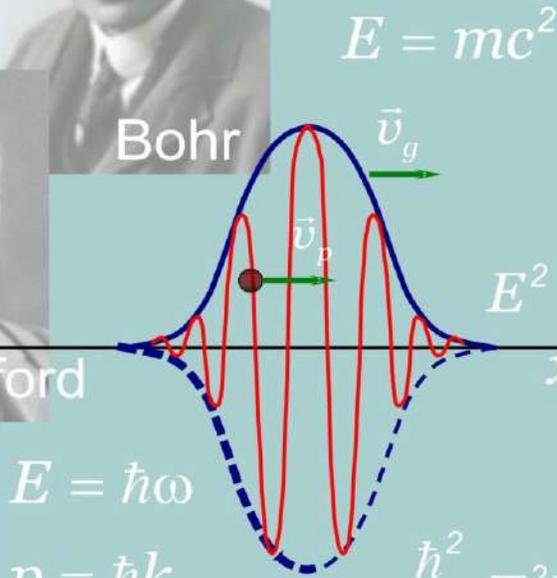
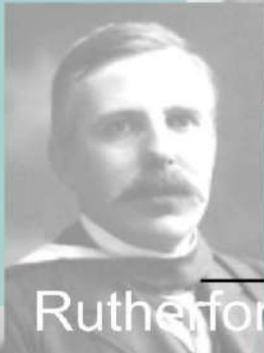
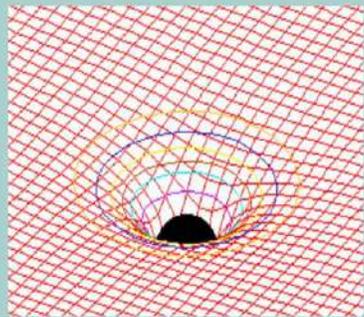
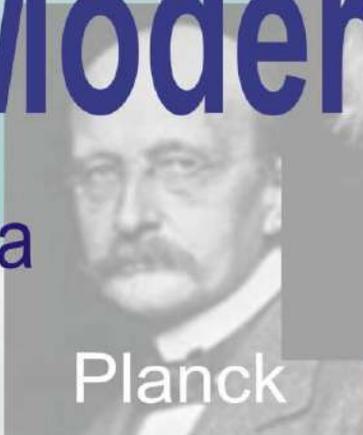
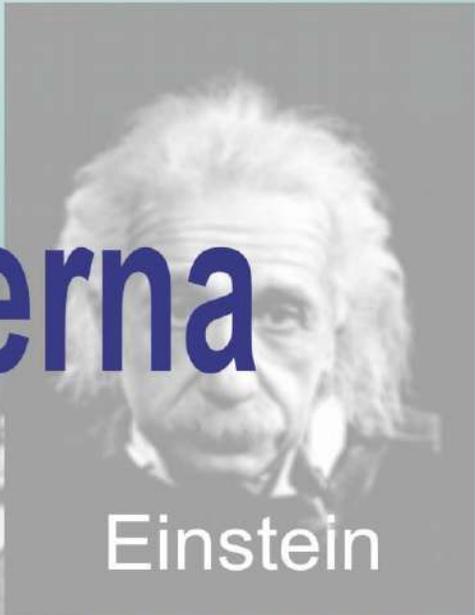


# Introdução à Física Moderna

Carlos R. A. Lima



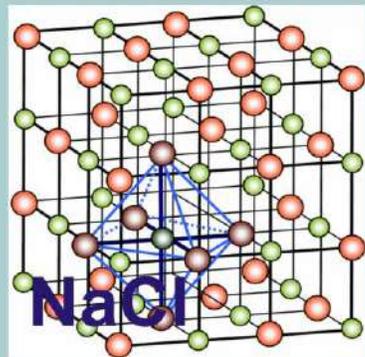
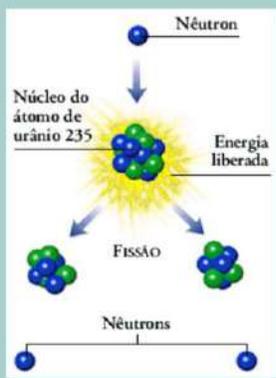
$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

$$\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$$



$$E = \hbar\omega$$
$$p = \hbar k$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$





Departamento de Física  
Instituto de Ciências Exatas  
Universidade Federal de Juiz de Fora

NOTAS DE AULAS DE

# **INTRODUÇÃO À FÍSICA MODERNA**

Prof. Carlos R. A. Lima

Edição de 2021

# CAPÍTULO 1 – TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

## ÍNDICE

- 1.1- Introdução
- 1.2- Eventos Físicos e Sistemas de Referência
- 1.3- Transformação de Galileu e Relatividade de Newton
- 1.4- Eletromagnetismo e Relatividade de Newton
- 1.5- Experiência de Michelson - Morley
- 1.6- Tentativas para “Salvar o Éter” - FACULTATIVO
  - 1.6.1- Hipótese da Contração de Lorentz - Fitzgerald
  - 1.6.2- Hipótese do Arrastamento do Éter
- 1.7- Postulados da Teoria da Relatividade Especial
- 1.8- Cinemática Relativística
  - 1.8.1- Simultaneidade entre Eventos
  - 1.8.2- Transformações de Lorentz
  - 1.8.3- Transformação de Velocidades
  - 1.8.4- Diagramas Espaço – Tempo e Espaço de Minkowski
  - 1.8.5- Dilatação dos Tempos e Contração dos Comprimentos
  - 1.8.6- Técnicas Experimentais de Medidas de Espaço e Tempo em Relatividade – FACULTATIVO
    - 1.8.6.1- Relógio de Luz
    - 1.8.6.2- Relógio Atômico
  - 1.8.7- Intervalo no Espaço – Tempo
  - 1.8.8- Efeito Doppler na Relatividade
  - 1.8.9- Paradoxo dos Gêmeos
- 1.9- Dinâmica Relativística
  - 1.9.1- Momento Relativístico
  - 1.9.2- Energia Relativística
  - 1.9.3- Transformações das Grandezas Dinâmicas
  - 1.9.4- Invariância da Energia de Repouso
  - 1.9.5- Partículas sem Massa
- 1.10- Velocidades Superluminais e os Táquions

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **7 aulas de quatro créditos**.

# INTRODUÇÃO À FÍSICA

## MODERNA

PROF. CARLOS R. A. LIMA

### INTRODUÇÃO AO CURSO

Até o final do século XIX acreditava-se que todas as leis da Física já tinham sido descobertas. As leis de Newton pareciam descrever todos os detalhes do movimento mecânico de um objeto, e as equações de Maxwell forneciam uma descrição completa dos fenômenos eletromagnéticos. Entretanto, logo no início do século XX, vários trabalhos desenvolvidos por Max K. L. Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Louis V. P. R. de Broglie e outros, resultaram na elaboração de duas novas teorias: A teoria da Relatividade, utilizada para explicar o comportamento de objetos que se movem com grandes velocidades e que impõe novos conceitos para o espaço e o tempo; e a Teoria Quântica, que se aplica a sistemas microscópicos e questiona o conceito intuitivo da continuidade da natureza.

Essas duas novas teorias Físicas, formam o que se conhece hoje como "Física Moderna". De acordo com o

dicionário, moderno é tudo aquilo que pertence a atualidade ou a um passado recente. Entretanto, Física Moderna tem um significado um pouco diferente e se refere às teorias quântica e relativística, bem como todas as suas aplicações.

Na Física Moderna, a mecânica clássica de Newton e o eletromagnetismo de Maxwell, são incluídos como casos particulares.

O primeiro capítulo deste curso trata os tópicos mais importantes da teoria da relatividade especial aplicada aos referenciais inerciais. O capítulo começa analisando a base experimental que deu origem aos postulados, enunciados por Einstein, para elaborar a teoria da relatividade. Usando como base tais postulados, deduzem-se as novas transformações de coordenadas para diferentes referenciais inerciais. Com o objetivo de formular a mecânica relativística, a cinemática e a dinâmica são reavaliadas.

Os próximos capítulos tratam da origem e fundamentos da teoria da mecânica quântica. Os primeiros capítulos analisam os experimentos cujos resultados estão em desacordo com as teorias clássicas e propõem as formulações alternativas. Os últimos capítulos tratam as bases conceituais que resultaram na elaboração da teoria quântica de Schrödinger. Sistemas de potenciais descontínuos,

oscilador harmônico e átomo monoelétrico, são abordados como exemplos de aplicação da teoria quântica de Schrödinger.

Outros temas importantes da Física moderna são discutidos em Capítulos posteriores. Entre esses temas destacam-se: Estrutura interna dos átomos, moléculas e sólidos; Estatística dos fenômenos quânticos; Superfluidez; Supercondutividade; Modelos e processos nucleares. Na abordagem de todos esses temas, deixa-se de lado o rigor formal e prioriza-se os conceitos fenomenológicos.

## CAPÍTULO 1

### TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

#### 1.1. Introdução

A teoria da Relatividade foi elaborada com o objetivo de explicar o comportamento de sistemas físicos submetidos a altas energias. Partículas mecânicas que se deslocam a altas velocidades, comparáveis a velocidade da luz, são exemplos de tais sistemas. A teoria da relatividade é uma teoria geral que inclui a teoria clássica como caso particular.

Usualmente, a teoria da relatividade é subdividida em duas partes: A teoria da Relatividade Especial ou Restrita, e a Teoria da Relatividade Geral.

A primeira, desenvolvida por Albert Einstein em 1905, adota um formalismo matemático simplificado e se refere a uma comparação entre medidas efetuadas em diferentes referenciais inerciais que se deslocam uns em relação aos outros com velocidade constante. Por outro lado, também desenvolvida por Albert Einstein em 1916, a teoria da relatividade geral se aplica aos referenciais não-inerciais, adota um formalismo matemático bastante elaborado e tem aplicações limitadas em áreas como cosmologia e gravitação. Raramente a teoria da relatividade geral tem aplicações em outras áreas da física ou engenharia e, por esse motivo, aborda-se aqui somente os principais aspectos associados a Teoria da Relatividade Especial.

## 1.2 - Eventos Físicos e Sistemas de Referências,

Para efetuar medidas físicas na relatividade é necessário definir evento físico ou simplesmente evento. Um evento pode ser, por exemplo, a colisão entre duas bolas ou o "piscar" de uma fonte luminosa. Um evento é, portanto, algo que ocorre num ponto do espaço e num determinado instante de tempo. Por esse motivo, um evento deve ser assinalado em um sistema de coordenadas quadridimensional, três espaciais e uma temporal.

Um mesmo evento pode ser observado do ponto de vista de diferentes sistemas de referência. Um sistema de referência, ou simplesmente referencial, pode ser inercial ou não-inercial.

O referencial inercial é um sistema de referência no qual se aplica a primeira lei de Newton, ou lei da inércia. Em outras palavras, referencial inercial é aquele que está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Decorre desse fato, que qualquer referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial é também inercial. Na prática, pode-se desprezar os pequenos efeitos da aceleração do movimento orbital da terra, para considerar qualquer conjunto de eixos fixos à terra como um referencial inercial. A teoria da relatividade Especial trata de eventos que ocorrem somente em diferentes referenciais inerciais. A restrição de movimento uniforme é somente para os referenciais. Os objetos cujo movimento se estuda podem estar acelerados.

