistema de coordenadas $\{u^i\}$.

Proposição 4.4 Seja $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ um campo tensorial, sejam $\{u^1, \dots, u^n\}$ e $\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ dois sistemas de coordenadas, e sejam $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p)$ e $\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p)$ os componentes correspondentes de T . Então vale

$$\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) = \sum_{k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s} T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(p) \frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{k_1}}(p) \dots \frac{\partial \bar{u}^{i_r}}{\partial u^{k_r}}(p) \frac{\partial u^{l_1}}{\partial \bar{u}^{j_1}}(p) \dots \frac{\partial u^{l_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}(p). \quad (171)$$

Demonstração. Pela eq. (138), $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}^j} = \sum_i A_j^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, com $A_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}(p)$. Lembrando que a matriz inversa é dada por $(A^{-1})_j^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}(p)$, a afirmação segue agora da Prop. 2.3.

(Mais diretamente: Usar a mencionada eq. (138) e o fato que vale

$$(d\bar{u}^i)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k}(p) (du^k)_p$$

pela regra de cadeia, e imitar a prova da Prop. 2.3.) \square

4.2 Exemplos.

Tensor Métrico. O tensor métrico $g \in T_2^0(V)$ define um campo tensorial $g \in \mathcal{T}_2^0(E)$ (nos usamos o mesmo símbolo):

$$g_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Observe que este tensor é *constante* no sentido que em cada ponto $p \in E$ o valor $g_p \in T_2^0(V)$ é a mesma aplicação $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (ver também Eq. (179) embaixo). Em contraste, as suas componentes com respeito a um sistema de coordenadas *não* são constantes em geral:

$$g_{ij}(p) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}(p),$$

qual expressão independe de p para todos índices i, j *somente* se o sistema de coordenadas é linear (e.g., Cartesiano). Se o sistema de coordenadas é *ortogonal*, temos $g_{ij}(p) = g_{ii}(p) \delta_{ij}$.

Exemplo 4.5 Os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas são ortogonais. As únicas componentes g_{ij} não-nulas são

$$g_{\varrho\varrho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \varrho^2, \quad g_{zz} = 1 \quad (172)$$

no caso de coordenadas cilíndricas, e

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta \quad (173)$$

no caso de coordenadas esféricas. \square

Demonstração. Em coordenadas Cartesianas, $g_{kl} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}$. Num outro sistema de coordenadas $\{\bar{u}^i\}$, temos pela regra de transformação de tensores (171)

$$\bar{g}_{ij} = \sum_{k,l} g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{u}^j} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{u}^j}. \quad (174)$$

Substituindo os valores $\frac{\partial x^k}{\partial \bar{u}^i}$ das tabelas (140) e (142) respectivamente, leva ao resultado afirmado. \square

A n -Forma de Volume. A determinante define um campo tensorial constante $\Omega \in \mathcal{T}_n^0(E)$:

$$\Omega_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (175)$$

(Usamos o mesmo símbolo como na eq. (74).) O Lema 2.2 implica:

Lema 4.6 As componentes de Ω_p com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ com orientação positiva são dadas por

$$\Omega_{i_1 \dots i_n}(p) = |g|^{1/2}(p) \varepsilon_{i_1 \dots i_n}. \quad (176)$$

Aquí, $|g|(p)$ é a determinante da matriz $g_{ij}(p) = \partial_i \mathbf{r}(p) \cdot \partial_j \mathbf{r}(p)$.

Tensor de Maxwell. Dado o campo eletrostático \mathbf{E} , definimos

$$T_{ij} \doteq \varepsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 g_{ij}), \quad \hat{T}_j^i = \varepsilon_0 (E^i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_j^i). \quad (177)$$

(na segunda expressão temos elevado um index). O endomorfismo de V correspondente é

$$\hat{T}(\mathbf{u}) = \varepsilon_0 ((\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{u}).$$

Interpretação: Seja S uma superfície com vetor normal \mathbf{n} e elemento de superfície $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$:

$$\int_S \hat{T} d\mathbf{a} \doteq \int_S \hat{T}(\mathbf{n}) da$$

é igual $(-1) \times$ o momento transportado pelo campo \mathbf{E} através S por unidade de tempo.

4.3 Operadores Diferenciais.

4.3.1 A Derivada Covariante.

A derivada de campos escalares definido em eq. (163) pode ser generalizada para campos tensoriais de qualquer tipo: Para $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ e $\mathbf{v} \in V$, definimos a derivada direcional (o covariante) de T como o tensor $D_{\mathbf{v}}T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ dado por

$$(D_{\mathbf{v}}T)_p := \frac{d}{dt} T_{p+t\mathbf{v}}|_{t=0}. \quad (178)$$

Essa equação quer dizer: Para $\eta_1, \dots, \eta_r \in V^*$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in V$ (constantes) definimos

$$(D_{\mathbf{v}}T)_p(\eta_1, \dots, \mathbf{v}_s) := \frac{d}{dt} (T_{p+t\mathbf{v}}(\eta_1, \dots, \mathbf{v}_s))|_{t=0}.$$

Isso é justamente a derivada direcional da função $p \mapsto T_p(\eta_1, \dots, \mathbf{v}_s)$.²⁵ Consequentemente, a derivada covariante também é linear em \mathbf{v} , ver Prop. 4.1. Observe que a derivada com respeito ao vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ coincide com a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial u^i}$,

$$(D_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)}T)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}T\right)_p \equiv \frac{d}{dt} T_{\mathbf{r}(u^1, \dots, u^i+t, \dots, u^n)}|_{t=0},$$

onde u^1, \dots, u^n são as coordenadas do ponto p .

Exemplo 4.7 A derivada covariante do tensor métrico é zero,

$$(D_{\mathbf{v}}g)_p(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \equiv \frac{d}{dt} g_{p+t\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{w})|_{t=0} = \frac{d}{dt} g(\mathbf{u}, \mathbf{w})|_{t=0} = 0. \quad (179)$$

O mesmo vale para a n -forma de volume Ω . □

No caso geral, consideramos primeiro os vetores $\partial_i \mathbf{r}(p)$. Como eles não são constantes, as derivadas deles não se anulam. A expansão de $\partial_j \partial_i \mathbf{r}$ em termos da base $\{\partial_k \mathbf{r}\}$ define os *símbolos de Christoffel* Γ_{ij}^k :

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\right)(p) =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}(p). \quad (180)$$

Aplicação: Aceleração. Seja $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ uma curva parametrizada com coordenadas $u^i(t) \doteq u^i(\mathbf{r}(t))$. A velocidade instantânea é $\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_i \dot{u}^i(t) \partial_i \mathbf{r}(t)$, veja Eq. (147). A aceleração $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) =: \ddot{\mathbf{r}}(t)$ é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{u}^i + \dot{u}^j \dot{u}^k \Gamma_{jk}^i\} \partial_i \mathbf{r}. \quad (181)$$

Consideramos agora os covetores $du^i(p)$.

Lema 4.8 As derivadas das formas diferenciais básicas du^j são dadas por

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} du^j\right)_p = - \sum_k \Gamma_{ik}^j(p) (du^k)_p. \quad (182)$$

²⁵Aviso: Se $(\eta_1)_p, \dots, \mathbf{A}_s(p)$ são *campos*, ou seja, dependem de p , a derivada direcional da função $p \mapsto T_p((\eta_1)_p, \dots, \mathbf{A}_s(p))$ é dada por

$$D_{\mathbf{v}}(T_p((\eta_1)_p, \dots, \mathbf{A}_s(p))) = (D_{\mathbf{v}}T)_p((\eta_1)_p, \dots, \mathbf{A}_s(p)) + T_p((D_{\mathbf{v}}\eta_1)_p, \dots, \mathbf{A}_s(p)) + \dots + T_p((\eta_1)_p, \dots, (D_{\mathbf{v}}\mathbf{A}_s)_p).$$

Demonstração. Como $du^j(\partial_k \mathbf{r}) = \delta^j_k = \text{cte.}$, temos pela regra de produto

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i(du^j(\partial_k \mathbf{r})) = (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) + du^j(\partial_i \partial_k \mathbf{r}) = (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l du^j(\partial_l \mathbf{r}) \\ &= (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) + \Gamma_{ik}^j. \end{aligned}$$

Então, $\partial_i du^j \equiv \sum_k (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) du^k = - \sum_k \Gamma_{ik}^j du^k$, como afirmado. \square

Com as equações (180) e (182) podemos calcular a derivada covariante de qualquer tensor. Aviso: Observe que $(\frac{\partial}{\partial u^k} T)_{j\dots}^{i\dots}$ são as componentes da derivada covariante $\frac{\partial}{\partial u^k} T$ do tensor, enquanto que $\frac{\partial}{\partial u^k} T_{j\dots}^{i\dots} \equiv \frac{\partial}{\partial u^k} (T_{j\dots}^{i\dots})$ são as derivadas parciais das componentes.

Lema 4.9 *Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_0^1(E)$, $\underline{A} \in \mathcal{T}_1^0(E)$ e $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ campos tensoriais. As componentes das derivadas covariantes respectivas são dadas por*

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^k} \mathbf{A}\right)^i = \frac{\partial A^i}{\partial u^k} + \sum_l \Gamma_{kl}^i A^l \tag{183}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^k} \underline{A}\right)_j = \frac{\partial A_j}{\partial u^k} - \sum_l A_l(p) \Gamma_{kj}^l \tag{184}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^k} T\right)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial u^k} + \sum_l \left\{ \Gamma_{kl}^{i_1} T_{j_1 \dots j_s}^{l i_2 \dots i_r} + \dots - \Gamma_{kj_1}^l T_{l j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots \right\} \tag{185}$$

Para calcular os símbolos de Christoffel num sistema arbitrário de coordenadas usaremos a chamada fórmula de Koszul:

Lema 4.10 (Fórmula de Koszul.) *Para qualquer sistema de coordenadas u^1, \dots, u^n vale:*

$$2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) + \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) - \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \right) \tag{186}$$

para $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Aplicando a regra de produto

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^k}$$

aos três termos ao lado direito da eq. (186), todos termos se cancelam menos os termos do lado esquerdo. \square

Vamos calcular os símbolos de Christoffel para um sistema arbitrário de coordenadas:

Proposição 4.11 *Sejam g_{ij} as componentes do tensor métrico g com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ (não necessariamente ortogonal), e $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$. Vale*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{lk} \left\{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right\}. \tag{187}$$

Demonstração. Pela fórmula de Koszul (186) temos

$$2 \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{kl} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}.$$

Multiplicando com g^{kr} , somando sobre k , e substituindo $k \mapsto l$ e $r \mapsto k$, dá eq. (187). \square

Vamos calcular os símbolos de Christoffel para coordenadas cilíndricas, esféricas e polares: As únicas símbolos Γ_{ij}^k não-nulas são

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (188)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2\theta, \quad \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad (189)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot\theta \quad (190)$$

para coordenadas esféricas, e

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\rho = -\rho, \quad \Gamma_{\varphi\rho}^\varphi = \Gamma_{\rho\varphi}^\varphi = \frac{1}{\rho}, \quad (191)$$

para coordenadas cilíndricas ou polares.

