

# Distribuições e Transformada de Fourier

Jens Mund

Notas *incompletas* de Aula, DF-UFJF, Física Matemática II, Período 2025-3

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Distribuições</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação e definição . . . . .	1
1.2	Derivada de distribuições . . . . .	6
1.3	Multiplicação com funções . . . . .	8
1.4	“Pull-back” . . . . .	9
1.5	Valor principal . . . . .	9
1.6	Divisão . . . . .	11
1.7	Convolução . . . . .	11
1.8	Distribuições como soluções de EDO’s . . . . .	13
1.9	Distribuições no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
1.10	Exercícios. . . . .	18
<b>2</b>	<b>Transformada de Fourier</b>	<b>19</b>
2.1	Definição e exemplos . . . . .	19
2.2	Transformada de Fourier de Distribuições . . . . .	22
2.3	Solução de EDO’s . . . . .	23
2.4	Transformada de Fourier no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
2.5	Exercícios . . . . .	25
<b>A</b>	<b>Série de Fourier.</b>	<b>26</b>
<b>B</b>	<b>Alguns fatos matemáticos.</b>	<b>28</b>

## 1 Distribuições

### 1.1 Motivação e definição

Como motivação para a “função delta” de Dirac [Dirac 1926] consideramos uma carga pontual. Recordamos que a carga elétrica é uma grandeza aditiva, permitindo a definição da densidade de carga,  $\varrho$ : Ela é definida pela propriedade que para toda região<sup>1</sup>  $G \subset \mathbb{R}^3$  a carga  $Q(G)$  contida em essa região é dada por

$$\int_G \varrho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = Q(G).$$

---

<sup>1</sup>Identificamos aquí o espaço físico com  $\mathbb{R}^3$ .

Para uma carga pontual  $q$  localizada na origem, temos

$$Q_{\text{pt}}(G) = \begin{cases} q, & \mathbf{0} \in G \\ 0, & \mathbf{0} \notin G. \end{cases}$$

Qual seria a densidade de carga,  $\varrho_{\text{pt}}(\mathbf{r})$ , para essa situação? Vamos normalizar ela e definir

$$\delta(\mathbf{r}) := \frac{1}{q} \varrho_{\text{pt}}(\mathbf{r}).$$

Este objeto tem as duas propriedades

$$(i) \quad \delta(\mathbf{r}) = 0 \text{ se } \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \quad (ii) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{q} Q_{\text{pt}}(\mathbb{R}^3) \equiv 1.$$

Obviamente, não existe uma função com essas propriedades (pois uma função com a propriedade (i) teria integral zero).

Para chegar a uma definição rigorosa desse objeto, fazemos a integral do produto de  $\delta$  com uma função  $\varphi$  contínua. O produto  $\varphi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})$  é zero para todos  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ . Podemos então substituir  $\varphi(\mathbf{r})$  pelo valor assumido na origem,  $\varphi(\mathbf{0})$ . Daí, deveria ser válido que

$$\text{“ } \varphi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{0}) \delta(\mathbf{r}) \text{ “.}$$

(Veremos depois que esta equação realmente vale num sentido rigoroso, ver Eq. (22), mas por enquanto escrevemos ela entre aspas porque o argumento era heurístico.) Em particular, a integral do produto é

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{0}).$$

Então o  $\delta$  pode ser entendido como um aparelho que pega uma função  $\varphi$  e joga ela no número  $\varphi(\mathbf{0})$ , ou seja, uma aplicação do espaço de funções para os números complexos. Esse ponto de vista é devido a Laurent Schwartz [1945]. Ele chamou tais aplicações de *distribuições*.

Vamos dar as definições num primeiro passo em uma dimensão: Uma distribuição é uma aplicação de uma certa classe de funções,  $D(\mathbb{R})$ , em  $\mathbb{C}$ :

$$T : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle,$$

que é linear e contínua (num sentido a definir). A classe de funções mais apropriada são as funções em  $C^\infty(\mathbb{R})$  com suporte limitado,<sup>2</sup> em símbolos  $D(\mathbb{R})$ . Elas são chamadas de “funções de teste”. Esta classe de funções é um espaço vetorial com as definições usuais de adição e multiplicação com escalares: Para  $c \in \mathbb{C}$  e  $\varphi, \chi \in D(\mathbb{R})$  definimos

$$\begin{aligned} (\varphi + \chi)(x) &:= \varphi(x) + \chi(x) \\ (c \cdot \varphi)(x) &:= c\varphi(x). \end{aligned}$$

Linearidade de uma distribuição  $T$  significa que para todo  $c \in \mathbb{C}$  e  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in D(\mathbb{R})$  vale

$$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle \quad \text{e} \quad \langle T, c\varphi \rangle = c \langle T, \varphi \rangle. \quad (1)$$

<sup>2</sup>O suporte  $\text{supp}\varphi$  de uma função contínua  $\varphi$  é o fecho do conjunto de pontos  $x \in \mathbb{R}$  com  $\varphi(x) \neq 0$ .

Para explicar a continuidade precisamos primeiro uma noção de convergência em  $D(\mathbb{R})$ . Recordamos que uma sequência de funções contínuas  $\varphi_n$  com suporte num intervalo limitado  $I$  e dito de convergir *uniformemente* para uma função  $\varphi$  se a sequência de números reais

$$\max\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, x \in I\}$$

converge para zero se  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 1** Seja  $\varphi_n$  uma sequência em  $D(\mathbb{R})$ . Ela é dita de *convergir em  $D$*  para uma função  $\varphi$ , em símbolos  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ , se

i) Existe um intervalo limitado  $I$  contendo todos suportes:  $\text{supp} \varphi_n \in I$  para todo  $n$ .

ii) A sequência de funções e de todas derivadas converge uniformemente: Para todo  $\nu \in \mathbb{N}_0$ ,  $\varphi_n^{(\nu)} \rightarrow \varphi^{(\nu)}$  uniformemente.  $\square$

(Aqui,  $\varphi^{(\nu)}$  denota a  $\nu$ -ésima derivada e  $\varphi^{(0)} \doteq \varphi$ .) Agora estamos pronto para a definição no sentido de L. Schwartz:

**Definição 2** Uma aplicação  $T : D(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ , é uma *distribuição* se ela é *linear* no sentido (1) e *contínua* no seguinte sentido: Se uma sequência  $\varphi_n \in D(\mathbb{R})$  converge em  $D$  para  $\varphi$ , então a sequência de imagens também converge:

$$\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

$\square$

**Exemplo 1** A distribuição  $\delta$ ,

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0), \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a). \quad (2)$$

$\square$

**Exemplo 2** Distribuições regulares. Uma função  $f$  localmente integrável<sup>3</sup>,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , corresponde a uma distribuição  $T_f$  conforme

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (3)$$

$\square$

Distribuições dessa forma são chamadas de *regulares*. É costume identificar a distribuição  $T_f$  com a função  $f$  e dizer que “a distribuição  $T = T_f$  é a função  $f$ ”. Um fato importante é que toda distribuição pode ser aproximada por distribuições regulares (até com funções suaves):

<sup>3</sup>Recordamos as definições:  $L^1(\mathbb{R})$  é o espaço de funções absolutamente integráveis,  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ . Uma função  $f$  é chamada de localmente integrável,  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , se para todo intervalo limitado  $I \subset \mathbb{R}$  a integral  $\int_I |f(x)| dx$  é finita. Por exemplo,  $1/x$  não é localmente integrável, mas  $\ln|x|$  e  $1/\sqrt{|x|}$  são sim. Mais geralmente, se existe uma função contínua  $F$  tal que  $f(x) = F'(x)$  para todos  $x \in I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , então  $\int_I |f(x)| dx < \infty$ . Por exemplo,  $\ln|x|$  é a derivada da função  $F(x) = x(\ln|x| - 1)$  em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e essa função é contínua na origem com  $F(0) = 0$ .

**Definição 3** Uma sequência de funções  $f_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  é dita de convergir para uma distribuição  $T$  no sentido de distribuições se para toda função de teste  $\varphi \in D(\mathbb{R})$  vale

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle. \quad (4)$$

□

**Teorema 1.1** Para toda distribuição  $T$  existe uma sequência de funções  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$  que converge para  $T$  no sentido de distribuições.

(Daremos a demonstração no final da Seção 1.7, ver p. 12.)

**Exemplo 3** As seguintes sequências de funções convergem para a distribuição  $\delta$  no sentido da Definição 3:

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \quad \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2 x^2}, \quad \frac{\text{sen}(nx)}{\pi x} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ikx} dk, \quad \frac{n}{2 \cosh(nx)^2}. \quad (5)$$

□

Na verdade, temos [12, p. 176, Pr. 22 (b)]:

**Lema 1.2** Seja  $f$  uma função limitada e absolutamente<sup>4</sup> integrável com  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ . Então a sequência

$$f_n(x) := n f(nx)$$

converge para a distribuição  $\delta$  no sentido (4).

*Demonstração.* Para qualquer  $\varphi \in D(\mathbb{R})$  vale

$$\int f_n(x) \varphi(x) dx = n \int f(nx) \varphi(x) dx = \int f(x') \varphi(x'/n) dx'.$$

Obviamente,  $\varphi(x/n)$  converge puntiformemente para  $\varphi(0)$ . Como toda função de teste,  $\varphi$  é limitada,  $|\varphi(x)| \leq c$  para todo  $x$ . Daí,  $c|f(x)|$  é uma “função dominante” e o teorema B.1 garante que podemos trocar limite e integração:

$$\int f(x) \varphi(x/n) dx \rightarrow \int f(x) \varphi(0) dx \equiv \varphi(0).$$

□

*Aviso:* O terceiro exemplo de (5) não é da forma anunciada no Lema, pois  $\int |\text{sen}(x)/x| = \infty$ ! Mesmo assim vale:

**Lema 1.3** A sequência de funções

$$\frac{\text{sen}(nx)}{\pi x} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ikx} dk \quad (6)$$

converge para a distribuição  $\delta$  no sentido (4).