Antes de dar início às considerações que levaram a proposta da teoria da relatividade especial, na sequência é feito uma breve discussão sobre as medidas de eventos físicos em diferentes referenciais inerciais de acordo com a teoria da física clássica.

### 1.3 - Transformações de Galileu e Relatividade de Newton.

Seja um referencial inercial  $S'$  movendo-se para a direita, ao longo da direção do eixo  $x$  com velocidade  $v$ , em relação a outro referencial inercial  $S$  fixo à terra, como mostrado na Fig. 1.1.

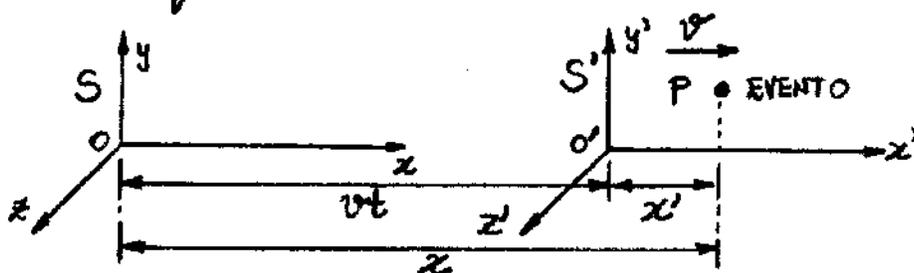


Fig. 1.1. Movimento relativo entre referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ .

Pode-se adotar também o referencial  $S$  movendo-se com velocidade  $-v$  em relação a  $S'$ . Seja um evento ocorrendo no ponto  $P$ , cujas coordenadas de espaço e tempo são medidas por observadores em cada referencial. O observador em  $S$  mede a localização e o tempo de ocorrência do evento, atribuindo valores as coordenadas espaciais  $x, y, z$  e temporal  $t$ . O mesmo é feito pelo observador em  $S'$ , atribuindo valores as coordenadas  $x', y', z'$  e  $t'$ .

Para encontrar as relações de transformação entre  $x, y, z, t$  e  $x', y', z', t'$ , assume-se que os dois observadores inerciais usam instrumentos calibrados e sincronizados entre si.

Se os relógios de cada observador marcam zero no instante em que as origens  $O$  e  $O'$  coincidem, então as relações entre as coordenadas  $x, y, z, t$  e  $x', y', z', t'$  serão:

$$x' = x - vt \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad . \quad (1.1)$$

O procedimento clássico supõe que o tempo seja absoluto, isto é, independente de qualquer sistema de referência. Essa natureza universal do tempo é representada por

$$t' = t \quad . \quad (1.2)$$

As equações (1.1) e (1.2), são conhecidas como Transformações de Galileu e estão de acordo com a intuição clássica de qualquer indivíduo.

Da eq. (1.2) segue que o intervalo de tempo de ocorrência entre dois eventos  $A$  e  $B$  é o mesmo para observadores em  $S$  e em  $S'$ , isto é,

$$t'_B - t'_A = t_B - t_A \quad . \quad (1.3)$$

Por outro lado, as posições espaciais dos eventos  $A$  e  $B$  se transformam, segundo a primeira eq. (1.1), como

$$x'_A = x_A - vt_A \quad , \quad x'_B = x_B - vt_B$$

tal que a distância entre os eventos em  $S'$  é

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A - v(t_B - t_A)$$

Se as posições  $x_A$  e  $x_B$  forem medidas ao mesmo tempo, em  $S$ , isto é, os eventos  $A$  e  $B$  são simultâneos em  $S$ , então  $t_A = t_B$  e

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A \quad (1.4)$$

Neste caso, são também as mesmas as distâncias entre os eventos  $A$  e  $B$  medidas em ambas os referenciais. Nota-se que a hipótese da simultaneidade de medições é uma condição necessária para que haja concordância na medida das distâncias, por observadores em diferentes referenciais inerciais.

A partir das transformações de Galileu pode-se encontrar as transformações clássicas das velocidades e acelerações das partículas para diferentes observadores inerciais.

A transformação de velocidade segue das derivadas das transformações de Galileu, dadas nas eqs. (1.1), isto é,

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

ou, como  $t = t'$ , tal que  $d/dt = d/dt'$ , então

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z, \quad (1.5)$$

onde

$u_x = dx/dt$ ,  $u_y = dy/dt$ ,  $u_z = dz/dt$  e  
 $u'_x = dx'/dt'$ ,  $u'_y = dy'/dt'$ ,  $u'_z = dz'/dt'$ , são as compo-  
 nentes das velocidades medidas em  $S$  e  $S'$ , respectiva-  
 mente. As eqs. (1.5) podem ser escritas na seguinte  
 notação vetorial:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \quad (1.6)$$

Com  $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ ,  $\vec{u}' = u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k}$  e  $\vec{v} = v \vec{i}$ .

A transformação clássica para a aceleração pode ser obtida derivando as eqs. (1.5), ou (1.6), isto é,

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z \quad (1.7)$$

ou

$$\vec{a}' = \vec{a}, \quad (1.8)$$

uma vez que, sendo  $v$  uma constante,  $dv/dt = 0$ . Assim, as componentes medidas da aceleração de uma partícula não são modificadas pelo movimento do referencial inercial. Logo, de acordo com as transformações de Galileu, a aceleração  $\vec{a}$  de uma partícula é invariante do ponto de vista dos observadores de ambos os referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ . Como, classicamente, a massa  $m$  da partícula não se altera por causa do movimento do referencial inercial, também será invariante a força que atua sobre a partícula, isto é,

$$\vec{F}' = \vec{F}. \quad (1.9)$$

Esse resultado formaliza o que se conhece como relatividade de Newton.

A relatividade de Newton afirma que as leis de Newton do movimento e as equações de movimento de uma partícula são as mesmas para todos os referenciais inerciais. Em outras palavras, todas as leis da mecânica clássica devem ser invariantes em relação ao movimento de um referencial inercial. Uma consequência desse fato é que nenhum experimento mecânico será capaz de fornecer ao observador, informações sobre o movimento de seu referencial inercial relativamente a outros referenciais inerciais. Um jogador de bilhar em um vagão fechado de um trem em movimento uniforme, por exemplo, não é capaz de dizer, pelo seu jogo, qual é o movimento do trem em relação a estações. O movimento das bolas de bilhar não é capaz de revelar, se quer, se o trem está de fato em movimento. É evidente que é possível determinar a velocidade relativa entre dois referenciais inerciais comparando medidas em ambos os referenciais, mas jamais será possível deduzir essa velocidade relativa a partir de observações confinadas a um só referencial.

Também não há nenhum meio de determinar a velocidade absoluta de qualquer referencial inercial por meio de experiências mecânicas. Para definir uma velocidade absoluta, é necessário adotar um referencial privilegiado em repouso absoluto. De acordo com a relatividade de Newton, todas as referenciais inerciais são equivalentes e

não é possível afirmar que existe um referencial em repouso absoluto. Por exemplo, uma pessoa viajando num trem é incapaz de afirmar, de modo absoluto, se somente ele se move relativamente à estação, ou somente a estação se move relativamente a ele, ou se existe algum movimento combinado entre ele e a estação.

A inexistência de um referencial privilegiado em repouso absoluto é a essência da relatividade de Newton.

### Exemplo 1.1

Dois prótons são ejetados de um núcleo atômico radioativo em direções opostas, numa amostra de material radioativo em repouso no laboratório. Cada próton tem a velocidade de  $0,95c$ , quando medida por um observador no laboratório. Qual é a velocidade de um próton quando medido por um observador colocado no referencial do outro próton?

Pode-se considerar um dos prótons como sendo o referencial fixo  $S$ , o laboratório como o referencial móvel  $S'$  e o outro próton a partícula cuja velocidade se procura no referencial  $S$ , como mostra a Fig. 1.2.

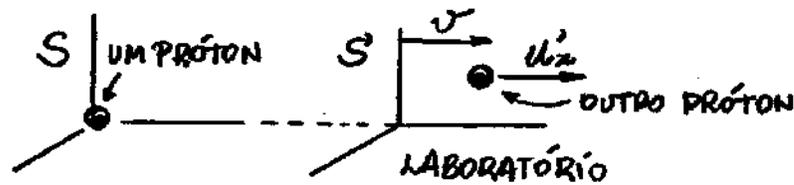


Fig. 1.2 - Movimento de um próton do ponto de vista do outro próton.

Assumindo  $u'_x = 0,95c$  e  $v = 0,95c$  na primeira eq. (1.5), obtém-se

$$0,95c = u_x - 0,95c \Rightarrow u_x = 1,90c.$$

Essa seria então a velocidade de um próton do ponto de vista do outro próton de acordo com as transformações clássicas de velocidades.

#### 1.4 - Eletromagnetismo e Relatividade de Newton.

A questão agora é saber se além das leis da mecânica, outras leis da física, tais como as leis do eletromagnetismo, também são invariantes em relação as transformações de Galileu. Se assim fosse, o princípio da relatividade de Newton se aplicaria a todos os sistemas físicos e não haveria, de fato, nenhum referencial inercial privilegiado.

A equação da onda eletromagnética, deduzida das equações de Maxwell do eletromagnetismo, identifica a velocidade da luz no vácuo,  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , como uma grandeza invariante.

No final do século XIX, época em que a visão mecânica dominava, não se admitia que um distúrbio ondulatorio pudesse se propagar no vácuo. Deu-se portanto o nome "éter" ao meio mecânico no qual a luz se propaga com velocidade  $c$ .

Quando se diz que a velocidade do som no ar seco a uma temperatura  $T=0^\circ\text{C}$  é  $v=331,3\text{ m/s}$ , fica implícito que existe um referencial fixo no ar através do qual a onda sonora se propaga com essa velocidade. Entretanto, quando se diz que a velocidade da luz no vácuo é  $3,0 \times 10^8\text{ m/s}$ , não fica claro que algum referencial está presente. Parecia então razoável admitir a existência de um meio de propagação, como o éter, para todas as ondas eletromagnéticas, mesmo que fosse necessário atribuir propriedades inócuas para ele, tais como densidade nula e transparência absoluta.

Seja  $S'$  o referencial do éter, onde um pulso luminoso se propaga com velocidade  $c$ . Se o referencial  $S'$ , isto é, o éter, se desloca, por exemplo, para a direita com velocidade  $v$  em relação a um referencial  $S$ , então, de acordo com as transformações de Galileu, do ponto de vista deste referencial, a velocidade da luz seria  $c \pm v$ , dependendo do sentido do pulso luminoso.

Assim, se o éter fosse considerado como um referencial equivalente a qualquer outro, a teoria eletromagnética de Maxwell e as transformações de Galileu seriam contraditórias. Uma solução possível para o problema seria supor que o éter seja o único referencial privilegiado em repouso absoluto, no qual as equações de Maxwell se aplicam e a velocidade da luz é exatamente  $c$ . Nesse caso, a relatividade de Newton não se aplicaria ao eletromagnetismo.