4.3.2 O Gradiente.

O gradiente de uma função f é o campo vetorial (em $\mathcal{T}_0^1(E)$) que corresponde ao diferencial $df \in \mathcal{T}_1^0(E)$ pela identificação de vetores e covetores através da métrica, veja Lemma 1.7, Eq. (34):

Definição 11 O *gradiente* de uma função f no ponto p , em símbolos $(\text{grad } f)(p)$, é o único vetor t.q. para todos $\mathbf{v} \in V$ vale

$$\mathbf{v} \cdot (\text{grad } f)(p) = (df)_p(\mathbf{v}) \equiv (D_{\mathbf{v}}f)(p). \quad (192)$$

\square

Interpretação do gradiente:

Lema 4.12 O *gradiente da função f é perpendicular em toda hiper-superfície de nível*, $S_c := \{p \in E \mid f(p) = c\}$, e *mostra na direção de maior crescimento de f .*

Demonstração. Seja $\gamma(t)$ uma curva na hiper-superfície S_c com $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. Temos

$$\mathbf{v} \cdot (\text{grad } f)(p) = D_{\mathbf{v}}f(p) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=0} = 0,$$

onde a última equação vale por que f é constante ao longo de $\gamma(t)$. Isso mostra que o gradiente de f é perpendicular em todos vetores tangenciais a superfície S_c , como afirmado.

Consideramos agora um vetor \mathbf{n} unitário qualquer. Esse vetor mostra na direção de maior crescimento de f no ponto p se a função de \mathbf{n} dada por

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f(p + t\mathbf{n}) - f(p))/t$$

assume o maior valor. Mas essa função é justamente $D_{\mathbf{n}}f(p) \equiv \mathbf{n} \cdot (\text{grad } f)(p)$, e assume o maior valor justamente se \mathbf{n} é um múltiplo positivo de $\text{grad } f$. \square

As componentes do gradiente com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ são fixadas pela Eq. (83):²⁶

$$(\text{grad } f)^i = \sum_j g^{ij} \partial_j f. \quad (193)$$

²⁶Não escrevemos explicitamente a dependência do ponto p .

Explicitamente, temos em coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= (\partial_x f) \mathbf{e}_x + (\partial_y f) \mathbf{e}_y + (\partial_z f) \mathbf{e}_z, && \text{coord. Cartesianas} \\ &= (\partial_\rho f) \partial_\rho \mathbf{r} + \frac{1}{\rho^2} (\partial_\varphi f) \partial_\varphi \mathbf{r} + (\partial_z f) \partial_z \mathbf{r}, && \text{coord. cilíndricas} \\ &= (\partial_r f) \partial_r \mathbf{r} + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta f) \partial_\theta \mathbf{r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\varphi f) \partial_\varphi \mathbf{r}, && \text{coord. esféricas.} \end{aligned}$$

Definição 12 Um campo vetorial \mathbf{A} chama-se *conservativo* se a integral de linha de \mathbf{A} sobre uma curva depende somente dos pontos iniciais e finais da curva. \square

É fácil mostrar que um campo vetorial é conservativo se e só se a integral de linha sobre qualquer curva fechada é nula.

Proposição 4.13 Um campo vetorial \mathbf{A} é conservativo se e só se ele possui um potencial, i.e. existe um campo escalar ϕ t.q. $\mathbf{A} = \text{grad } \phi$.

Demonstração. Se $\mathbf{A} = \text{grad } \phi$, então a integral de \mathbf{A} ao longo de uma curva parametrizada $C : t \mapsto \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ é dada por

$$\int_C \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \text{grad } \phi \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)),$$

independente da curva. (Na segunda equação usamos a definição (192) do gradiente e a Eq. (165).) Inversamente, se a integral de curva de \mathbf{A} é independente da curva, escolhemos um ponto fixo \mathbf{r}_0 e definimos

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

ao longo de qualquer curva de \mathbf{r}_0 até \mathbf{r} . Para uma curva parametrizada $C : t \mapsto \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, com $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}_0$ temos então

$$\phi(\mathbf{r}(t)) = \int_a^t \mathbf{A}(\mathbf{r}(t')) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') dt',$$

que implica $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) \equiv \text{grad } \phi \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$. Como isto vale para todas curvas e consequentemente para todos $\dot{\mathbf{r}}(t)$, isto implica $\text{grad } \phi = \mathbf{A}$. \square

4.3.3 A Divergência.

A divergência $\text{div } \mathbf{A}$ de um campo vetorial \mathbf{A} em coordenadas *Cartesianas* é conhecida como

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \dots \quad (194)$$

Para poder calcular a divergência em outras coordenadas, eventualmente curvilíneas, procuramos uma definição independente de coordenadas. Esta definição é a seguinte. Consideramos o tensor

$$D\mathbf{A} \in \mathcal{T}_1^1(E), \quad (D\mathbf{A})_p(\eta, \mathbf{v}) := \eta((D_{\mathbf{v}}\mathbf{A})(p)),$$

e definimos a divergência de \mathbf{A} pela contração dele,

$$(\text{div } \mathbf{A})(p) \doteq C_1^1(D\mathbf{A})_p. \quad (195)$$

Alternativamente, para $p \in E$ fixo, $(D\mathbf{A})_p$ pode ser identificado com um endomorfismo de V segundo Eq. (105), levando a

$$(D\mathbf{A})_p(\mathbf{v}) := (D_{\mathbf{v}}\mathbf{A})(p), \quad (196)$$

e a divergência é o traço desse endomorfismo, veja Lema 2.6.

Com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$, o tensor $D\mathbf{A}$ tem componentes $(D\mathbf{A})_j^i = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^j}\right)^i$, então a definição (195) implica a seguinte expressão em coordenadas:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^i}\right)^i. \quad (197)$$

Em coordenadas Cartesianas vale $(\partial_x \mathbf{A})^x = \partial_x A^x$ etc., então (197) coincide com (194), ou seja, Eq. (195) realmente é a definição da divergência independente de coordenadas.

Em coordenadas não-lineares, $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^j}\right)^i \neq \frac{\partial}{\partial u^j}(A^i)$ pois os dois diferem pelo termo com os símbolos de Christoffel, ver Eq. (183):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\partial_i \mathbf{A})^i = \partial_i A^i + A^j \Gamma_{ij}^i. \quad (198)$$

Uma fórmula mais útil é a seguinte:

Lema 4.14 *A divergência de um campo vetorial \mathbf{A} é dada por*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = |g|^{-1/2} \sum_i \partial_i (A^i |g|^{1/2}), \quad (199)$$

onde $|g|$ é a determinante da matriz g_{ij} .

Demonstração. Primeiramente usamos a Eq. (176) para calcular $\partial_j |g|^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \partial_j |g|^{1/2} &= \partial_j \Omega_{1\dots n} = \partial_j \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) \stackrel{a}{=} \Omega(\partial_j \partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) + \dots + \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_j \partial_n \mathbf{r}) \\ &\stackrel{b}{=} \Omega(\Gamma_{j1}^1 \partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) + \dots + \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \Gamma_{jn}^n \partial_n \mathbf{r}) = \sum_i \Gamma_{ij}^i \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) \\ &= \sum_i \Gamma_{ij}^i |g|^{1/2}. \end{aligned}$$

Na eq. (a) usamos o fato que o tensor Ω é constante no sentido $\partial_j \Omega_p = 0$. Na eq. (b) temos expandido, no primeiro termo, o vetor $\partial_j \partial_1 \mathbf{r}$ como $\sum_k \Gamma_{j1}^k \partial_k \mathbf{r}$, e observado o fato que naquela soma apenas o termo com $k = 1$, $\Gamma_{j1}^1 \partial_1 \mathbf{r}$, sobrevive devido à anti-simetria de Ω ; e analogamente com os outros termos. Assim, temos mostrado a relação

$$\sum_i \Gamma_{ij}^i = |g|^{-1/2} \partial_j |g|^{1/2}. \quad (200)$$

Com isso, temos $\partial_j (A^j |g|^{1/2}) = (\partial_j A^j + \sum_i A^j \Gamma_{ij}^i) |g|^{1/2}$, ou seja, $|g|^{1/2}$ vezes o lado direito da Eq. (198), terminado a demonstração. \square

Explicitamente, temos em coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \partial_x A^x + \partial_y A^y + \partial_z A^z, && \text{coord. Cartesianas} \\ &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho A^\rho) + \partial_\varphi A^\varphi + \partial_z A^z, && \text{coord. cilíndricas} \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A^r) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin(\theta) A^\theta) + \partial_\varphi A^\varphi, && \text{coord. esféricas.} \end{aligned}$$

Interpretação geométrica da divergência. Primeiro, algumas definições e considerações gerais. A *curva integral* de um campo \mathbf{A} através um ponto p , em símbolos $t \mapsto \psi_t(p)$, é a curva caracterizada pela seguinte EDO e condição inicial:

$$\frac{d}{dt}\psi_t(p) = \mathbf{A}(\psi_t(p)), \quad \psi_0(p) = p. \quad (201)$$