---

<sup>4</sup>I.e.,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Escrevendo a função de teste  $\varphi$  como  $\varphi(x) = \varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0))$ , temos

$$\int \varphi(x) \frac{\text{sen } nx}{x} dx = \int \varphi(0) \frac{\text{sen } nx}{x} dx + \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \text{sen } nx dx. \quad (7)$$

Substituindo o valor da integral imprópria  $\int_{\mathbb{R}} \text{sen}(nx)/x dx = \pi$  (demonstração com o cálculo de resíduo), o primeiro termo é  $\pi\varphi(0)$ . Falta mostrar que o segundo termo vai para zero se  $n \rightarrow \infty$ . Para esses fins, recordamos que a fração diferencial de uma função suave também é suave:<sup>5</sup>

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} =: \psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Com isso podemos integrar o segundo termo em Eq. (7) em partes, escrevendo  $\text{sen}(nx) = \frac{-1}{n} \frac{d}{dx} \cos(nx)$ :

$$\int \psi(x) \text{sen } nx dx = \frac{-1}{n} \psi(x) \cos(nx) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{n} \int \psi'(x) \cos nx dx.$$

Obviamente, a função  $\psi$  cai para zero no infinito como  $1/x$ , e a derivada  $\psi'$  cai para zero como  $1/x^2$ . Por isso, o primeiro termo é zero, e o segundo termo é limitado por  $\frac{1}{n} \int |\psi'(x)| dx$  e vai para zero se  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Em muitos casos, uma distribuição é *definida* como limite de funções suaves no sentido do teorema 1.1, por exemplo:

**Exemplo 4** A distribuição  $\frac{1}{x+i0}$  é definida por

$$\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle T \frac{1}{x+i\varepsilon}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx. \quad (8)$$

(*Primeiro a integral, depois o limite!*) Para ver que isso é bem-definido, observe que  $(x+i\varepsilon)^{-1}$  é a derivada da função  $\ln(x+i\varepsilon)$ , a qual é uma função suave para  $\varepsilon > 0$ . Depois de uma integração em partes, chegamos a

$$\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \ln(x+i\varepsilon) \varphi'(x) dx. \quad (9)$$

Aquí, limite e integração podem ser trocados.<sup>6</sup> Então temos

$$\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle = - \int \ln_+(x) \varphi'(x) dx, \quad (10)$$

---

<sup>5</sup>Demonstração: Observamos que

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \varphi(\lambda x) d\lambda = x \int_0^1 \varphi'(\lambda x) d\lambda$$

Daí, a fração diferencial poder ser escrito como

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \int_0^1 \varphi'(\lambda x) d\lambda.$$

Mas o lado direito é uma função suave.

<sup>6</sup>Para mostrar isso, observamos que  $\ln(z)$  é a derivada da função  $z(\ln z - 1)$  que é contínua na origem, e depois de mais uma integração em partes chegamos em

$$\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int (x+i\varepsilon)(\ln(x+i\varepsilon) - 1) \varphi''(x) dx = \int x(\ln_+(x) - 1) \varphi''(x) dx.$$

Aquí, temos usado que o Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, ver Teorema B.1 no apêndice, afirma que podemos trocar limite e integração. Depois re-fazemos a última integração em partes e chegamos na Eq. (10).

onde

$$\ln_+(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(x + i\varepsilon), \quad x \neq 0,$$

é o ramo principal do logaritmo, estendido para os números reais negativos através do semi-plano complexo superior.<sup>7</sup> O lance é que essa função, em contraste a  $1/x$ , é localmente integrável na origem, pois ela é a derivada da função  $x(\ln_+(x) - 1)$  que é contínua na origem (ela converge para zero se  $x \rightarrow 0$ ).  $\square$

## 1.2 Derivada de distribuições

Para uma distribuição regular  $T_f$  com  $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  é natural definir

$$(T_f)' := T_{f'}.$$

Para uma distribuição  $T$  geral, escolhamos uma sequência  $f_n$  que converge para  $T$  no sentido  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n}$ , e definimos<sup>8</sup>

$$T' := \lim_{n \rightarrow \infty} T_{f'_n}, \quad (12)$$

dado que esse limite existe, o que vamos verificar logo. Um pequeno cálculo com integração em partes mostra que para  $\varphi \in D(\mathbb{R})$  vale

$$\langle T_{f'_n}, \varphi \rangle = -\langle T_{f_n}, \varphi' \rangle,$$

o qual converge para  $-\langle T, \varphi' \rangle$  por hipótese. Então, o limite em (12) existe, e é dado por

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle. \quad (13)$$

Essa equação vamos tomar como definição de  $T'$ . Consequentemente, a  $n$ -ésima derivada  $T^{(n)}$  é dada por

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle.$$

**Exemplo 5** A Eq. (10) implica

$$\frac{1}{x + i0} = (T_{\ln_+})'. \quad (14)$$

$\square$

<sup>7</sup>Para  $x > 0$ , isso é simplesmente o logaritmo. Para  $x = -r < 0$ , observe que  $e^{i(\pi-\varepsilon)r} \equiv -re^{-i\varepsilon} = -r + ir\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ , então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(-r + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(e^{i(\pi-\varepsilon)r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (i(\pi - \varepsilon)) + \ln r = \ln r + i\pi.$$

Então temos

$$\ln_+(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ \ln(|x|) + i\pi, & x < 0, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \ln_+(x) = \ln|x| + i\pi H(-x), \quad (11)$$

onde  $H$  é a função Heaviside definida em (15).

<sup>8</sup>Dessa maneira, outras operações com funções podem ser estendidas para distribuições, como multiplicação com funções, pull-back, transformada de Fourier, etc.

**Exemplo 6** Seja  $H$  a função *Heaviside*:

$$H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Como espera-se heurísticamente, a sua derivada (no sentido de distribuições) é a distribuição  $\delta$ :

$$(T_H)' = \delta. \quad (16)$$

Para verificar isso, aplicamos o lado esquerdo em uma função de teste  $\varphi$ :

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Na pen-última equação usamos o fato que  $\varphi(x) = 0$  para todos  $x$  maior do que um certo  $R$ .  $\square$

**Exemplo 7** (Heaviside novamente.) Mais perto da intuição, pegamos uma sequência de funções deriváveis que converge puntiformemente para  $H$ , por exemplo

$$H_n(x) \doteq \frac{1}{2}(1 + \tanh(nx)). \quad (17)$$

Como  $\tanh(x) \rightarrow \pm 1$  se  $x \rightarrow \pm\infty$ , para todos  $x \neq 0$  vale  $H_n(x) \rightarrow H(x)$  se  $n \rightarrow \infty$ . Isso implica que  $T_{H_n} \rightarrow T_H$ . Por nossa definição original (12) temos

$$(T_H)' = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{H_n}'. \quad (18)$$

Mas a derivada da função  $H_n$  é

$$H_n'(x) = \frac{n}{2 \cosh(nx)^2}, \quad (19)$$

a qual é uma sequência-delta, ver Eq. (5). Daí, temos  $(T_H)' = \delta$  novamente.<sup>9</sup>  $\square$

**Exemplo 8** Seja  $f(x) \doteq xH(x)$ . Então vale

$$(T_f)'' = \delta.$$

$\square$

Vamos agora citar um resultado importante que caracteriza a distribuição- $\delta$  e suas derivadas. Recordamos que elas têm a seguinte propriedade: Se uma função de teste  $\varphi$  tem suporte disjunto de  $\{a\}$ , então vale  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = 0$ . Nesse caso, falamos que  $\{a\}$  é o *supporte de*  $\delta_a$ . O mesmo vale para as derivadas de  $\delta_a$ . Esse fato até caracteriza essas distribuições:

<sup>9</sup>Em vez de (17) podemos pegar qualquer sequência da forma

$$H_n(x) \doteq F(nx),$$

onde  $F$  é uma função derivável com  $F(x) \rightarrow 1$  se  $x \rightarrow \infty$  e  $F(x) \rightarrow 0$  se  $x \rightarrow -\infty$ . A derivada seria  $H_n'(x) = nF'(nx)$ . A função  $F'$  automaticamente é normalizada,  $\int F'(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} (F(r) - F(-r)) = 1$ . Pelo Lema 1.2, a família  $H_n'$  é uma sequência-delta.

**Teorema 1.4** *O suporte de uma distribuição  $T$  consiste de um único ponto  $a \in \mathbb{R}$  se, e somente se, existem números  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  tal que*

$$T = \sum_{\nu=0}^n c_\nu \delta_a^{(\nu)}.$$

(Aqui,  $\delta_a(x) \doteq \delta(x - a)$  e  $\delta_a^{(\nu)}$  é a  $\nu$ -ésima derivada.) Demonstração: [14].

**Derivada de funções descontínuas.** Seja  $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . A derivada de  $f$  pode não existir no ponto  $a$ , e nesse caso nos associamos algum valor, por exemplo  $f'(a) := 0$ . Seja a tal definida derivada de  $f$  localmente integrável. (Ela define uma distribuição regular, a qual independe do valor  $f'(a)$ .)

Supomos que existam os limites

$$f_{\pm}(a) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a \pm \varepsilon).$$

O salto da função no ponto  $a$  é

$$\sigma_a \doteq f_+(a) - f_-(a).$$

Então vale

$$(T_f)' = T_{f'} + \sigma_a \delta_a. \quad (20)$$

(Demonstração em [11, p. 266].) Um exemplo é a Eq. (16).

### 1.3 Multiplicação com funções

Recordamos que o produto de duas funções  $\psi$  e  $\varphi$  é dado por

$$(\psi \cdot \varphi)(x) := \psi(x)\varphi(x).$$

O produto de uma função  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  e uma distribuição  $T$  é definida por

$$\langle \psi \cdot T, \varphi \rangle := \langle T, \psi \cdot \varphi \rangle \quad (21)$$

(Observe que  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  e  $\varphi \in D(\mathbb{R})$  implica  $\psi \cdot \varphi \in D(\mathbb{R})$ .) Alguns identidades úteis:

$$\psi \cdot \delta_a = \psi(a)\delta_a, \quad \psi \cdot \delta' = -\psi'(0)\delta + \psi(0)\delta' \quad (22)$$

$$x^n \delta^{(k)} = \begin{cases} 0, & k < n \\ (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}, & k \geq n \end{cases} \quad (23)$$

(Demonstração da Eq. (23) encontra-se em [3].)

Verifique-se facilmente que a derivada satisfaz a regra do produto:

$$(\psi \cdot T)' = \psi' \cdot T + \psi \cdot T'. \quad (24)$$

Vamos verificar essa regra para o Exemplo 8:

$$(xT_H)'' = (x'T_H + x(T_H)')' = (T_H + x\delta)' = \delta + \delta + x\delta' = \delta,$$

pois  $x\delta' = -\delta$  segundo Eq. (23).