Para contornar o problema das diferentes interpretações das transformações de Galileu para a mecânica e o eletromagnetismo, é necessário escolher uma das seguintes hipóteses:

1. A relatividade de Newton se aplica à mecânica mas não ao eletromagnetismo. No caso do eletromagnetismo, existiria um referencial privilegiado em repouso absoluto denominado éter.

Se essa fosse a hipótese correta, deveria ser possível detectar a existência do éter como um referencial privilegiado.

2. A relatividade de Newton se aplica tanto à mecânica quanto ao eletromagnetismo. Nesse caso, a teoria eletromagnética de Maxwell deveria ser modificada.

Se essa fosse a hipótese correta, deveria ser possível detectar as falhas na teoria de Maxwell e reformular as novas leis do eletromagnetismo para que se tornem consistentes com as transformações de Galileu.

3. Existe uma outra relatividade, diferente da relatividade de Newton, que se aplica tanto a mecânica quanto ao eletromagnetismo. Nesse caso, a teoria mecânica de Newton deveria ser modificada para preservar a invariância da velocidade da luz exigida no eletromagnetismo.

Se essa fosse a hipótese correta, deveria ser possível detectar as falhas na teoria de Newton e reformular as novas leis da mecânica.

Nas opções que se seguem apoia-se as bases experimentais que rejeitam as duas primeiras hipóteses e mantêm a terceira como a escolha correta. Essa foi a hipótese que motivou Einstein a elaborar a nova teoria da relatividade, que tem como base transformações de coordenadas que preservam a invariância da velocidade da luz para diferentes referenciais inerciais.

### 1.5. Experiência de Michelson - Morley.

Em 1881, Albert Abraham Michelson e em 1887, Edward Williams Morley, utilizaram uma técnica interferométrica para medir a velocidade da luz em diferentes referenciais inerciais.

O objetivo dessa experiência era detectar o éter como um referencial privilegiado em repouso absoluto.

Se de fato o éter existisse e fosse um referencial em repouso absoluto, um observador na Terra perceberia um "vento de éter", cuja velocidade  $\vec{v}$  é igual a resultante das velocidades de rotação e translação da Terra. Admitindo essa velocidade como sendo somente a velocidade de translação da Terra  $v = 30 \text{ km/s}$ , então

$$\beta = v/c \approx 10^{-4}. \quad (1.10)$$

Um tratamento teórico para o éter, elaborado por Fresnel e Lorentz, mostrou que um teste da existência do éter exigiria uma experiência que fosse capaz de medir variações da ordem de  $\beta^2 = v^2/c^2 \approx 10^{-8}$ . Foi a incrível sensibilidade da experiência de Michelson-Morley que tornou possível tal medida.

Para medir a velocidade da luz em relação ao éter, o interferômetro deveria ser alinhado com o braço  $OM_1$  paralelo à direção do movimento da Terra como mostra a Fig. 1.3. Nessa Figura, o interferômetro está em repouso, fixo à Terra, e o feixe de luz se move através do éter. Como a Terra se desloca para a direita com velocidade  $\vec{v}$ , o éter se desloca para a esquerda com velocidade  $-\vec{v}$ .

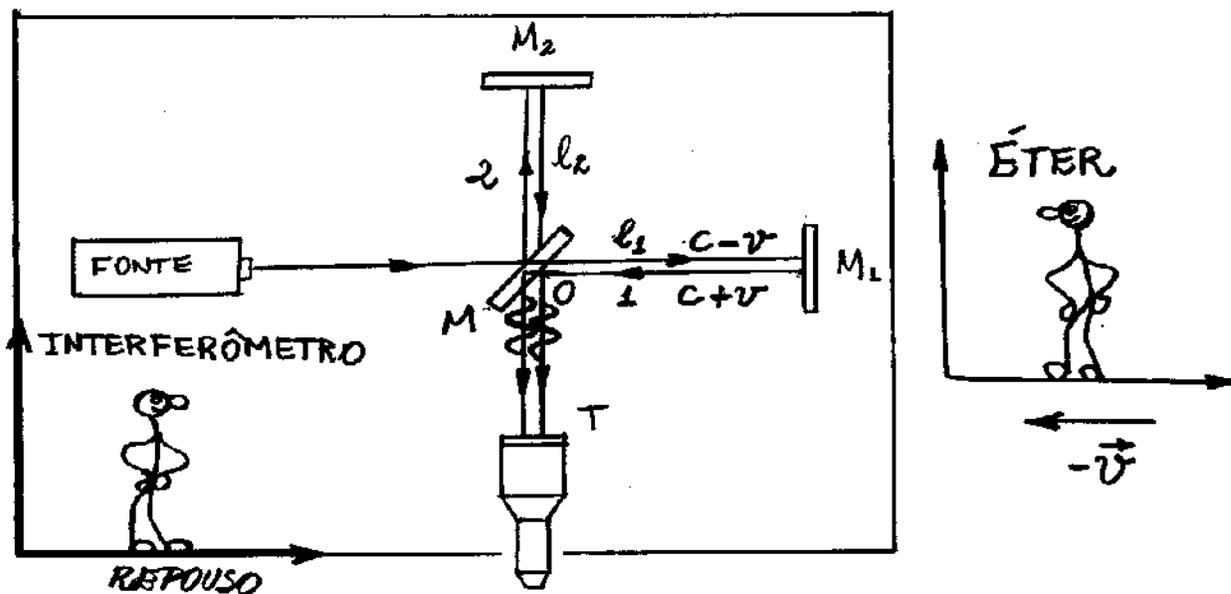


Fig. 1.3 - Diagrama geral da experiência de Michelson-Morley. Referencial do interferômetro.

Um feixe de luz de uma fonte, fixa em relação ao instrumento, é dividido em dois por um semi-espelho  $M$ . O feixe 1, denominado de braco 1 do interferômetro, é transmitido através de  $M$  e o feixe 2, denominado de braco 2 do interferômetro, é refletido em  $M$ . Esses feixes retornam, após refletirem nos espelhos  $M_1$  e  $M_2$ , e interferem-se na região de um telescópio  $T$ . A Fig. 1.4 mostra um padrão de franjas típico que se observa com o telescópio.



Fig. 1.4 - Padrão de franjas típico que se observa com o interferômetro de Michelson-Morley.

O padrão de interferência tem sua origem na diferença de fase entre os feixes 1 e 2 devido a diferença de caminho óptico e diferenças de velocidades de percurso relativamente ao éter. Para se obter a diferença de fase associada a essas variáveis, é necessário calcular a diferença de tempo  $\Delta t$  nos percursos de ida e volta dos dois feixes no interferômetro.

Se  $l_1$  e  $l_2$  são, respectivamente, os comprimentos dos braços 1 e 2 do interferômetro, então o intervalo de tempo do feixe 1 no percurso  $M_1, M_2, M_1$  será

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = l_1 \left[ \frac{c+v+c-v}{(c-v)(c+v)} \right]$$

$$= l_1 \left[ \frac{2c}{c^2-v^2} \right] = 2l_1 \left[ \frac{c}{c^2(1-v^2/c^2)} \right] = \frac{2l_1}{c} \gamma^2, \quad (1.11)$$

onde

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c, \quad (1.12)$$

pois, de acordo com as transformações de Galileu, o feixe 1 tem velocidade  $c+v$  no trajeto de ida e  $c-v$  na volta. O tempo  $t_2$  de propagação do feixe 2, pode ser determinado com o auxílio da Fig. 1.5.

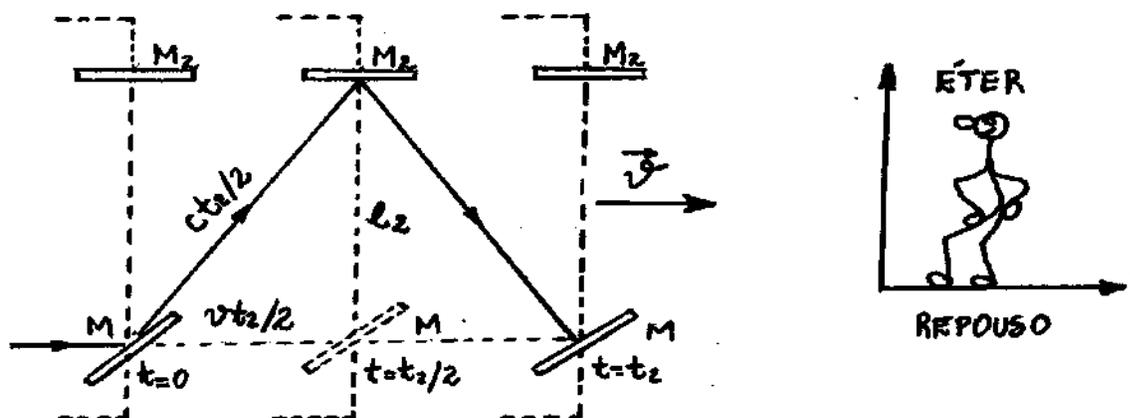


Fig. 1.5 - Geometria do feixe transversal na experiência de Michelson-Morley. Referencial do Éter.

A Fig. 1.5 mostra que

$$(c t_2/2)^2 = (v t_2/2)^2 + l_2^2$$

$$\Rightarrow t_2^2 (c^2 - v^2) = 4l_2^2 \Rightarrow t_2^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = 4l_2^2$$

ou

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2l_2}{c} \gamma \quad (1.13)$$

Somente a diferença de fase associada à variação da velocidade da luz é que se deseja detectar de modo que, qualquer valor de  $l_1$  e  $l_2$  pode ser escolhido. Em particular, assumindo  $l_1 = l_2 = l$  nas eqs. (1.11) e (1.13), obtém-se a diferença dos tempos  $\Delta t$  entre as percursos dos feixes luminosos nos dois braços do interferômetro como

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} (\gamma^2 - \gamma) \quad (1.14)$$

onde

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad \text{e} \quad \gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1} \quad (1.15)$$

Pode-se simplificar essas expressões recorrendo a expansão binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1) \frac{x^2}{2} + \dots \approx 1 + nx, \quad (1.16)$$

para  $x \ll 1$ . Como  $\beta = v/c \ll 1$  e de acordo com a eq. (1.16), as eqs. (1.15) tornam-se

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \quad \text{e} \quad \gamma^2 \approx 1 + \beta^2. \quad (1.17)$$

A substituição dessas equações na eq. (1.14) fornece

$$\Delta t = \frac{l}{c} \beta^2. \quad (1.18)$$

O cálculo de  $t_2$  se faz no referencial do éter, enquanto que o de  $t_1$  no referencial do interferômetro. Como o tempo é absoluto em física clássica, então não existe problema no cálculo do intervalo de tempo  $\Delta t$  usando  $t_1$  e  $t_2$ . Dá-se observar que  $\Delta t$  depende do termo de segunda ordem  $\beta^2 = v^2/c^2 \approx 10^{-8}$ , como evidenciado na eq. (1.18). A fase  $\delta_1$  associada a diferença de tempo  $\Delta t$  entre os percursos dos feixes luminosos nos dois braços do interferômetro é

$$\delta_1 = \frac{\Delta t}{T},$$

onde  $T$  é o período associado a onda da radiação utilizada no interferômetro, como mostra o gráfico do campo elétrico  $\vec{E}$  em função do tempo  $t$  na Fig. 1.6.