A família de transformações $p \mapsto \psi_t(p)$ de E definida dessa maneira é chamada o *fluxo* gerado pelo campo \mathbf{A} (inglês: *flow of \mathbf{A}* , a distinguir do fluxo através uma superfície!). Para $t \rightarrow 0$ vale

$$\psi_t(p) = p + t\mathbf{A}(p) + O(t^2). \quad (202)$$

Dado um sistema de coordenadas com orientação positiva, denotamos como sempre o vetor posição de um ponto p com coordenadas (u^1, \dots, u^n) por $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n)$. Também denotamos o vetor posição do ponto $\psi_t(p)$ por $\mathbf{r}_t(u^1, \dots, u^n)$. Conforme eq. (202), temos $\mathbf{r}_t(u^1, \dots, u^n) = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + t\mathbf{A}(u^1, \dots, u^n) + O(t^2)$, então

$$\partial_i \mathbf{r}_t(u^1, \dots, u^n) = \partial_i \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + t\partial_i \mathbf{A}(\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n)) + O(t^2). \quad (203)$$

Consideramos agora o paralelepípedo gerado por $\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t$, com vértice em $\psi_t(p)$. O volume (orientado) deste paralelepípedo é $\Omega(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t)$. Pela Eq. (203), a taxa da variação desse volume é dada por

$$\frac{d}{dt} \Omega(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_i \mathbf{A}, \dots, \partial_n \mathbf{r}). \quad (204)$$

No lado direito expandimos $\partial_i \mathbf{A} = \sum_k (\partial_i \mathbf{A})^k \partial_k \mathbf{r}$ e observamos que devido á anti-simetria de Ω sobrevive apenas o termo com $k = i$, $(\partial_i \mathbf{A})^i \partial_i \mathbf{r}$ (sem somatório). Com isso temos

$$\frac{d}{dt} \Omega(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \partial_i A^i \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) \quad (205)$$

$$= (\operatorname{div} \mathbf{A}) \Omega_{123\dots} = (\operatorname{div} \mathbf{A}) |g|^{1/2}. \quad (206)$$

Em outras palavras, temos ²⁷

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(p) \cdot \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) = \frac{d}{dt} \Omega(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t) \Big|_{t=0}. \quad (208)$$

Recordamos que $\Omega(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t)$ é o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\partial_i \mathbf{r}_t$. Mas este paralelepípedo é uma versão versão linearizada da imagem do paralelepípedo gerado pelos vetores $\partial_i \mathbf{r}$ sob o fluxo ψ_t . Mais precisamente, consideramos o pequeno “cubo” G_ε com vértice $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n)$ e lado ε , ver Fig. 2:

$$G_\varepsilon := \{\mathbf{r}(u^1 + s^1, \dots, u^n + s^n) \mid s^i \in [0, \varepsilon]\}.$$

Como $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n) = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + \varepsilon \partial_i \mathbf{r} + O(\varepsilon^2)$, o paralelepípedo gerado por $\varepsilon \partial_1 \mathbf{r}, \dots, \varepsilon \partial_n \mathbf{r}$ é uma versão linearizada de G_ε , e o volume dele coincide com o volume de G_ε módulo termos da ordem ε^{n+1} . Similarmente, o paralelepípedo gerado por $\varepsilon \partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \varepsilon \partial_n \mathbf{r}_t$ é uma versão linearizada da imagem, $\psi_t(G_\varepsilon)$. A Eq. (208) então afirma que $\operatorname{div} \mathbf{A}(p)$ é a taxa de variação relativa do volume da imagem de um pequeno cubo G_ε sob o fluxo gerado por \mathbf{A} , no limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

²⁷Isso nos leva a uma demonstração alternativa da fórmula (199) para a divergência em coordenadas: O somatório no lado direito da Eq. (204) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (204) &= \partial_1 \Omega(\mathbf{A}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \partial_2 \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, \mathbf{A}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \dots \\ &= \partial_1 \Omega(A^1 \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \partial_2 \Omega(\partial_1 \mathbf{r}, A^2 \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \dots \\ &= \partial_1 (A^1 \Omega_{123\dots}) + \partial_2 (A^2 \Omega_{123\dots}) + \partial_3 (A^3 \Omega_{123\dots}) = \sum_i \partial_i (A^i |g|^{1/2}). \end{aligned} \quad (207)$$

A igualdade (206) = (207) implica a fórmula (199).

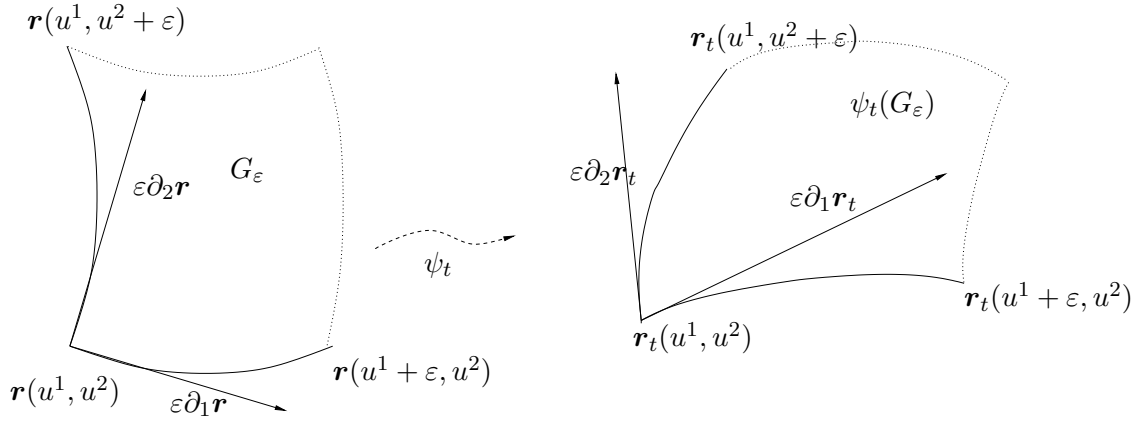


Figura 2: Interpretação da divergência.

4.3.4 Operador de Laplace.

O Laplace de uma função f , Δf , é definido por

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f. \quad (209)$$

Explicitamente, com respeito a coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ vale pelo Lema 4.14:

$$\Delta f = |g|^{-1/2} \sum_{i,j} \partial_i (|g|^{1/2} g^{ij} \partial_j f). \quad (210)$$

Em coordenadas Cartesianas, cilíndricas, e esféricas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f, && \text{coord. Cartesianas} \\ &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho f) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f, && \text{coord. cilíndricas} \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} \partial_\varphi^2 f, && \text{coord. esféricas.} \end{aligned}$$

4.3.5 O Rotacional.

O rotacional de um campo vetorial \mathbf{A} em três dimensões em coordenadas *Cartesianas* é conhecida como $(\operatorname{rot} \mathbf{A})^k = \varepsilon^{ijk} \partial_i A_j$. Queremos calcular o rotacional em outras coordenadas, eventualmente curvilíneas. Para este fins, re-crevemos esta fórmula em termos de componentes de um tensor:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})^k := \sum_{i,j} \Omega^{ijk} (\partial_i \mathbf{A})_j. \quad (211)$$

Recordamos que as componentes covariantes v_k de um vetor \mathbf{v} são dadas por $v_k = \mathbf{v} \cdot \partial_k \mathbf{r}$, ver Eq. (79), e que

$$(\partial_i \mathbf{A})_j - (\partial_j \mathbf{A})_i = \partial_i A_j - \partial_j A_i,$$

pois os termos $\mathbf{A} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{r}$ se cancelam. Usando a anti-simetria do tensor Ω , podemos escrever então

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})^k = \sum_{i,j} \Omega^{ijk} \partial_i A_j. \quad (212)$$

Para interpretar geometricamente o tal definido rotacional, consideramos

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} \cdot (\partial_i \mathbf{r} \times \partial_j \mathbf{r}) &= \Omega(\text{rot } \mathbf{A}, \partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{r}) \\ &= \Omega\left(\sum_{r,s} \Omega^{rsk} (\partial_r A_s) \partial_k \mathbf{r}, \partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{r}\right) \\ &= \sum_{r,s} (\partial_r A_s) \Omega^{rsk} \Omega_{kij} \\ &= \partial_i A_j - \partial_j A_i \equiv (\partial_i \mathbf{A})_j - (\partial_i \mathbf{A})_j. \end{aligned}$$

(Na quarta equação usamos a Eq. (94).) Por linearidade, isto implica que para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale²⁸

$$(\text{rot } \mathbf{A})(p) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = D_{\mathbf{u}} \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{v} - D_{\mathbf{v}} \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{u}. \quad (213)$$

Vamos interpretar esta fórmula, ver Fig. 3. Dado um vetor unitário \mathbf{n} (não colinear com $\mathbf{A}(p)$), consideramos o plano \mathbf{n}^\perp e a projeção do campo \mathbf{A} neste plano, $\mathbf{A}'(q) := P_{\mathbf{n}^\perp}(\mathbf{A}(q))$ para q numa vizinhança de p no plano $p + \mathbf{n}^\perp$. Seja \mathbf{u} o (único) vetor unitário no plano \mathbf{n}^\perp ortogonal a $\mathbf{A}'(p)$ tal que $\mathbf{u}, \mathbf{A}'(p), \mathbf{n}$ são positivamente orientados. Nesta situação a Eq.213 implica²⁹

$$\text{rot } \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{u}} \|\mathbf{A}'(p)\|, \quad (214)$$

ou seja: A componente de $\text{rot } \mathbf{A}(p)$ na direção \mathbf{n} é a taxa de variação da norma de $\mathbf{A}'(p)$ em direção \mathbf{u} ortogonal a $\mathbf{A}'(p)$, ver Fig. 3.