### 1.4 “Pull-back”

O “pull-back” de uma função  $f$  sobre uma transformação  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por  $(\Phi^*f)(x) := f(\Phi(x))$ . Para uma distribuição  $T$  definimos o pull-back sobre uma transformação  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$  seguindo nossa receita, ver rodapé 8:

Seja  $f_n$  uma sequência de funções que converge para a distribuição  $T$ . Então definimos

$$\Phi^*T := \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\Phi^*f_n}$$

se esse limite existe.<sup>10</sup> È costume escrever “ $(\Phi^*T)(x) = T(\Phi(x))$ ”. Se  $\Phi$  é invertível (ou seja, uma transformação global de variáveis), o limite sempre existe, e coincide com

$$\langle \Phi^*T, \varphi \rangle = \langle T, |(\Phi^{-1})'| \cdot (\Phi^{-1})^*\varphi \rangle.$$

**Exemplo 9** O pull-back da distribuição delta sobre a translação  $\Phi_a(x) \doteq x - a$  é dado por

$$\langle \Phi_a^*\delta, \varphi \rangle = \varphi(a) \equiv \langle \delta_a, \varphi \rangle, \quad \text{ou seja,} \quad \Phi_a^*\delta = \delta_a.$$

Escrevemos informalmente  $\delta(x - a) = \delta_a(x)$ . □

**Exemplo 10** Se  $\Phi$  tem um número finito de zeros simples  $x_1, \dots, x_n$ , então

$$\delta(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\Phi'(x_i)|} \delta(x - x_i). \tag{25}$$

Ver *Exercise* 1.15.7 em [1]. □

### 1.5 Valor principal

Como a função  $1/x$  não é localmente integrável na origem, ela não define uma distribuição: Ela pode ser integrada apenas com funções de teste que se anulam na origem. Uma extensão para todas funções de teste é dada pelo valor principal,  $P\frac{1}{x}$ :

$$\langle P\frac{1}{x}, \varphi \rangle := P\int \frac{\varphi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \tag{26}$$

Para ver se este limite existe, escolhemos um número  $a > 0$  tal que o suporte de  $\varphi$  está contido no intervalo  $I \doteq [-a, a]$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x} dx \\ &= \varphi(0) \int_{I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{dx}{x} + \int_{I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx. \end{aligned}$$

O primeiro termo na última linha,  $\int dx/x$ , é zero porque a função  $1/x$  é ímpar e a região de integração  $I \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$  é simétrica. Daí, o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  também é zero. O integrando do segundo termo é contínuo, pois a função  $\varphi$  é derivável. Concluimos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx, \tag{27}$$

---

<sup>10</sup> Isso não é o caso para todos  $\Phi$  e  $T$ . Um critério famoso suficiente para existência é dado em [8, Thm. 8.2.4].

onde  $a$  é escolhido de tal maneira que o suporte de  $\varphi$  está contido no intervalo  $[-a, a]$ . (Veja também [11, Ex. 9.1.5, p. 262].)

Uma família de funções que aproxima o valor principal, no sentido da Definição 3, é dada por  $\frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}$  no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mais precisamente, vale

$$\langle P\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx \quad (28)$$

para toda função de teste  $\varphi$ . Para ver isso, escrevemos como antes

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \varphi(0) \int_I \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_I \frac{x(\varphi(x) - \varphi(0))}{x^2 + \varepsilon^2} dx,$$

onde  $I = (-a, a)$  é um intervalo simétrico contendo o suporte de  $\varphi$ . Como antes, o primeiro termo é zero devido a simetria. O integrando do segundo integral converge puntiformemente para  $(\varphi(x) - \varphi(0))/x$  se  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (detalhes em [11, Tma. 9.15, p. 283]), chegamos em (28).

A seguinte relação entra na dedução das relações de Kramers e Kronig na eletrodinâmica [9, p. 333]

$$P\frac{1}{x} = \frac{1}{x \pm i0} \pm i\pi\delta. \quad (29)$$

*Demonstração.* Expandindo  $\frac{1}{x+i\varepsilon}$  por  $x - i\varepsilon$ , temos

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - \frac{i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

O primeiro termo converge para  $P\frac{1}{x}$  no sentido de distribuições se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , veja Eq. (28). O limite do segundo termo (no sentido de distribuições) é o mesmo do que o limite de  $\frac{-in}{n^2x^2+1}$  para  $n \rightarrow \infty$  (fazendo  $\varepsilon \doteq 1/n$ ). Pela Eq. (5), esse limite é  $-i\pi$  vezes a distribuição delta.  $\square$

**Exemplo 11** Mostre que vale  $x \cdot P\frac{1}{x} = 1$ .  $\square$

**Exemplo 12** A distribuição  $P\frac{1}{x}$  é a derivada do logaritmo  $\ln|x|$  no sentido de distribuições:

$$(T_{\ln|x|})' = P\frac{1}{x}. \quad (30)$$

Essa relação pode ser verificada diretamente [11, p. 266], porém aqui aplicamos os nossos resultados (29), (14) e (20 – derivada de funções descontínuas): Pela Eq. (11), vale  $\ln|x| = \ln_+(x) - i\pi H(-x)$ . Tomando as derivadas e usando  $(T_{H(-x)})' = -\delta(x)$  pela Eq. (20), temos

$$(T_{\ln|x|})' = (T_{\ln_+})' + i\pi\delta = \frac{1}{x + i0} + i\pi\delta = P\frac{1}{x}.$$

(Usamos (14) e (29).)  $\square$

### 1.6 Divisão

A solução geral da equação

$$x^m \cdot T = 0$$

é dada por

$$T = \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu \delta^{(\nu)}, \quad c_\nu \in \mathbb{C}.$$

(Tma. 9.9 para  $m = 1$ , e Problema 9.6 em [11].) Consequentemente, a solução geral da equação

$$x \cdot T = 1$$

é dada por

$$T = P \frac{1}{x} + c\delta, \quad c \in \mathbb{C}.$$

### 1.7 Convolução

A convolução de duas funções  $f, g$  é definida por

$$(f * g)(x) \doteq \int f(y)g(x - y)dy. \tag{31}$$

Se  $f$  e  $g$  são deriváveis, verifique-se facilmente que vale

$$(f * g)' = f' * g = f * g'. \tag{32}$$

Para definir a convolução de uma distribuição com uma função, observa que a definição (31) pode ser escrita como  $(f * g)(x) = \langle T_f, g_x^\tau \rangle$ , onde  $T_f$  é a distribuição regular definida por  $f$ , e  $g_x^\tau(y) \doteq g(x - y)$ . Essa definição pode ser estendida para distribuições arbitrárias  $T$ :

$$(T * g)(x) \doteq \langle T, g_x^\tau \rangle, \quad g_x^\tau(y) \doteq g(x - y). \tag{33}$$

Exemplo:  $\delta * f = f$ , e  $(\delta_a * f)(x) = f(x - a)$ .

A propriedade (32) vale também para distribuições:

**Lema 1.5** *Para toda distribuição  $T$  e função de teste  $\varphi$ , a convolução  $T * \varphi$  é uma função em  $C^\infty(\mathbb{R})$ , com derivada*

$$(T * \varphi)' = T' * \varphi = T * \varphi'.$$

*Se o suporte de  $T$  é compacto, então  $T * \varphi$  também tem suporte compacto, ou seja,  $T * \varphi \in D(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração.* A derivada é dada por

$$(T * \varphi)'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} ((T * \varphi)(x + \varepsilon) - (T * \varphi)(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T, \frac{\varphi_{x+\varepsilon}^\tau - \varphi_x^\tau}{\varepsilon} \rangle.$$

Usando o fato que  $(\varphi_{x+\varepsilon}^\tau - \varphi_x^\tau)/\varepsilon$  converge uniformemente para  $-(\varphi_x^\tau)'(y)$ , e que  $T$  é contínuo, temos

$$(T * \varphi)'(x) = -\langle T, (\varphi_x^\tau)' \rangle \equiv \langle T', \varphi_x^\tau \rangle = (T' * \varphi)(x).$$

Também temos  $-(\varphi_x^\tau)' = (\varphi')_x^\tau$ , então a expressão acima coincide com

$$\langle T, (\varphi')_x^\tau \rangle = (T * \varphi')(x).$$

A propriedade do suporte verifique-se diretamente.  $\square$

Verifique-se facilmente que para qualquer função de teste  $\varphi$  vale (ver exercício 7)

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle T_f * g, \varphi \rangle = \langle T_f, g^\tau * \varphi \rangle, \quad g^\tau(x) \doteq g(-x).$$

(No meio escrevemos a *função*  $T_f * g$  em vez da *distribuição*  $T_{T_f * g}$  para não aparecer feio.)  
Por continuidade, isso implica

$$\langle T_{T_f * g}, \varphi \rangle = \langle T, g^\tau * \varphi \rangle. \quad (34)$$

Com o Lema 1.5 podemos dar uma

**Demonstração do Teorema 1.1.** Queremos construir uma sequência  $f_n$  de funções suaves que converge para uma dada distribuição  $T$ . Para esses fins, pegamos uma sequência-Delta no sentido do Lema 1.2,  $j_n(x) \doteq nj(nx)$ , com  $j \in D(\mathbb{R})$ , e definimos

$$f_n \doteq T * j_n^\tau, \quad j^\tau(x) \doteq j(-x).$$

Pelo Lema 1.5,  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ , e pela Eq. (34) temos para  $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \langle T, j_n * \varphi \rangle.$$

Se  $j_n * \varphi$  converge para  $\varphi$  em  $D$ , a continuidade de  $T$  no sentido da Def. 2 implica que  $T_{f_n}$  converge para  $T$ , completando a demonstração.

Precisamos ainda mostrar que  $j_n * \varphi$  converge para  $\varphi$  em  $D$ . Para esses fins, consideramos

$$\begin{aligned} (j_n * \varphi - \varphi)(x) &= \int dy [j_n(y)\varphi(x-y)] - \varphi(x) = \int dy j_n(y) [\varphi(x-y) - \varphi(x)] \\ &= \int dy j(y) [\varphi(x-y/n) - \varphi(x)]. \end{aligned}$$

(Na segunda igualdade temos usado o fato que  $\int dy j_n(y) = 1$ .) Mas

$$|\varphi(x-y/n) - \varphi(x)| \leq c|y|/n$$

pelo teorema do valor médio e o fato que  $\varphi'$  é limitado. Daí, para todo  $x$  vale a cota

$$|(j_n * \varphi - \varphi)(x)| \leq \frac{c}{n} \int dy |y j(y)| = \frac{c'}{n}.$$

Isso mostra que  $j_n * \varphi$  converge uniformemente para  $\varphi$ . O mesmo argumento vale para todas derivadas de  $\varphi$ , então  $j_n * \varphi$  converge para  $\varphi$  em  $D$ , completando a demonstração.

