Espaços de Hilbert, Espectro, EDP's

Jens Mund

DF-UFJF, Período 2025-3

Resumo

Notas de aula *incompletas* dos períodos 2020-3 até 2025-3. O ponto central é o teorema espectral sobre diagonalização de operadores auto-adjuntos agindo num espaço de Hilbert. Como aplicação, o operador Laplace é diagonalizado para várias regiões no $\mathbb{R}^3$, com condições de contorno especificadas (Dirichlet ou Neumann). Essa análise serve para resolver as EDP's de Poisson, difusão, e de onda nas respetivas regiões (pelo chamado método de Fourier). Alguns detalhes (seções 2.4.5-7) ainda não são digitadas.

Conteúdo

1 Espaços de Hilbert

1.1 Espaços vetorias; produto escalar

Literatura: Cap. 10 e 11 em Butkov [6], Cap. 10 em Lemos [11].

[6, Cap. 10.3]: Um conjunto V é chamado de espaço vetorial[1] (sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos) se existe uma operação $+ : V \times V \to V$, $(u, v) \to u + v$ ("soma de vetores") e uma operação $\odot : \mathbb{C} \times V \to V$, $(c, v) \mapsto cv$ ("multiplicação do vetor v com o escalar c") satisfazendo as seguintes requerimentos. Existe um elento $0 \in V$ ("vetor nulo"), tal que $\forall u \in V$ vale $u + 0 = u$, e certas condições de compatibilidade sejam satisfeitas: $\forall u, v, w \in V$ e $\forall c, c' \in \mathbb{C}$ vale
$u + v = v + u, \quad (u + v) + w = u + (v + w), \quad 1u = u$
$c(c'u) = (cc')u, \quad c(u + v) = cu + cv, \qquad (c + c')u = cu + c'u.$

Exemplos: Vetores deslocamento no espaço físico; $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, $C(\mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R})$, soluções de uma EDO homogênea...

Uma soma (finita) da forma $c_1v_1 + \cdots c_nv_n \equiv \sum_{i=1}^n c_iv_i$, com $c_i \in \mathbb{C}$ e $v_i \in V$, chamamos de *combinação linear* de vetores.

Definição 1 Um número finito de vetores $v_1, \ldots, v_n$ é linearmente independente $:\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^n c_iv_i = 0$ implica $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Seja $B \subset V$ um subconjunto de V.

B é linearmente independente $:\Leftrightarrow$ Cada subconjunto *finito* de B é linearmente independente.

O *span* de B, em símbolos $\mathrm{span}(B)$, é o conjunto de todos combinações lineares finitas de vetores em B.

B é chamado de *base* de V se B é linermente independente e $\mathrm{span}(B) = V$.

Definição 2 Seja $\mathcal{H}$ um espaço linear. Uma *norma* em $\mathcal{H}$ é uma aplicação $n : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ satisfazendo $n(\psi) = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$, $n(c\psi) = |c|n(\psi)$ e a desigualdade do triângulo,

$$n(\psi + \phi) \leq n(\psi) + n(\phi). \tag{1}$$

Definição 3 [6, Cap. 10.6] Seja $\mathcal{H}$ um espaço linear. Um *produto escalar* em $\mathcal{H}$ é uma applicação $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\psi, \phi \mapsto (\,\psi, \phi\,)$ antilinear e linear no primeiro e segundo argumento, respetivamente, que satisfaz[2]

$$(\,\phi, \psi\,) = \overline{(\,\psi, \phi\,)} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

e que é *positivo definido* no sentido que

$$(\,\psi, \psi\,) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

e a igualdade "=" vale somente se $\psi = 0$.

Dizemos que dois vetores ψ_1, ψ_2 são *ortogonais*, em símbolos $\psi_1 \perp \psi_2$, se $(\,\psi_1, \psi_2\,) = 0$. Dado um produto escalar, definimos

$$\|\psi\| := \sqrt{(\,\psi, \psi\,)}. \tag{2}$$

Veremos embaixo que $\|\cdot\|$ é uma norma. Observa que ela satisfaz[3]

$$\|\psi_1 + \psi_2\|^2 = \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 + 2\Re(\,\psi_1, \psi_2\,).$$

Se ψ_1 e ψ_2 são ortogonais, segue o Teorema de Pitágoras

$$\|\psi_1 + \psi_2\|^2 = \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 \quad \text{se } (\,\psi_1, \psi_2\,) = 0. \tag{3}$$

[1] Ou espaço linear. Os elementos de V denotaremos por $u, v, \ldots$, ou as vezes por $\psi, \phi, \ldots$.
[2] $\bar{z}$ denota o complexo conjugado de $z \in \mathbb{C}$.
[3] $\Re z$ denota a parte real de $z \in \mathbb{C}$.

Exemplo 4 i) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$: Denotamos os elementos por $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$ etc. Produto escalar:

$$(u, v) \doteq \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i}\, v_i'. \tag{4}$$

ii) $\mathcal{H} = l^2$: Os elementos são sequências infinitas $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots)$ tal que

$$\|\underline{c}\|^2 \doteq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \; < \infty.$$

Produto escalar:

$$(\underline{c}, \underline{c'}) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{c}_i\, c_i'.$$

iii) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$: Os elementos são as funções[4] quadraticamente integráveis, $\int |f(x)|^2 dx < \infty$. Produto escalar:

$$(\psi, \phi) \doteq \int \overline{\psi(x)}\, \phi(x)\; dx.$$

□

Para um conjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ definimos o *complemento ortogonal* $\mathcal{D}^\perp$ por

$$\mathcal{D}^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} : \; (\phi, \psi) = 0 \; \forall \phi \in \mathcal{D}\}.$$

Observa que $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$, pois $\psi \in \mathcal{H}^\perp$ implica que $(\psi, \psi) = 0$, ou seja, $\psi = 0$.

Um sistema ortogonal (SOG) é uma familia $\{\varphi_i, i \in I\}$ de vetores φ_i, onde i percorre algum conjunto de indices[5] I, que são mutuamente ortogonais:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \|\varphi_i\|^2 \delta_{ij} = \begin{cases} \|\varphi_i\|^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{5}$$

Se além disso os vetores φ_i são normalizadas, $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, a familia é chamada um sistema ortonormal (SON).

Se $\psi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ é uma combinação linear de um SOG $\{\varphi_i, i \in I\}$, então os coeficientes c_i naquela expansão são dados por

$$c_i = \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2}. \tag{6}$$

Lemma 5 (Projeção sobre um subespaço) *Seja $U \doteq span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ o subespaço de $\mathcal{H}$ gerado pelo SON $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$. Então qualquer $\psi \in \mathcal{H}$ possui uma única decomposição*

$$\psi = \psi_\parallel + \psi_\perp, \quad \textit{onde} \;\; \psi_\parallel \in U \;\; e \;\; \psi_\perp \in U^\perp. \tag{7}$$

A saber,

$$\psi_\parallel := \sum_{i=1}^{N} \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2}\, \varphi_i \;\; =: P_U \psi \tag{8}$$

e $\psi_\perp := \psi - \psi_\parallel$.

[4] Na verdade, classes de equivalência: Duas funções são identificadas se eles coincidem em “quase todos” pontos.

[5] Nos vamos supor que I é finito ou enumerável.

A aplicação linear $\psi \mapsto \psi_\|$ definido na Eq. (8) é chamado o *projetor* sobre U, em símbolos P_U. (Exercício: Mostre que este operador é um projetor no sentido que $P_U \circ P_U = P_U$.) Vale mencionar que $P_u\psi$ é o vetor que minimiza a distância entre ψ e U, pois para qualquer $u \in U$ vale

$$\|\psi - u\|^2 = \|\psi_\| + \psi_\perp - u\|^2 = \|\psi_\| - u\|^2 + \|\psi_\perp\|^2$$

que é minimal se $\|\psi_\| - u\|^2 = 0$, ou seja, se $u = \psi_\|$.

Comprovante. Define $\psi_\|$ segundo Eq. (8). Por construção, esse vetor é em U. Calculamos para $j \in I \doteq \{1, \dots, N\}$:

$$(\varphi_j, \psi_\|) = \Big(\varphi_j, \sum_{i\in I} \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2}\varphi_i\Big) = \sum_{i\in I} \frac{(\varphi_i, \psi)}{\|\varphi_i\|^2} \underbrace{(\varphi_j, \varphi_i)}_{\|\varphi_i\|^2\delta_{ij}} = (\varphi_j, \psi).$$

Isso implica que $(\varphi_j, \psi_\perp) \equiv (\varphi_j, \psi - \psi_\|) = (\varphi_j, \psi) - (\varphi_j, \psi_\|) = 0$ para todo $j \in I$, o que implica por sua vez que $\psi_\perp \in U^\perp$.

Falta só mostrar a unicidade. Seja $\psi = \psi'_\| + \psi'_\perp$ uma outra decomposição com as propriedades mencionadas no lemma. A identidade $\psi_\| + \psi_\perp = \psi = \psi'_\| + \psi'_\perp$ implica que

$$\psi_\| - \psi'_\| = \psi'_\perp - \psi_\perp =: \chi.$$

Isso é um vetor em U (lado esquerdo) e também em $U^\perp$ (lado direito): Em particular, ele é ortogonal em si mesmo, $(\chi, \chi) = 0$, o que implica que $\chi = 0$, ou seja, $\psi'_\| = \psi_\|$ e $\psi'_\perp = \psi_\perp$. $\square$

Proposição 6 (Gram-Schmidt) *Se B é um conjunto enumerável de vetores em $\mathcal{H}$, então existe um SON B' que gera o mesmo subespaço de $\mathcal{H}$, i.e., span(B) =span(B').*

Comprovante. [1, Cap. 3.1], [6, Cap. 10.8, Thm. 4], [11, Thm. 10.13]. $\square$

Para qualquer ψ, ϕ in $\mathcal{H}$ vale a desigualdade de **Cauchy e Schwarz**:[6]

$$|(\phi, \psi)| \leq \|\phi\| \, \|\psi\|. \tag{9}$$

Comprovante. Se $\phi = 0$, a desigualdade é trivial. Então, seja $\phi \neq 0$. Neste caso, ψ possui a decomposição (7), $\psi = \psi_\| + \psi_\perp$ com $\psi_\| = \frac{(\phi,\psi)}{\|\phi\|^2}\phi \perp \psi_\perp$, então pelo Pitágoras

$$\|\psi\|^2 = \|\psi_\|\|^2 + \|\psi_\perp\|^2 \geq \|\psi_\|\|^2 \equiv \|\phi\|^{-2} \, |(\phi, \psi)|^2,$$

que dá (9). $\square$

Noções topológicas. Seja $\mathcal{H}$ um espço com norma $\|\cdot\|$.

Uma sequência ψ_n *converge* para ψ sse $\|\psi_n - \psi\| \to 0$ se $n \to \infty$.

$K \subset \mathcal{H}$ é um subespaço *fechado* sse $\psi_n \in K$, $\psi_n \to \psi$ implica $\psi \in K$.

Seja $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ um subconjunto de $\mathcal{H}$. O *fecho* de $\mathcal{D}$, em símbolos $\mathcal{D}^-$, é o menor conjunto fechado em $\mathcal{H}$ que contém $\mathcal{D}$, i.e.,

$$\mathcal{D}^- \doteq \{\psi \in \mathcal{H} \mid \exists \psi_n \in \mathcal{D} : \psi_n \to \psi\}.$$

[6] Agora podemos mostrar que $\|\cdot\|$ satisfaz a desigualdade do triângulo (1):

$$\|\psi+\phi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\Re(\psi, \phi) \leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2|(\psi, \phi)| \leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\|\psi\| \, \|\phi\| = (\|\psi\| + \|\phi\|)^2.$$

Um subconjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ é chamado de *denso* em $\mathcal{H}$, se o fecho dele coincide com $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}^- = \mathcal{H}$. (Exemplo: $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}$.)

Uma sequência ψ_n em $\mathcal{H}$ é chamada de *sequência de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número N tal que para todos $n, m > N$ vale

$$\|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon.$$

Se toda sequência de Cauchy converge em $\mathcal{H}$, o espaço é chamado de completo, ou *espaço de Banach*, ou *espaço de Hilbert* se a norma provém de um produto escalar, veja (2).