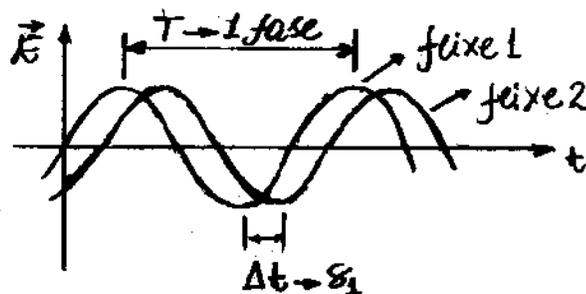


Fig. 1.6 - Relações de fase entre as ondas eletromagnéticas planas para cada feixe, ou braço, do interferômetro.

Para se observar deslocamentos das franjas no interferômetro, é necessário comparar a fase  $\delta_1$  com alguma outra fase de referência. Poderia-se, por exemplo, comparar a fase  $\delta_1$ , referente a terra em movimento, com uma fase  $\delta_2$ , referente a terra em repouso.

Como não se pode parar a terra para fazer a experiência, a alternativa seria girar o interferômetro de  $90^\circ$  e observar as posições das franjas nas duas situações. Se uma rotação fosse realizada, os braços 1 e 2 trocariam de posição e, como eles têm o mesmo comprimento  $l$ , a diferença entre os tempos de percurso passariam a ser  $\Delta t^* = t_2 - t_1 = -\Delta t$  tal que a nova fase  $\delta_2$  seria

$$\delta_2 = \frac{\Delta t^*}{T} = -\frac{\Delta t}{T}.$$

O número de franjas  $\Delta N$  deslocadas no padrão de interferência é equivalente a diferença de fase  $\Delta\delta$ , isto é,

$$\Delta N \equiv \Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = 2 \frac{\Delta t}{T} = 2\Delta t \nu = 2\Delta t \frac{c}{\lambda}, \quad (1.19)$$

pois  $T = 1/\nu$  e  $c = \lambda\nu$ . Substituindo a eq. (1.18) na eq. (1.19), obtém-se

$$\Delta N = \frac{2l}{\lambda} \beta^2. \quad (1.20)$$

Michelson e Morley construíram um interferômetro com várias espelhos, para tornar o percurso dos feixes tão grande quanto possível ( $l \approx 11\text{m}$ ). Foi montado sobre uma pedra

pesada que flutuava numa tina cheia de mercúrio, para que o aparelho pudesse girar facilmente em torno de um eixo central e, ao mesmo tempo, não fosse perturbado mecanicamente. Utilizando um feixe de luz de comprimento de onda  $\lambda = 590 \text{ nm}$ , esperava-se encontrar um deslocamento de franjas dado por

$$\Delta N \approx 0,4 \text{ franjas.} \quad (1.21)$$

Foram efetuadas diversas observações em diferentes horas do dia e em dias diferentes ao longo do ano. No entanto, jámais qualquer deslocamento de franjas teria sido observado.

O resultado nulo da experiência de Michelson-Morley foi tão inesperado que durante 50 anos ela foi repetida por vários pesquisadores. Todas as tentativas descharacterizavam o conceito do éter.

## 1.6 - Tentativas para "Salvar o Éter" - FACULTATIVO.

Na tentativa de "salvar o éter" e ainda preservar o resultado nulo da experiência de Michelson - Morley, cientistas de sua época sugeriram hipóteses alternativas, as quais se propõe detalhar a seguir.

### 1.6.1 - Hipótese da Contração de Lorentz - Fitzgerald.

A hipótese de George Francis Fitzgerald, proposta em 1892 e complementada por Hendrik Antoon Lorentz, sugere que todos os corpos sejam contraídos na direção do movimento relativo ao éter estacionário, por um fator  $\sqrt{1-\beta^2}$ , com  $\beta = v/c$ . Com essa hipótese, o comprimento dos braços do interferômetro de Michelson-Morley devem ser alterados para

$$l'_1 = l_1 \sqrt{1-\beta^2} \quad \text{e} \quad l'_2 = l_2, \quad \leftarrow$$

sendo agora  $l_1$  e  $l_2$ , os comprimentos dos braços com o interferômetro em repouso. Nesse caso, os tempos nos percursos de ida e volta de cada feixe seriam

$$t_1 = \frac{2l'_1}{c} \gamma^2 = \frac{2l_1 \sqrt{1-\beta^2}}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e

$$t_2 = \frac{2l'_2}{c} \gamma = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Então,

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (l_1 - l_2). \quad (1.22)$$

Similarmente, com a rotação de  $90^\circ$  tem-se

$$l_1' = l_1, \quad l_2' = l_2 \sqrt{1-\beta^2} \quad (1.23)$$

e

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (l_1 - l_2) = \Delta t. \quad (1.24)$$

Logo,

$$\Delta N = \Delta \delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{\Delta t}{T} - \frac{\Delta t'}{T} = 0 \quad (1.25)$$

e, portanto, nenhum deslocamento de franjas seria observado.

Curiosamente a hipótese de Lorentz não era satisfatória e o argumento para se entender o motivo é simples:

Admitindo  $l_1 \neq l_2$ , para que a situação não seja trivial ( $\Delta t = \Delta t' = 0$ ), mesmo com a contração de Lorentz, poderia-se esperar deslocamento de franjas, quando a velocidade do interferômetro mudar de  $v$  para  $v'$ . Pode-se mostrar que o deslocamento previsto nesse caso é

$$\Delta N = \frac{l_1 - l_2}{\lambda} \left( \frac{v'^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (1.26) \leftarrow$$

Em 1932, Roy James Kennedy e Edward M. Thorndike, usando um interferômetro com  $l_1 - l_2 \approx 16 \text{ cm}$ , realizaram

a experiência apropriada. Os dados da experiência foram colhidos nos instantes em que a variação na velocidade de rotação da terra é máxima (intervalo de 12 horas) e a variação na velocidade de translação da terra é máxima (intervalo de 6 meses). Também nessa experiência, nenhum efeito foi observado ( $\Delta N = 0$ ), em direta contradição com a hipótese de contração.

#### 1.6.2 - Hipótese do Arrastamento do Éter.

Com esta hipótese admite-se que o éter esteja ligado a todos os corpos de massa finita e é arrastado com tais corpos. Como não haveria movimento relativo entre o interferômetro e o éter, o resultado da experiência de Michelson-Morley seria automaticamente nulo. Entretanto, existiam dois efeitos bem estabelecidos, que se opunham a hipótese de arrastamento do éter: A aberraçã das estrelas e o coeficiente de arrastamento de Fresnel.

A aberraçã das estrelas foi observada em 1727 por James Bradley e tinha como base o movimento circular desses corpos por causa do movimento da terra. Esse efeito pode ser facilmente verificado observando uma estrela na vertical com um telescópio. Se a terra e a estrela estivessem fixas no éter, o telescópio teria que ser apontado diretamente para cima para que a estrela fosse vista a todo momento, como mostra a Fig. 1.7(a). Nesse caso, a luz emitida pela estrela acompanha o movimento do éter arrastado pela terra.

Por outro lado, se a terra se movesse para a direita através do éter com velocidade  $v$ , enquanto a estrela se mantivesse fixa, para ser vista, seria necessário inclinar o telescópio, como mostra a Fig. 1.7(b). Nesse caso, o éter e a estrela estão fixos, enquanto a terra se desloca. Nessa situação, a luz que atingisse a objetiva do telescópio alcançaria a sua ocular.

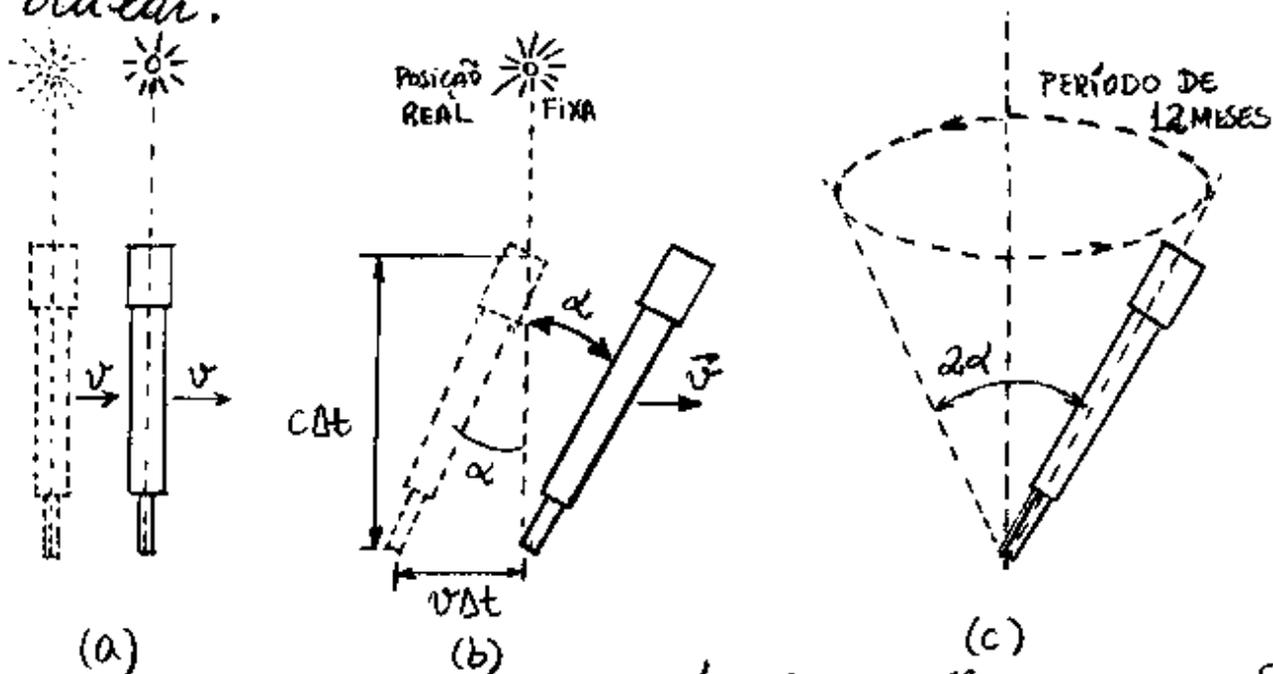


Fig. 1.7- Representação exagerada, para melhor compreensão, da aberração de estrelas por ocasião do movimento da terra.

Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  que a luz percorre a distância da objetiva à ocular  $c\Delta t$ , o telescópio é deslocado de uma distância  $v\Delta t$  para a direita. Assim, o ângulo  $\alpha$  de inclinação do telescópio é

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v\Delta t}{c\Delta t} = \frac{v}{c} = \beta \quad (1.27)$$

Já se sabia que a terra gira em torno do sol com velocidade  $v = 30 \text{ km/s}$ . Como  $c = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$ , obtém-se  $\alpha = 20,5\%$  de arco. O movimento da terra em torno do sol é praticamente circular, de modo que a direção de observação se inverte a cada 6 meses, e o eixo do telescópio deve traçar um cone de abstração de abertura angular  $2\alpha = 41\%$  durante o ano. Essas observações mostram que a hipótese do arrastamento do éter não é justificável. Conseqüentemente, a suposta "falha" na experiência de Michelson-Morley não poderia ser justificada por essa hipótese.