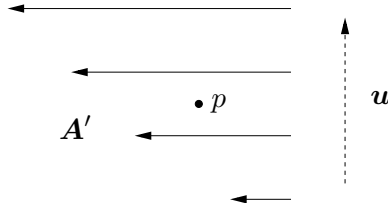


Figura 3: Interpretação de $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$. A figura mostra o plano \mathbf{n}^\perp e a projeção \mathbf{A}' do campo \mathbf{A} a este plano. $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ é a taxa de variação da norma de \mathbf{A}' em direção $\mathbf{u} \perp \mathbf{A}'$, neste exemplo positivo.

Resumo: O rotacional e a divergência de um campo vetorial \mathbf{A} e o gradiente e o Laplace de uma função f são dados, em componentes, por

$$\text{rot } \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \Omega^{ijk} (\partial_i A_j) \partial_k \mathbf{r} \quad (215)$$

$$= |g|^{-1/2} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) \partial_k \mathbf{r}, \quad (216)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = |g|^{-1/2} \sum_i \partial_i (|g|^{1/2} A^i), \quad (217)$$

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} (\partial_j f) g^{ji} \partial_i \mathbf{r}, \quad (218)$$

$$\Delta f = |g|^{-1/2} \sum_{i,j} \partial_i (|g|^{1/2} (\partial_j f) g^{ji}). \quad (219)$$

²⁸Observe que o lado direito da eq. (213) é bilinear e anti-simétrico em \mathbf{u} e \mathbf{v} , então linear em $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. O Lema 1.9 então afirma a existência e unicidade de um vetor $(\text{rot } \mathbf{A})(p)$ satisfazendo a eq. (213).

²⁹Definindo $\mathbf{v} := \mathbf{A}'(p)/\|\mathbf{A}'(p)\|$, temos $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{v} \equiv \mathbf{A}'(p) \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{A}'(p)\|$, pois $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + c\mathbf{n}$. Usando $D_{\mathbf{v}} \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{v}} (\mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{u}) = 0$, a definição (213) implica Eq. (214).

5 Aplicação: Tensores de Deformação e Tensão, Lei de Hooke.

Tensor de Deformação. Imaginamos um corpo sólido que sofre uma deformação contínua. Antes da deformação ele ocupa uma certa região, G , no espaço, e depois uma região G' . A deformação pode ser matematicamente descrita por uma aplicação bijetiva contínua, ϕ , de G sobre G' . A aplicação ϕ consiste de uma parte que descreve um movimento isométrico (translação + rotação) e uma parte que descreve a própria deformação. A descrição somente da última parte, para pequenas deformações, é efetuada pelo tensor de deformação.

Consideramos dois pontos vizinhos p e q em G (antes da deformação), e as imagens deles em G' sob a deformação, $p' := \phi(p)$ e $q' := \phi(q)$. Sejam $\mathbf{v} := \vec{pq}$ e $\mathbf{v}' := \vec{p'q'}$ os vetores relativos (deslocamento) entre os vizinhos antes e depois da deformação, respectivamente. O que nós interessa é a mudança do vetor relativo

$$\mathbf{d} := \mathbf{v}' - \mathbf{v}.$$

(Este vetor descreve a mudança da posição do ponto q relativo a seu vizinho p sob a deformação, e já é independente de qualquer parte translatória contido em ϕ . Vamos ver logo como livrarmos da parte rotacional também.) Dado p , este vetor depende obviamente só de \mathbf{v} , e é zero se $\mathbf{v} = 0$. Então deve existir uma aplicação linear $L_p : V \rightarrow V$ tal que vale

$$\mathbf{d} = L_p \mathbf{v} + O(\|\mathbf{v}\|^2). \quad (220)$$

Vamos determinar esta aplicação L_p , chamada de “tensor deslocamento” em [3]. Para estes fins, chamamos o vetor deslocamento entre um ponto p e sua imagem $\phi(p)$ de $\boldsymbol{\rho}(p)$. (Para a nossa linearização estes vetores nem precisam ser pequenos.) Isto define um campo vetorial $\boldsymbol{\rho}$:

$$p + \boldsymbol{\rho}(p) := \phi(p).$$

(Notação: Em [3, p. 685 ff], \mathbf{v} , $\boldsymbol{\rho}$ e \mathbf{d} são denotados por $d\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ e $d\boldsymbol{\rho}$, respectivamente.) Claramente

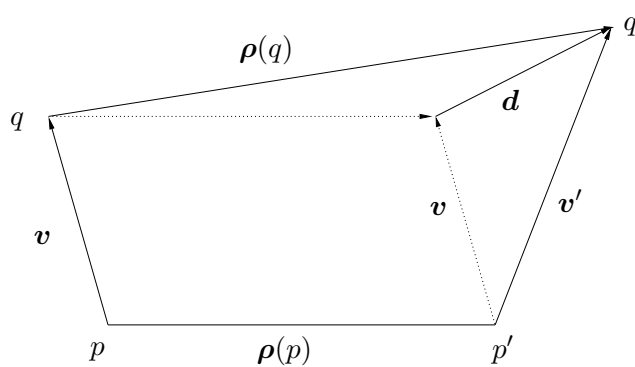


Figura 4: Deformação.

temos (ver Figura 4) $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \boldsymbol{\rho}(p + \mathbf{v}) - \boldsymbol{\rho}(p)$, então temos

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\rho}(p + \mathbf{v}) - \boldsymbol{\rho}(p) \equiv (D_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\rho})(p) + O(\|\mathbf{v}\|^2).$$

Como a derivada covariante é linear em \mathbf{v} , isso mostra que a Eq. (220) realmente vale, com

$$L_p \mathbf{v} = (D_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\rho})(p).$$

Vamos agora identificar a parte rotacional e a parte que descreve a própria deformação em L_p . Para esses fins, precisamos supor que a deformação $\boldsymbol{\rho}(p)$ seja pequena. Como qualquer aplicação linear, L_p

possui uma única decomposição $L_p = S_p + R_p$ numa parte simétrica (ver Definição 7), $S_p = (S_p)^*$, e uma parte anti-simétrica, $R_p = -(R_p)^*$: A saber,

$$S_p := \frac{1}{2} (L_p + (L_p)^*),$$

e $R_p := \frac{1}{2} (L_p - (L_p)^*)$. A parte anti-simétrica R_p descreve a rotação de L_p ,³⁰ e a parte simétrica S_p descreve a própria deformação. Por isso, a parte simétrica S_p é chamada de *tensor de deformação*.

Para entender essa interpretação, recordamos que S_p possui, como aplicação linear simétrica, uma BON de auto-vetores $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3\}$: $S_p \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$. Então S_p descreve uma expansão ($\lambda_i > 0$) ou compressão ($\lambda_i < 0$) nas direções correspondentes, e por conseguinte não exhibe rotação. Para interpretar melhor o tensor S_p , observamos que para pequenas deformações espera-se $\|\mathbf{d}\| \ll \|\mathbf{v}\|$, o que implica $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \approx \|\mathbf{v}'\| \|\mathbf{v}\|$. Usando isto, temos

$$\frac{\mathbf{v} \cdot S_p \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \equiv \frac{\mathbf{v} \cdot L_p \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \approx \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{v}\|^2} \equiv \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \approx \frac{\|\mathbf{v}'\| - \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (221)$$

ou seja, $\mathbf{v} \cdot S_p \mathbf{v} \|\mathbf{v}\|^{-2}$ descreve a *deformação relativa* na direção \mathbf{v} .

Obviamente, o tensor S corresponde a uma *dilatação homogênea* se ele é um múltiplo da unidade, $S_p = c(p)\mathbb{I}$. Pouco menos óbvio é que ele corresponde a um *cisalhamento puro* se ele tem traço zero, $\text{Tr } S_p = 0$ (ver Definição 7). Mostraremos agora que o traço do tensor de deformação S_p (coincide com a divergência de $\boldsymbol{\rho}$ e) descreve a variação relativa (infinitesimal) de volume feita pela deformação, veja Eq. (222) embaixo. Para ver isto, consideramos um paralelepípedo, gerado por 3 vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ com vértice em p . A imagem sob a deformação ϕ é aproximadamente³¹ o paralelepípedo gerado por $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ e \mathbf{v}'_3 com vértice em p' (com a mesma notação $p', \mathbf{v}'_i = (\mathbb{I} + L_p)\mathbf{v}_i$ como antes). Seja V e V' o volume do paralelepípedo antes e depois da deformação, respectivamente. Temos

$$V' = \det((\mathbb{I} + L_p)\mathbf{v}_1, (\mathbb{I} + L_p)\mathbf{v}_2, (\mathbb{I} + L_p)\mathbf{v}_3) = \det(\mathbb{I} + L_p) \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \det(\mathbb{I} + L_p) V.$$

Usando o fato que para pequenas deformações vale

$$\det(\mathbb{I} + L_p) \approx 1 + \text{Tr } L_p \equiv 1 + \text{Tr } S_p,$$

temos então

$$\frac{V' - V}{V} \approx \text{Tr } S_p, \quad (222)$$

onde a aproximação é bom para pequenos lados $\|\mathbf{v}_i\|$ do paralelepípedo e para pequenos auto-valores de S_p .³² Em particular, $\text{Tr } S_p = 0$ significa que a deformação S_p deixa invariante o volume (próximo de p), então é um cisalhamento puro.

³⁰A matriz dos componentes de R_p com respeito a uma BON apropriada $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3\}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mas isto é o gerador infinitesimal de uma rotação em torno do eixo \mathbf{e}_3 , então R_p descreve uma rotação infinitesimal. Um outro ponto de vista chega à mesma conclusão: A saber, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale

$$\mathbf{u} \cdot R_p \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot L_p \mathbf{v} - L_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot D_v \boldsymbol{\rho}(p) - D_u \boldsymbol{\rho}(p) \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \text{rot } \boldsymbol{\rho}(p) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

Então, $\mathbf{u} \cdot R_p \mathbf{v}$ é proporcional á componente do rotacional do campo $\boldsymbol{\rho}$ na direção $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

³¹Realmente, os vertices da imagem são sim os pontos $p' + \mathbf{v}_i$, mas o paralelepípedo é deformado.