Exemplos: Todo espaço vetorial de dimensão finita é completo; $L^2(\mathbb{R})$ e l^2 também são completos.

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços lineares com normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ respetivamente. Uma aplicação $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é chamada *contínua* em $\psi \in \mathcal{H}_1$ se $\psi_n \to \psi$ em $\mathcal{H}_1$ implica $F(\psi_n) \to F(\psi)$ em $\mathcal{H}_2$. Se F é *linear*, as seguintes afirmações são (obviamente) equivalentes:

i) F é contínua em algum $\psi \in \mathcal{H}_1$,

ii) F é contínua em todos $\psi \in \mathcal{H}_1$,

iii) F é contínua em 0.

(Neste caso ela é chamada simplesmente contínua.) Vale mencionar que isto é equivalente com a existência de um número $M > 0$ tal que para todo $\psi \in \mathcal{H}_1$ vale

$$\|F(\psi)\|_2 \le M\|\psi\|_1.$$

Consideremos dois casos especiais de aplicações lineares: Se $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$, chamamos F de um *operador* em $\mathcal{H}_1$. Se $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$, chamamos F de um *funcional*.

Exemplo 7 Seja $\phi \in \mathcal{H}$ fixo. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz mostra-se que o funcional

$$\psi \mapsto (\,\phi, \psi\,)$$

é contínuo. Isso por sua vez implica que o projetor P_U definido em (8) é contínuo. □

A inversão também vale se $\mathcal{H}$ é completo [13]:

Lemma 8 (Riesz) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ um funcional contínuo. Então existe um vetor (único) ϕ_F t.q.*

$$F(\psi) = (\,\phi_F, \psi\,) \quad \textit{para todos } \psi \in \mathcal{H}. \tag{10}$$

Comprovante. Aquí vem uma demonstração (que pode ser lida só depois da Def. 12) no caso de um espaço de Hilbert separável, que possui uma BON $\{\varphi_i,\, i \in I\}$. (No caso da dimensão finita, $I = \{1, \dots, N\}$ e no caso da dimensão infinita, $I = \mathbb{N}$.) Afirmamos que o vetor ϕ_F é dado por

$$\phi_F \doteq \sum_{i \in I} \overline{F(\varphi_i)}\, \varphi_i\,. \tag{11}$$

Precisamos mostrar (no caso da dimensão infinita) que essa série converge, ou seja esse limite existe, e que esse vetor satisfaz a relação (10).

Consideramos a n-esima soma parcial, $\phi_n \doteq \sum_{i=1}^n \overline{F(\varphi_i)}\, \varphi_i$. Um pequeno cálculo mostra que a norma quadrada desse vetor coincide com $F(\phi_n)$:

$$\|\phi_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |F(\varphi_i)|^2 \; = F(\phi_n)\,.$$

Pela continuidade de F, o lado direito é limitado por $M\|\phi_n\|$ para algum número positivo M. Daí, $\|\phi_n\|^2 \le M\|\phi_n\|$, ou seja, $\|\phi_n\| \le M$: A sequência $\|\phi_n\|$ é limitada.

Mas ela também é monotónicamente crescendo. Consequentemente, ela converge. Em outras palavras, a série $\sum_{i\in I} |F(\varphi_i)|^2$ é finita. Pelo Lema 10, a série de vetores na eq. (11) também converge.

Falta mostrar que o vetor limite ϕ_F satisfaz a relação (10). Pela continuidade do produto escalar e a anti-linearidade no primeiro argumento, temos

$$(\,\phi_F, \psi\,) = \sum_{i\in I} F(\varphi_i)\,(\,\varphi_i, \psi\,)\,.$$

Usando agora a continuidade e linearidade do funcional F, isso coincide com $F\big(\sum_{i\in I} (\,\varphi_i, \psi\,)\,\varphi_i\big)$, ou seja, com $F(\psi)$. □

1.2 Bases ortonormais e BON's generalizadas

Nesta seção seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert (em particular, completo), e I denota um conjunto de índices finito ou contável, $I = \{1, \ldots, N\}$ ou $I = \mathbb{N}$.

Proposição 9 (Desigualdade de Bessel) *Se $\{\varphi_i, i \in I\}$ é um SON, então para qualquer $\psi \in \mathcal{H}$ vale a desigualdade*

$$\sum_{i\in I} |(\,\varphi_i, \psi\,)|^2 \le \|\psi\|^2.$$

Veja [11, Thm. 10.14].

Comprovante. Denotamos o espaço gerado pelo SON $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de U_n. Segundo Lema 5, nosso vetor ψ possui a decomposição (7), $\psi = P_{U_n}\psi + \psi_\perp$, onde $P_{U_n}\psi$ é perpendícular em $\psi_\perp$. Pelo Pitagoras, temos

$$\|\psi\|^2 = \|P_{U_n}\psi\|^2 + \|\psi_\perp\|^2 \ge \|P_{U_n}\psi\|^2 \,= \sum_{i=1}^{n} |(\,\varphi_i, \psi\,)|^2$$

Passando ao limite $n \to \infty$, segue a desigualdade de Bessel. □

Lemma 10 *Seja $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$ é um SON, e seja $c_1, c_2, \ldots$ uma sequência de números complexos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$.*[7] *Então a série de vetores*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i \doteq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \tag{12}$$

converge, e a norma do vetor limite é $\big(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}$.

Comprovante. Denotando por $\psi_n \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ a n-esima soma parcial, calcula-se $\|\psi_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$. Similarmente temos para $m < n$:

$$\|\psi_n - \psi_m\|^2 \equiv \|\sum_{i=m}^{n} c_i\varphi_i\|^2 = \sum_{i=m}^{n} |c_i|^2 = s_n - s_m, \tag{13}$$

onde $s_n \doteq \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$. Esta sequência converge por hipótese, e portanto é uma sequência de Cauchy. Daí, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > N$ vale $|s_n - s_m| < \varepsilon^2$. A Eq. (13) implica $\|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon$, ou seja, $\{\psi_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Como $\mathcal{H}$ é completo, ela converge. Vamos chamar o limite de ψ.

Pela desigualdade invertida do triângulo

$$\big|\|\psi_n\| - \|\psi\|\big| \le \|\psi_n - \psi\| \,\to 0\,,$$

a norma $\|\psi\|$ do vetor limite é o limite das normas $\|\psi_n\|$, ou seja, $\|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$, como afirmado. □

[7] Em outras palavras, a sequência $(c_1, c_2, \ldots)$ está em l^2.

Corolário 11 *Se $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$ é um SON, então para qualquer $\psi \in \mathcal{H}$ a série de vetores*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\,\varphi_i, \psi\,)\,\varphi_i \;\;=: P_U\psi \tag{14}$$

converge.

A aplicação $\psi \mapsto P_U\psi$ é o projetor de ψ sobre o fecho U do subespaço gerado pelo SON $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$. Veja [11, Cor. 10.15].

Comprovante. A série é da forma do Lema 10, com $c_i \doteq (\,\varphi_i, \psi\,)$. A sequência $\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$ é monotonicamente crescendo, e limitado superiormente por $\|\psi\|^2$ pela desigualdade de Bessel. Assim, ela converge, ou seja, satisfaz a hipótese do Lema 10. Este próprio lema afirma a convergência (14). □

Definição 12 Uma BON em $\mathcal{H}$ é um SON $\{\varphi_i,\, i \in I\}$ tal que todo vetor $\psi \in \mathcal{H}$ possui uma expansão

$$\psi = \sum_{i \in I} c_i \varphi_i\,. \tag{15}$$

No caso infinito, $I = \mathbb{N}$, o somatório é no sentido da Eq. (12).

Pela continuidade e linearidade do produto escalar, temos

$$(\,\varphi_i, \psi\,) \equiv (\,\varphi_i, \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j\,) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\,(\,\varphi_i, \varphi_j\,) = c_i\,.$$

Daí, os coefficientes c_i na expansão (15) são unicamente determinadas, a saber

$$c_i = (\,\varphi_i, \psi\,). \tag{16}$$

Eles são chamados de *coeficientes de Fourier* (generalizados). Pelo Lema 10, a norma de ψ satisfaz a identidade de Parseval generalizada:

$$\|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2. \tag{17}$$

É um fato que todo espaço de Hilbert possui uma BON. (Veja [11, Thm 10.18] no caso enumerável.) Além disso, todas BON's de um dado espaço $\mathcal{H}$ possuem a mesma cardinalidade, a chamada *dimensão* do espaço. Ela pode ser finita, contável, ou não-contável. Nos vamos considerar somente o caso de dimensão contável (inclusive finita). (Neste caso, o espaço de Hilbert é chamado de separável.)

Exemplo 13 $\{(1,0,0,\ldots), (0,1,0,\ldots), \ldots\}$ em l^2, veja Exemplo 10.2.1 in [11]. □

Exemplo 14 A família $\{\varphi_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$, onde

$$\varphi_n(x) \doteq \sqrt{\frac{1}{a}}\, e^{ik_n x}\,, \qquad k_n \doteq n\frac{2\pi}{a}, \tag{18}$$

fornece uma BON em $L^2([0,a])$.

Comprovante. O teorema de Fourier afirma que uma função $f \in C^2(\mathbb{R})$ contínua e periódica com període a pode ser expandida como

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n\, e^{ik_n x}, \quad c_n \doteq \frac{1}{a} \int_0^a e^{-ik_n x} f(x) dx, \tag{19}$$

com k_n como em (18), a convergência sendo uniforme. Estas funções são densos em $L^2([0,a])$ [13, Thm. II.9]. Finlmente, convergência uniforme implica convergência no sentido de $L^2([0,a])$ [13]. □

□

Teorema 15 *Seja $\{\varphi_i, i \in I\}$ um SON. Essa família de vetores é uma BON se, e somente se, para todos ϕ, $\psi \in \mathcal{H}$ vale a identidade de Parseval generalizada:*[8]

$$(\,\phi, \psi\,) = \sum_{i \in I} (\,\phi, \varphi_i\,)\,(\,\varphi_i, \psi\,). \tag{20}$$

Comprovante. Se os φ_i fornecem uma BON, as Eqs. (15) e (16) implicam a Eq. (20). Vamos demonstrar a direção inversa. Escrevendo[9]

$$\psi' := \sum_{i \in I} (\,\varphi_i, \psi\,)\,\varphi_i\,,$$

a Eq. (20) afirma que para todos ϕ vale $(\,\phi, \psi\,) = (\,\phi, \psi'\,)$. Isso quer dizer que o vetor $\psi - \psi'$ está em $\mathcal{H}^{\perp}$, que contém apenas o vetor 0, implicando em $\psi = \psi'$. Isso mostra que para todo $\psi \in \mathcal{H}$ vale

$$\psi = \sum_{i \in I} (\,\varphi_i, \psi\,)\,\varphi_i, \tag{21}$$

ou seja, as Eqs. (15) e (16). Falta mostrar que os φ_i são um sistema ortonormal. Para esses fins, aplicamos a equação acima para $\psi = \varphi_j$:

$$\varphi_j = \sum_{i \in I} (\,\varphi_i, \varphi_j\,)\,\varphi_i.$$

Pela independência linear, isso implica $(\,\varphi_i, \varphi_j\,) = \delta_{ij}$. □

BON's contínuas em $L^2(\mathbb{R}^D)$ [7, Cap. II.A.3]. Consideramos a família de funções (ondas planas) $e_{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^D$, definidas por

$$e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \doteq (2\pi)^{-D/2}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{22}$$

Elas não são em $L^2(\mathbb{R}^D)$, mas mesmo assim existe o "produto escalar" com certas outras funções: Se $\psi \in \mathcal{D} \doteq L^2(\mathbb{R}^D) \cap L^1(\mathbb{R}^D)$, entaõ existe para todo $\boldsymbol{k}$ o "produto escalar"[10]

$$(\,e_{\boldsymbol{k}}, \psi\,) := \int \overline{e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})}\,\psi(\boldsymbol{x}) d^D\boldsymbol{x} = (2\pi)^{-D/2} \int e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\psi(\boldsymbol{x}) d^D\boldsymbol{x} \equiv \hat{\psi}(\boldsymbol{k}), \tag{23}$$

ou seja, o valor da transformada Fourier da função ψ em $\boldsymbol{k}$. Consequentemente definimos também

$$(\,\psi, e_{\boldsymbol{k}}\,) := \overline{(\,e_{\boldsymbol{k}}, \psi\,)} \equiv \overline{\hat{\psi}(\boldsymbol{k})}. \tag{24}$$

Com essas definições, a identidade de Parseval

$$\int d^D\boldsymbol{x}\,\overline{\phi(\boldsymbol{x})}\psi(\boldsymbol{x}) = \int d^D\boldsymbol{k}\,\overline{\hat{\phi}(\boldsymbol{k})}\hat{\psi}(\boldsymbol{k})$$

pode ser escrita como

$$(\,\phi, \psi\,) = \int d^D\boldsymbol{k}\,(\,\phi, e_{\boldsymbol{k}}\,)\,(\,e_{\boldsymbol{k}}, \psi\,). \tag{25}$$

Essa equação é completamente análoga à Equ. (20). Por isso a família $\{e_{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^D\}$ é chamada de uma *BON contínua* em $L^2(\mathbb{R}^D)$. Em analogia com a Equ. (21), escrevemos informalmente

$$\psi = \int d^D\boldsymbol{k}\,(\,e_{\boldsymbol{k}}, \psi\,)\,e_{\boldsymbol{k}}\,. \tag{26}$$

[8] Ou "relação de Parseval" [11].