Um outro efeito que contradiz a hipótese de arrastamento do éter, previsto por Augustin Jean Fresnel, em 1817, está relacionado com um arrastamento parcial da luz por um meio em movimento, tal como um suposto éter. O efeito foi confirmado experimentalmente por Armand Hippolyte Louis Fizeau em 1851. A montagem experimental de Fizeau é mostrada na Fig. 1.8.

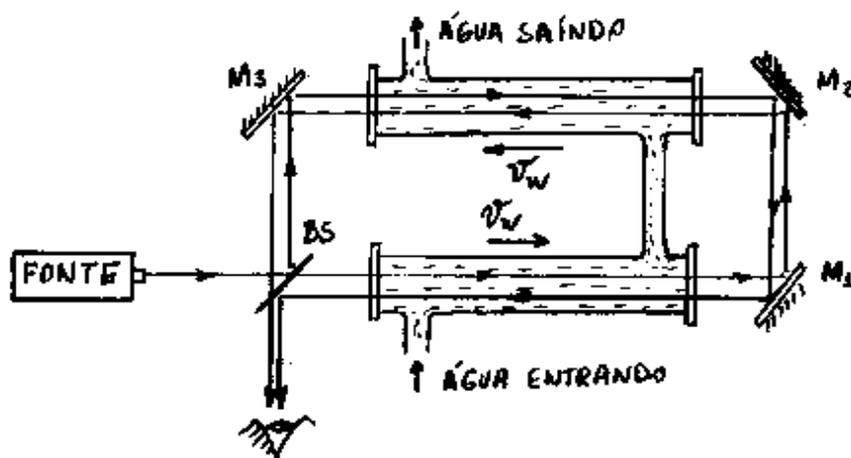


Fig. 1.8. Montagem experimental de Fizeau.

Trata-se de um interferômetro onde a luz de uma fonte é parcialmente transmitida e refletida por um divisor de feixe BS. Antes da interferência, os feixes atravessam regiões de fluxos contrários de água de velocidades  $v_w$  constante e refletem nos espelhos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Franjas de interferências macroscópicas, associadas às diferenças de caminho óptico dos feixes, são observadas na experiência.

Usando a teoria eletromagnética de Maxwell, Fresnel mostrou que a velocidade  $v$  da luz, num meio de índice de refração  $n$ , que se move com uma velocidade  $v_w$ , é

$$v = \frac{c}{n} \pm v_w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (1.28) \leftarrow$$

onde o fator  $(1 - 1/n^2)$  é denominado de coeficiente de arrastamento de Fresnel. A velocidade da luz no meio,  $c/n$ , é alterada por causa do movimento do meio. Como  $(1 - 1/n^2) < 1$ , então, o aumento, ou diminuição, da velocidade  $v$ , é menor que  $v_w$ . Daí o termo "arrastamento". Nota-se que, para  $n=1$  ("vácuo em movimento"), a eq. (1.28) torna-se  $v=c$ .

Na experiência de Fizeau, a água flui com uma velocidade  $v_w = 7 \text{ m/s}$ . As medidas de Fizeau confirmaram a previsão de Fresnel. A experiência foi repetida por Michelson e Morley em 1886, e por P. Zeeman e outros depois de 1914, com muito mais precisão, confirmando novamente a previsão de Fresnel.

Se o éter fosse arrastado junto com a água, a velocidade da luz, de acordo com as transformações de Galileu, teria sido  $c_n + v_w$  em um tubo e  $c_n - v_w$  no outro, de modo que o coeficiente de arrastamento de Fresnel ( $1 - 1/n^2$ ) deveria ser igual a unidade. Entretanto, a experiência de Fizeau mostra que isso não ocorre e, portanto, a hipótese de arrastamento do éter é contraditória.

De fato a hipótese do éter é insustentável. Em adição a isso, experiências mostram que as leis do Eletromagnetismo estão corretas e não necessitam de qualquer modificação. A velocidade da luz, ou qualquer radiação eletromagnética, é independente do movimento de qualquer referencial inercial. Deve-se concluir, portanto, que as leis básicas da mecânica devem ser modificadas.

## 1.7 - Postulados da Teoria da Relatividade Especial.

Independentemente da existência ou não do éter, do ponto de vista da mecânica clássica, a experiência de Michelson-Morley deveria ser capaz de alcançar os seus objetivos. O problema está justamente neste argumento, isto é, a mecânica clássica não pode ser aplicada a este problema. Em 1905, aos 26 anos de idade, Albert Einstein enuncia os postulados da teoria da Relatividade Especial, cujas consequências explicaria as falhas na experiência de Michelson-Morley. Enunciados com simplicidade, esses postulados são:

Postulado 1: As leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial. Não existe nenhum referencial inercial privilegiado.

Postulado 2: A velocidade da luz no vácuo é independente de qualquer referencial inercial. Seu valor  $c$  é um limite superior para partículas ou sinais eletromagnéticos.

Embora pareçam razoáveis, estes postulados têm implicações que, na verdade, fogem ao bom senso. Por exemplo, não é fácil aceitar que qualquer observador deve medir o mesmo valor da velocidade da luz no vácuo, independentemente do movimento relativo entre ele e a fonte. É exatamente este fato que explica a falha na experiência de Michelson-Morley.

A simplicidade e ousadia da teoria da relatividade Especial são características marcantes da genialidade de Einstein e sua validade foi confirmada por inúmeras experiências.

Para formular a teoria da relatividade especial, inicialmente é necessário encontrar as equações de transformação de coordenadas entre referências inerciais com a imposição da invariância da velocidade da luz. Por razões históricas, tais equações ficaram conhecidas como as transformações de Lorentz.

Embora as transformações de Lorentz devam resultar em diferentes leituras para a força  $\vec{F}$ , em diferentes referências inerciais, o primeiro postulado de Einstein garante ainda a invariância de todas as leis da física nesses referências. Assim, será necessário examinar as leis de conservação do momento e energia para adequá-las às transformações de Lorentz.

Espera-se que os resultados decorrentes da teoria da relatividade especial reduzam-se nas previsões clássicas para os casos de velocidades muito menores do que a velocidade da luz.

## 1.8 - Cinemática Relativística.

### 1.8.1 - Simultaneidade de eventos

Uma das hipóteses clássicas que mais intrigava Einstein era a universalidade do tempo, explicita nas transformações de Galileu como  $t=t'$ , válida para quaisquer observador inercial. Para estabelecer uma escala universal de tempo é suficiente avaliar o fenômeno da simultaneidade entre eventos A e B. Se diferentes observadores inerciais discordarem na simultaneidade entre eventos A e B, então certamente não haverá uma escala universal de tempo.

A Fig. 1.9 mostra dois eventos A e B ocorrendo em locais diferentes, por exemplo, o "pisar" de duas fontes luminosas. Dois relógios sincronizados, colocados nas posições de cada evento, são necessários para medir os tempos de suas ocorrências.

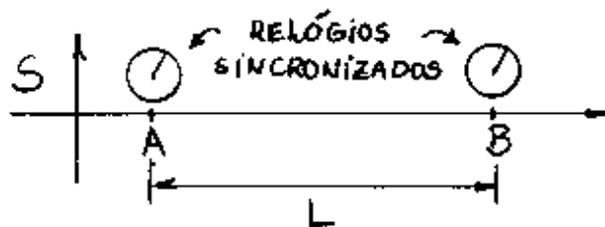


Fig. 1.9 - Relógios sincronizados colocados no locais dos eventos A e B num referencial inercial S.

A primeira dificuldade é a sincronização dos dois relógios separados por uma distância  $L$ . Se um observador em A olha para o relógio em B e ajusta o seu relógio para registrar o mesmo tempo, os relógios não estarão sincronizados por causa do tempo  $L/c$  necessário para a luz percorrer a distância entre os dois relógios.

Os relógios estarão sincronizados se o observador em A adiantar de  $L/c$  o seu relógio em relação ao relógio em B. Um procedimento lógico que poderia ser usado para sincronizar dois relógios afastados seria: juntá-los, sincronizá-los e afastá-los novamente.

Para verificar a simultaneidade entre os eventos A e B num mesmo referencial inercial, dois observadores, de posse de relógios sincronizados, combinam emitir sinais luminosos num mesmo instante de tempo  $t = t_0$ . Como mostrado na Fig. 1.10, um terceiro observador em C, equidistante de A e B, deve concluir que os dois eventos foram simultâneos. Por outro lado, para qualquer outro observador, não equidistante de A e B, os dois eventos não são simultâneos.

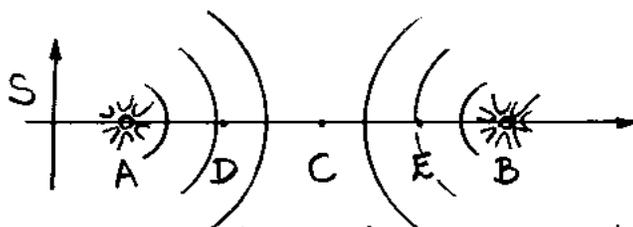


Fig. 1.10 - Simultaneidade entre os eventos A e B.

Seja avaliar a simultaneidade dos sinais luminosos das fontes colocadas no pontos A e B do referencial S da Fig. 1.10, agora do ponto de vista de um segundo referencial S', que se move para a direita, com velocidade  $v$ , em relação ao referencial S, como mostra a Fig. 1.11.

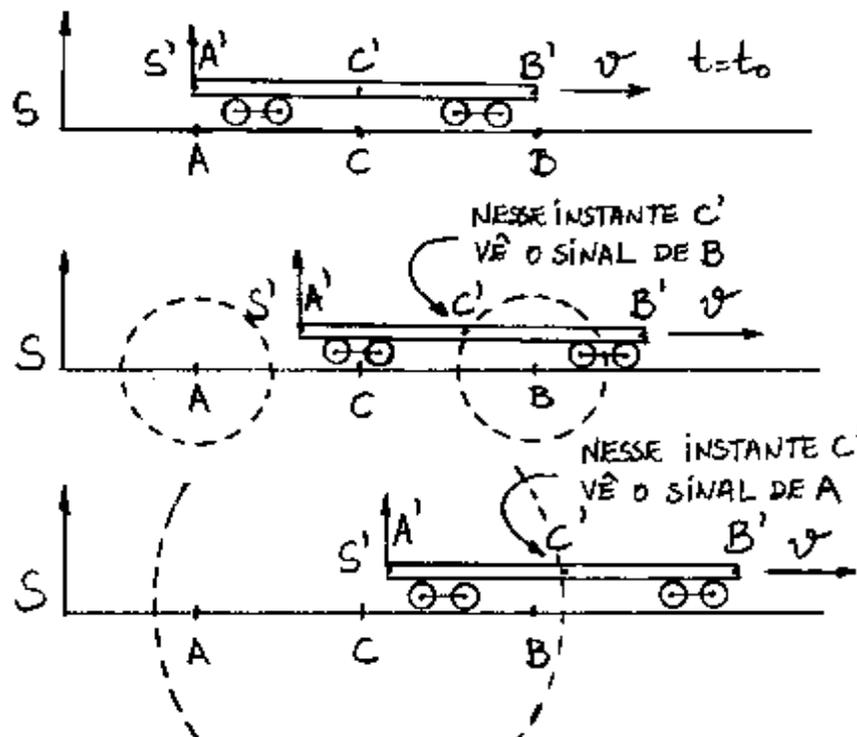


Fig. 1.11 - Sinais simultâneos emitidos dos pontos A e B. Os sinais são simultâneos para C mas não para C'.