³²Note que $\text{Tr } S_p \equiv \text{Tr } L_p$ é justamente a divergência de $\boldsymbol{\rho}$, veja a observação depois Eq. (196). Daí, a Eq. (222) oferece a mesma interpretação da divergência do que a Eq. (208), veja p. 38.

Em geral, S_p possui (como qualquer aplicação linear) uma única decomposição $S_p = D_p + C_p$ onde D_p é um múltiplo da unidade e C_p tem traço zero. A saber,

$$\begin{aligned} S_p &= \underbrace{\frac{1}{3}(\text{Tr } S_p) \mathbb{I}}_{D_p} + \underbrace{S_p - \frac{1}{3}(\text{Tr } S_p) \mathbb{I}}_{C_p} \\ &= D_p + C_p. \end{aligned} \quad (223)$$

Isto significa que cada deformação infinitesimal pode ser decomposto (únicamente) em uma dilatação homogênea (D_p) e um cisalhamento puro (C_p).

Tensor de Tensão. Sobre um corpo sólido agem dois tipos de forças: *i*) Forças volumétricas, provocadas pela gravitação ou campos elétricomagnéticos externos, que são de longo alcance.³³ *ii*) Forças de contato, provocadas por interações intermoleculares. Como elas são de curto alcance, as forças de contato exercidas sobre uma porção do corpo pelas porções adjacentes podem atuar apenas através da superfície de separação (Princípio de Euler-Cauchy, Euler 1752). Daí, elas são também chamadas de forças superficiais.

Consideramos um corpo sólido em equilíbrio sobre a ação de forças de contato atuando na sua superfície e forças volumétricas. Como podemos descrever as forças internas de contato no interior desse corpo, uma vez que num dado elemento de volume a resultante de todas as forças se anula? Imaginamos uma superfície S orientada por um campo vetorial normal \mathbf{n} , que corta o corpo em duas partes. Seguindo o princípio de Euler-Cauchy, as forças que uma parte exerce sobre a outra parte agem através da superfície S . Consideramos um elemento de superfície $\Delta\sigma \subset S$ e perguntamos: Qual é a força $\Delta\mathbf{F}$ exercida pela porção do corpo em contato com $\Delta\sigma$ no lado de \mathbf{n} sobre a porção em contato com $\Delta\sigma$ no lado oposto a \mathbf{n} ? Ela depende certamente da área $|\Delta\sigma|$, mas também da orientação \mathbf{n} do elemento da superfície. No limite de pequenas áreas, espera-se que a dependência da área $|\Delta\sigma|$ é linear (homogênea). Mais precisamente: Para uma família de superfícies $\Delta\sigma$ que contêm o ponto p e tem o mesmo vetor normal $\mathbf{n}(p) = \mathbf{n}$ em p , espera-se que o limite

$$\lim_{|\Delta\sigma| \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{|\Delta\sigma|} =: \frac{d\mathbf{F}}{d\sigma}(p) \quad (224)$$

existe e depende apenas do vetor normal $\mathbf{n}(p)$. Esse limite é a densidade superficial de força, no sentido que vale

$$\Delta\mathbf{F} = \int_{\Delta\sigma} \frac{d\mathbf{F}}{d\sigma}(p) d\sigma. \quad (225)$$

O vetor $\frac{d\mathbf{F}}{d\sigma}(p)$ é chamado de *tensão* relacionada à superfície S no ponto p . Mostramos logo que ela depende linearmente do vetor orientação \mathbf{n} , ou seja: Existe uma aplicação linear $\tau_p : V \rightarrow V$ tal que $\frac{d\mathbf{F}}{d\sigma}(p) = \tau_p \mathbf{n}$. Escrevendo $\mathbf{n} d\sigma(p) =: d\boldsymbol{\sigma}(p)$, é costume escrever essa relação como

$$d\mathbf{F}(p) = \tau_p d\boldsymbol{\sigma}(p). \quad (226)$$

Essa aplicação linear $\tau_p : V \rightarrow V$, ou o tensor em $T_2^0(V)$ equivalente, é chamado de *tensor de tensão*. Com respeito a uma BON $\{\mathbf{e}_i\}$, $(\tau_p)_j^i$ é a componente- i da tensão atuando numa superfície com vetor normal na direção \mathbf{e}_j .

Demonstração da linearidade: Num primeiro momento, a aplicação $\tau_p(\mathbf{n}) := \frac{d\mathbf{F}}{d\sigma}(p)$ é definida apenas para vetores unitários. Extendemos ela por homogeneidade, $\tau_p(c\mathbf{n}) \doteq c\tau_p(\mathbf{n})$, $c > 0$, para todos vetores em V . Vetores podem ser identificados com superfícies orientadas como seguinte. Um elemento

³³Por exemplo, a força gravitacional atuando sobre um pequeno volume dV é $\rho \vec{g} dV$, onde \vec{g} é a aceleração da gravidade.

(finito) de superfície plana com área $\Delta\sigma$ e vetor normal (constante) \mathbf{n} será denotado por $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\sigma \mathbf{n}$, e identificado com um vetor em V , com norma $\Delta\sigma$ e direção \mathbf{n} .³⁴ Com isso, temos

$$\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}) = \Delta\sigma \cdot \tau_p(\mathbf{n}), \quad \text{onde } \tau_p(\mathbf{n}) \doteq \frac{d\mathbf{F}}{d\sigma}(p).$$

Interpretação: Pela eq. (225), $\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma})$ é a força que seria exercida sobre a superfície $\Delta\sigma$ se a tensão seria constantemente igual à tensão no ponto p .

Pela terceira lei de Newton, a força exercida pela porção do corpo em contato com $\Delta\sigma$ no lado de \mathbf{n} sobre a porção no lado oposto a \mathbf{n} é o vetor inverso à força exercida pela porção no lado oposto a \mathbf{n} sobre sobre a porção no lado de \mathbf{n} . Em símbolos: $\tau_p(-\Delta\boldsymbol{\sigma}) = -\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma})$.

Resta mostrar que a aplicação τ_p é aditiva. Isso segue no princípio de dois fatos: Por um lado, a soma vetorial de todos elementos de superfície de um poliedro é nula, e por outro lado a resultante de todas forças atuando sobre o poliedro é nula no equilíbrio. Em detalhes: Para visualizar a soma vetorial de elementos de superfície, $\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2$, vale recordar que o teorema de Gauss, aplicado a um campo vetorial constante, implica que a integral $\oint_{\partial G} d\boldsymbol{\sigma}$ através uma superfície fechada é nula. Consideramos

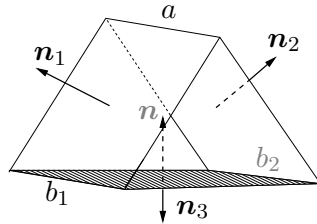


Figura 5: A soma vetorial $\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2$ é a superfície achurada, com orientação \mathbf{n} .

$\Delta\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\Delta\boldsymbol{\sigma}_2$ que são retângulos com uma aresta em comum (lado a na Figura 5). Denotamos por $\Delta\boldsymbol{\sigma}_3 = \Delta\sigma \mathbf{n}_3$ o retângulo entre as arestas de $\Delta\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\Delta\boldsymbol{\sigma}_2$ opostas ao lado a (lados b_1 e b_2 na Figura 5), orientado para fora desse prisma. Os elementos de superfície dos dois triângulos que faltam para fechar o prisma se anulam, pois tem a mesma área mas orientação oposta. Por isso, a lei de Gauss implica $\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_3 = \mathbf{0}$, ou seja: A soma $\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2$ é o retângulo $\Delta\boldsymbol{\sigma} = -\Delta\boldsymbol{\sigma}' = \Delta\sigma \mathbf{n}$ com orientação $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_3$, para dentro do prisma.

Por outro lado, pela primeira lei de Newton, a soma das forças superficiais atuando nas 5 faces do prisma, mais as forças volumétricas, também deve ser nula. Vamos escolher um ponto p no prisma, e sejam as arestas do prisma da ordem ε . A força atuando sobre o retângulo $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$ é dada por $\Delta\mathbf{F}_i = \tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_i) + O(\varepsilon^3)$, onde $\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_i)$ é da ordem ε^2 . As forças atuando nos dois triângulos se anulam módulo termos da ordem ε^3 , pela terceira lei de Newton. As forças volumétricas são da ordem ε^3 . Isso implica que $\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_1) + \tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_2) + \tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_3) = \mathbf{0}$. Ademais, $\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_3) = -\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma})$ como mostrado acima (terceira lei de Newton). Com isso temos mostrado

$$\tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2) = \tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_1) + \tau_p(\Delta\boldsymbol{\sigma}_2),$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 5.1 *Consideramos o tensor de tensão de um corpo em equilíbrio, eventualmente na presença de forças volumétricas.*

³⁴Num primeiro momento, um elemento de superfície plana orientada define um covetor em V^* , jogando um vetor \mathbf{u} para o volume orientado do prisma gerado pelo elemento de superfície e \mathbf{u} . Esse volume orientado é justamente $\mathbf{u} \cdot \Delta\boldsymbol{\sigma}$, ou seja, $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor metricamente equivalente ao covetor descrito. Se a superfície for um paralelepípedo, gerado por dois vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 e com orientação na direção de $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, o volume seria $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u})$, e o vetor metricamente equivalente seria $\Delta\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

i) O tensor de tensão é simétrico, $\tau_p = (\tau_p)^*$.

ii) A divergência do tensor de tensão no equilíbrio, na presença de forças volumétricas com densidade volumétrica \mathbf{f} , satisfaz

$$\operatorname{div} \tau_p + \mathbf{f}(p) = \mathbf{0}.$$

(Na ausência de forças volumétricas, a divergência é zero.)