[9] O limite existe pelo Cor. 11.

[10] Mais rigorosamente falando, $e_{\boldsymbol{k}}$ é uma aplicação linear (um "funcional") de $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$. O valor de $e_{\boldsymbol{k}}$ aplicado em $\psi \in \mathcal{D}$ designamos, em abuso de notação, por $(\,e_{\boldsymbol{k}}, \psi\,)$.

Como outro exemplo, consideramos a família de distribuições-delta $\delta_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) := \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$. Eles também não são em $L^2(\mathbb{R}^D)$, mas mesmo assim o "produto escalar" com funções contínuas existe: Para $\psi \in \mathcal{D} \doteq C(\mathbb{R}^D) \cap L^2(\mathbb{R}^D)$ escrevemos

$$(\delta_{\boldsymbol{a}}, \psi) := \int \delta_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})\, \psi(\boldsymbol{x}) d^D \boldsymbol{x} \equiv \psi(\boldsymbol{a}) \quad e \quad (\psi, \delta_{\boldsymbol{a}}) := \overline{(\delta_{\boldsymbol{a}}, \psi)} = \overline{\psi(\boldsymbol{a})}.$$

A identidade

$$(\phi, \psi) = \int d^D \boldsymbol{a}\, \overline{\phi(\boldsymbol{a})}\, \psi(\boldsymbol{a})$$

pode ser agora lida como a relação de Parseval generalizada (20):

$$(\phi, \psi) = \int d^D \boldsymbol{a}\, (\phi, \delta_{\boldsymbol{a}})\, (\delta_{\boldsymbol{a}}, \psi). \tag{27}$$

Entaõ a família $\{\delta_{\boldsymbol{a}},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^D\}$ também é uma BON contínua em $L^2(\mathbb{R}^D)$. Escrevemos também

$$\psi = \int d^D \boldsymbol{a}\, (\delta_{\boldsymbol{a}}, \psi)\, \delta_{\boldsymbol{a}}.$$

BON's contínuas em $\mathcal{H}$ arbitrário [7, Cap. II. C. 2]**.** Que tipo de objeto pode substituir as funções $e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ ou distribuições $\delta_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ num espaço de Hilbert geral $\mathcal{H}$? Naqueles exemplos, as funções $e_{\boldsymbol{k}}$ (ou distribuições $\delta_{\boldsymbol{a}}$) podem ser encaradas como aplicações lineares de um certo subespaço denso para os números complexos, ou seja, funcionais.

Em geral, escolha-se um sub-espaço denso $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ e considera-se as aplicações lineares de $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$ (contínuas numa certa topologia). O conjunto de tais funcionais é também um espaço linear, chamado o *dual* de $\mathcal{D}$, em símbolos $\mathcal{D}'$. O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ pode ser considerado como subespaço de $\mathcal{D}'$, identificando $\psi \in \mathcal{H}$ com a aplicação[11]

$$\mathcal{D} \ni \ \phi \mapsto (\psi, \phi) \ \in \mathbb{C}.$$

Então temos as inclusões

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$$

("Tripla de Gelfand" ou "*rigged Hilbert space*" [4]). Abusando a notação, vamos denotar uma aplicação $\chi \in \mathcal{D}'$ por

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{D} &\to \mathbb{C}, \\ \phi &\mapsto (\chi, \phi)\ , \end{aligned}$$

como se tratasse de um produto escalar. Consequentemente definimos para $\phi \in \mathcal{D}, \chi \in \mathcal{D}'$ e $c \in \mathbb{C}$:

$$(\phi, \chi) \doteq \overline{(\chi, \phi)}, \qquad (c\, \chi, \phi) \doteq \bar{c}\, (\chi, \phi).$$

Os elementos de $\mathcal{D}'$ são chamados de *vetores generalizados* ou também de *bra's*.

Uma *BON contínua* sobre $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ é uma família de vetores generalizados $\big\{\chi_k \in \mathcal{D}', k \in \Omega\big\}$, onde Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ para algum n, tal que para todo $\psi \in \mathcal{D}$ vale

$$(\phi, \psi) = \int_\Omega d^n k\, (\phi, \chi_k)\, (\chi_k, \psi)\, . \tag{28}$$

Escrevemos como antes informalmente

$$\psi = \int_\Omega d^n k\, (\chi_k, \psi)\, \chi_k\, . \tag{29}$$

[11] A topologia em $\mathcal{D}$ deve ser tal que esta aplicação seja contínua.

Relações de ortogonalidade e de completeza. Se $\{\varphi_i,\, i = 1, 2, \ldots\}$ e uma BON a relação de completeza (15) pode ser escrita

$$\sum_{i \in I} P_{\varphi_i} = \mathbb{1}\,, \tag{30}$$

onde P_φ é o projetor definido na Eq. (8) para $N = 1$: $P_{\varphi_i}\psi = (\,\varphi_i, \psi\,)\,\varphi_i$. Analogamente, se $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ é um subespaço e $\chi \in \mathcal{D}'$ um vetor generalizado, denotamos a aplicação $\phi \mapsto (\,\chi, \phi\,)\chi$ de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}'$ por P_χ:

$$P_\chi\,\phi := (\,\chi, \phi\,)\chi. \tag{31}$$

Se $\{\chi_k,\, k \in \Omega\}$ é uma BON contínua sobre $\mathcal{D}$, a equação (29) pode ser agora escrita como

$$\int_\Omega d^n k\, P_{\chi_k} = \mathbb{1}\,. \tag{32}$$

Se o espaço de Hilbert for o $L^2(\mathbb{R}^D)$, então a relação de completeza pode ser escrita como

$$\sum_{i \in I} \overline{\varphi_i(\boldsymbol{x})}\varphi_i(\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{33}$$

$$\int_\Omega d^n k\, \overline{\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})}\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{34}$$

no caso de uma BON ou BON contínua, respetivamente.

Notação de Dirac [7, Cap. II. B]**.** (Veja também [1, Cap. 3] no caso da dimensão finita.) Dado um subespaço $\mathcal{D}$ com dual $\mathcal{D}'$, é costume chamar os vetores em $\mathcal{D}$ de *ket's*, e os vetores generalizados em $\mathcal{D}'$ de *bra's*.[12] Na notação de Dirac, os kets são denotados por $|\phi\rangle \in \mathcal{D}$, e os bra's de $\langle\chi| \in \mathcal{D}'$. A imagem de $|\phi\rangle \in \mathcal{D}$ sob $\langle\chi| \in \mathcal{D}'$ (a qual nós temos denotado por $(\,\chi, \phi\,)$) é denotado por $\langle\chi|\phi\rangle$ – um *bra-cket*. Como acima, os vetores $\psi \in \mathcal{H}$ são considerados casos especiais de vetores generalizados, e consequentemente, o produto escalar e escrito como $\langle\psi|\phi\rangle$, sendo interpretado como a imagem de $|\phi\rangle$ sob o bra $\langle\psi| \in \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$.

Com esta notação, o projetor $P_\phi\psi = \|\phi\|^{-2}(\,\phi, \psi\,)\,\phi$ pode ser escrito como $P_\phi = \|\phi\|^{-2}|\phi\rangle\langle\phi|$ ou, se ϕ é normalizado:

$$P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|, \qquad \text{se } \|\phi\| = 1, \tag{35}$$

e similarmente a aplicação P_χ da Eq. (31). Com isso, as relações de completeza (30) e (32) escrevem-se

$$\sum_{i \in I} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \mathbb{1}\,,$$

$$\int_\Omega d^n k\, |\chi_k\rangle\langle\chi_k| = \mathbb{1}\,,$$

respetivamente.

2 Teorema espectral

2.1 Em espaços vetoriais de dimensão finita

Literatura: Cap. 3.5 em [1].

[12]Notação de [7]: $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, $\mathcal{D}' = \mathcal{E}^*$. Vale mencionar que, em contraste ao que esta sendo sugerido na literatura [7, Cap. II.B.2], não existe "um subespaço discriminado", $\mathcal{D}$, de estados. Dependendo do problema, escolhe-se um subespaço adequado, por exemplo para empregar o teorema espectral de um dado observável, ver abaixo.

Operadores e matrizes hermiteanos. Seja V um espaço vetorial de dimensão n com produto escalar $(\cdot,\cdot)$, e seja A um operador em V. O operador *adjunto* de A, em símbolos A^*, é o operador definido por

$$(A^*u, v) = (u, Av) \qquad \forall u, v \in V. \tag{36}$$

(Exercício: Mostre que isso define um operador. Dica: Lema de Riesz.) Um operador A é chamado de *hermiteano* se $A^* = A$, ou seja, se para todos $u, v \in V$ vale $(u, Av) = (Au, v)$.

Exemplo 16 Seja $\underline{A}$ uma matriz $n \times n$ com entradas A_{ij} complexas. Ela será considerada como um operador no espaço vetorial $\mathbb{C}^n$: Ela aplica o vetor $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ no vetor $\underline{A}\boldsymbol{v}$ com componentes

$$(\underline{A}\boldsymbol{v})_i \doteq \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j. \tag{37}$$

Verificamos que o operador adjunto $\underline{A}^*$ corresponde à matriz transposta e conjugada:

$$\big(\underline{A}^*\big)_{ij} = \overline{A_{ji}} : \tag{38}$$

Realmente, recordando o produto escalar (4) em $\mathbb{C}^n$, temos

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}, \underline{A}\boldsymbol{v}) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} (\underline{A}\boldsymbol{v})_i = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{u_i} A_{ij} v_j = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\overline{A_{ij}} u_i}\, v_j = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{(\underline{A}^*)_{ji} u_i}\, v_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{(\underline{A}^*\boldsymbol{u})_j}\, v_j \\ &= (\underline{A}^*\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).\end{aligned} \tag{39}$$

Em particular, uma matriz é hermiteana se $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$. □

Esse exemplo não é tal particular: Todo espaço vetorial V da dimensão n é isomorfico com $\mathbb{C}^n$, e os operadores (hermiteanos) em V correspondem a matrizes (hermiteanas). Em detalhes, seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma BON em V. Definimos uma aplicação linear U de V sobre $\mathbb{C}^n$ por

$$U\big(\sum_i c_i u_i\big) \doteq (c_1, \dots, c_n)^T. \tag{40}$$

Ela é obviamente bijetor, e ela preserve o produto escalar: Para $v = \sum_i c_i u_i$ e $v' = \sum_i c_i' u_i$ vale

$$(v, v') = \big(\sum_i c_i u_i, \sum_j c_j' u_j\big) = \sum_{i,j} \overline{c_i} c_j' (u_i, u_j) = \sum_i \overline{c_i}\, c_i' = (Uv, Uv').$$

Uma aplicação linear e sobrejetor U com essa propriedade, $(Uv, Uv') = (v, v')$, é chamado de *unitário*. (É facil mostrar que isso é equivalente com $U^* = U^{-1}$.) A um operador A em V corresponde um operador $\underline{A}$ em $\mathbb{C}^n$, ou seja uma matriz, pela definição

$$\underline{A} \doteq UAU^{-1}. \tag{41}$$

Ao operador adjunto A^* corresponde a matriz adjunta, $UA^*U^{-1} = \big(UAU^{-1}\big)^*$. Em particular, se A é hermiteano, $A = A^*$, o mesmo vale para a matriz correspondente, $\underline{A} = \underline{A}^*$.