Na Fig. 1.11, o referencial S' é representado por um vagão de trem cujas extremidades  $A'$  e  $B'$  coincidem com os pontos A e B do referencial S num instante de tempo  $t=t_0$ . Nesse mesmo instante de tempo, um ponto  $C'$ , colocado no centro do vagão, coincide também com o ponto C do referencial S.

Se, por um lado, os eventos A e B são simultâneos para um observador em C no referencial S, por outro lado, esses mesmos eventos, não são simultâneos para um observador em C' no referencial S'. Observa-se que o sinal emitido de B é visto por C' antes do sinal emitido de A, pois C' move-se em direção a B, ao mesmo tempo que se afasta de A. Assim, a simultaneidade é um conceito relativo, tal que:

"Dois eventos simultâneos num referencial inercial não serão simultâneos em nenhum outro referencial inercial".

Uma consequência imediata da relatividade da simultaneidade ocorre nas medidas dos comprimentos. Por exemplo, a medida do comprimento do vagão na Fig. 1.11, depende da localização simultânea das suas extremidades. Assim, o comprimento dos objetos depende do referencial inercial e será também um conceito relativo.

A relatividade dos conceitos da simultaneidade e do comprimento serão tratadas quantitativamente nas próximas seções.

## 1.8.2 - Transformações de Lorentz.

Seja um evento ocorrendo num referencial inercial  $S$ , caracterizado por coordenadas espaço-tempo  $(x, y, z, t)$ . Em um segundo referencial  $S'$ , o mesmo evento é caracterizado por coordenadas espaço-tempo  $(x', y', z', t')$ . Deseja-se encontrar relações funcionais do tipo:

$$x' = f(x, y, z, t) ; y' = f(x, y, z, t) ; z' = f(x, y, z, t) ; t' = f(x, y, z, t),$$

isto é, equações de transformação que relacionam as coordenadas espaço-tempo de um evento do ponto de vista de um observador inercial, com as coordenadas do mesmo evento do ponto de vista de outro observador inercial.

Juntamente com os postulados fundamentais da teoria da relatividade, deve-se recorrer a uma hipótese de que o espaço e o tempo são homogêneos, isto é, todos os pontos no espaço e tempo são equivalentes. Essa hipótese exige que as equações de transformação sejam lineares, tal que a forma mais geral que podem assumir é:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \quad (1.29)$$

Se as equações não fossem lineares, a hipótese de homogeneidade do espaço e tempo seria violada. Isso significaria, por exemplo, que o comprimento medido de

uma barra dependeria de onde ela se encontra no espaço. Similarmente, pode-se rejeitar qualquer dependência não linear com  $t$ , pois o intervalo de tempo entre dois eventos dependeria do instante de tempo em que começa a sua medida.

Uma outra hipótese que se pode admitir para o caso particular do espaço é que ele é isotrópico, isto é, todas as direções no espaço são equivalentes. Essa hipótese permite simplificar o problema supondo que a velocidade relativa  $v$  do referenciais  $S$  e  $S'$  ocorra paralelamente aos eixos comuns  $x$  e  $x'$ , e que os planos correspondentes sejam mantidos paralelos. Espera-se que os 16 coeficientes nas eqs. (1.29) dependam da velocidade  $v$  relativa aos dois referenciais inerciais. Por exemplo, se  $v=0$  os dois referenciais coincidem o tempo todo tal que  $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=1$  e todas as outras coeficientes são nulos. Deve-se procurar as dependências desses coeficientes para o caso geral  $v \neq 0$ .

O eixo  $x$  coincidirá continuamente com o eixo  $x'$ , se pontos sobre o eixo  $x$  ( $y=z=0$ ) resultarem em pontos sobre o eixo  $x'$  ( $y'=z'=0$ ). Para que isso ocorra, é necessário que os coeficientes  $a_{21}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{31}$  e  $a_{34}$  se anulem nas equações para  $y'$  e  $z'$  em (1.29) tal que

$$y' = a_{22}y + a_{23}z \quad \text{e} \quad z' = a_{32}y + a_{33}z.$$

Similarmente, para que os pontos do plano  $xz$  ( $y=0$ ) resultem em pontos do plano  $x'z'$  ( $y'=0$ ) e pontos do plano  $xy$  ( $z=0$ ) resultem em pontos do plano  $x'y'$  ( $z'=0$ ), é necessário que

sejam nulos os coeficientes  $a_{23}$  e  $a_{32}$  nas equações anteriores, isto é,

$$y' = a_{22}y, \quad z' = a_{33}z. \quad (1.30)$$

Seja uma barra colocada no referencial  $S$  ao longo do eixo  $y$  de comprimento unitário ( $y=1$ ) como mostra a Fig. 1.12(a). De acordo com a eq. (1.30), para um observador no referencial  $S'$ , o comprimento da barra será

$$y' = a_{22} \times 1 = a_{22}. \quad (1.31)$$

Se agora, a mesma barra for colocada no referencial  $S'$ , o observador em  $S$  deve medir o mesmo comprimento unitário para a barra ( $y=1$ ) como mostra a Fig. 1.12(b).

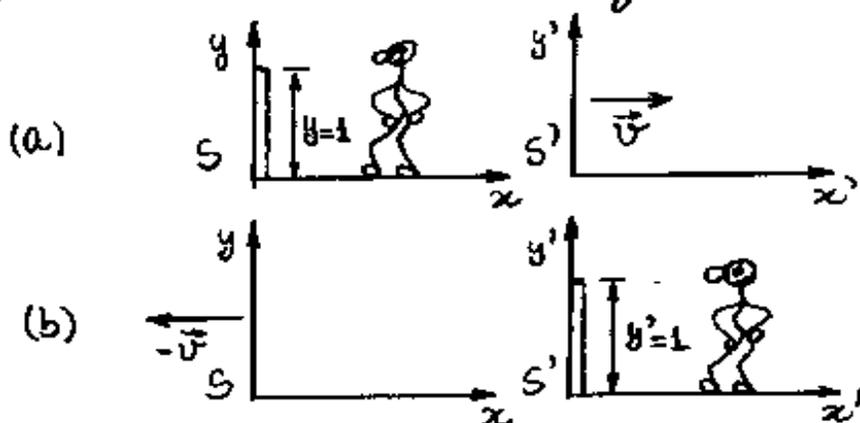


Fig. 1.12 - Comprimento de uma barra medido de pontos de vistas do referencial, (a)  $S$  e, (b)  $S'$ .

Entretanto, neste caso, de acordo com a eq. (1.30), o observador em  $S$  medirá o comprimento da barra, como

$$y = \frac{1}{a_{22}} x' = \frac{1}{a_{22}} \cdot \quad (1.32)$$

Para que as referenciais sejam fixamente equivalentes, exigência do primeiro postulado de Einstein, é necessário que as duas medidas da mesma barra (qs. (1.31) e (1.32), sejam rigorosamente as mesmas, isto é,  $a_{22} = \frac{1}{a_{22}}$  ou  $a_{22} = 1$ . Argumentos idênticos podem ser utilizados para concluir que  $a_{33} = 1$ . Portanto, as equações de transformação (1.30) tornam-se

$$y' = y \quad e \quad z' = z \quad (1.33)$$

Restam ainda analisar as equações de transformação para  $t'$  e  $x'$  em (1.29). Não se pode esperar a dependência de  $t'$  com  $y$  e  $z$ , pois relógios colocados simetricamente nesses eixos ( $\pm y$  ou  $\pm z$ ) discordariam quando vistos de  $S'$ . Deve-se lembrar que nessas direções não existem movimentos relativos e as leituras dos relógios devem ser as mesmas. Para que isso ocorra, é necessário que  $a_{42} = a_{43} = 0$  na última eq. (1.29), isto é,

$$t' = a_{41}x + a_{44}t \quad (1.34)$$

Quanto a transformação para  $x'$ , recorre-se a Fig. 1.13, onde um ponto  $x' = 0$  em  $S'$  se desloca com velocidade  $v$  em relação ao referencial  $S$ .

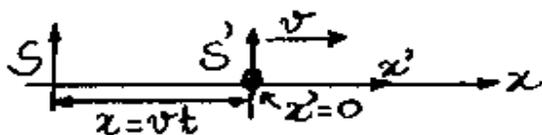


Fig. 1.13 - Movimento de um ponto  $x' = 0$  em  $S'$ , em relação ao referencial  $S$ .

Para que se tenha  $x' = 0$  quando  $x = vt$ , deve-se esperar que

$$x' = \alpha(x - vt) = \alpha x - \alpha vt$$

cujas comparações com a primeira equação de transformação em (1.29), resulta em

$$a_{11} = \alpha, \quad a_{12} = a_{13} = 0, \quad a_{14} = -\alpha v = -a_{41}v$$

e, portanto,

$$x' = a_{11}(x - vt). \quad (1.35)$$

Por fim, é necessário determinar os três coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{41}$  e  $a_{44}$ , presentes nas equações de transformação (1.34) e (1.35). Isso pode ser feito a partir do 2º postulado de Einstein. Suponha que em  $t = 0$ , uma onda eletromagnética esférica seja emitida da origem de  $S$ , coincidente com a origem de  $S'$ , naquele instante. A onda se propaga em todas as direções com velocidade  $c$  em ambos os referenciais. A frente de onda é descrita pela equação de uma esfera cujo raio se expande no tempo com velocidade  $c$  tal que, para cada referencial,

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ \text{e} & x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Substituindo as eqs. (1.33), (1.34) e (1.35) na segunda eq. (1.36) obtém-se

$$a_{11}^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}x + a_{44}t)^2 \quad \leftarrow$$

ou

$$a_{11}^2 (x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}^2 x^2 + 2a_{41}a_{44}xt + a_{44}^2 t^2)$$

ou ainda

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2) x^2 + y^2 + z^2 - 2(v a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44}) xt = (c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2) t^2.$$

Comparando esta equação com a primeira eq. (1.36), conclui-se que

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 &= 1, \\ v a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} &= 0, \\ c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2 &= c^2. \end{aligned} \quad \leftarrow$$

Tem-se aqui um problema de três equações com três incógnitas identificadas pelos coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{41}$  e  $a_{44}$ . Pode-se verificar, por substituição nas três equações acima, que as soluções são

$$a_{11} = a_{44} = \gamma \quad \text{e} \quad a_{41} = -\gamma v/c^2 \quad (1.37)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{e} \quad \beta = v/c. \quad (1.38)$$

Substituindo esses coeficientes nas eqs. (1.34) e (1.35), obtêm-se as equações de transformação de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad . \quad (1.39)$$

Se as coordenadas do espaço-tempo do evento fossem observadas a partir do referencial  $S'$ , ao invés de  $S$ , a única mudança permitida pelo princípio da relatividade é no sentido da velocidade relativa de  $v$  para  $-v$ . Assim, trocando  $x$  por  $x'$ ,  $y$  por  $y'$ ,  $z$  por  $z'$ ,  $t$  por  $t'$  e  $v$  por  $-v$  nas eqs. (1.39), obtêm-se as transformações de Lorentz inversa:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2) \quad . \quad (1.40)$$

Deve-se observar que as transformações de Lorentz, na eq. (1.39), se reduzem nas transformações de Galileu quando  $v/c \ll 1$  e  $\beta = v/c \ll 1$  ou  $\gamma \approx 1$ .