**Convolução de distribuições.** Com o Lema 1.5 podemos definir a convolução de uma distribuição  $T_1$  com uma *distribuição*  $T_2$  com suporte compacto:

$$\langle T_1 * T_2, \varphi \rangle := \langle T_1, T_2^\tau * \varphi \rangle,$$

onde  $T^\tau(x) := T(-x)$  (no sentido do pull-back de distribuições). Isso é bem-definido pois  $T_2 * \varphi \in D(\mathbb{R})$  pelo Lema 1.5, e estende o caso quando  $T_2$  é uma função, ver exercício 7. A continuidade de  $T_1 * T_2$  é mostrada em [8, Cap. 4.2]. Por exemplo,

$$T * \delta = T. \tag{35}$$

(Exercício!) Usando  $(T_2^\tau)' = -(T_2')^\tau$ , mostra-se facilmente que a propriedade (32) ainda vale:

$$(T_1 * T_2)' = T_1' * T_2 = T_1 * T_2'. \tag{36}$$

### 1.8 Distribuições como soluções de EDO's

Consideramos uma EDO da forma

$$a_n \cdot T^{(n)} + \dots + a_1 \cdot T' + a_0 \cdot T = h, \tag{37}$$

onde  $a_\nu \in C^\infty(I)$  são funções suaves dadas num certo intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , e  $h$  pode ser uma função ou distribuição. A solução  $T$  pode ser uma função em  $C^n(I)$  ou uma distribuição (neste caso as derivadas são entendidas no sentido de distribuições). No primeiro caso ela é chamada de “solução clássica”, e no segundo caso de “solução distribucional”, ou, se ele é uma distribuição regular, “solução fraca”. O seguinte teorema encontra-se no livro de L. Schwartz [14]:

**Teorema 1.6** *Se  $a_n(x)$  nunca se anula e  $h(x)$  é localmente integrável, as únicas soluções da EDO (37) são as soluções clássicas.*

Por exemplo, a EDO

$$T' = 0,$$

onde  $n = 1$  e  $a_1(x) = 1$ , possui só a solução clássica, ou seja, a solução geral é  $T = cT_1$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

Por outro lado, a EDO

$$x^2 T' = 0$$

possui a solução clássica  $T = 1$  (=cte.), a solução fraca  $T = T_H$  e a solução distribucional  $T = \delta$ . A solução geral é  $T = c_1 + c_2 H + c_3 \delta$ , quer dizer,

$$T = c_1 T_1 + c_2 T_H + c_3 \delta.$$

Consideramos agora um operador diferencial  $P$  com *coeficientes constantes*,

$$(Pf)(x) = a_n f^{(n)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x), \quad a_\nu \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Supomos que  $G$  é uma distribuição que satisfaz

$$PG = \delta \tag{39}$$

no sentido de distribuições. Neste caso, chamamos  $G$  de uma *função de Green* para  $P$ . (Apesar do fato que em geral não é uma função mas uma distribuição.) Todo operador diferencial com coeficientes constantes possui funções de Green [8, Thm. 7.3.10].

**Proposição 1.7** *Seja  $G$  uma função de Green para o operador diferencial  $P$  com coeficientes constantes, e seja  $h$  alguma função de teste<sup>11</sup>. A EDO*

$$Pf = h$$

*possui a solução particular  $f := G * h$ .*

*Demonstração.*  $P(G * h) = (PG) * h = \delta * h = h$ . (Primeira eq.: Lema 1.5. Segunda eq.: definição da função de Green.)  $\square$

**Exemplo 13** O operador diferencial  $\frac{d}{dx} + \lambda$  possui a função de Green  $G(x) = H(x)e^{-\lambda x}$ , ver Exercício 3.  $\square$

**Exemplo 14 (Oscilador harmônico)** A trajetória  $x(t)$  de uma partícula com massa  $m$  sujeita a uma força elástica,  $F_0(x) = -kx$ , obedece pela segunda lei de Newton a EDO  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , onde  $\omega_0^2 \doteq k/m$  é chamada de frequência característica do oscilador. Isso pode ser escrito  $Px = 0$ , onde  $P$  é o operador diferencial<sup>12</sup>

$$(Px)(t) \doteq \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t). \quad (40)$$

Ele possui a função de Green<sup>13</sup>

$$G(t) \doteq H(t) \frac{\text{sen } \omega_0 t}{\omega_0}. \quad (41)$$

Na Secção 2.3, vamos mostrar como *construir* essa função de Green (e outras), usando a transformada de Fourier. Aquí, vamos só mostrar que essa função realmente é uma função de Green no sentido da Eq. (39).

*Demonstração.* Precisamos verificar que  $PG = \delta$ . Escrevemos  $G$  na forma  $G = \psi \cdot T_H$ , onde  $\psi(t) \doteq \text{sen}(\omega_0 t)/\omega_0$ . Temos

$$\begin{aligned} \ddot{G} &= (\dot{\psi}T_H + \psi\dot{T}_H) \cdot = \ddot{\psi}T_H + 2\dot{\psi}\dot{T}_H + \psi\ddot{T}_H \\ &= \ddot{\psi}T_H + 2\dot{\psi}\delta + \psi\delta, \end{aligned} \quad (42)$$

onde usamos  $\dot{T}_H = \delta$ . Calculamos

$$\dot{\psi}(t) = \cos(\omega_0 t), \quad \ddot{\psi}(t) = -\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \psi(t).$$

Pelas Eq.s (22), vale  $\dot{\psi}\delta = \dot{\psi}(0)\delta = \delta$ , e  $\psi\delta = -\dot{\psi}(0)\delta + \psi(0)\delta = -\delta$ . Substituindo isso em (42), dá

$$\ddot{G} = -\omega_0^2 \psi T_H + 2\delta - \delta \equiv -\omega_0^2 G + \delta,$$

ou seja,  $PG \equiv \ddot{G} + \omega_0^2 G = \delta$ .  $\square$

<sup>11</sup>A afirmação também vale para funções mais gerais, por exemplo  $h$  pode ser uma distribuição com suporte compacto.

<sup>12</sup> $\triangleleft$  Aquí, a variável independente é  $t$ , interpretado como tempo, enquanto que  $x$  é a variável dependente, a saber, uma função  $x(t)$ . A derivada é denotada por  $\frac{d}{dt}x =: \dot{x}$ .

<sup>13</sup>Esta função de Green é chamada de “causal”, porque  $G(t) = 0$  para  $t < 0$ , o que implica que a solução  $x = G * h$  da EDO (43) é diferente de zero só a partir do momento quando a força externa  $h$  começa agir.

Se o oscilador é sujeito a uma força externa  $F(t)$  além da força elástica  $F_0(x(t))$ , a trajetória obedece a EDO

$$Px \equiv \ddot{x} + \omega_0^2 = h, \tag{43}$$

onde  $h(t) \doteq F(t)/m$ . A resposta do oscilador a um impulso instantâneo,  $h(t) = \delta(t)$ , já conhecemos: Ela é dada por  $G(t) = H(t) \frac{\text{sen } \omega_0 t}{\omega_0}$ .

Consideramos agora o exemplo de uma força externa harmônica, cuja frequência angular coincide com a frequência característica do oscilador (o caso de ressonância), que começa atuar em  $t = 0$ :

$$h(t) \doteq c H(t) \text{sen}(\omega_0 t).$$

A solução particular da Eq. (43) conforme a Proposição 1.7 é dada por  $x = G * h$ , onde  $G$  é a função de Green de (41). Para  $t > 0$ , temos

$$\begin{aligned} (G * h)(t) &= (h * G)(t) = \int dt' h(t') G(t - t') = \frac{c}{\omega_0} \int dt' H(t') \text{sen}(\omega_0 t') H(t - t') \text{sen}(\omega_0(t - t')) \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{c}{\omega_0} \int_0^t dt' \text{sen}(\omega_0 t') \text{sen}(\omega_0(t - t')) \stackrel{(b)}{=} \frac{c}{2\omega_0} \int_0^t dt' \left\{ \cos(2\omega_0 t' - \omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) \right\} \\ &= \frac{c}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0 t}^{\omega_0 t} du \cos u - t \cos(\omega_0 t) \right\} = \frac{c}{2\omega_0} \left( \frac{1}{\omega_0} \text{sen } \omega_0 t - t \cos \omega_0 t \right) \end{aligned}$$

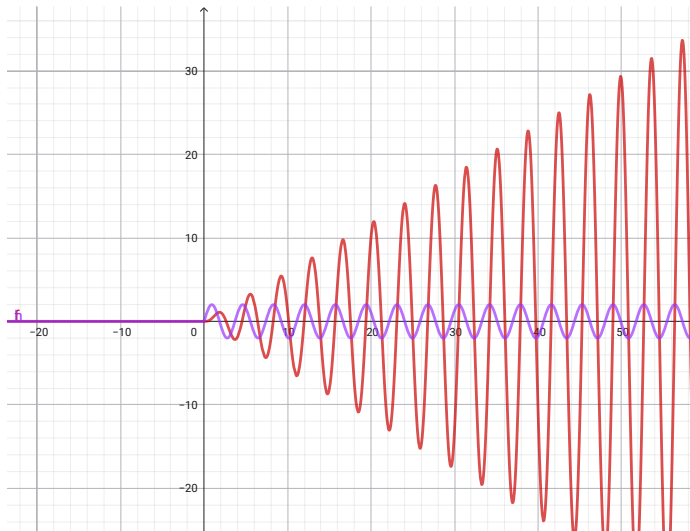
Em (a), usamos o fato que a função  $H(t')H(t - t') = 1$  para  $t' \in [0, t]$  e se anula fora desse intervalo. Em (b), usamos a relação trigonométrica

$$\text{sen } \alpha \text{sen } \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Para  $t < 0$ , a função  $H(t')H(t - t')$  é identicamente zero, então  $(G * h)(t) = 0$  para  $t < 0$ . Resumindo, a solução  $x \doteq G * h$  da EDO (43) é

$$x(t) = \frac{c}{2} H(t) \left( \frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\omega_0^2} - t \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \right). \tag{44}$$

Para grandes tempos, a amplitude cresce linearmente devido ao segundo termo: Isso é a catástrofe de ressonância. O gráfico embaixo mostra a força  $h-t$  (azul) e a reação  $x-t$  (vermelho).