A matriz que corresponde ao operador unidade $\mathbb{1}$, $\mathbb{1}\, v = v$, é a matriz-unidade I, $I_{ij} \doteq \delta_{ij}$, $U\mathbb{1}\, U^{-1} = I$, independendemente da BON com qual U é definido.

BON's de auto-vetores de operadores hermiteanos. Recordamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *auto-valor* de A se existe um vetor $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$, ou seja,

$$(A - \lambda \mathbb{1})v = 0. \tag{42}$$

Tal vetor v é chamado de *auto-vetor* de A. Se existem d auto-vetores linearmente independentes com o mesmo auto-valor λ, chamamos λ de degenerado com *multiplicidade* d.

Lemma 17 *Seja A um operador hermiteano. Então vale:*
i) Todo auto-valor de A é real.
ii) Auto-vetores de A com auto-valores diferentes são ortogonais, mais precisamente: Sejam $\lambda \neq \lambda'$ auto-valores diferentes do operador A, com auto–vetores correspondentes v, v'. Então $(\, v, v'\,) = 0$.

Comprovante. Sejam λ, λ' auto-valores com auto-vetores correspondentes v, v'. Então vale

$$\begin{aligned}(\, v, Av'\,) &= (\, v, \lambda' v'\,) = \lambda' \,(\, v, v'\,)\\ (\, Av, v'\,) &= (\, \lambda v, v'\,) = \overline{\lambda}\,(\, v, v'\,).\end{aligned}$$

Como os lados esquerdos coincidem (pois A é hermiteano), concluimos que

$$(\overline{\lambda} - \lambda')\,(\, v, v'\,) = 0. \tag{43}$$

No caso $v' = v$ e $\lambda' = \lambda$, essa equação é $(\overline{\lambda} - \lambda)\,\|v\|^2 = 0$. Como $\|v\|^2 \neq 0$, concluimos que $\bar{\lambda} = \lambda$, ou seja, λ é real. Para mostrar o item ii), pegamos $\lambda \neq \lambda'$. Agora a Eq. (43) é $(\lambda - \lambda')\,(\, v, v'\,) = 0$ e implica que $(\, v, v'\,) = 0$, como afirmado em ii). □

Teorema 18 *Todo operador hermiteano possui uma BON de auto-vetores.*

Comprovante. Num primeiro passo, pegamos uma BON de V e consideramos o isomorfismo U definido em (40). A Eq. (42) é equivalente com

$$(\underline{A} - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{v} \neq 0,$$

onde $\underline{A} = UAU^{-1}$ e $\boldsymbol{v} \doteq Uv$. Isso implica que a matriz $\underline{A} - \lambda I$ não é injetor, equivalentemente, a determinante dela é zero. Mas a determinante é um polinômio do grau n, então possui zeros pelo teorema fundamental da algebra. Seja λ_1 um dos zeros. Agora revertemos a argumentação: O fato que a determinante da matriz $\underline{A} - \lambda_1 I$ é zero implica que ela não é injetor, ou seja, existe algum vetor $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ tal que $(\underline{A} - \lambda_1 I)\boldsymbol{u}_1 = 0$. Então o vetor $u_1 \doteq U^{-1}\boldsymbol{u}_1$ satisfaz $Au_1 = \lambda u_1$.

Num segundo passo, consideramos o complemento ortogonal de u_1, $V_1 \doteq (\mathbb{C}u_1)^\perp$, que tem dimensão $n-1$. Como o operador A é hermiteano, ele deixa V_1 invariante: Para todo $v_1 \in V_1$ vale

$$(\, u_1, Av_1\,) = (\, Au_1, v_1\,) = \lambda_1(\, u_1, v_1\,) = 0,$$

o seja, Av_1 também está contido em V_1. Então a restrição $A_1 \doteq A\big|_{V_1}$ é um operador (ou endomorfismo) em V_1,[13] e obviamente ele também é hermiteano. Agora pegamos uma BON do subespaço V_1, e repetimos o argumento do primeiro passo para construir um auto-vetor $u_2 \in V_1$.

[13](A_1 é definido por $A_1 v_1 \doteq Av_1$ para $v_1 \in V_1$.)

No terceiro passo consideramos o espaço $V_2 \doteq \mathrm{span}\{u_1, u_2\}^\perp$, verificamos que A deixa ele invariante também, e construimos um auto-vetor $u_3 \in V_2$ como antes; Assim vai até o $n-1$-esimo passo que fornece um auto-vetor $u_{n-1} \in V_{n-2} \doteq \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_{n-2}\}^\perp$.

No último passo consideramos o espaço $V_{n-1} \doteq \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^\perp$. Ele é unidimensional, ou seja, existe um vetor $u_n \in V_{n-1} \setminus \{0\}$ tal que $V_{n-1} = \mathbb{C}u_n$. Verificamos como antes que A deixa V_{n-1} invariante. Isso implica que existe algum λ_n tal que $Au_n = \lambda_n u_n$, terminando a construção. □

2.2 Operadores auto-adjuntos

Seja A um operador num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se A é contínuo, o domínio coincide (sem perder generalidade) com o espaço $\mathcal{H}$ inteiro. Neste caso, o operador *adjunto* A^* é definido por: $A^*\psi$ é o único vetor tal que para todo $\phi \in \mathcal{H}$ vale

$$(A^*\psi, \phi) = (\psi, A\phi). \tag{44}$$

A maioria de operadores que correspondem à observáveis na MQ são não-contínuos. Um operador não-contínuo A geralmente não pode ser definido em todos vetores, mas apenas no chamado *domínio*, $D(A)$. Neste caso, definimos primeiro o domínio de A^* por

$$D(A^*) := \big\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \ \phi \mapsto (\psi, A\phi) \text{ é contínuo para } \phi \in D(A) \big\}.$$

Se ψ está em esse espaço, o Lema de Riesz afirma que existe um único vetor $\chi \in \mathcal{H}$ tal que vale $(\chi, \phi) = (\psi, A\phi)$ para todo $\phi \in D(A)$. Como χ depende obviamente linearmente de ψ, podemos escrever $\chi =: A^*\psi$. Isto defino o operador adjunto A^* de A.

O operador A é chamado de *hermiteano* se $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^*|_{D(A)} = A$. Equivalentemente, A é hermiteano se para todo $\phi, \psi \in D(A)$ vale

$$(\psi, A\phi) = (A\psi, \phi). \tag{45}$$

Um operador A é chamado de *auto-adjunto* sse

$$D(A^*) = D(A) \quad \text{e} \quad A^* = A.$$

Obviamente, A hermiteano implica A auto-adjunto, mas a inversão vale somente para operadores contínuos. Os operadores que correspondem a observáveis na Mechânica Quântica devem ser auto-adjuntos, por que eles sempre possuem uma BON de auto-vetores (generalizados), ver abaixo, propriedade indispensável para a interpretação do formalismo.

Exemplo 19 O operador X de multiplicação (correspondente ao observável posição na MQ), definido por $\big(X\psi\big)(x) \doteq x\,\psi(x)$ no domínio

$$D(X) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int x^2 |\psi(x)|^2 \, dx < \infty\},$$

é um operador auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R})$. Demonstração em [11, 13]. □

2.3 Teorema espectral

No seguinte seja A um operador em algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com domínio $D(A)$. Recordamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um auto-valor de A se existe um vetor $\varphi \neq 0$ tal que[14]

$$(A - \lambda \mathbb{1})\varphi = 0. \tag{46}$$

[14]Neste caso, obviamente o operador $A - \lambda\mathbb{1}$ não é injetor. Mais geralmente, o *espectro* de A, em símbolos $\sigma(A)$, é o conjunto dos números $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que o operador $A - \lambda\mathbb{1}$ não possui um inverso contínuo. Supomos

Se existem d auto-vetores linearmente independentes com o mesmo auto-valor λ, chamamos λ de degenerado com *multiplicidade* d. Observa que a Eq. (46) é equivalente com

$$(\,\varphi, (A^* - \bar{\lambda}\mathbb{1}\,)\psi\,) = 0$$

para todos ψ no domínio do adjunto A^*. Isso motiva a definição de um auto-vetor generalizado: Supomos que nos temos discriminado um subespaço denso $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

Definição 20 Um vetor generalizado $\chi \in \mathcal{D}'$ é chamado de um *auto-vetor generalizado* de A com auto-valor generalizado λ se para todo $\psi \in \mathcal{D} \cap D(A^*)$ com $A\psi \in \mathcal{D}$ vale

$$(\,\chi, (A^* - \bar{\lambda}\mathbb{1}\,)\psi\,) = 0. \tag{47}$$

(Lembra que agora $(\,\chi, \cdot\,)$ não é necessarimente o produto escalar, mas sim a ação linear $\chi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$.) As vezes escrevemos simbolicamente

$$(A - \lambda\mathbb{1}\,)\chi = 0 \tag{48}$$

em vez de (47).

Recordamos que num espaço de Hilbert de dimensão finita todo operador hermiteano possui uma BON de auto-vetores. A afirmação análoga, o teorema espectral, vale no caso de dimensão infinita para operadores auto-adjuntos.

Exemplo 21 *i*) Consideramos o operador multiplicação X do Exemplo 19: A família $\{\delta_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ é uma BON contínua em $L^2(\mathbb{R})$ de auto-vetores generalizados de X sobre $\mathcal{D} := C_0(\mathbb{R})$,[15] pois para todo $\phi \in \mathcal{D}$ e $a \in \mathbb{R}$ vale $X^*\phi = X\phi$ e

$$(\,\delta_a, X\phi\,) = a\,\phi(a) = a\,(\,\delta_a, \phi\,).$$

ii) A família de ondas planas $\{e_{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^D\}$, ver Eq. (22), é uma BON contínua em $L^2(\mathbb{R}^D)$ de auto-vetores generalizados do operador (correspondente ao momento na mecânica quântica), $P_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, sobre $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$,[16] pois para todo $\phi \in \mathcal{D}$ e $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^D$ vale ${P_j}^*\phi = P_j\phi$ e

$$(\,e_{\boldsymbol{k}}, P_j\phi\,) = \frac{1}{i}\,\widehat{(\partial_j\phi)}(\boldsymbol{k}) = k_j\,\hat{\phi}(\boldsymbol{k}) = k_j\,(\,e_{\boldsymbol{k}}, \phi\,).$$

Então, $e_{\boldsymbol{k}}$ é um auto-vetor generalizado da componente-j do momento, P_j, com auto-valor generalizado k_j.
iii) A mesma família de ondas planas no $\mathbb{R}^D$ é uma BON contínua de auto-vetores generalizados do operador Laplace Δ sobre $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$, pois este operador é hermiteano e para todo $\phi \in \mathcal{D}$ e $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ vale

$$(\,e_{\boldsymbol{k}}, \Delta\phi\,) = \widehat{(\Delta\phi)}(\boldsymbol{k}) = -|\boldsymbol{k}|^2\,(\,e_{\boldsymbol{k}}, \phi\,). \tag{49}$$

□

que o operador A possui auto-valores. Ele obviamente deixa invariante o span de todos auto-vetores para todos auto-valores. Sendo hermiteano, ele também deixa invariante o complemento ortogonal,

$$\mathcal{H}_{\rm cont} := \{\text{auto-vetores}\}^\perp.$$

Então podemos considerar a restrição de A em $\mathcal{H}_{\rm cont}$. Este operador obviamente não tem auto-valores, e o espectro dele é chamado de *espectro contínuo* de A, em símbolos $\sigma_{\rm cont}(A)$:

$$\sigma_{\rm cont}(A) := \sigma(A|_{\mathcal{H}_{\rm cont}}).$$

(O espectro contínuo pode conter auto-valores!) Os elementos chamaremos de auto-valores generalizados.