Demonstração. Ad i). Consideramos um pequeno cubo com lado ε , escolhemos o centro como origem o e as 3 direções independentes das arestas como BON $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ em V . A face do cubo com \mathbf{e}_i como vetor normal é representada por $\Delta\sigma_i = \varepsilon^2\mathbf{e}_i$, e o lado oposto por $-\varepsilon^2\mathbf{e}_i$. O torque com respeito à origem o exercido pela força superficial aplicada no lado $\pm\Delta\sigma_i$ será denotado por N_i^\pm . Como a força superficial aplicada na face $\Delta\sigma_i$ é $\varepsilon^2\tau_{(o+\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1$, e a força aplicada na face oposta é $-\varepsilon^2\tau_{(o-\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1$, temos

$$\begin{aligned} N_1^+ &= \left(\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1\right) \times \varepsilon^2\tau_{(o+\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1, \\ N_1^- &= \left(-\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1\right) \times \left(-\varepsilon^2\tau_{(o-\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1\right) \\ N_1^+ + N_1^- &= \frac{1}{2}\varepsilon^3\mathbf{e}_1 \times (\tau_{(o+\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 + \tau_{(o-\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}\varepsilon^3\mathbf{e}_1 \times \tau_o\mathbf{e}_1 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Similarmente para os outros torques N_2^\pm e N_3^\pm . No equilíbrio, a soma de todos torques N_i^\pm deve ser zero, daí:

$$\mathbf{e}_1 \times \tau_o\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \times \tau_o\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \times \tau_o\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Fazendo o produto escalar dessa equação com \mathbf{e}_1 e recordando $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_i \times \tau_o\mathbf{e}_i) = \tau_o\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_i) = \tau_o\mathbf{e}_i \cdot \sum_j \varepsilon_{1ij}\mathbf{e}_j$, concluímos que $\tau_o\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \tau_o\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2$. Da mesma maneira concluímos $\tau_o\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \tau_o\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1$ e $\tau_o\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \tau_o\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3$. Isso implica que τ_o é auto-adjunto. A presença de forças volumétricas não altera esse resultado, pois o torque exercido por elas é da ordem $O(\varepsilon^4)$.

Ad ii). No cubo considerado acima, a soma de todas forças também deve ser zero no equilíbrio. A resultante das forças superficiais é

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon^2 (\tau_{(o+\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_i)} - \tau_{(o-\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{e}_i)})\mathbf{e}_i = \varepsilon^3 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \tau_o\right)\mathbf{e}_i + O(\varepsilon^4) = \varepsilon^3 \operatorname{div} \tau_o + O(\varepsilon^4).$$

Forças volumétricas são da forma $\mathbf{F} = \varepsilon^3\mathbf{f}(o) + O(\varepsilon^4)$. Isso implica a afirmação. \square

Mais para frente vamos referir à decomposição, análoga com (223),

$$\tau_p = \mathbf{p}(p)\mathbb{I} + \hat{\tau}_p, \quad (227)$$

onde $\hat{\tau}_p$ tem traço zero, a saber: $\mathbf{p}(p) \equiv \frac{1}{3}\operatorname{Tr} \tau_p$, e $\hat{\tau}_p \equiv \tau_p - \mathbf{p}(p)\mathbb{I}$. Fisicamente, $-\mathbf{p}(p)$ é a *pressão* no ponto p , e $\hat{\tau}_p$ descreve uma *tensão de cisalhamento*.

Lei de Hooke generalizada. Num corpo sólido elástico, a relação entre tensão e deformação pode ser aproximada, para pequenas deformações, por uma relação linear. Por isso, existe para cada ponto p no corpo uma aplicação linear $\Lambda_p : T_1^1(V) \rightarrow T_1^1(V)$ tal que vale

$$\tau_p = \Lambda_p S_p. \quad (228)$$

A aplicação inversa Λ_p^{-1} descreve a deformação do corpo provocada por uma dada tensão. Λ_p depende somente do *material* do corpo.

Em analogia com o isomorfismo $\operatorname{End}(V) \cong T_1^1(V)$, tal aplicação Λ_p pode ser identificada com um tensor em $T_2^2(V)$: o chamado *tensor de elasticidade*. Tal tensor em 3 dimensões tem, em geral, $3^4 = 81$

componentes. O fato que τ_p e S_p são simétricos, e o produto escalar também é, implicam as simetrias dos componentes covariantes deste tensor

$$\Lambda_{klij} = \Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk},$$

que reduzem o número de componentes independentes a 21. 3 graus de liberdade podem ser fixos pela escolha de um sistema de coordenadas. Os outros 18 números correspondem a 18 constantes do material. No caso de um sólido policristalino ou isotrópico, o número se reduz a 2, os chamados módulos de compressão e de rigidez.

Vamos discutir em mais detalhe este caso de um sólido *isotrópico*, i.e., que não possui nenhuma direção discriminada (em contraste a um cristal). Neste caso, se nós submetemos todos instrumentos em nosso laboratório a uma rotação R (deixando o sólido fixo), as propriedades do sólido, e então o tensor de elasticidade, não mudam. Matematicamente, isto significa que Λ_p commuta com a representação $T \mapsto T_R$ do grupo das rotações em $T_1^1(V)$ dada por $(\mathbf{v} \otimes \eta)_R := R\mathbf{v} \otimes (R^{-1})^T \eta$, onde R^T é a aplicação “transposta”, definida por $(R^T \eta)(\mathbf{v}) := \eta(R\mathbf{v})$. Em coordenadas:

$$(T_R)_i^j = R_i^k (R^{-1})_k^l T_l^j.$$

O espaço $T_1^1(V)$ contém 3 subespaços invariantes sob esta representação, a saber os escalares (os múltiplos da unidade), os tensores anti-simétricos e os tensores simétricos com traço zero, correspondente as representações irredutíveis do grupo de rotações com spin 0, 1 e 2, respectivamente. (No caso presente, tratamos só com tensores simétricos, então o subespaço dos tensores anti-simétricos é ausente.)

Como o nosso tensor de elasticidade Λ_p comuta com a representação, o Lema de Schur implica que ele age em cada uma destes dois subespaços (escalares e tensores simétricas com traço zero) como um certo múltiplo da unidade. Por isso, existem duas constantes, K e μ , tal que $\Lambda_p(S_p) = 3K S_p$ se $S_p = c\mathbb{I}$, e $\Lambda_p(S_p) = 2\mu S_p$ se S_p tem traço zero. Usando a decomposição (223), a Eq. $\tau_p = \Lambda_p S_p$ então se reduz à equação

$$\begin{aligned} \tau_p &= 3K D_p + 2\mu C_p \\ &= K (\text{Tr } S_p) \mathbb{I} + 2\mu (S_p - \frac{1}{3} (\text{Tr } S_p) \mathbb{I}). \end{aligned} \quad (229)$$

Isto é o Lei de Hooke generalizado, e as constantes K e μ são chamadas de *módulo de compressão e de rigidez*, respectivamente. Comparando com a eq. (227), o primeiro termo é o negativo da pressão. Esta equação pode facilmente ser invertida, $S_p = \Lambda_p^{-1} \tau_p$, a saber

$$S_p = \frac{1}{9K} (\text{Tr } \tau_p) \mathbb{I} + \frac{1}{2\mu} (\tau_p - \frac{1}{3} (\text{Tr } \tau_p) \mathbb{I}). \quad (230)$$

Isto dá a deformação causada por uma tensão.

Exemplo: Torção de um Bastão. Um bastão (cilindro do raio R e comprimento $l \gg R$) é torto por um ângulo α como na Figura 6. O homeomorfismo ϕ correspondente é dado (em coordenadas cilíndricas r, φ, z) por

$$\phi : \mathbf{r}(r, \varphi, z) \mapsto \mathbf{r}(r, \varphi + kz, z).$$

(Aqui, $k \approx \alpha/R$, ver Figura 6.) O campo de deslocamento $\boldsymbol{\rho}$ é dado por

$$\boldsymbol{\rho}(r, \varphi, z) = kz \partial_\varphi \mathbf{r} + O((kz)^2),$$

então

$$\partial_r \boldsymbol{\rho}(r, \varphi, z) = xxx$$

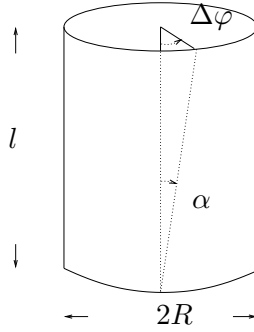


Figura 6: $\Delta\varphi \approx \alpha/R = kl$.

A Exercícios.

Ex. 1. (Espaço Vetorial.) Seja $C([0, 1])$ o conjunto de funções contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$, com valores reais.

- (a) Dado $f, g \in C([0, 1])$ e $s \in \mathbb{R}$, defina uma função $f + g$ e uma função $s \cdot f$.
- (b) Mostre que, com sua definição da soma e da multiplicação por os escalares, o conjunto $C([0, 1])$ constitui um espaço vetorial.

Ex. 2. (Espaço vetorial.) Lembra que o seguinte axioma foi parte da nossa definição de um espaço vetorial V :

“Para cada vetor $\mathbf{u} \in V$ existe um vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.”

Usando os outros axiomas, mostre que este vetor é dado por $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

Ex. 3. (Dependência linear.) Mostre que, no \mathbb{R}^2 , os dois vetores $\{(1, 0), (1, 1)\}$ são linearmente independentes, mas os três vetores $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ são linearmente dependentes.

Ex. 4. (Projeção ortogonal.) Seja V um espaço euclidiano de dimensão n , e $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ (onde $r \leq n$) um sistema ortonormal. Seja U a varredura deles (as combinações lineares), e seja P_U o projetor sobre U . Então, para qualquer dado $\mathbf{v} \in V$, $P_U \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$P_U \mathbf{v} = \sum_{i=1}^r (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_i.$$

Mostre que o vetor $\mathbf{v} - P_U \mathbf{v}$ é ortogonal ao subespaço U .

(Dica: Mostre primeiro que este vetor é ortogonal a $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$.)

Ex. 5. (Produto vetorial no \mathbb{R}^3 .) Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ em \mathbb{R}^3 . Mostre que o produto vetorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é dado por

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Ex. 6. (Coordenadas polares no plano.) Supomos que no plano temos discriminado uma origem o e uma BON de vetores deslocamento $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$. Recordamos que as coordenadas x, y de um ponto p são definidas por

$$\mathbf{r}(p) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y, \quad (231)$$

onde $\mathbf{r}(p)$ é o vetor-posição do ponto p . Definimos agora coordenadas polares (r, φ) implicitamente pelas equações

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (232)$$

com as restrições $r > 0$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

- (a) Escreva os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (derivadas parciais) como combinação linear dos vetores $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$, e determine a norma deles.
- (b) Mostre que, para qualquer dado (r, φ) , os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ são uma base de \mathbb{R}^2 .