□

### 1.9 Distribuições no $\mathbb{R}^n$ .

As funções de teste agora são as funções suaves no  $\mathbb{R}^n$  com suporte limitado,  $D(\mathbb{R}^n)$ . “Suave” significa que todas derivadas parciais  $\frac{\partial^\nu}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\nu}} \varphi(x)$  existem.<sup>14</sup> Derivada parcial de distribuições:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle \doteq - \left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right\rangle. \quad (45)$$

Distribuição Delta:

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(\mathbf{0}).$$

A Proposição 1.7 permanece válida, entendido a convolução no  $\mathbb{R}^n$ ,  $(f * g)(\mathbf{r}) = \int d^n \mathbf{r}' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g(\mathbf{r}')$ .

Recordamos que o operador de Laplace,  $\Delta$ , é definido por

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varphi. \quad (46)$$

**Lema 1.8** A coordenada radial  $r \doteq \|\mathbf{r}\|$  no  $\mathbb{R}^3$  satisfaz

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (47)$$

no sentido de distribuições.

Em outras palavras, a função  $G(\mathbf{r}) \doteq -(4\pi r)^{-1}$  é uma função de Green para o operador Laplace,  $\Delta G = \delta$ . (Na Secção 2.4 vamos *construir* essa função de Green.)

*Demonstração.* O gradiente da função existe não só no sentido de distribuições, mas como função (com valores vetores), até localmente integrável:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \in L^1_{\text{loc}}. \quad (48)$$

A divergência desse campo vetorial (ou seja,  $\Delta \frac{1}{r}$ ) deve ser entendida no sentido de distribuições:<sup>15</sup> Aplicado numa função de teste  $\varphi$ , temos

$$\left\langle \Delta \frac{1}{r}, \varphi \right\rangle \equiv \left\langle \frac{1}{r}, \Delta \varphi \right\rangle = \int \frac{1}{r} \Delta \varphi d^3 \mathbf{r} = \int \left\{ \nabla \cdot \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi \right) - \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla \varphi \right\} d^3 \mathbf{r},$$

onde usamos a relação  $\nabla \cdot (f \nabla \varphi) = \nabla f \cdot \nabla \varphi + f \Delta \varphi$ . A integral do primeiro termo é zero devido ao Teorema de Gauss e o fato que  $\varphi$  se anula fora de uma região limitada.<sup>16</sup> No

<sup>14</sup>Escrevemos frequentemente  $\partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial x_i}$ . A definição (45) só vale para coordenadas canônicas (“Cartesianas”).

<sup>15</sup>Como função ela é zero para todo  $r \neq 0$ :

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \frac{1}{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0}.$$

A situação é análoga com a função Heaviside:  $H' = 0$  como função em  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , mas  $T'_H = \delta$ .

<sup>16</sup>Mais cuidadosamente, fazemos a integral através da região  $B_\varepsilon^R \doteq \{\mathbf{r} | \varepsilon \leq r \leq R\}$ , aplicamos o Teorema de Gauss, e fazemos os limites  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$  no final. A borda  $\partial B_\varepsilon^R$  de  $B_\varepsilon^R$  consiste da esfera com raio  $R$ , com elemento de superfície  $R^2 \hat{\mathbf{r}} d\Omega$ , e da esfera com raio  $\varepsilon$ , com elemento de superfície  $-\varepsilon^2 \hat{\mathbf{r}} d\Omega$ . O Teorema de Gauss dá

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon^R} \nabla \cdot \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi \right) d^3 \mathbf{r} &= \oint_{\partial B_\varepsilon^R} \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi \right) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\|\mathbf{r}\|=R} \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi \right) \cdot R^2 \hat{\mathbf{r}} d\Omega - \oint_{\|\mathbf{r}\|=\varepsilon} \left( \frac{1}{r} \nabla \varphi \right) \cdot \varepsilon^2 \hat{\mathbf{r}} d\Omega \\ &= \oint_{\|\mathbf{r}\|=R} R \partial_r \varphi d\Omega - \oint_{\|\mathbf{r}\|=\varepsilon} \varepsilon \partial_r \varphi d\Omega \end{aligned}$$

que vai para zero se  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ . Na última linha usamos  $\nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{r}} = \partial_r \varphi$ .

segundo termo, vamos usar a Eq. (48), a relação

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \varphi = r \partial_r \varphi,$$

e  $d^3 \mathbf{r} = r^2 dr d\Omega$ , onde  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  é a medida na esfera, para chegar em

$$-\int d^3 \mathbf{r} \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla \varphi = \int d^3 \mathbf{r} \frac{1}{r^2} \partial_r \varphi = \int_{S^2} d\Omega \int_0^\infty dr \partial_r \varphi = -\varphi(\mathbf{0}) \int_{S^2} d\Omega = -4\pi \varphi(\mathbf{0}) = -4\pi \langle \delta, \varphi \rangle,$$

concluindo a demonstração.

Alternativa: Como  $\nabla \frac{1}{r}$  é localmente integrável, temos  $\nabla T_{\frac{1}{r}} = T_{\nabla \frac{1}{r}}$ . (Isso precisa justificativa...) Daí,

$$\langle \Delta T_{\frac{1}{r}}, \varphi \rangle \equiv \langle \nabla \cdot \nabla T_{\frac{1}{r}}, \varphi \rangle = -\langle \nabla T_{\frac{1}{r}}, \nabla \varphi \rangle = -\int d^3 \mathbf{r} \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla \varphi.$$

O resto vai como na pen-última linha da primeira demonstração. □

Pela Prop. 1.7, a equação de Poisson

$$\Delta V = \frac{-1}{\varepsilon_0} \varrho$$

da eletrostática (onde  $\varrho$  é a densidade de carga e  $V$  é o potencial eletrostático) possui a solução

$$V(\mathbf{r}) = \frac{-1}{\varepsilon_0} (G * \varrho)(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 \mathbf{r}'. \quad (49)$$

**Exemplo 15** Para uma carga  $q$  pontual localizada no ponto  $\mathbf{r}_0$ , a densidade de carga é dada por  $\varrho(\mathbf{r}) = q\delta_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ . Como isso é uma distribuição com suporte compacto, a convolução  $\frac{1}{r} * \varrho$  existe: O potencial, segundo a Eq. (49), é dado por  $V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ , concordando com a fórmula da Física I. □

**Exemplo 16** Para um dipolo ideal consistente de uma carga  $-q$  localizada na origem e uma carga  $q$  em  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ , a densidade de carga é  $q(\delta(\mathbf{a}) - \delta(\mathbf{0}))$ . Em grandes distâncias  $r \gg a$ , os efeitos do dipolo só dependem do momento de dipolo  $\mathbf{p} \doteq q\mathbf{a}$ . Podemos substituir o dipolo pelo dipolo ideal “puro” [7, p. 106], obtido pelo limite  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$ ,  $q \rightarrow \infty$  com  $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$  constante,

$$\varrho(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow \infty} q(\delta(\mathbf{p}/q) - \delta(\mathbf{0})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta(\varepsilon \mathbf{p}) - \delta(\mathbf{0}))/\varepsilon.$$

Aplicado numa função de teste, isso é

$$\langle \varrho, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi(\varepsilon \mathbf{p}) - \varphi(\mathbf{0}))/\varepsilon = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{0}) = \langle -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta, \varphi \rangle.$$

Concluimos que a densidade de carga do dipolo ideal “puro” localizado na origem é dada por

$$\varrho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta.$$

O potencial gerado por essa configuração é dado por

$$V \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r} * \varrho \right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r} * \mathbf{p} \cdot \nabla \delta \right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} * \delta \right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r}.$$

Usamos sucessivamente as Eq.s (36) e (35). Usando  $\mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{-1}{r^2} \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ , temos o resultado

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

Isso realmente coincide com o potencial do dipolo finito (com separação  $\mathbf{a}$  e densidade de carga  $q(\delta(\mathbf{a}) - \delta(\mathbf{0}))$ ) para grandes  $r$  ( $r \gg a$ ), módulo termos da ordem  $1/r^3$ , veja [7, Eq. (3.90)].  $\square$

### 1.10 Exercícios.

**Ex. 1. (Derivada de Distribuições.)** Seja  $f$  a função

$$f(x) := \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Mostre que vale

$$(T_f)'' = \delta. \quad (50)$$

(Observe que  $f(x) = xH(x)$ , onde  $H$  é a função de Heaviside,

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Então a Eq. (50) significa que vale a equação  $(xH(x))'' = \delta(x)$  no sentido de distribuições.)

**Ex. 2. (Derivada de Distribuições.)** Mostre que valem as identidades

$$x\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)}, \quad x^n\delta^{(k)} = 0 \quad \text{se } n > k. \quad (51)$$

**Ex. 3. (EDO.)** Mostre que vale

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) H(x)e^{-\lambda x} = \delta(x) \quad (52)$$

no sentido de distribuições.

**Ex. 4.** Usando o resultado do item anterior, ache uma solução da EDO

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) f(x) = h(x)$$

para uma função dada  $h$ . Dica: Convolução com função de Green.

**Ex. 5.** Mostre que vale

$$\frac{d}{dx} H(x^2 - 1) = 2x \delta(x^2 - 1). \quad (53)$$

**Ex. 6. (Uma sequencia Delta.)** Mostre que vale

$$\varepsilon |x|^{\varepsilon-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\delta.$$

Dicas: Para todos  $x \neq 0$ , vale:

1. A função  $\varepsilon|x|^{\varepsilon-1}$  é a derivada da função  $\text{sgn}(x)|x|^\varepsilon$ , onde “sgn” é a função “sinal”:  $\text{sgn}(x) = 1$  para  $x > 0$  e  $\text{sgn}(x) = -1$  para  $x < 0$ .
2.  $|x|^\varepsilon$  converge (puntiformemente) para 1 se  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Ex. 7. (Convolução.)** Sejam  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  e  $\varphi \in D(\mathbb{R})$ . Mostre

$$T_{f*g} = T_f * T_g, \quad (54)$$

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \langle T_f, g^\tau * \varphi \rangle, \quad (55)$$

onde  $g^\tau(x) := g(-x)$ .