### 1.8.3 - Transformação de Velocidades.

Seja um referencial  $S'$  movendo-se com velocidade  $v$  em relação a um referencial  $S$ . Se  $u_x'$  é a componente  $x$  da velocidade de uma partícula em relação a  $S'$ , de acordo com a transformação clássica de Galileu, a componente  $u_x$  em relação a  $S$  será

$$u_x = u_x' + v \quad . \quad (1.41)$$

Por outro lado, de acordo com as transformações de Lorentz inversa, dadas na eq. (1.40), a posição  $x$  e o tempo  $t$  da partícula em relação a  $S$  são, respectivamente,

$$x = \gamma(x' + vt') = \mu_x t \quad \text{e} \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

Combinando estas equações obtém-se

$$\cancel{x}(x' + vt') = \mu_x \cancel{x}(t' + vx'/c^2)$$

ou

$$x' + vt' = \mu_x t' + \frac{\mu_x v}{c^2} x' \Rightarrow x' \left(1 - \frac{\mu_x v}{c^2}\right) = (\mu_x - v) t'$$

ou ainda

$$x' = \frac{\mu_x - v}{1 - \mu_x v/c^2} t' \quad (1.42)$$

Se  $u'_x$  é a velocidade da partícula em relação a  $S'$ , então, sua localização nesse referencial a medida que o tempo passa, é  $x' = u'_x t'$ .

Comparando esta equação com a eq. (1.42), obtém-se

$$u'_x = \frac{\mu_x - v}{1 - \mu_x v/c^2} \quad (1.43)$$

cuja transformação inversa é:

$$\mu_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \quad (1.44)$$

Se  $u'_x$  e  $v \ll c$ , a eq. (1.44) transforma-se no resultado clássico, dado na eq. (1.41), como  $\mu_x = u'_x + v$ . Por outro lado, se  $u'_x = c$ , caso em que a partícula é um "pulso luminoso", a eq. (1.44) fornece

$$\mu_x = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = \frac{c + v}{c(c + v)} c^2 = c, \quad (1.45)$$

independente, portanto, do referencial inercial como exigido no segundo postulado de Einstein.

## Exemplo 1.2

Resolva o exemplo 1.1 utilizando o formalismo da teoria da Relatividade Especial. Nesse exemplo dois prótons são ejetados de um núcleo atômico radioativo em direções opostas, numa amostra de material radioativo em repouso no laboratório. Cada próton tem velocidade de  $0,95c$ , quando medida por um observador no laboratório. Determine a velocidade de um próton quando medido pelo outro.

Como naquele exemplo, um dos prótons deve ser o referencial fixo  $S$ , o laboratório deve ser o referencial móvel  $S'$  e o outro próton como a partícula cuja velocidade no referencial  $S$  se deseja calcular. A Fig. 1.14 mostra a representação desses referenciais.

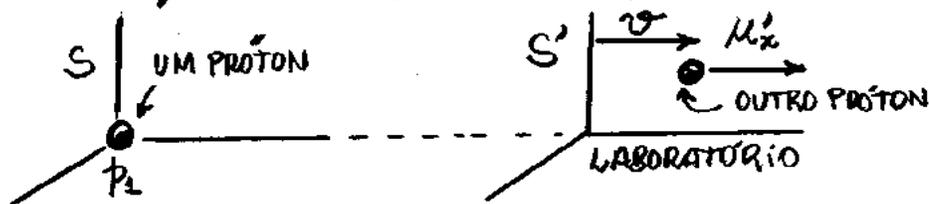


Fig. 1.14 - Movimento de um próton do ponto de vista do outro próton.

Nesse caso,  $u'_x = v = 0,95c$  e a eq. (1.44) resulta

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{0,95c + 0,95c}{1 + (0,95)^2} = \frac{1,9c}{1,9025} \approx 0,9987c,$$

Valor menor que a velocidade  $c$  como exigido no segundo postulada de Einstein.

### Exemplo 1.3 - FACULTATIVO.

Usar a transformação relativística de velocidades para obter o coeficiente de arrastamento de Fresnel dado na eq. (1.28).

Adotando  $v_w = v$  como a velocidade da água em relação ao aparelho de Fizeau, mostrado na Fig. 1.8, e  $c/n = u_x$  como a velocidade da luz em relação à água, a eq. (1.44) resulta

$$u_x = \frac{c/n + v_w}{1 + v_w/c} = \left( \frac{c}{n} + v_w \right) \left( 1 + \frac{v_w}{nc} \right)^{-1}.$$

Pode-se usar a aproximação  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $x \ll 1$ , uma vez que  $v_w/c \ll 1$  no caso em questão, isto é,

$$\begin{aligned} u_x &\approx \left( \frac{c}{n} + v_w \right) \left( 1 - \frac{v_w}{nc} \right) = \frac{c}{n} - \frac{v_w}{n^2} + v_w - \frac{v_w^2}{nc} \\ &\approx \frac{c}{n} + v_w - \frac{v_w}{n^2} \end{aligned}$$

ou

$$u_x \approx \frac{c}{n} + v_w \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Observa-se que não há a necessidade de se admitir nenhum mecanismo de "arrastamento", ou inventar teorias de interação entre a matéria e o "éter". O resultado é uma consequência inevitável da transformação relativística de velocidades.

Para determinar a transformação da componente  $y$  da velocidade da partícula do referencial  $S'$  para o referencial  $S$ , usa-se as equações de transformação de Lorentz para dois eventos  $A$  e  $B$ ,  $t'_A = \gamma(t_A - vx_A/c^2)$  e  $t'_B = \gamma(t_B - vx_B/c^2)$ , tal que

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma [t_B - t_A - (x_B - x_A)v/c^2]$$

ou

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t - \Delta x v/c^2) \quad (1.46)$$

De acordo com esta equação e do fato que  $\Delta y' = \Delta y$  obtém-se

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \Delta x v/c^2)} = \frac{\Delta y/\Delta t}{\gamma(1 - (\Delta x/\Delta t)v/c^2)}$$

ou

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \quad (1.47)$$

uma vez que,  $u_y = \Delta y/\Delta t$  e  $u_x = \Delta x/\Delta t$ .

Similarmente, mostra-se que

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \quad (1.48)$$

As transformações inversas das eqs. (1.47) e (1.48) são

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} \quad \text{e} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} \quad (1.49)$$

Deve-se observar que as componentes transversais da velocidade de uma partícula  $u_y$  e  $u_z$  vistas de  $S$  dependem, tanto das componentes transversais  $u'_y$  e  $u'_z$ , como também da componente paralela  $u'_x$  da velocidade da partícula vista de  $S'$ .

É possível obter também equações relativísticas de transformações para a aceleração da partícula, utilizando um método semelhante ao utilizado para a velocidade. Os cálculos, apresentados no exemplo 1.4, mostram que

$$a'_z = \frac{a_z}{\gamma^3 (1 - u_x v/c^2)^3} \quad (1.50)$$

Equações similares podem ser obtidas para  $a'_y$  e  $a'_x$ . A eq. (1.50) mostra que a aceleração de uma partícula depende do referencial inercial no qual é medida, contrariando a relatividade de Newton, segundo a qual  $a'_z = a_z$ . Observa-se que  $a'_z \rightarrow a_z$  somente quando  $u_x$  e  $v \ll c$ . Deve-se concluir, portanto, que a mecânica deve ser modificada para manter invariantes as leis de Conservação.

#### Exemplo 1.4 - FACULTATIVO.

Determinar a fórmula da transformação relativística para a aceleração, mostrada na eq. (1.50).

De acordo com a fórmula de transformação relativística de velocidades, dada na eq. (1.43), obtém-se

$$a'_x = \frac{d u'_x}{d t'} = \frac{d}{d t'} \left( \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \right)$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \left(\frac{d u_x}{d t'}\right) - (u_x - v) \left(-\frac{v}{c^2} \frac{d u_x}{d t'}\right)}{\left(1 - u_x v / c^2\right)^2} = \frac{d u_x}{d t'} \frac{1 - v^2 / c^2}{\left(1 - u_x v / c^2\right)^2}.$$

Da transformação de Lorentz para os tempos,  $t = \gamma(t' + x v / c^2)$ , obtém-se

$$\frac{d t}{d t'} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{d x'}{d t'}\right) = \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right),$$

tal que

$$\frac{d u_x}{d t'} = \frac{d u_x}{d t} \frac{d t}{d t'} = a_x \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)$$

ou, da transformação de velocidades,  $u'_x = (u_x - v) / (1 - u_x v / c^2)$ ,

$$\frac{d u_x}{d t'} = a_x \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}\right) = a_x \gamma \left(1 + \frac{v u_x / c^2 - v^2 / c^2}{1 - u_x v / c^2}\right)$$

$$= a_x \gamma \left(\frac{1 - u_x v / c^2 + u_x v / c^2 - v^2 / c^2}{1 - u_x v / c^2}\right) = a_x \gamma \left(\frac{1 - v^2 / c^2}{1 - u_x v / c^2}\right).$$

A substituição desta equação na equação para  $a'_x$  resulta:

$$a'_x = a_x \gamma \left(\frac{1 - v^2 / c^2}{1 - u_x v / c^2}\right) \frac{1 - v^2 / c^2}{\left(1 - u_x v / c^2\right)^2} = a_x \gamma \frac{\left(1 - v^2 / c^2\right)^2}{\left(1 - u_x v / c^2\right)^3}.$$

Assumindo  $1 - v^2 / c^2 = 1 / \gamma^2$  nesta equação obtém-se a eq. (1.50).

#### 1.8.4 - Diagramas Espaço-Tempo e Espaço de Minkowski

O fato que a mecânica relativística os intervalos de tempo não são os mesmos para diferentes referências inerciais, reforça o caráter quadridimensional de um evento físico. Em 1907, o matemático Alemão Hermann Minkowski propôs um diagrama espaço-tempo para representar um sistema de referência no espaço quadridimensional, que ficou conhecido como espaço de Minkowski. A Fig. 1.15 mostra o diagrama espaço-tempo representando um referencial inercial S no espaço de Minkowski.