Ex. 7. (Area e volume.)

- (a) Os vértices de um triângulo plano têm coordenadas Cartesianas $(2, 1, 5)$, $(5, 2, 8)$ e $(4, 8, 2)$. Calcular a área do triângulo, usando o produto vetorial. (**Dica:** Esta área é a metade da área do paralelogramo gerado por dois vetores convenientes.)
- (b) Um paralelepípedo no plano tem vertices com coordenadas Cartesianas $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ e $(0, 3, 1)$. (Os 3 outros vértices são fixados pela definição de um paralelepípedo.) Calcular o volume, usando a determinante de três vetores convenientes.

Ex. 8. (Coordenadas polares no plano.) Determinar as componentes Cartesianas, bem como a norma, dos vetores

$$\mathbf{u} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p), \quad \mathbf{v} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$$

para os seguintes pontos (especificadas pelas coordenadas em coordenadas Cartesianas (x, y)):

- (a) $(x, y) = (1, 0)$,
- (b) $(x, y) = (0, 1)$,
- (c) $(x, y) = (1, 2)$.

Ex. 9. (Transformação de coordenadas no plano.) Seja \mathbf{A} um campo no plano dado (em coordenadas polares) por

$$\mathbf{A}(r, \varphi) := \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(r, \varphi).$$

Determine as componentes $A^x(x, y)$ e $A^y(x, y)$ de $\mathbf{A}(p)$ com respeito às coordenadas Cartesianas, usando a fórmula de transformação de componentes de vetores no Lema 3.3.

Ex. 10. (Coordenadas esféricas.)

- (a) Para um ponto p arbitrário, calcule o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$. Para este fim, use a BON $\{\mathbf{e}_r(p), \mathbf{e}_\theta(p), \mathbf{e}_\varphi(p)\}$. (I.e., faz a decomposição dos vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(p)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$ com respeito a esta base, e calcule o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$ em termos da mesma base.) Calcule também a norma deste vetor.
- (b) Dito com o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$. Considera em particular os pontos p com $\theta(p) = \frac{\pi}{2}$ (i.e., pontos no equador).

Ex. 11. (Coordenadas cilíndricas.) O movimento de um elétron num campo magnético seja a superposição de um movimento retilíneo uniforme na direção z com velocidade v_z , e um movimento circular uniforme no plano $x-y$ com velocidade angular ω e raio R .

- (a) Achar a parametrização $\varrho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ da curva em coordenadas cilíndricas.
- (b) Determinar a velocidade $\dot{\mathbf{r}}(t)$ em termos da base $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$.
- (c) Determinar a norma $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$ da velocidade.

Ex. 12. (Comprimento de curvas.) O movimento de um elétron num campo magnético uniforme é composto por um movimento uniforme linear na direção do campo com velocidade constante \mathbf{v}_0 , e um movimento uniforme circular no plano perpendicular a \mathbf{v}_0 , com frequência angular ω e raio R .

- (a) Qual é o sistema de coordenadas melhor adaptado ao problema?
 (b) Calcule o comprimento da curva percorrida pelo elétron depois uma período T (“període” refere ao movimento uniforme circular no plano).

Ex. 13. (Integral de curva no plano.) Seja \mathbf{A} o campo vetorial no plano dado por

$$\mathbf{A}(r, \varphi) := \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$$

(em coordenadas polares), e $\gamma : t \mapsto \mathbf{r}(t)$ uma curva fechada que faz uma volta em torno da origem (um laço). Calcular a integral de \mathbf{A} sobre a curva γ ! Comente sobre o resultado. (*Obs.:* Primeiro tem que achar uma parametrização de tal curva. Qual sistema de coordenadas?)

Ex. 14. (Área da hemisfera.) Calcular a área da hemisfera com raio R , escolhendo uma parametrização e usando a formula da aula para áreas.

Ex. 15. (Derivada direcional.) Calcular $(D_{\mathbf{v}}f)(p)$, onde f, \mathbf{v} e as coordenadas (u^1, u^2, u^3) de p são dados por

- (a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^3 + z$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y$, $(x, y, z) = (3, 1, 4)$;
 (b) $f(r, \theta, \varphi) = \sin(\theta) r^{-2}$, $\mathbf{v} = 5m\partial_r\mathbf{r} + 2\partial_\theta\mathbf{r} - \partial_\varphi\mathbf{r}$, $(r, \theta, \varphi) = (1m, \pi/2, \pi/4)$;
 (c) $f(x, y) = \exp(x) \cos(y)$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x$, $(x, y) = (0, 0)$.

Ex. 16. (Integral de volume.) Seja G a região dos pontos com coordenada- z entre 0 e 1, $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, e seja $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a função dado por

$$f(x, y, z) := z \exp(-x^2 - y^2).$$

Calcular a integral de f sobre G , usando a formula da aula. Como primeiro passo, escolha coordenadas bem-adaptadas!

Ex. 17. (Integral de volume.) Um corpo tem a forma de um paralelepípedo com vértices $(x, y, z) = (1, 1, 1), (3, 1, 1), (1, 4, 2)$ e $(1, 1, 2)$ (os outros 3 vértices são fixados pela definição de um paralelepípedo). Ele tem a densidade $\rho(x, y, z) = x + 2y + z$. Calcular a massa do corpo. – **Dica:** Um possível jeito é o seguinte: Escolhendo um vértice p_0 do paralelepípedo como origem, os três lados incidentes em p_0 definem uma base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ do \mathbb{R}^3 . Isto dá coordenadas u^i no paralelepípedo pela definição

$$p_0\vec{p} =: \sum_{i=1}^3 u^i(p) \mathbf{a}_i.$$

(Quais valores têm estas coordenadas para pontos no interior do paralelepípedo – ou seja, com a notação da aula: qual é o domínio G_0 das coordenadas u^i ?) Escreva as coordenadas Cartesianas (x, y, z) usadas inicialmente, bem como a densidade ρ , em termos das novas coordenadas (u^1, u^2, u^3) . (Cuidado! O origem escolhido inicialmente $\neq p_0$!) Determine $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ e use a formula da aula sobre integrais de volume. *Nicht eindeutig!!*

Ex. 18. (Fluxo do campo elétrico.)

(a) Seja S a esfera do raio R , com orientação tal que o vetor normal aponta para fora, e seja

$$\mathbf{E}(p) := \frac{kq}{\|\vec{op}\|^3} \vec{op}$$

o campo elétrico no ponto p gerado por uma carga puntiforme na origem o . Calcular o fluxo de \mathbf{E} sobre a superfície S . Comente sobre o resultado!

(b)* Seja agora S uma deformação contínua da esfera, mais precisamente: uma superfície fechada que contem a origem o , e que tem a propriedade que cada raio começando em o passa por S exatamente uma vez. Determine uma parametrização para S , e calcule o fluxo de \mathbf{E} sobre S . Comente!

Dica: Escolha a parametrização analogamente com a esfera em termos de coordenadas esféricas, mas *sem* fixar $r(s, t) = R$!

Ex. 19. (Campos conservativos no plano.) No plano, seja C uma curva fechada que segue somente as linhas de r e de φ , e não contem o origem no interior. Então, ela consiste de 4 segmentos, a saber entre 4 pontos com coordenades respectivas (r_1, φ_1) , (r_2, φ_1) , (r_2, φ_2) e (r_1, φ_2) , onde $0 < r_1 < r_2$ e $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$.

- (a) Achar uma parametrização da curva C .
- (b) Seja \mathbf{A} um campo vetorial da forma $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (em coordenadas polares). Calcule a integral de \mathbf{A} sobre a curva C do item (a). Mostre: Os integrais sobre todas curvas fechadas da mesma forma³⁵ como C são zero se e somente se $f(r) = cr^{-2}$ para uma constante c .
- (c)* Seja \mathbf{E} um campo vetorial da forma $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$. Mostre: Os integrais de \mathbf{E} sobre todas curvas fechadas da mesma forma como C são zero se e somente se f é da forma $f(\mathbf{r}) = \hat{f}(r)$.

Ex. 20. (Campo conservativo e gradiente no \mathbb{R}^2 .)

(a) Seja \mathbf{A} o campo vetorial dado (em coordenadas polares) por $\mathbf{A}(r, \varphi) := \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$. No domínio $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ o campo \mathbf{A} é conservativo [isso segue do exercício 5.1.(b)]. Então deve existir uma função ϕ t.q.

$$\mathbf{A} = \text{grad } \phi \quad \text{em } D. \tag{233}$$

Calcule este “potencial” ϕ , e faz o check que realmente vale eq. (233), usando a formula explicita do gradiente em coordenadas polares.

- (b) Fazer o mesmo com o campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$, que também é conservativo.
- (c) Visualizar os campos \mathbf{A} e \mathbf{E} dos items (a) e (b), respectivamente, e as “superfícies” (neste caso bidimensional, as linhas) de nível dos potenciais ϕ correspondentes. Faz 2 comentários sobre a direção dos gradientes em relação a estas linhas de nível.

Ex. 21. (Gradientes.) Calcule os gradientes das seguintes funções, em termos de coordenadas indicadas³⁶ em parenteses:

- (a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^3 + z$ (Coordenadas Cartesianans),
- (b) $f(r, \theta, \varphi) = \text{sen}(\theta) r^{-2}$ (Coordenadas esféricas),
- (c) $f(\varrho, \varphi, z) = \exp(-\kappa\varrho) \text{sen}(\varphi) z^2$ (Coordenadas cilíndricas).

³⁵mais precisamente, com *winding number* 0

³⁶I.e., em termos da base $\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\}$ se as coordenadas $\{u^i\}$ foram indicadas.