[15] Denotamos por $C_0(\mathbb{R})$ as funções contínuas com supporte limitado.

[16] Denotamos por $C_0^\infty(\mathbb{R}^D)$ as funções suaves (infinitamente deriváveis) com supporte limitado.

O teorema espectral afirma que essa situação prevalece para todo operador auto-adjunto. Existem vários enunciados equivalentes desse teorema. Os matemáticos preferem a forma usando a "medida com valores projetores" [11, 13]. Nós vamos conhecer este teorema numa forma mais útil para a mecânica quântica, a qual se encontra em [4] e [3].

Teorema 22 (Teorema espectral nuclear) *Seja A um operador auto-adjunto. Então vale:*

i) O espaço $\mathcal{H}$ decompõe em três partes[17]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm pp}(A) \oplus \mathcal{H}_{\rm ac}(A) \oplus \mathcal{H}_{\rm sc}(A), \tag{50}$$

invariantes sob A, com as seguintes propriedades.

$\mathcal{H}_{\rm pp}(A)$ possui uma BON $\{\varphi_i, i \in \mathbb{N}\}$ de auto-vetores de A.

$\mathcal{H}_{\rm ac}(A)$ possui uma BON contínua de auto-vetores generalizadas de A; mais precisamente: Existe uma família de vetores generalizados sobre algum subespaço denso $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_{\rm ac}(A)$

$$\{\chi_{k,j} \in \mathcal{D}',\ k \in \Omega, j = 1, \ldots, d(k)\}$$

onde Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ para algum n, tal que para todo $\psi \in \mathcal{D}$ vale

$$\psi = \int_\Omega \sum_{j=1}^{d(k)} (\, \chi_{k,j}, \psi\,)\, \chi_{k,j}\, d^n k \tag{51}$$

no sentido da Eq. (29), e tal que vale $A\chi_{k,j} = \lambda(k) \cdot \chi_{k,j}$ no sentido da Eq. (48).

Finalmente, em $\mathcal{H}_{\rm sc}(A)$ existe uma BON "generalizada" de auto-vetores generalizados, onde a medida $d^n k$ em (51) é substituida por uma medida $d\mu(k)$ que é singular contínua [13].

ii) O domínio $D(A)$ no qual A é auto-adjunto é dado por

$$D(A) = \big\{\psi \mid \sum_i \lambda_i^2 |(\, \varphi_i, \psi\,)|^2 + \int_\Omega \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda(k)^2 |(\, \chi_{k,j}, \psi\,)|^2\, d^n k < \infty \big\}, \tag{52}$$

e em $\psi \in D(A)$ o operador A age como

$$A\psi = \sum_i \lambda_i (\, \varphi_i, \psi\,)\, \varphi_i + \int_\Omega \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda(k) (\, \chi_{k,j}, \psi\,)\, \chi_{k,j}\, d^n k. \tag{53}$$

Os índices (pp, ac, sc) se referem à medida espectral do operador A [13]: pp = "pure point", ac = "absolutamente contínuo", sc = "singular contínuo".

A maioria dos operadores de interesse na MQ não possuem espectro "singular contínuo", ou seja, o subespaço $\mathcal{H}_{\rm sc}(A)$ é ausente. Vale mencionar que na mecânica quântica no caso do Hamiltoniano H, o espaço $\mathcal{H}_{\rm pp}(H)$ coincide com os estados ligados e $\mathcal{H}_{\rm ac}(H)$ com os estados de espalhamento.

O número $d(k)$ é a multiplicidade do auto-valor generalizado $\lambda(k)$. O conjunto dos auto-valores de $A|_{\mathcal{H}_{\rm pp}}$ é o chamado *espectro discreto* de A (!!), e o conjunto dos números $\lambda(k)$, $k \in \Omega$, é o chamado *espectro contínuo*.

Lemma 23 *O espéctro de um operador auto-adjunto é real.*

Comprovante. A relação de completeza (28) implica as duas equações

$$(\, \psi, A\phi\,) = \int_\Omega d\mu(k)\, \overline{(\, \chi_k, \psi\,)} (\, \chi_k, A\phi\,) = \int_\Omega d\mu(k)\, \overline{\lambda(k)}\, \overline{(\, \chi_k, \psi\,)} (\, \chi_k, \phi\,),$$

$$(\, A^*\psi, \phi\,) = \int_\Omega d\mu(k)\, \overline{(\, \chi_k, A^*\psi\,)} (\, \chi_k, \phi\,) = \int_\Omega d\mu(k)\, \lambda(k)\, \overline{(\, \chi_k, \psi\,)} (\, \chi_k, \phi\,).$$

[17] Escrevemos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ se $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$.

(Na primeira linha escrevemos $(\chi_k, A\phi) = (\chi_k, A^*\phi) = \overline{\lambda(k)}(\chi_k, \phi)$ pois $A = A^*$ e χ_k é um auto-vetor generalizado no sentido da Eq. (47). Na segunda linha escrevemos $\overline{(\chi_k, A^*\psi)} = \overline{\overline{\lambda(k)}(\chi_k, \psi)} = \lambda(k)\overline{(\chi_k, \psi)}$.) Como A é auto-adjunto, as duas linhas coincedem, implicando em $\overline{\lambda(k)} = \lambda(k)$ para todo $k \in \Omega$. □

Os projetores espectrais. Dado um operador auto-adjunto A com uma BON generalizada $\{\chi_k,\ k \in \Omega\}$ de auto-vetores generalizados, definimos para cada $I \subset \mathbb{R}$ um operador E_I por

$$E_I\psi := \int_{k:\lambda(k)\in I} d\mu(k)\,(\chi_k, \psi)\,\chi_k. \tag{54}$$

Verifique-se que este operador é um projetor ortogonal.[18] (Este fato vamos também mostrar em frente, veja Eq. (56).) Ele é chamado o *projetor espectral* do operador A para o intervalo I. Vale destacar que os projetores espectrais são únicamente associados com o operador A, enquanto que os dados $\mathcal{D}, \Omega, d\mu(k), \chi_k$ caracterizando a BON de auto-vetores generalizados para o operador A *não* são únicos. A família de projetores E_I, $I \subset \mathbb{R}$ é chamada a medida com valores projetores associada com A. O teorema espectral pode ser formulado em termos dessa medida, ver [11, 13].

Cálculo funcional. Literatura: Cap. 3.5 ("Functions of Matrices", p. 224 f) em [1] no caso da dimensão finita.

Seja A um operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função mensurável [14, 15]. Então define-se o operador $f(A)$ pela seguinte maneira: Seja $\{\chi_k\}$ uma BON generalizada de auto-vetores generalizados cuja existência foi afirmada no teorema espectral 22. O domínio de $f(A)$ é dado por

$$D(f(A)) := \Big\{\phi \in \mathcal{H} : \underbrace{\int_\Omega d\mu(k)\,|f(\lambda(k))|^2\,|(\chi_k, \phi)|^2}_{=\|f(A)\phi\|^2} < \infty\Big\}.$$

Para $\phi \in D(f(A))$ define-se

$$f(A)\phi := \int_\Omega d\mu(k)\,f(\lambda(k))(\chi_k, \phi)\,\chi_k$$

no sentido da Eq. (29). (Exemplo: A^{-1}!)

Um fato importante é que a aplicação $f \mapsto f(A)$ é um isomorfismo de álgebras involutivas: Em particular, vale

$$(f \cdot g)(A) = f(A)\,g(A), \qquad \bar{f}(A) = \big(f(A)\big)^*, \qquad 1(A) = \mathbb{1}\,, \tag{55}$$

onde as funções $f \cdot g$ e $\bar{f}$ são definidas por $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ e $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$, e 1 é a função constante: $1(x) = 1$.

Como exemplo, aplicamos o cálculo funcional à função característica c_I de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, veja Eq. (**??**). Obviamente, o operador $c_I(\hat{A})$ é justamente o operador E_I definido na Eq. (54). Como a função característica satisfaz $c_I \cdot c_I = c_I = \overline{c_I}$, a Eq. (55) implica

$$c_I(A)\,c_I(A) = c_I(A) = c_I(A)^*. \tag{56}$$

Isto significa justamente que o operador $c_I(A)$ é um projetor ortogonal, como afirmado acima.

[18] Um *projetor* é um operador P com $P^2 = P$. ($P^2 := P \circ P$.) Um projetor *orthogonal* é um projetor hermitiano.

Mecânica quântica. Na mecânica quântica, estados de um sistema são descritos por vetores normados em um espaço de Hilbert, $\|\psi\| = 1$. Ademais, observáveis do sistema são descritos por operadores auto-adjuntos neste espaço, e os possíveis valores de um observável constituem justamente o espectro do operador correspondente. A probabilidade que a medição de um observável A resulta em algum valor no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se o sistema for preparado no estado correspondente a $\psi \in \mathcal{H}$, é dada por

$$\|E_I \psi\|^2 \equiv (\, \psi, E_I \psi \,) = \int_{k:a(k)\in I} d\mu(k)\, |(\, \chi_k, \psi \,)|^2 \,, \tag{57}$$

onde $E_I \equiv c_I(\hat{A})$ é o projetor espectral do operador auto-adjunto correpondente a A.

A evolução temporal do sistema é descrito por uma curva $t \mapsto \psi_t$ em $\mathcal{H}$, regida pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_t = \hat{H} \psi_t, \tag{58}$$

onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano do sistema. Se nos temos uma BON de auto-vetores generalizados de $\hat{H}$ na mão, a solução dessa equação pode ser construída usando o cálculo funcional: Define

$$U_t := \exp\big(- it\hat{H}/\hbar \big)$$

no sentido do cálculo funcional. Este operador é unitário[19] para todo t, e a família $t \mapsto U_t$ satisfaz a propriedade

$$U_t\, U_s = U_{t+s}, \qquad U_0 = \mathbb{1} \,.$$

Mais importantemente, ela satisfaz a EDO

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_t = \hat{H} U_t. \tag{59}$$

Isso implica que para qualquer ϕ no domínio do Hamiltoniano, a curva $\psi_t := U_t \phi$ satisfaz a equação de Schrödinger (58) com condição inicial $\psi_0 = \phi$.

2.4 Análise espectral do operador Laplace

O operador Laplace Δ no $\mathbb{R}^n$ é definido por

$$\Delta f \doteq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f.$$

2.4.1 Considerações gerais.

Nos consideramos uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitada e conexa, cuja borda $\partial\Omega$ é uma hiper-superfície suave (pelo menos em pedaços). O Laplace é considerado como um operador no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ com 2 domínios diferentes, correspondentes às condições de Dirichlet ou Neumann, respectivamente:

$$C^2_D(\Omega) := \{ f \in C^2(\Omega) |\; f(\boldsymbol{r}) = 0 \;\forall \boldsymbol{r} \in \partial\Omega \} \tag{60}$$

$$C^2_N(\Omega) := \{ f \in C^2(\Omega) |\; \boldsymbol{n} \cdot \nabla f(\boldsymbol{r}) = 0 \;\forall \boldsymbol{r} \in \partial\Omega \}. \tag{61}$$

Aquí, $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal à hiper-superfície $\partial\Omega$.

[19] Para demonstrar isto, escrevemos $U_t = f(\hat{H})$, onde $f(x) := exp(-itx/\hbar)$. A Eq. (55) implica

$$U_t U_t^* = f(\hat{H}) \bar{f}(\hat{H}) = (f \cdot \bar{f})(\hat{H}) = 1(\hat{H}) = \mathbb{1} \,,$$

pois $f \cdot \bar{f}$ é a função constantemente 1.

Lemma 24 *O operador Laplace, com um dos dois domínios* (60) *ou* (61)*, satisfaz as seguintes propriedades.*
i) Ele é hermiteano com respeito ao produto escalar em $L^2(\Omega)$.
ii) Todos auto-valores são não-positivos (≤ 0). Com domínio (60)*, 0 não é um auto-valor, enquanto com domínio* (61)*, 0 é sim um auto-valor (com auto-vetores as funções constantes).*

Comprovante. Ad *i*). Recordamos a segunda identidade de Green:

$$\int_\Omega \big((\Delta g)f - g\Delta f\big)d^n\boldsymbol{r} = \oint_{\partial\Omega} \big((\nabla g)f - g\nabla f\big)\cdot d\boldsymbol{a}.$$

(Ela segue da regra de produto $\nabla\cdot(f\nabla g) = \nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g$, e do teorema de Gauss.) Se f e g são em C^2_D ou C^2_N, o lado direito se anula. Levando em conta que $\Delta\bar{g}(x) = \overline{\Delta g(x)}$, isso mostra que Δ é hermiteano.