**Ex. 8. Problemas na literatura:** Lemos [11]: Cap. 9, Pr. 9.1, 9.2, (9.4), 9.9\*, 9.14, 9.15, 9.16, 9.17\*, 9.18\*, (9.22). (\* = difícil)

## 2 Transformada de Fourier

### 2.1 Definição e exemplos

A transformada de Fourier de uma função  $f \in L^1(\mathbb{R})$  é definida por

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x) dx. \quad (56)$$

*Aviso:* Na literatura existem outras convenções; por exemplo o Butkov [4] usa  $e^{+ikx}$  na integral; outros livros não tem o fator  $(2\pi)^{-1/2}$ .

Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , esta integral obviamente é finita, e para todo  $k$  vale

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1, \quad \text{onde} \quad \|f\|_1 \doteq \int |f(x)| dx \quad (57)$$

é a norma em  $L^1(\mathbb{R})$ . Em particular, a transformada  $\hat{f}$  é uma função limitada. Até vale:

**Lema de Riemann-Lebesgue:** Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , a transformada de Fourier  $\hat{f}$  é contínua e cai para zero para  $|k| \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Se  $k_n \rightarrow k$ , obviamente a sequência de funções  $x \mapsto e^{-ik_n x} f(x)$  converge puntiformemente para a função  $e^{-ikx} f(x)$ . Como  $|e^{-ik_n x} f(x)| = |f(x)|$  (independente de  $n$ ), a função  $|f(x)|$  serve como “função dominante”, e o Teorema de Lebesgue B.1 garante a convergência

$$\hat{f}(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ik_n x} f(x) dx \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x) dx = \hat{f}(k).$$

Daí, a função  $\hat{f}$  é contínua.

Para mostrar a segunda afirmação, supomos num primeiro passo que  $f$  seja em  $C^1(\mathbb{R})$ , com  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Nesse caso, integração em partes dá

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(k) \equiv \int e^{-ikx} f(x) dx = \frac{i}{k} e^{-ikx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{k} \int e^{-ikx} f'(x) dx.$$

O primeiro termo é zero, e o segundo termo é limitado por  $\frac{1}{k} \|f'\|_1$ , e daí cai para zero se  $k \rightarrow \infty$ .

Num segundo passo pegamos uma sequência de funções  $f_n \in C^1$  com  $f'_n \in L^1(\mathbb{R})$  tal que

$$\int |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty. \quad (58)$$

(Tal sequência existe, ver Lema B.2 no apêndice). Pela Eq. (57) vale para todo  $k$

$$|\widehat{f_n}(k) - \hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f_n(x) - f(x)| dx.$$

O lado direito vai para zero devido a (58), e não depende de  $k$ . Isso implica que a sequência  $\widehat{f_n}$  converge uniformemente para  $\hat{f}$ . Em particular, para um dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $N$  tal que para todo  $k$  vale

$$|\widehat{f_N}(k) - \hat{f}(k)| \leq \varepsilon.$$

Do primeiro passo, sabemos que a função  $\widehat{f_N}(k)$  cai para zero quando  $|k| \rightarrow \infty$ . Daí, podemos pegar um  $K$  tal que para todo  $k > K$  vale  $|\widehat{f_N}(k)| < \varepsilon$ . Essas duas desigualdades implicam que para  $k > K$  vale

$$|\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(k) - \widehat{f_N}(k)| + |\widehat{f_N}(k)| < 2\varepsilon.$$

Isso mostra que  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$  para grandes  $|k|$ , como afirmado.  $\square$

**Teorema da inversão de Fourier:** Se  $f$  e  $\hat{f}$  são em  $L^1(\mathbb{R})$  vale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (59)$$

*Demonstração.* Usando a definição da transformada, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \hat{f}(k) e^{ikx} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n dk \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n dk \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') e^{ik(x-x')}.$$

Pelo Teorema de Fubini podemos trocar as integrais  $dx'$  e  $dk$ , chegando em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} dx' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ik(x-x')}}.$$

Mas a sequência em chave converge para  $\delta(x' - x)$  no sentido de distribuições, ver Eq. (6). Mais precisamente, seguindo a demonstração do Lema 1.3, o limite da sequência acima é  $f(x)$ .  $\square$

**Exemplos:**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (a > 0) : \quad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(ka)}{k} \quad (60)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|/a, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (a > 0) : \quad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{a} \frac{\text{sen}^2(ka/2)}{k^2} \quad (61)$$

$$f(x) = e^{-\lambda x^2} \quad (\lambda > 0) : \quad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} e^{-\frac{k^2}{4\lambda}} \quad (62)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0) : \quad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|a}}{a} \quad (63)$$

$$f(x) = e^{-\kappa|x|} \quad (\kappa > 0) : \quad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa}{k^2 + \kappa^2} \quad (64)$$

Estes exemplos já mostram duas características: Primeiro, quanto mais “pontiaguda” a função, tanto mais “achatada” a transformada.<sup>17</sup> Segundo, quanto mais rápido a função cai para zero no infinito, tanto mais suave é a transformada (e vice versa). Essa característica será formulada de maneira precisa no seguinte teorema:

**Teorema 2.1** *i) Seja  $f \in C^n(\mathbb{R})$  e sejam  $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Então vale*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](k) = (ik)^n \hat{f}(k) \quad e \quad |k|^n |\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f^{(n)}\|_1. \quad (65)$$

*ii) Sejam  $f, xf(x), \dots, x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ . Então  $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$  e vale*

$$i^n \hat{f}^{(n)}(k) = \mathcal{F}[x^n f(x)](k). \quad (66)$$

Este teorema é uma simples consequência das Eq.s (70) e (71) do seguinte

**Lema 2.2 (Propriedades)** *Escrevemos  $\hat{f} := \mathcal{F}[f]$ , e  $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$  (conjugação complexa).*

$$\mathcal{F}[\bar{f}](k) = \overline{\hat{f}(-k)} \quad (67)$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto f(x - a)](k) = e^{-ika} \hat{f}(k) \quad (68)$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto e^{ik_0 x} f(x)](k) = \hat{f}(k - k_0) \quad (69)$$

$$\mathcal{F}[f'](k) = ik \hat{f}(k) \quad (70)$$

$$\mathcal{F}[x \mapsto xf(x)](k) = i(\hat{f})'(k) \quad (71)$$

**Teorema de Parseval:** Para  $f, g \in D(\mathbb{R})$  vale

$$\int \overline{f(x)} g(x) dx = \int \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk.$$

*Demonstração.* Substituindo a transformada inversa para  $g$ , o lado esquerdo equivale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \overline{f(x)} \int dk \hat{g}(k) e^{ikx}.$$

<sup>17</sup> Isso leva à chamada relação de incerteza na mecânica quântica.

Como  $g$  é  $C^\infty$ , a transformada de  $g$  cai rapidamente para zero no infinito pelo teorema 2.1. Daí podemos trocar a ordem de integrações pelo Fubini, e chegamos em

$$\int dk \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \overline{f(x)e^{-ikx}}}_{\hat{g}(k)}.$$

Como  $\int dx \overline{f(x)} = \overline{\int dx f(x)}$ , a expressão embaixo da chave é justamente  $\overline{\hat{f}(k)}$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Verifique-se facilmente que a transformada de Fourier entrelaça a convolução com o produto puntiforme, a saber: Para duas funções de teste  $\varphi, \chi$  vale

$$\widehat{\varphi * \chi} = \sqrt{2\pi} \hat{\varphi} \cdot \hat{\chi}, \quad \widehat{\varphi \cdot \chi} = \sqrt{2\pi} \hat{\varphi} * \hat{\chi}. \quad (72)$$

## 2.2 Transformada de Fourier de Distribuições

Gostaríamos de transferir a transformada de Fourier para distribuições, como toda operação com funções, a saber (ver rodapé 8): Seja  $T$  uma distribuição e  $f_n$  uma sequência de funções cujas transformadas de Fourier existem e estão em  $L^1_{\text{loc}}$ , tal que  $f_n$  converge para  $T$  no sentido de distribuições,  $T_{f_n} \rightarrow T$ . Então definimos

$$\hat{T} := \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\hat{f}_n} \quad (73)$$

se esse limite existe. Um pequeno calculo mostra que

$$\langle T_{\hat{f}_n}, \varphi \rangle = \langle T_{f_n}, \hat{\varphi} \rangle. \quad (74)$$

Porém, a transformada de Fourier de uma função de teste em  $D(\mathbb{R})$  não está em  $D(\mathbb{R})$  pois ela possui uma extensão holomorfa para o plano complexo e daí não possui suporte compacto. Por isso o limite de (74) pode não existir.

Como saída consideramos um espaço maior de funções de teste, o espaço de *funções de Schwartz*. Ele consiste nas funções suaves que caem, junto com todas derivadas, rapidamente para zero:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall n, m \exists c > 0, \forall x : |x^n \varphi^{(m)}(x)| < c\} \quad (75)$$

Topologia: Uma sequência  $\varphi_n$  converge para zero em  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  se para todo  $k, m$  a sequência de funções  $x^k \varphi_n^{(m)}(x)$  converge uniformemente para zero. O valor desse espaço está no fato que a transformada de Fourier deixa ele invariante,

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Definimos agora as *distribuições temperadas* como as aplicações lineares e contínuas de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  em  $\mathbb{C}$ . Para elas existe o limite em (74), e nossa definição da transformada de Fourier equivale a

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad (76)$$

para distribuições temperadas.

**Exemplos.** ( $T_1$  denota a distribuição regular correspondente à função constante  $1(x) = 1$ .)

$$\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \widehat{T}_1 = \sqrt{2\pi}\delta, \quad \hat{H}(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k - i\varepsilon}. \quad (77)$$

As Eqs. (68) até (71) também valem para distribuições. Por exemplo, a primeira equação em (77), junto com (68) ou (70), respetivamente, implicam

$$\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika}, \quad \hat{\delta}'(k) = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}. \quad (78)$$

**Convolução de distribuições:** A Eq. (72) também vale para distribuições: Seja  $T$  uma distribuição temperada e  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Então a convolução  $T * \varphi$  é uma distribuição temperada, com transformada de Fourier

$$\widehat{T * \varphi} = \sqrt{2\pi} \hat{\varphi} \cdot \hat{T}. \quad (79)$$

(O mesmo vale ainda se  $\varphi$  é substituído por uma distribuição com suporte compacto [8, Thm. 7.1.15]. A transformada de Fourier de tal distribuição é uma função em  $C^\infty$ .)