Ex. 22. (Superfície de nível.) Seja $f(\varrho, \varphi, z) := \varrho^2 - z$ (em coordenadas cilíndricas), e seja S a superfície de nível $f = 0$ desta função, i.e. o parabolóide

$$S := \{p : f(p) = 0\}.$$

- (a) Calcule o gradiente de f , em termos de coordenadas cilíndricas².
- (b) Achar uma parametrização de S , e calcule o vetor normal (unitário) $\mathbf{n}(p)$, $p \in S$.
- (c) Para qual lado (fora ou dentro) do parabolóide S aponta $\mathbf{n}(p)$? Achar outra parametrização com a orientação inversa (i.e., com \mathbf{n} apontando para o outro lado)!
- (d) Qual relação temos entre os vetores $\mathbf{n}(p)$ e $(\text{grad } f)(p)$, para $p \in S$? Por que isto deve ser assim?

Ex. 23. (Corpo rígido em rotação.) O campo de velocidade de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo \mathbf{n} , com velocidade angular ω , é dado por $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, onde $\boldsymbol{\omega} := \omega \mathbf{n}$, e \mathbf{r} é o vetor posição com respeito a um origem no eixo.

- (a) Calcule \mathbf{v} e $\text{rot } \mathbf{v}$ em coordenadas cilíndricas. **Dica:** Usar o fato que as coordenadas cilíndricas satisfazem

$$\mathbf{r}(p) = \varrho(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho}(p) + z(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}(p). \quad (234)$$

- (b) Integrar $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo de um círculo C no plano ortogonal a \mathbf{n} que faz uma volta em torno do eixo \mathbf{n} no sentido contra-horário. Verifique que

$$\frac{\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{\text{área}} = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z.$$

Ex. 24. (Rotacional.) Calcule o rotacional dos seguintes campos.

- (a) $\mathbf{A}(\varrho, \varphi, z) = f(\varrho) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (em coordenadas cilíndricas).
- (b) $\mathbf{A}(\varrho, \varphi, z) = \varrho^{-2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (em coordenadas cilíndricas).
- (c) $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ (em coordenadas esféricas).
- (d) $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = r^5 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ (em coordenadas esféricas).

Ex. 25. (Divergência.) Calcular a divergência do campo eletrostático \mathbf{E} gerado por uma esfera uniformemente carregada, com carga total Q e raio R .

- (a) No interior ($r < R$), onde \mathbf{E} é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \mathbf{e}_r.$$

- (b) No exterior ($r > R$), onde \mathbf{E} é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.$$

- (c)* Pelos resultados dos itens anteriores: $\text{div } \mathbf{E}$ é proporcional a qual grandeza física?

Ex. 26. (Aceleração em coordenadas cilíndricas sem símbolos de Christoffel.) Seja $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ a curva de uma partícula. Achar as componentes da velocidade $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ e da aceleração $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ em coordenadas cilíndricas. (Ou com respeito à base $\{\partial_\varrho \mathbf{r}, \partial_\varphi \mathbf{r}, \partial_z \mathbf{r}\}$, i.e., as componentes v^i definido por $\mathbf{v} = \sum v^i \partial_i \mathbf{r}$; ou com respeito à base $\{\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$, i.e., as componentes $v^{(i)}$ definido por $\mathbf{v} = \sum v^{(i)} \mathbf{e}_i$.) Tome em consideração que $\mathbf{e}_\varrho(p)$ e $\mathbf{e}_\varphi(p)$ (em contraste a \mathbf{e}_z) dependem do ponto p (e por conseguinte, de t)! — **Dica:** Use a eq. (234), e $\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = 0$ (Por que?) para determinar esta dependencia de t .

Ex. 27. (Potencial-vetor do fio reto infinito.) O campo magnético de um fio condutor infinitamente estendido no eixo- z e com corrente I na direção das z positivas é dado, em coordenadas cilíndricas, por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \varrho} \mathbf{e}_\varphi. \quad (235)$$

Mostre que um potencial-vetor do campo magnético é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varrho}\right) \mathbf{e}_z.$$

Ex. 28. (Grad e rot do vetor posição.)

(a) Calcule $\text{div } \mathbf{r}$. Use o resultado para calcular

$$\oint_{\partial G} \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

onde a superfície ∂G é o contorno de uma região G .

(b) Calcule $\text{rot } \mathbf{r}$. Use o resultado para calcular

$$\oint_{\partial S} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r},$$

onde a curva ∂S é o contorno de uma superfície S .

(c) Mostre que $\text{grad}(1/r) = (-1/r^2) \mathbf{e}_r$.

(d) Use a equação do item anterior para mostrar $\Delta \frac{1}{r} = 0$ se $r \neq 0$, enquanto

$$\int_G \Delta \frac{1}{r} dV = -4\pi \quad (236)$$

para qualquer região G que contém a origem. (Em outras palavras, $\Delta \frac{1}{r}$ é -4π vezes a distribuição-delta.) **Dica:** Mostre eq. (236) primeiro para uma bola do raio R centrada na origem, e depois para regiões arbitrárias.

Ex. 29. (Potencial-vetor do solenóide.) O campo magnético de um solenóide do raio R , infinitamente estendido na direção \mathbf{e} , é dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{e} & \text{no interior, e} \\ \mathbf{0} & \text{no exterior do solenóide,} \end{cases} \quad (237)$$

onde I é a corrente e n é o número de espiras por metro. Calcular o potencial-vetor \mathbf{A} do campo magnético (satisfazendo $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$), usando nossa formula geral

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \int_0^1 s \mathbf{B}(s\mathbf{r}) \times \mathbf{r} ds : \quad (238)$$

(a) No interior do solenóide. (A eq. (238) depende, via $\mathbf{r}(p) = \vec{o}p$, da escolha da origem o . Onde voce escolha o ?) Escreva o resultado em termos de \mathbf{B} e \mathbf{r} , sem usar coordenadas.

(b) No interior do solenóide, usando coordenadas cilíndricas. (Escolha o eixo- z apropriadamente!) **Dica:** Use a formula

$$\mathbf{r}(\varrho, \varphi, z) = \varrho \mathbf{e}_\varrho + z \mathbf{e}_z. \quad (239)$$

(c) No exterior do solenóide, usando coordenadas cilíndricas. **Dica:** Mostre primeiro que a coordenada ϱ satisfaz

$$\varrho(s\mathbf{r}) = s\varrho(\mathbf{r}). \quad (240)$$

Ex. 30. (Regras para Nabla.) Mostre: Para uma superfície S com contorno ∂S e funções f, g vale

$$\oint_{\partial S} (f \operatorname{grad} g) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Soluções.

Ex. 6.

$$\partial_r \mathbf{r} = (x^2 + y^2)^{-1/2} (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y), \quad \text{norma} = 1, \quad \partial_\varphi \mathbf{r} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y, \quad \text{norma} = r.$$

Ex. 8. Temos (com $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$):

$$\mathbf{u} = \frac{1}{r}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{r}(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{r}((x-y)\mathbf{e}_x + (x+y)\mathbf{e}_y).$$

Daí, os componentes $u^i(p)$, $v^i(p)$ e $w^i(p)$ para p com coordenadas $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$ respectivamente são

$$\begin{aligned} u^x(1, 0) &= 1, & u^y(1, 0) &= 0; & v^x(1, 0) &= 0, & v^y(1, 0) &= 1; & w^x(1, 0) &= 1, & w^y(1, 0) &= 1; \\ u^x(0, 1) &= 0, & u^y(0, 1) &= 1; & v^x(0, 1) &= -1, & v^y(0, 1) &= 0; & w^x(0, 1) &= -1; & w^y(0, 1) &= 1; \\ u^x(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}, & u^y(1, 2) &= \frac{2}{\sqrt{5}}; & v^x(1, 2) &= \frac{-2}{\sqrt{5}}, & v^y(1, 2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}; & w^x(1, 2) &= \frac{-1}{\sqrt{5}}, & w^y(1, 2) &= \frac{3}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

As normas são $\|\mathbf{u}\| = 1 = \|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2}$ independente do ponto p .

Ex. 15. (a) -6 , (b) $-10m^{-2}$, (c) 1 .

Ex. 20.

$$\begin{aligned} (a) & 4x\mathbf{e}_x + 9y^2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, & (b) & \frac{-2 \operatorname{sen} \theta}{r^3} \partial_r \mathbf{r} + \frac{\cos \theta}{r^4} \partial_\theta \mathbf{r}, \\ (c) & -\kappa e^{-\kappa\rho} \operatorname{sen}(\varphi) z^2 \partial_\rho \mathbf{r} + \frac{e^{-\kappa\rho}}{\rho^2} \cos(\varphi) z^2 \partial_\varphi \mathbf{r} + 2e^{-\kappa\rho} \operatorname{sen}(\varphi) z \partial_z \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Ex. 25.

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E^r) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{V}, & r < R \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Referências

- [1] G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 1995)
- [2] G. Birkhoff, S. MacLane, *Álgebra Moderna Básica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 4ª edição, 1980)
- [3] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro)
- [4] R.V. Churchill, *Variáveis Complexas e Suas Aplicações* (Mc Graw-Hill do Brasil, São Paulo)
- [5] H. Feshbach, P.M. Morse, *Methods of Theoretical Physics* (Mc Graw-Hill, New York)
- [6] Hoffmann-Kunze, *Linear Algebra* (Prentice-Hall, 1971)

- [7] E. Kreyszig, *Matemática Superior* (John Wiley & Sons, New York, 2^a edição, 1984)
- [8] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry* (Academic Press, 1983)
- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman and Co., 1973)
- [10] M. Reed, and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I* (Academic Press, New York, 1975)
- [11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (McGraw-Hill, 1986)
- [12] I. L. Shapiro, *Lecture notes on vector and tensor algebra and analysis*, UFJF, 2018, Notas de aula.
- [13] I. L. Shapiro, *A primer in tensor analysis and relativity*, Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer, 2019.
- [14] G.E. Shilov, B.L. Gurevich, *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach* (Prentice-Hall, New York 1966)
- [15] W. Thirring, *Classical Mathematical Physics* (Springer)