Ad *ii*). Seja $\Delta v = \lambda\cdot v$. Usando $v\Delta v = \nabla(v\cdot\nabla v) - \nabla v\cdot\nabla v$ e usando as condições de contorno, temos

$$\lambda\,(\,v,v\,) = (\,v,\Delta v\,) = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\,d^n\boldsymbol{r}\,.$$

Como o lado direito é ≤ 0 e $(\,v,v\,) > 0$, λ deve ser ≤ 0. □

Como os auto-valores são negativos, podemos escrever eles na forma $\lambda = -k^2$. Com isso, a equação (42) para os auto-vetores v tem a forma

$$(\Delta + k^2\mathbb{1}\,)v = 0. \tag{62}$$

Essa equação é chamada de *equação de Helmholtz*.

Teorema 25 *O operador Laplace, com um dos dois domínios* (60) *ou* (61)*, possui uma BON de auto-funções $v_n \in C^2_{D/N}(\Omega)$, $n\in\mathbb{N}_0$, com auto-valores λ_n correspondentes,*

$$\Delta v_n = \lambda_n\cdot v_n,$$

com a seguinte propriedade: A sequência $|\lambda_n|\to\infty$ se $n\to\infty$ tal rápido que a serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2} \;<\; \infty \tag{63}$$

converge.

Uma demonstração desse teorema encontra-se em [9]. Nos vamos adotar a convenção que os auto-valores são enumerados de tal maneira que $0 = \lambda_0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots$, e o auto-valor $\lambda_0 \equiv 0$ aparece só no caso de CC de Neumann.

A convergência da serie (63) implica na convergência *uniforme* da expansão de uma função em termos das auto-funções. Recordamos que para toda função $f\in L^2(\Omega)$ a série[20]

$$\sum_{n=1}^{N}(\,v_n,f\,)\,v_n \tag{64}$$

converge para f no sentido de L^2 se $N\to\infty$. Para $r\in\mathbb{N}$ denotamos por $C^{2r}_D(\Omega)$ e $C^{2r}_N(\Omega)$ os espaços de funcões f em $C^{2r}(\Omega)$ tal que $f,\,\Delta f,\ldots,\Delta^r f$ satisfazem a condição de contorno respectiva:

$$C^{2r}_D(\Omega) := \{f\in C^{2r}(\Omega)|\;:\; f = \Delta f = \cdots = \Delta^r f = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$$
$$C^{2r}_N(\Omega) := \{f\in C^{2r}(\Omega)|\;:\; \boldsymbol{n}\cdot\nabla f = \boldsymbol{n}\cdot\nabla\,\Delta f = \cdots = \boldsymbol{n}\cdot\nabla\,\Delta^r f = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

[20]Lembra que $(\,v_n,f\,) = \int_\Omega d^n\boldsymbol{r}\,\overline{v_n(\boldsymbol{r})}\,f(\boldsymbol{r})$.

Corolário 26 *Sejam $v_n \in C^2_{D/N}(\Omega)$ uma BON de auto-funções do operadors Laplace que satisfazem a seguinte propriedade: Existe um número $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\boldsymbol{r} \in \Omega$ vale a cota*

$$|v_n(\boldsymbol{r})| \leq M. \tag{65}$$

Então vale:
i) Para $f \in C^{2r}_{D/N}(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$, os coeficientes de Fourier caem como

$$|(\, v_n, f\,)| \leq \frac{c}{|\lambda_n|^r}. \tag{66}$$

ii) Para $f \in C^4_{D/N}(\Omega)$ a série (64) converge para f uniformemente, *e para $f \in C^6_{D/N}(\Omega)$ a série*

$$\sum_{n=1}^{N} (\, v_n, f\,)\, \Delta v_n \equiv \sum_{n=1}^{N} (\, v_n, f\,)\, \lambda_n v_n \tag{67}$$

converge para Δf, também uniformemente.

A última afirmação significa que o operador Laplace "age embaixo do somatório":

$$\Delta f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \lambda_n\, v_n,$$

uniformemente.

Comprovante. Ad *i*). Podemos supor que $\lambda_n \neq 0$. Nesse caso podemos escrever $v_n = \frac{1}{\lambda_n} \Delta v_n$. Então temos

$$(\, v_n, f\,) = \frac{1}{\lambda_n}\, (\, \Delta v_n, f\,) = \frac{1}{\lambda_n}\, (\, v_n, \Delta f\,)$$

Repitindo esse argumento r vezes, chegamos em $(\, v_n, f\,) = \frac{1}{(\lambda_n)^r} (\, v_n, \Delta^r f\,)$. Com isso temos

$$|(\, v_n, f\,)| \leq \frac{1}{|\lambda_n|^r}\, |(\, v_n, \Delta^r f\,)| \leq \frac{1}{|\lambda_n|^r}\, \|\Delta^r f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(No último passo usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato que v_n é normado.) Por hipótese, $\Delta^r f$ é uma função contínua numa região compacta e por isso é em $L^2(\Omega)$, ou seja, $\|\Delta^r f\|_{L^2} < \infty$. Isso mostra a cota (66).

Ad *ii*). Usando (65), concluimos que para $f \in C^4_{D/N}(\Omega)$ $(r = 2)$ os termos da série (64) satisfazem a cota

$$|(\, v_n, f\,)\, v_n(\boldsymbol{r})| \leq \frac{c}{\lambda_n^2}$$

para todo $\boldsymbol{r} \in \Omega$. Como a série $\sum_n \lambda_n^{-2}$ converge pelo Teorema 25, o critério de Weierstrass ("teste M de Weierstrass") é aplicável, afirmando que a série (64) converge uniformemente. Similarmente, para $f \in C^6_{D/N}(\Omega)$ $(r = 3)$ os termos da serie (67) são uniformemente limitados por $c|\lambda_n|^{-2}$, então essa série converge uniformemente. Ademais, por uma generalização do Lemma 33, o Laplace pode ser posto em evidência do somatório, $\sum c_n \Delta v_n = \Delta \sum c_n v_n$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Daremos alguns exemplos para o Teorema 25 no seguinte. A saber, consideremos como Ω um intervalo na reta real, um retângulo em $\mathbb{R}^2$, um cubo no $\mathbb{R}^n$, o disco em $\mathbb{R}^2$, a esfera em $\mathbb{R}^3$ e a bola em $\mathbb{R}^3$. A análise espectral do Laplace em essas regiões levará às funções de Bessel, polinômios de Legendre, harmônicas esféricas e funções de Bessel esféricas.

2.4.2 Intervalo em $\mathbb{R}$.

O operador Laplace em uma dimensão é justamente a segunda derivada, $\Delta f = f''$. Consideramos o Laplace como um operador no espaço de Hilbert $L^2(I)$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, com domínio contido em $C^2(I)$. Para obter um operador auto-adjunto (e não só hermiteano), precisamos restringir o domínio, por especificação de condições de contorno. Consideremos três domínios ou tipos de condições de contorno (CC de Dirichlet, Neumann ou periódicos), cada um implicando em uma família de auto-funções que fornece uma BON's em $L^2([0,a])$:

$$\begin{aligned}
C^2_D([0,a]) &:= \{f \in C^2([0,a]) |\, f(0) = 0 = f(a)\} && \text{(CC de Dirichlet)}\\
C^2_N([0,a]) &:= \{f \in C^2([0,a]) |\, f'(0) = 0 = f'(a)\} && \text{(CC de Neumann)}\\
C^2_P([0,a]) &:= \{f \in C^2([0,a]) |\, f(0) = f(a),\ f'(0) = f'(a)\ \} && \text{(CC periódicas)}
\end{aligned}$$

Em $C^2_D([0,a])$ consideramos a família $\{u^D_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, onde

$$u^D_n(x) \doteq \sqrt{\frac{2}{a}}\,\mathrm{sen}\,(k_n x), \qquad k_n \doteq n\frac{\pi}{a}. \tag{68}$$

Em $C^2_N([0,a])$, consideramos a família $\{u^N_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$, onde ($k_n$ como na Eq. (68))

$$u^N_n(x) \doteq \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\,\cos(k_n x), & n > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}, & n = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Em $C^2_P([0,a])$, consideramos a família $\{u^P_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$, onde

$$u^P_n(x) \doteq \sqrt{\frac{1}{a}}\,\exp(i k'_n x)\,, \qquad k'_n \doteq n\frac{2\pi}{a}. \tag{70}$$

Observa que k'_n é o duplo do que o k_n das Eqs. (68) e (69).

Teorema 27 *Cada uma das três famílias $\{u^D_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{u^N_n,\, n \in \mathbb{N}_0\}$ e $\{u^P_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ fornece uma BON de auto-vetores do operador Laplace em $L^2([0,a])$. Os respectivos auto-valores $-k_n^2$ resp. $-{k'_n}^2$.*

Isso resulta em três diferentes domínios do operador Laplace, nos quais ele é auto-adjunto (ou seja, três operadores diferentes). Os respetivos domínios de auto-adjuntice são *maiores* que os conjuntos C^2_D, C^2_N e C^2_P, respetivamente: Eles são dados por (52):

$$D_{D/N/P}(\Delta) = \left\{ f \in L^2[0,a] : \sum_{n=1}^{\infty} n^4\, |(\, u_n^{D/N/P}, f\,)|^2 < \infty \right\}.$$

Comprovante. Verifique-se facilmente que todas funções são auto-vetores do operador Δ, com auto-valores $-k_n^2$ resp. $-{k'_n}^2$.

Já verificamos no Exemplo 14 que a família $\{u^P_n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ é uma BON em $L^2([0,a])$. Pelo isomorfismo $U : L^2[0,a] \to L^2[-a,a]$ definido por $(Uf)(x) \doteq 2^{-\frac{1}{2}} f(2x-a)$, isso implica que as funções $(2a)^{-\frac{1}{2}} e^{ik_n x}$ fornecem uma BON em $L^2[-a,a]$ (com $k_n = n\frac{\pi}{a}$).

Para mostrar que a família $\{u^D_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ é uma BON, consideramos uma função qualquer $f \in L^2([0,a])$ e extendemos ela antissimetricamente para $L^2[-a,a]$ pela definição

$$\tilde{f}(x) \doteq \begin{cases} f(x), & x \in [0,a] \\ -f(-x), & x \in [-a,0) \end{cases}$$

Essa função pode ser expandida em termos da BON mencionada. A antissimetria $\tilde{f}(x) = -\tilde{f}(-x)$ implica relações entre os coeficientes de Fourier:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{ik_n x} = \tilde{f}(x) = -\tilde{f}(-x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{-ik_n x} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}\, e^{ik_n x}\,,$$

que implica $c_n = -c_n$ para todo n. (Em particular $c_0 = 0$.) Com isso, a expansão de $\tilde{f}$ fica

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2ic_n \operatorname{sen}(k_n x)\,.$$

O caso da família $\{u_n^N,\, n\in\mathbb{N}\}$ funciona analogamente, por extensão simetrica em vez de antissimetrica. $\square$

2.4.3 Retângulo no $\mathbb{R}^2$

Separação de variáveis!