### 2.3 Solução de EDO's

Devido a propriedade (70), a transformada de Fourier transforma uma EDO com coeficientes constantes numa equação algébrica. Ela pode ser resolvida mais facilmente do que a EDO, e a transformada inversa é uma solução da EDO.

Exemplificamos essa estratégia no oscilador harmônico amortecido e forçado. A posição do oscilador num dado tempo  $t$  será denotada por  $x(t)$ . A “frequência angular natural” (sem atrito e sem força externa) dele seja  $\omega_0$ . Supondo que uma força externa  $F(t)$  age, a EDO é

$$(Px)(t) \doteq \ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = h(t), \quad (80)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva que descreve o atrito, e  $h(t) = F(t)/m$ . Supomos que  $\alpha < \omega_0$  (amortecimento fraco).

Pela Prop. 1.7, sabemos que é suficiente construir a função de Green  $G$  para o operador diferencial  $P$ , ou seja, a solução da EDO  $PG = \delta$ . Com  $G$  nas mãos, uma solução particular da EDO (80) é simplesmente  $x \doteq G * h$ .

Para construir uma função de Green  $G$ , tomamos as transformadas de Fourier de ambos os lados da EDO  $PG = \delta$ . Vamos denotar a transformada de Fourier de  $G$  por  $\hat{G}$ , e a variável dessa função (ou distribuição) por  $\omega$ ,  $\hat{G}(\omega)$ , e a derivada temporal por um ponto,  $\dot{G}$ . Usando as relações

$$\widehat{(\dot{G})}(\omega) = i\omega\hat{G}(\omega), \quad \widehat{(\ddot{G})}(\omega) = -\omega^2\hat{G}(\omega),$$

ver Eq. (70), e  $\hat{\delta}(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}$ , a transformada da EDO  $PG = \delta$  leva à equação algébrica

$$(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2)\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (81)$$

Uma solução é<sup>18</sup>

$$\hat{G}(\omega) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\alpha\omega} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}, \quad (82)$$

$$\omega_{\pm} \doteq \pm\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + i\alpha. \quad (83)$$

A própria função de Green achamos pela transformada inversa de Fourier,

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \hat{G}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{-1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}. \quad (84)$$

Evaluação da integral pelo cálculo de resíduo: Interpretamos a integral como integral de caminho no plano complexo da função  $f(z) \doteq e^{izt}/(z - \omega_+)(z - \omega_-)$  através do caminho  $\gamma(s) \doteq s$ . Consideramos primeiro o caso  $t > 0$ . Nesse caso, a função cai para zero mais rápido do que  $|z|^{-1}$  no semiplano superior. Daí, a integral coincide com  $2\pi i$  vezes a soma dos resíduos neste semiplano. Os dois polos (simples)  $z = \omega_{\pm}$  são localizados neste semiplano, e os resíduos são

$$\text{Res}_{\omega_+} f = \frac{e^{i\omega_+ t}}{\omega_+ - \omega_-}, \quad \text{Res}_{\omega_-} f = \frac{e^{i\omega_- t}}{\omega_- - \omega_+}.$$

Concluimos que para  $t > 0$

$$G(t) = \frac{-1}{2\pi} 2\pi i \frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \{e^{i\omega_+ t} - e^{i\omega_- t}\} = \frac{-i}{2\Omega} e^{-\alpha t} 2i \text{sen}(\Omega t), \quad \Omega \doteq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

No caso  $t < 0$ ,<sup>19</sup> a função  $f(z)$  cai para zero no semiplano *inferior*, onde não tem polos. Daí, a integral em (84) é zero para  $t < 0$ . Resumindo, achamos função de Green

$$G(t) = H(t) e^{-\alpha t} \frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega}, \quad (85)$$

onde  $H$  é a função de Heaviside. Note que para  $\alpha = 0$  isso coincide com a função de Green (41) que foi jogada no Exemplo 14.

Consideramos a solução  $x = G * h$  da EDO (80):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t') h(t') \equiv \int_{-\infty}^t dt' G(t - t') h(t'). \quad (86)$$

É um detalhe importante que apenas os valores de  $t'$  com  $t' < t$  contribuem à integral, pois  $G(t - t') = 0$  para  $t' > t$  devido ao fator  $H(t - t')$ .

Supomos agora que a força externa  $h$  começa a atuar em algum instante de tempo  $t_0$ , ou seja,  $h(t') = 0$  para  $t' < t_0$ . Como  $t < t_0$  implica  $t' < t < t_0$  para todos  $t'$  que contribuem á integral, neste caso a solução  $x(t)$  de (86) também é nula para todos  $t < t_0$ . Por isso, uma função de Green que contém o fator  $H(t)$  é dita de satisfazer o *princípio da causalidade*.

<sup>18</sup>Sabemos da Secção 1.6 que existem outras, que diferem de nosso  $\hat{G}$  por soluções da equação homogênea  $(\omega^2 - 2i\alpha\omega - \omega_0^2) \hat{G}_0(\omega) = 0$ , correspondente a soluções da EDO homogênea  $PG_0 = 0$ .

<sup>19</sup>O valor da função  $G$  em  $t = 0$  não interessa, por que ela é localmente integrável e daí define uma distribuição regular  $T_G$ . Sabemos que tal distribuição não muda se mudamos o valor de  $G$  em algum ponto.

## 2.4 Transformada de Fourier no $\mathbb{R}^n$

A transformada de Fourier no  $\mathbb{R}^n$  é definida da maneira análoga como em  $\mathbb{R}$ , veja Eq. (56):

$$\hat{f}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d^n \mathbf{r}, \quad (87)$$

onde  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  é o produto escalar euclidiano no  $\mathbb{R}^n$ .

Transformada inversa:

$$f(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^n \mathbf{r}. \quad (88)$$

O espaço Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  é

$$\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall n, m, i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m \exists c > 0 \forall \mathbf{r} : |x_{i_1} \cdots x_{i_n} \frac{\partial^m}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_m}} \varphi(\mathbf{r})| < c\}$$

(Aqui,  $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$ .)

Transformada de Fourier da distribuição delta:

$$\hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}. \quad (89)$$

Vamos construir a função de Green (47) para o operador de Laplace  $\Delta$  no  $\mathbb{R}^3$ , definido em (46), ou seja, uma função  $G$  que satisfaz  $\Delta G = \delta$ . Em analogia com a Eq. (70) mostra-se

$$\widehat{(\Delta G)}(\mathbf{k}) = -|\mathbf{k}|^2 \hat{G}(\mathbf{k}), \quad (90)$$

onde  $|\mathbf{k}|$  é a norma euclidiana no  $\mathbb{R}^n$ . Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados de  $\Delta G = \delta$  dá  $-|\mathbf{k}|^2 \hat{G}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2}$ . Uma solução é obviamente  $\hat{G}(\mathbf{k}) = -(2\pi)^{-3/2} |\mathbf{k}|^{-2}$ . Fazendo a transformada inversa dá

$$G(\mathbf{r}) \equiv (2\pi)^{-3/2} \int d^3 \mathbf{k} \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (91)$$

Para calcular a integral, escolhemos a direção  $\hat{\mathbf{z}}$  no espaço dos  $\mathbf{k}$  como  $\hat{\mathbf{r}}$ , tal que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$  com  $k \doteq |\mathbf{k}|$  e  $r \doteq |\mathbf{r}|$ . A medida  $d^3 \mathbf{k}$  escrevemos como  $k^2 dk d\theta d\phi$  com  $u \doteq \cos \theta \in [-1, 1]$ . Com isso temos

$$G(\mathbf{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 du e^{ikru} = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \frac{-2}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk \frac{\text{sen } kr}{k}.$$

Usando  $\int_0^\infty dk \text{sen}(kr)/k = \pi/2$ , dá a função de Green (47) do Lema 1.8,

$$G(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi r}. \quad (92)$$

## 2.5 Exercícios

**Ex. 1.** Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = e^{-\kappa|x|}, \quad \kappa > 0.$$

**Ex. 2.** Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

**Ex. 3.** Calcule a transformada de Fourier das funções

$$f_1(x) = (x^2 + 3x)e^{-x^2/2}, \quad f_2(x) = xe^{-\kappa|x|}, \quad \kappa > 0, \quad f_3(x) = e^{-(1+x)^2}.$$

**Ex. 4. Problemas na literatura:** Arfken [1]: Cap.15, Pr. 15.3.1, 15.3.5, 15.3.9, 15.3.10, Butkov [4]: Cap. 7, Pr. 7.2,

## A Série de Fourier.

Vamos deduzir a teoria da série de Fourier a partir da transformada de Fourier, usando a teoria de distribuições. A chave é a chamada “distribuição pente” de Dirac com período  $L$ , definida por

$$C_L(x) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nL).$$

Ela é uma distribuição temperada [8], e daí possui uma transformada de Fourier. De fato, ela coincide essencialmente com a sua própria transformada [8, Thm. 7.2.1]:

**Proposição A.1 (“Poisson summation formula”)** A transformada de Fourier de  $C_L$  é dada por

$$\widehat{C}_L = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} C_{\frac{2\pi}{L}}. \quad (93)$$

Usando o fato que  $\widehat{\delta_{nL}}(k) = (2\pi)^{-1/2} e^{-iknL}$ , ver Eq. (78), essa equação pode ser escrita como

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inkL} = \frac{2\pi}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(k - n\frac{2\pi}{L}). \quad (94)$$

Isso é a chamada fórmula do somatório de Poisson (“Poisson summation formula”).

*Demonstração.* Mostraremos que a distribuição  $\widehat{C}_L$  tem as duas propriedades: (i) Ela é periódica com período  $2\pi/L$ , e (ii) Ela tem suporte no conjunto de pontos  $2\pi n/L$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Para mostrar (i), observa que  $e^{2\pi ix/L} C_L(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi ix/L} \delta(x - nL) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi in} \delta(x - nL)$  devido à identidade  $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$ , ou seja,  $e^{2\pi ix/L} C_L(x) = C_L(x)$ . Pela propriedade (69), isso implica que

$$\widehat{C}_L(k - \frac{2\pi}{L}) = \widehat{C}_L(k), \quad (95)$$

ou seja,  $\widehat{C}_L$  é periódico com período  $\frac{2\pi}{L}$ . Mostraremos (ii): A periodicidade  $C_L(x - L) = C_L(x)$  implica, pela propriedade (70), a identidade  $e^{ikL} \widehat{C}_L(k) = \widehat{C}_L(k)$ , ou seja,

$$(e^{ikL} - 1) \widehat{C}_L(k) = 0.$$

Isso implica<sup>20</sup> que o suporte de  $\widehat{C}_L$  está contido no conjunto  $\{2\pi n/L, n \in \mathbb{Z}\}$ .