2.4.4 Disco no $\mathbb{R}^2$

Aquí, a região Ω seja o disco com raio a,

$$D_a \doteq \{\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{r}\|\le a\}\,.$$

Consideremos coordenadas polares no disco, $r \doteq \|\boldsymbol{r}\|$ e $\varphi \doteq \arctan y/x$. Nessas coordenadas, o operador Laplace tem a forma

$$\Delta = \frac{1}{r}\partial_r r\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\,. \tag{71}$$

Procuramos soluções $u \in C_D^2(D_a)$ da equação de Helmholtz (62), satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet: $u(a,\phi) = 0$ para todos $\varphi\in[0,2\pi)$. Para esses fins, procuramos soluções da forma $u(r,\varphi) =: R(r)\Phi(\varphi)$. Com isso, $\partial_r u(r,\varphi) = R'(r)\Phi(\varphi)$ e $\partial_\varphi u(r,\varphi) = R(r)\Phi'(\varphi)$. A condição de Dirichlet e a continuidade e diferenciabilidade implicam

$$R(a) = 0, \qquad \Phi(2\pi) = \Phi(0),\ \Phi'(2\pi) = \Phi'(0) \tag{72}$$

respetivamente. A Eq. (62) de Helmholtz, $(\Delta + k^2)u = 0$, implica

$$\big(\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r R\big)\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' + k^2 R\Phi = 0.$$

Multiplicando os 2 lados por $r^2/(R\Phi)$ dá

$$\underbrace{\frac{r\partial_r r\partial_r R}{R} + r^2k^2}+\underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}} = 0. \tag{73}$$

Temos uma equação da forma $f(r) + g(\varphi) = 0$, que implica que f e g são constantes: Existe uma constante λ tal que $g(\varphi) = -f(r) = \lambda$ para todos r,φ. Em particular, $\Phi'' = \lambda\Phi$, ou seja, a função Φ é um auto-vetor do Laplace no intervalo $[0,2\pi]$. Pela condição de contorno (72), ela pertence ao $C_P^2([0,2\pi])$. Por isso ela deve ser proporcional a uma das auto-funções u_n^P: Existe um $c\in\mathbb{C}$ e um $m\in\mathbb{Z}$ tal que $\lambda = -m^2$ e

$$\Phi(\varphi) = \Phi_m(\varphi) := ce^{im\varphi}, \qquad \Phi'' = -m^2\Phi. \tag{74}$$

A equação para R vira

$$\big(\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r - \frac{m^2}{r^2} + k^2\big)R = 0. \tag{75}$$

Introduzindo a variável a-dimensional $x \doteq kr$, e escrevendo $R(r) =: y(x)$, isso é equivalente à EDO de Bessel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (1 - \frac{m^2}{x^2})y = 0. \tag{76}$$

Tem duas soluções linearmente independentes dessa EDO. Uma delas (a função de Neumann N_m) é singular na origem $r = 0$ e deve ser desconsiderada no nosso contexto (pois R deve ser contínua). A outra solução é a *funções de Bessel* $y = J_{|m|}$,

$$J_m(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(m+\nu)!}(x/2)^{m+2\nu}, \qquad m \geq 0. \tag{77}$$

(Veja [6, Cap. 9.7]. Em [1], essa solução da EDO (76) é construida em detalhes na p. 570 ff, Cap. 9.5, e discutida em Cap. 11.1.) Cada uma dessas funções tem um conjunto denumerável de zeros: Denotamos por $x_{m,\nu}$ o ν-esimo zero da função $J_{|m|}$, ordenados tal que $x_{m,1} < x_{m,2} < \dots$. A condição de contorno (72), $R(a) \equiv J_{|m|}(ka) = 0$ que nossa solução $R(r) = J_{|m|}(kr)$ deve satisfazer implica que ka coincide com um does zeros de $J_{|m|}$, ou seja, existe um ν tal que

$$k = \frac{x_{m,\nu}}{a} =: k_{m,\nu}.$$

Nossa solução para R é então $R(r) = R_{m,\nu}(r) = J_{|m|}(k_{m,\nu} r)$.

Resumindo, achmos a solução

$$u(r,\varphi) = u_{m,\nu}(r,\phi) = e^{im\varphi}\, J_{|m|}(k_{m,\nu} r). \tag{78}$$

que satisfaz a equção de Helmholtz $\Delta u_{m,\nu} = -(k_{m,\nu})^2 u_{m,\nu}$. Na verdade, isso já é uma BON de auto-funções do operador Δ:

Corolário 28 *Depois normalização, a família* $\{u_{m,\nu},\, m \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{N}_0\}$ *é uma BON em* $L^2(D_a)$.

Tabela com a ν-êsima raiz $x_{m,\nu}$ da função $J_{|m|}$:

		$\nu =$ 1	2	3
	0	2,40	5,52	8,65
	1	3,83	7,02	
m=	2	5,14	8,42	
	3	6,38	9,76	
	4	7,6		

2.4.5 Cilíndro no $\mathbb{R}^3$

2.4.6 Bola no $\mathbb{R}^3$

Literatura:
[1], Cap. 9.3: Equ. de Helmholtz $(\Delta + k^2)v = 0$ em coorenadas esféricas;
Cap. 11.7: Funções esféricas de Bessel j_l;
Cap. 12.5, 12.6: Funções associadas de Legendre P_l^m e harmônicos esféricos.

[6]: Cap. 9.1 (p. 338) e 9.2 ("Exemplo 2", p. 339 ff):
Equ. de Helmholtz $(\Delta + k^2)v = 0$ em coordenadas esféricas;
Cap. 9.8: Funções associadas de Legendre P_l^m e harmônicos esféricos;
Cap. 9.9: Funções esféricas de Bessel j_l.

3 EDPs

Literatura:
[6], Cap. 11.6: Sturm-Liouville, 11.7,11.8: EDO's, EDP's. Cap. 8.6: Método de Fourier.
[1], Cap. 10: Sturm-Liouville. 10.5: Funções de Green.
[8, 10] [2, Cap. 5]: Método de Fourier.
[5, Cap. 10], [16, Cap. IV]

Consideremos as EDP's de Poisson, difusão, e de onda, todas não-homogêneas, mas com condições de contorno homogêneas (ou de Dirichlet ou de Neumann), e resolvemo-las pelo chamado método de Fourier.

3.1 Equação de Poisson

Seja h uma função dada na região Ω (limitada). Procuramos uma solução $u(\boldsymbol{r})$ da EDP

$$\Delta u = h \quad \text{em } \Omega, \tag{79}$$

a qual ainda deve satisfazer uma das condição de contorno

$$u(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{r} \in \partial G \quad \text{(D), ou} \tag{80}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla u(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{r} \in \partial G \quad \text{(N)} \tag{81}$$

A primeira (D) é chamado a condição de contorno de Dirichlet, e a segunda a de Neumann. (h também deve satisfazer a condição de contorno correspondente.) A EDP (79) aparece na física como equação de Poisson, onde u significa o potencial eletrostático V, e h é $(-1)/\varepsilon_0$ vezes a densidade de carga ρ. Em geral, u é algum campo observável do sistema, a EDP (79) carateriza um estado estacionário (de equilíbrio) do sistema, e o lado direito (h) tem o papel de uma fonte.

Para achar a solução, o primeiro passo é determinar uma BON $\{v_n\}$ de auto-funções do operador Laplace em $C^2_D(\Omega)$ no caso de condição de contorno (D), ou em $C^2_N(\Omega)$ no caso de condição de contorno (N). Supondo que as duas funções u e h são em $L^2(\Omega)$ (que é o caso se eles são contínuas), podemos fazer as expansões em termos da BON

$$u = \sum_n c_n \, v_n, \qquad h = \sum_n (\, v_n, h\,) v_n. \tag{82}$$

Observa que os coeficientes de Fourier c_n da função u são desconhecidos, enquanto que os coeficientes $(\, v_n, h\,)$ de h são conhecidos. Supondo ainda que u é no domínio de auto-adjuntice do operador Δ (dado por (52), maior que $C^2_{D/N}(\Omega)$), podemos trocar o Laplace com o somatório infinito, ver Eq. (53), e a EDP (79) vira

$$\sum_n \underbrace{c_n \lambda_n} \, v_n = \sum_n \underbrace{(\, v_n, h\,)} \, v_n \, ,$$

onde usamos $\Delta v_n = \lambda_n \cdot v_n$. Por independência linear dos v_n, isso implica

$$c_n = \frac{(\, v_n, h\,)}{\lambda_n} \quad \text{se } \lambda_n \neq 0.$$

No caso de condições de Neumann, um auto-valor é zero, $\lambda_0 = 0$, e o coeficiente c_0 correspondente é indeterminado. Para todos outros auto-valores existe um $\delta > 0$ tal que $|\lambda_n| > \delta$ pelo Teorema 25. Então $|c_n|^2 \leq |(\, v_n, h\,)|^2/\delta^2$, e a série $\sum |c_n|^2$ converge. Isto implica pelo Lema 10 que a série

$$u \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\, v_n, h\,)}{\lambda_n} \, v_n \tag{83}$$

converge no sentido de L^2. Concluimos que isso é a solução da EDP (79) com condição de contorno (C) ou (N) respectivamente, e que ela é única (módulo uma constante no caso (N)).

Se a função h é suficientemente bem-comportado, podemos afirmar mais:

Teorema 29 *Supoem que os v_n satisfazem a cota (65). Se $h \in C^4_{D/N}(\Omega)$, a série (83) converge uniformemente no fecho $\overline{\Omega}$ de Ω, e satisfaz a EDP (79) e a condição de contorno correspondente.*

No caso de CC de Dirichlet (todos λ_n são $\neq 0$ e) a solução é única, e no caso de CC de Neumann a solução é única módulo uma constante.

3.2 EDP de difusão

Consideramos a EDP

$$(\Delta - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t})u(\boldsymbol{r}, t) = h(\boldsymbol{r}, t)\,, \tag{84}$$

onde D é uma constante positiva, e h é uma função conhecida. Procuramos uma solução $u(\boldsymbol{r}, t)$ dessa EDP para todo $(\boldsymbol{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+_0$, a qual ainda deve satisfazer uma das condições de contorno (D ou N)

$$u(\boldsymbol{r}, t) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{r}, t) \in \partial G \times \mathbb{R}^+_0 \quad \text{(D), ou} \tag{85}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla u(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{r}, t) \in \partial G \times \mathbb{R}^+_0 \quad \text{(N)} \tag{86}$$

Além disso, requeremos a condição inicial (CI):

$$u(\boldsymbol{r}, 0) = u_0(\boldsymbol{r}) \quad \forall \boldsymbol{r} \in \Omega, \tag{87}$$

onde u_0 é uma função dada. A EDP (84) aparece na física como equação de difusão, onde u significa a concentração de uma substância, D é o coeficiente de difuão, e h é uma “densidade de fonte” (dividido por D) [6].

Como antes, o primeiro passo é determinar uma BON $\{v_n\}$ de auto-funções do operador Laplace, com domínio $C^2_D(\Omega)$ no caso de condição de contorno (D), e $C^2_N(\Omega)$ no caso de condição de contorno (N). Escrevemos $u(\boldsymbol{r}, t) =: u_t(\boldsymbol{r})$ e $h(\boldsymbol{r}, t) =: h_t(\boldsymbol{r})$ e consideremos t como parámetro. (A função $u_0(\boldsymbol{r}) \equiv u(\boldsymbol{r}, 0)$ é dada pela condição inicial (87).) As duas funções u_t e h_t são supostamente contínuas, numa região compacta, e daí são em $L^2(\Omega)$. Fazemos as expansões em termos da BON

$$u_t = \sum_n c_n(t)\, v_n, \qquad h_t = \sum_n (\, v_n, h_t\,) v_n. \tag{88}$$

Como antes, o objetivo é determinar os coeficientes de Fourier $c_n(t)$ da função (desconhecida) u_t. Trocando (com justificativa posterior!) o Laplace com o somatório infinito, a EDP (84) vira

$$\sum_n \underbrace{\big(\lambda_n c_n(t) - \frac{1}{D}\dot{c_n}(t)\big)}\, v_n = \sum_n \underbrace{(\, v_n, h_t\,)}\, v_n\,,$$

onde usamos $\Delta v_n = \lambda_n \cdot v_n$. Por independência linear dos v_n, isso implica para cada n a EDO

$$\dot{c_n}(t) - D\lambda_n c_n(t) = -D\,(\, v_n, h_t\,) =: -D\, b_n(t).$$

A solução dessa EDO é

$$c_n(t) = c_n(0)e^{\lambda_n D t} - D\int_0^t dt' b_n(t')e^{\lambda_n D(t-t')}. \tag{89}$$

(Observe que $\lambda_n = -|\lambda_n| < 0$.) As constantes $c_n(0)$ são determinadas pela condição inicial atraves da expansão (88):

$$c_n(0) = (\, v_n, u_0\,). \tag{90}$$

Concluimos que a solução da EDP (84) com condição de contorno (C) ou (N) respectivamente, e condição inicial (87) deveria ser a série

$$u(\boldsymbol{r},t) \doteq \sum_n \Big\{ c_n(0) e^{\lambda_n D t} - D \int_0^t dt' b_n(t') e^{\lambda_n D(t-t')} \Big\}\, v_n(\boldsymbol{r}), \tag{91}$$

com $c_n(0) \doteq (\, v_n, u_0\,)$ e $b_n(t) \doteq (\, v_n, h_t\,)$. Recordamos que $\lambda_n \equiv -|\lambda_n| < 0$.

Teorema 30 *i) Para todo $t \geq 0$ fixo, a série* (91) *converge no sentido de $L^2(\Omega)$, e fornece a única solução da EDP* (84) *com condição de contorno* (85) *ou* (86) *e condicão inicial* (87)*.*
ii) Supoem que os v_n satisfazem a cota (65)*. Se $u_0 \in C^4_{D/N}(\Omega)$, a série*

$$u(\boldsymbol{r},t) \doteq \sum_n (\, v_n, u_0\,)\, e^{-|\lambda_n| D t}\, v_n(\boldsymbol{r})$$

converge uniformemente em $\overline{\Omega}$, e u é em $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ e satisfaz a EDP (84) *homogênea (com $h = 0$), a condição de contorno correspondente, e a condição inicial* (87)*.*

(Unicidade??) Se u_0 não é em $C^4_{D/N}(\Omega)$, a série (83) converge no sentido de distribuições, e ela ainda satisfaz a EDP no sentido de distribuições. (Check!!)

Exemplo 31 Esfriando um cilíndro longo: "Example 2" do Cap. 9.7 em [6], p. 368 ff. □

3.3 Equação de onda

Procuramos uma solução $u(\boldsymbol{r},t)$ da EDP (chamada equação de onda)

$$\big(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big) u(\boldsymbol{r},t) = h(\boldsymbol{r},t) \tag{92}$$

para todo $(\boldsymbol{r},t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, a qual ainda deve satisfazer uma das condições de contorno (85) ou (86) (com $\mathbb{R}^+_0$ substituido por $\mathbb{R}$), e as condições iniciais (CI):

$$u(\boldsymbol{r},0) = u_0(\boldsymbol{r}) \quad \forall \boldsymbol{r} \in \Omega, \tag{93}$$
$$\dot u(\boldsymbol{r},0) = \dot u_0(\boldsymbol{r}) \quad \forall \boldsymbol{r} \in \Omega, \tag{94}$$

onde u_0 e $\dot u_0$ são funções dadas e nos escrevemos $\dot u(\boldsymbol{r},t) \doteq \partial_t u(\boldsymbol{r},t)$. Como antes, começamos com uma BON $\{v_n\}$ de auto-funções do operador Laplace, com domínio $C^2_D(\Omega)$ no caso de condição de contorno (D), e $C^2_N(\Omega)$ no caso de condição de contorno (N) e fazemos as expansões (88). A equação de onda (92) vira

$$\sum_n \underbrace{\big(\lambda_n c_n(t) - \frac{1}{c^2}\ddot c_n(t)\big)}\, v_n = \sum_n \underbrace{(\, v_n, h_t\,)}\, v_n\,,$$

implicando para cada n na EDO

$$\ddot c_n(t) + \omega_n^2 c_n(t) = -c^2\, b_n(t), \qquad \text{onde } \omega_n^2 \doteq c^2|\lambda_n| \text{ e } b_n(t) \doteq (\, v_n, h_t\,)\,. \tag{95}$$

As constantes $c_n(0)$ e $\dot c_n(0)$ são determinadas pelas condições iniciais (93), (94) atraves da expansão (88):

$$c_n(0) = (\, v_n, u_0\,)\,, \quad \dot c_n(0) = (\, v_n, \dot u_0\,)\,. \tag{96}$$

A solução da EDO (100) com essas condições iniciais é

$$c_n(t) = \frac{(\, v_n, \dot{u}_0 \,)}{\omega_n} \operatorname{sen}(\omega_n t) + (\, v_n, u_0 \,) \cos(\omega_n t) - c^2 \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\big(\omega_n (t-t')\big)}{\omega_n} b_n(t')\, dt'. \quad (97)$$

(Usamos a funçõ de Green do Exemplo 14 em [12]. Concluimos que a solução da equação de onda (92) com condição de contorno (C) ou (N) respectivamente, e condições iniciais (93), (94) é a série

$$u(\boldsymbol{r}, t) \doteq \sum_n c_n(t)\, v_n(\boldsymbol{r}), \quad (98)$$

com $c_n(t)$ dado pela Eq. (97).

Exemplo 32 Vibrações de uma mebrana circular: "Example 1" do Cap. 9.7 em [6], p. 363 ff. □

3.4 Equação de onda no $\mathbb{R}^n$

Consideramos a equação de onda no $\mathbb{R}^n$, e substituimos a condição de contorno (85) pela condição que para todo $t \in \mathbb{R}$ a função u_t seja em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Consideremos apenas o caso homogêneo da EDP, $h = 0$.

Em $\mathbb{R}^n$, o operador Laplace não possui uma BON, mas sim uma BON contínua de auto-vetores generalizados, a saber as "ondas planas" $e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \doteq (2\pi)^{-n/2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$, veja Eq. (49) no Example 21, item *iii*). A expansão (88) é substituida pela "expansão" contínua, ou seja, transformada de Fourier,

$$u_t = \int_{\mathbb{R}^n} c_t(\boldsymbol{k})\, e_{\boldsymbol{k}}\, d^n\boldsymbol{k} \quad (99)$$

A equação de onda (92) homogenea (com $h = 0$) vira

$$-\int \big(|\boldsymbol{k}|^2 c_t(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{c^2}\ddot{c}_t(\boldsymbol{k})\big)\, e_{\boldsymbol{k}} d^n\boldsymbol{k} = 0,$$

devido ao e o fato que $\Delta e_{\boldsymbol{k}} = -|\boldsymbol{k}|^2 e_{\boldsymbol{k}}$, veja Eq. (49). Isso implica para cada $\boldsymbol{k}$ na EDO

$$\ddot{c}_t(\boldsymbol{k}) + \omega(\boldsymbol{k})^2 c_t(\boldsymbol{k}) = 0, \qquad \text{onde } \omega(\boldsymbol{k})^2 \doteq c^2|\boldsymbol{k}|^2. \quad (100)$$

As "constantes" $c_0(\boldsymbol{k})$ e $\dot{c}_0(\boldsymbol{k})$ são determinadas pelas condições iniciais (93), (94) atraves da expansão (99):

$$c_0(\boldsymbol{k}) = (\, e_{\boldsymbol{k}}, u_0 \,) \equiv \widehat{u_0}(\boldsymbol{k})\,, \quad \dot{c}_0(\boldsymbol{k}) = (\, e_{\boldsymbol{k}}, \dot{u}_0 \,) \equiv \widehat{\dot{u}_0}(\boldsymbol{k})\,. \quad (101)$$

A solução da EDO (100) com essas condições iniciais é

$$c_t(\boldsymbol{k}) = \frac{\widehat{\dot{u}_0}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})} \operatorname{sen}(\omega(\boldsymbol{k})t) + \widehat{u_0}(\boldsymbol{k}) \cos(\omega(\boldsymbol{k})t)\,. \quad (102)$$

Concluimos que a solução da equação de onda (92) com condições iniciais (93), (94) é

$$u(\boldsymbol{r}, t) = (2\pi)^{-n/2} \int c_t(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{k} \quad (103)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int \big[a(\boldsymbol{k}) e^{-i\omega t} + b(\boldsymbol{k}) e^{i\omega t}\big]\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{k} \quad (104)$$

com $c_t(\boldsymbol{k})$ dado pela Eq. (102), com $\omega \doteq c|\boldsymbol{k}|$. Na segunda linha, re-escrevemos a função c_t na forma exponential.

Essa solução é uma superposição contínua de ondas planas

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t} \equiv e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{n}ct)}\,,$$

que propaga na direção $\boldsymbol{n} \doteq \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ com velocidade c.

3.5 EDP's com condição de contorno não-homogêneo

Seja L o operador diferencial $\Delta + k^2$, $\Delta - \frac{1}{D}\partial_t$ ou $\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$. Consideramos a EDP não-homogênea

$$Lu = h, \tag{105}$$

com condição de contorno não-homogênea

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \eta(\boldsymbol{r}, t) \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{n} \cdot \nabla u(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{n} \cdot \nabla \eta(\boldsymbol{r}, t) \tag{106}$$

para todo t e para todo $\boldsymbol{r} \in \partial\Omega$, onde η é uma função dada (apenas!) na borda $\boldsymbol{r} \in \partial\Omega$. Eventualmente ainda tem condições iniciais

$$u(\boldsymbol{r}, 0) = u_0(\boldsymbol{r}), \qquad \partial_t u(\boldsymbol{r}, 0) = \dot{u}_0(\boldsymbol{r}) \tag{107}$$

para todo $\boldsymbol{r} \in \Omega$, onde as funções u_0 e $\dot{u}_0$ são dadas.

Para resolver essa EDP, extendemos num primeiro passo a função η, dada na borda $\partial\Omega$, para toda região Ω. Vamos denotar essa função por Φ. Depois definimos

$$\tilde{u}(\boldsymbol{r}, t) \doteq u(\boldsymbol{r}, t) - \Phi(\boldsymbol{r}, t)\,.$$

Ela satisfaz a EDP

$$L\tilde{u} = h - L\Phi$$

com condição de contorno *homogêna*

$$\tilde{u}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{n} \cdot \nabla u(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{108}$$

respetivamente para todo t e para todo $\boldsymbol{r} \in \partial\Omega$, junto com as eventuais condições iniciais

$$\tilde{u}(\boldsymbol{r}, 0) = u_0(\boldsymbol{r}) - \Phi(\boldsymbol{r}, 0), \qquad \partial_t \tilde{u}(\boldsymbol{r}, 0) = \dot{u}_0(\boldsymbol{r}) - \partial_t \Phi(\boldsymbol{r}, 0)$$

para todo $\boldsymbol{r} \in \Omega$. A solução $\tilde{u}$ desse problema podemos determinar como nas Seções anteriores 3.1 − 3.3. Depois definimos $u \doteq \tilde{u} + \Phi$, e pronto: Essa função satisfaz a EDP (105) com condição de contorno (106) e condições iniciais (107).

A Convergência de sequências de funções

O seguinte teorema encontra-se em [14, Thm. 7.17].

Teorema 33 *Seja f_n uma sequência de funções diferenciáveis no intervalo $[a, b]$ que satisfaz as seguintes hipóteses.*
1. Existe algum ponto $x_0 \in [a, b]$ onde a sequência $f_n(x_0)$ converge ;
2. A sequência das derivadas f_n' converge uniformemente.

Então a sequência f_n também converge uniformemente para uma função diferenciável f, e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \qquad \forall x \in (a, b).$$

Referências

[1] H. Arfken, G. Weber, *Mathematical methods for physicists*, 6th ed., Elsevier (Academic Press), Amsterdam, 2005.

[2] V. I. Arnold, *Lectures on partial differential equations*, Springer, 2004.

[3] A. S. Barut and R. Raczka, *Theory of group representations and applications*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980.

[4] A. Bohm and M Gadella, *Dirac kets, Gamow vectors and Gel'fand triplets*, Lecture notes in Physics, vol. 348, Springer, 1969.

[5] Boyce and Di Prima, *Elementary differential equations.*

[6] E. Butkov, *Física matemática*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1988.

[7] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum mechanics*, vol. 1, J. Wiley, 1977.

[8] J. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e EDP's*, IMPA/Editora Edgard Blücher Ltda., 1977.

[9] Jr. R. Iório and V. Iório, *Equações diferenciais parciais: Uma introdução.*

[10] V. Iório, *EDP: Um curso de graduação*, 4 ed., Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.

[11] N. A. Lemos, *Convite à Física Matemática*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2013.

[12] J. Mund, *Distribuições e Transformada de Fourier*, UFJF, 2021, Notas de aula.

[13] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I, II*, Academic Press, New York, 1975/1980.

[14] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

[15] ______, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[16] Weinberger, *A first course in PDE.*