<sup>20</sup>Pelo mesmo argumento que já usamos... (!!)

Essa propriedade implica por sua vez, pelo Teorema 1.4, que  $\widehat{C}_L$  é uma soma de deltas ou derivadas de deltas concentradas nos pontos  $2\pi n/L$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . As derivadas são exclusas, pois a identidade  $(e^{ikL} - 1)\delta_{2\pi n/L}^{(\nu)}(k) = 0$  é satisfeita apenas para  $\nu = 0$ . Usando ainda a periodicidade (95), concluímos que

$$\widehat{C}_L = c \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n/L} \equiv c C_K, \quad K \doteq 2\pi/L,$$

como afirmado. Falta apenas determinar a constante  $c$ . Para esses fins, observe que a equação acima significa que para toda função de teste  $\varphi$  vale

$$\sum_n \widehat{\varphi}(nL) = c \sum_n \varphi(nK).$$

Transladando a função  $\varphi(k)$  por  $k'$ ,  $\chi(k) \doteq \varphi(k + k')$  e usando (68), isso é

$$\sum_n e^{ik'nL} \widehat{\varphi}(nL) = c \sum_n \varphi(nK + k').$$

Integramos essa equação em  $k'$  de 0 até  $K \equiv 2\pi/L$ . No lado esquerdo temos

$$\int_0^{2\pi/L} e^{ik'nL} dk' = \begin{cases} \frac{1}{inL} (e^{i2\pi n} - 1) = 0, & n \neq 0, \\ 2\pi/L, & n = 0. \end{cases}$$

Em particular, todos termos com  $n \neq 0$  se anulam, e concluímos que

$$\frac{2\pi}{L} \widehat{\varphi}(0) = c \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^K \varphi(nK + k') dk' \equiv c \int_{\mathbb{R}} \varphi(k') dk' = c \sqrt{2\pi} \widehat{\varphi}(0),$$

implicando em  $c = K/\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}/L$ , como afirmado.  $\square$

Agora usaremos esse resultado para construir a série de Fourier de uma função (ou até distribuição) periódica  $f$  com período  $L$ ,  $f(x + L) = f(x)$ , definida na reta real.

**Teorema A.2 (Série de Fourier.)** *Seja  $f$  uma função localmente integravel e periódica com período  $L$ . Então vale<sup>21</sup>*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inKx}, \quad c_n \doteq \frac{1}{L} \int_0^L e^{-inKx} f(x) dx, \quad K \doteq 2\pi/L. \quad (97)$$

Se  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , a convergência é uniforme.

*Demonstração.* Começamos com o lado direito da Eq. (97):

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inKx} &\equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(y) \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inK(y-x)} dy}_{L \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(y-x-nL)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^L f(y) \delta(y-x-nL) dy, \end{aligned} \quad (98)$$

<sup>21</sup>A Eq. (97), bem como a convergência da série, vale no sentido de distribuições: A afirmação é que para toda função de teste  $\varphi \in D(\mathbb{R})$  vale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_{\mathbb{R}} e^{inKx} \varphi(x) dx. \quad (96)$$

onde usamos a fórmula do somatório de Poisson (94) (!). Usando a periodicidade  $f(y) = f(y - nL)$ , fazendo a transformação  $y - nL =: x'$  e escrevendo  $\sum_n \int_{nL}^{(n+1)L} = \int_{\mathbb{R}}$ , isso é

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^L f(y - nL) \delta(y - x - nL) dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{nL}^{(n+1)L} f(x') \delta(x' - x) dx' = \int_{\mathbb{R}} f(x') \delta(x' - x) dx', \quad (99)$$

ou seja  $f(x)$ . Isso mostra a Eq. (97). (Mais rigorosamente, as identidades (98) e (99) valem no sentido de distribuições, veja rodapé 21. De fato temos mostrado que para toda função de teste  $\varphi \in D(\mathbb{R})$  vale a Eq. (96).)

Falta mostrar a convergência uniforme. Se  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , duas integrações em partes levam a

$$c_n = \frac{1}{L} \left( \frac{-i}{nK} \right)^2 \int_0^L e^{-inKx} f''(x) dx.$$

Daí, para todo  $x \in \mathbb{R}$  vale  $|c_n e^{inKx}| \leq c/n^2$ . Pelo critério de Weierstrass (“Teste M de Weierstrass” [11, Tma. 7.9]), a série (97) converge uniformemente.  $\square$

## B Alguns fatos matemáticos.

Em muitos casos queremos trocar, para uma seqüência de funções, limite e integração,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

O critério mais geral sob quais condições isso é possível, é o seguinte teorema:

**Teorema B.1 (Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue)** *Seja  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma seqüência de funções em  $L^1(\mathbb{R})$  que converge puntiformemente para uma função  $f$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para quase todo  $x$ .<sup>22</sup> Se existe uma função  $M \in L^1(\mathbb{R})$  tal que para todo  $n$  e (quase) todo  $x$*

$$|f_n(x)| \leq M(x),$$

então a função  $f$  é em  $L^1(\mathbb{R})$  e o limite pode ser trocado com a integral:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

A função  $M$  é chamada de “função dominante”.

Nas aplicações com funções em  $D(\mathbb{R})$ , a integral se estende apenas através um intervalo limitado fixo (independente de  $n$ ). Neste caso obviamente a função “dominante”,  $M(x)$ , precisa ser apenas *localmente* integrável,  $M \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

Mostraremos agora o fato (usado no Lema 2.1 de Riemann- Lebesgue) que  $C^1(\mathbb{R})$  é denso em  $L^1(\mathbb{R})$ , mais preciamente, que toda função em  $L^1$  pode ser aproximada por funções em  $C^1$  com derivada em  $L^1$ :

**Lema B.2** *Para todo  $f \in L^1(\mathbb{R})$  existe uma seqüência  $f_n$  de funções em  $C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  com  $f'_n \in L^1(\mathbb{R})$ , tal que*

$$\int |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty. \quad (100)$$

<sup>22</sup>Quer dizer, com exceção de um conjunto enumerável  $\{x_1, x_2, \dots\}$ .

*Demonstração.* (A nossa demonstração é incompleta em que nos não vamos mostrar a continuidade do operador translação (102).) A idéia fundamental é que a convolução de uma função  $f \in L^1$  com uma função suave melhora a “suavidade” da função  $f$  (“mollifier”). Vamos lá:

Pegue uma sequência-Delta  $j_n(x) = nj(nx)$  como no Lema 1.2, onde  $j \in D(\mathbb{R})$  com  $\int j(x)dx = 1$ , e define  $f_n \doteq f * j_n$ . (A sequência  $j_n$  se chama de “approximate identity” [12] ou “mollifier”.) Pela Eq. (32), a derivada de  $f_n$  é dada por  $f'_n = f * j'_n$ . Verifique-se pelo teorema de convergência dominada que esta função é contínua, então a função  $f_n$  é em  $C^1(\mathbb{R})$ . Ela também é integrável, pois

$$\int dx |f_n(x)| \leq \int dx \int dy |j_n(y)f(x-y)| = \int dy |j_n(y)| \int dx |f(x-y)| = \int dy |j_n(y)| \int dx |f(x)|$$

( $= \int dx |f(x)|$ ). Pelo mesmo argumento a derivada  $f'_n \equiv f * j'_n$  é integrável. Falta mostrar a convergência em  $L^1$ , Eq. (100). Para esses fins, escrevemos<sup>23</sup>

$$\begin{aligned} \int dx |f_n(x) - f(x)| &= \int dx \left| \int dy j_n(y) f(x-y) - f(x) \right| = \int dx \left| \int dy \{j_n(y) f(x-y) - f(x)\} \right| \\ &\leq \int dx \int dy |j_n(y)| |f(x-y) - f(x)| = \int dy |j(y)| \int dx \cdot |f(x - \frac{y}{n}) - f(x)| \\ &\doteq \int dy |j(y)| \|T_{y/n} f - f\|_1, \end{aligned} \quad (101)$$

onde  $T_a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , é o operador translação,  $(T_a f)(x) \doteq f(x-a)$ . Sabe-se [5] que esse operador é contínuo em  $L^1(\mathbb{R})$  no sentido que para todo  $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon f - f\|_1 = 0. \quad (102)$$

Além disso, pela desigualdade do triângulo temos

$$\|T_{y/n} f - f\|_1 \leq \|T_{y/n} f\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1,$$

onde usamos que  $\|T_a f\|_1 = \|f\|_1$  (por transformação de variáveis  $x - a \rightarrow x$ ). Daí, o integrante em (101) converge puntiformemente para 0 para todo  $y$  e possui a função dominante  $2\|f\|_1 |j(y)|$ . O teorema de convergência dominada implica que (101) vai para zero se  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## Referências

- [1] G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 6th ed., 2005)
- [2] G. Birkhoff, S. MacLane, *Álgebra Moderna Básica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 4ª edição, 1980)
- [3] C. Braga, ...
- [4] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro)

<sup>23</sup>A segunda equação vale porque  $\int dy j_n(y) = 1$ .

- [5] R. E. Castillo, H. Rafeiro, *An Introductory Course in Lebesgue Spaces* (Springer, 2016)
- [6] H. Feshbach, P.M. Morse, *Methods of Theoretical Physics* (Mc Graw-Hill, New York)
- [7] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica* (Pearson, São Paulo, 3ª edição, 2010)
- [8] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I* (Springer, Berlin, 1983)
- [9] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 3rd edition, 1999)
- [10] E. Kreyszig, *Matemática Superior* (John Wiley & Sons, New York, 2ª edição, 1984)
- [11] N. A. Lemos, *Convite à Física Matemática* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2013)
- [12] M. Reed, and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I* (Academic Press, New York, 1975)
- [13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (McGraw-Hill, 1986)
- [14] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Vol. I e II, (Hermann, Paris, 1957-1959)