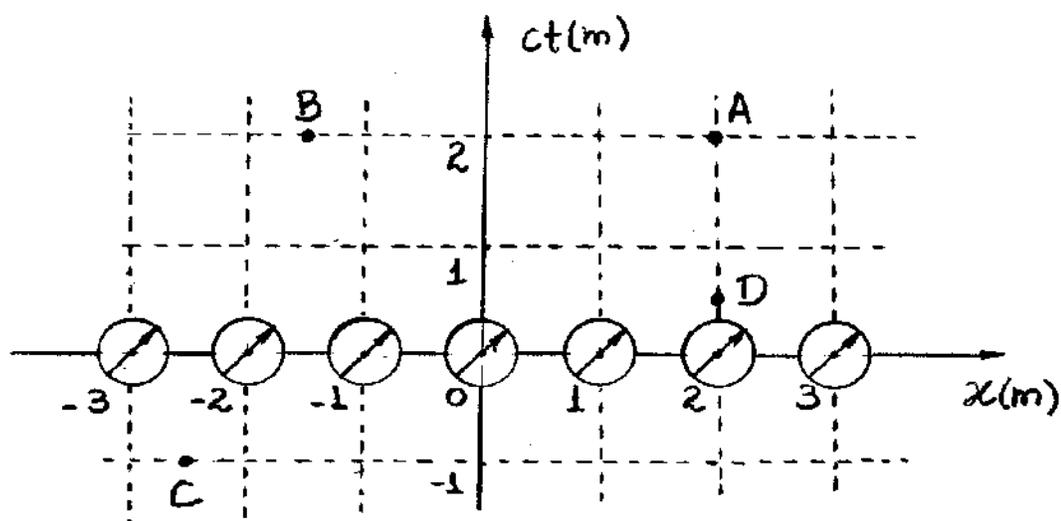


Fig. 1.15 - Diagrama espaço-tempo para um referencial inercial S.

Nos diagramas espaço-tempo as posições dos eventos são indicadas no eixo horizontal (eixo  $x$ ) e as instantes em que ocorrem são indicados no eixo vertical (eixo  $ct$ ). O uso da coordenada  $x$  somente para representar a posição espacial do evento, não restringe em nada a análise do movimento, pois todas as mudanças relevantes ocorrem sempre na direção do eixo  $x$ .

Como os eventos exibem efeitos relativísticos em altas velocidades, é conveniente multiplicar a escala de tempos pela velocidade constante  $c$  da luz. Isso permite que se use mesmas escalas e mesmas unidades nas eixos espacial e temporal (metros de distância e metros percorridos pela luz). Na Fig. 1.15, os relógios colocados sobre o eixo  $x$ , são sincronizados e podem permanecer verticalmente ao longo das linhas tracejadas, a medida que o tempo passa. Assim, quando eventos  $A, B, C$  e  $D$  ocorrem no espaço-tempo, sempre existem relógios nas proximidades para registrá-los.

Na Figura, os eventos  $A$  e  $D$  ocorrem no mesmo local ( $x=2m$ ), embora em instantes diferentes. Por outro lado, os eventos  $A$  e  $B$  ocorrem em locais diferentes, mas ao mesmo tempo, isto é, simultaneamente.

O evento  $C$  ocorreu no passado, uma vez que  $ct = -1m$  e o presente ocorre em  $ct = 0$ .

O lugar geométrico dos pontos ocupados por uma partícula no diagrama espaço-tempo, é denominado de linha do universo da partícula.

Na Fig. 1.16 (a) é mostrado vários relógios sincronizados colocados em diferentes pontos do eixo  $x$ . Nessa figura é mostrado também o movimento de cinco partículas, a partir de  $x=0$ , com diferentes

velocidades, durante um tempo  $ct = 3m$ . A partícula  $P_1$  tem velocidade nula. As partículas  $P_2$  e  $P_3$ , movem-se com velocidades constantes, em sentidos opostos, ao longo do eixo  $x$ . A partícula  $P_4$  move-se para a direita com aumento de velocidade e a partícula  $P_5$  move-se para a esquerda com redução de velocidade. A Fig. 1.16(b) mostra as linhas do universo das mesmas partículas num diagrama espaço-tempo.

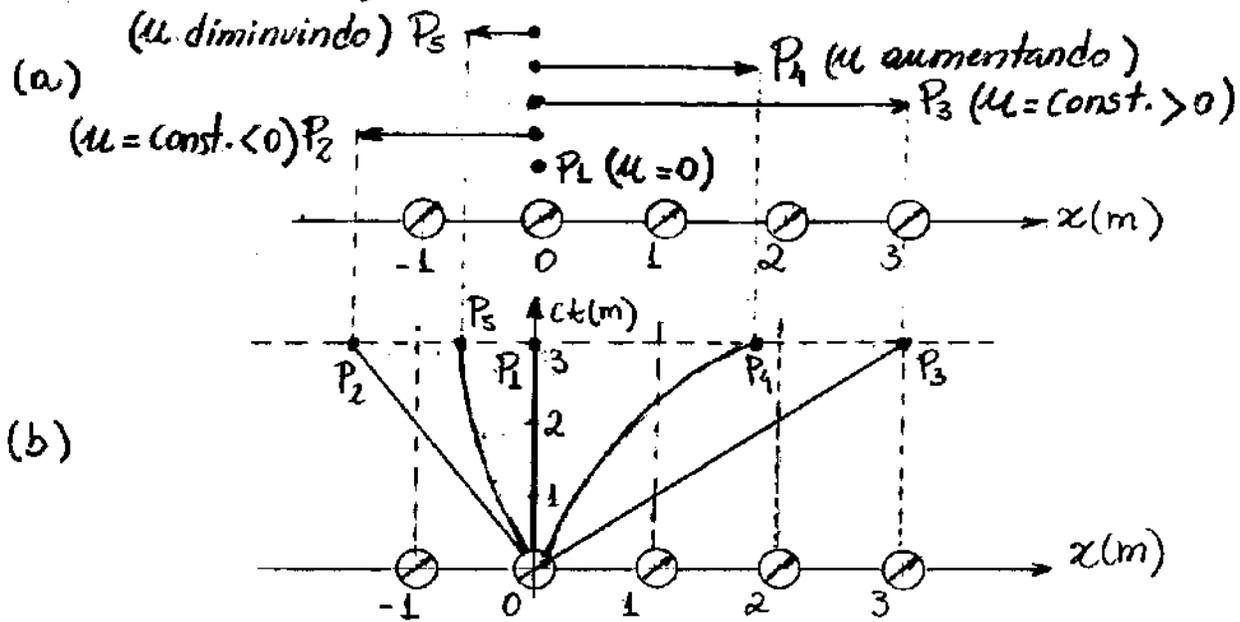


Fig. 1.16 - (a) Trajetórias no espaço de os partículas e, (b) Linhas do universo para essas mesmas partículas.

Como as 03 primeiras partículas movem-se com velocidade constante, suas linhas do universo tem coeficiente angular constante inversamente proporcional à velocidade. Por outro lado, por terem velocidades variáveis, as linhas

do universo das duas últimas partículas não são retas.

A velocidade de qualquer uma das partículas pode ser calculada a partir do diagrama espaço-tempo. Por exemplo, a velocidade da partícula  $P_3$  é calculada observando que

$$\Delta x = 3,0 - 0 = 3,0 \text{ m}$$

$$\Delta(ct) = c\Delta t = 3,0 \text{ m}$$

e portanto

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Logo, a partícula  $P_3$  é, na verdade, um pulso luminoso. O coeficiente angular da sua linha do universo é  $\Delta(ct)/\Delta x = 3/3 = 1$ . Por outro lado, um pulso luminoso que se propaga para a esquerda tem uma linha do universo de coeficiente angular  $-1$ .

Como as partículas não podem ter velocidades maiores do que a velocidade da luz, então as suas linhas do universo, que passam por  $x=0$  e  $ct=0$ , estarão limitadas ao triângulo hachurado maior da Fig. 1.17. Esses mesmos limites se aplicam a todos os pontos da linha do universo de uma partícula, tal como o ponto A, que aparece na Fig. 1.17.

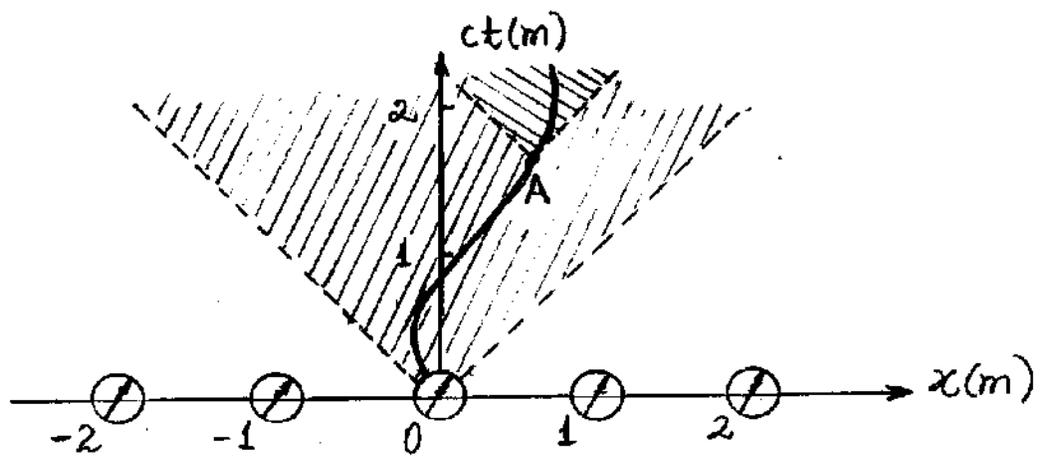


Fig. 1.17 - Regiões limiares das inclinações das linhas do universo das partículas.

Os referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ , com  $S'$  movendo-se para a direita com velocidade constante  $v$  em relação a  $S$ , podem ser representados em termos de diagramas espaço-tempo. Os relógios dos dois referenciais estão superpostos no presente, isto é,  $t=t'=0$  em  $x=x'=0$  e todos os relógios de cada referencial estão sincronizados entre si.

O eixo  $x'$  do referencial  $S'$  pode ser determinado no referencial  $S$ , sabendo que este é o lugar geométrico dos pontos para os quais  $ct'=0$ . Neste caso, a transformação de Lorentz para os tempos fornece

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{c^2} x$$

ou

$$ct = \frac{v}{c} x = \beta x, \text{ para o eixo } x', \quad (1.51)$$

isto é, a linha do universo, identificada pelo eixo  $x'$ , é descrita pela equação da reta (1.51), num gráfico  $ct \times x$ , cujo coeficiente angular é  $\beta$ .

Similarmente, o eixo  $ct'$  é o lugar geométrico dos pontos para os quais  $x'=0$ , isto é,

$$x' = \gamma(x - vt) = 0$$

ou

$$x = vt = v/c \, ct = \beta \, ct$$

ou ainda

$$ct = 1/\beta \, x, \text{ para o eixo } ct', \quad (1.52)$$

ou seja, a linha do universo, identificada pelo eixo  $ct'$ , é descrita pela equação da reta (1.52), num gráfico  $ct \times x$ , cujo coeficiente angular é  $1/\beta$ .

A Fig. 1.18 mostra o diagrama espaço-tempo para o referencial  $S$  e para o referencial  $S'$ , onde o segundo move-se no sentido positivo do eixo  $x$  com velocidade  $v = 1/2 \, c$ . Nesse caso particular  $\beta = v/c = 1/2$  (coeficiente angular de  $x'$ ) e  $1/\beta = 2$  (coeficiente angular de  $ct'$ ).

A reta tracejada representa a linha do universo de um pulso luminoso, movendo também no sentido positivo do eixo  $x$  e que passou pelo ponto  $x=0$  em  $t=0$ . Evidentemente, seu coeficiente angular é igual a 1 tanto em  $S$  como em  $S'$ .

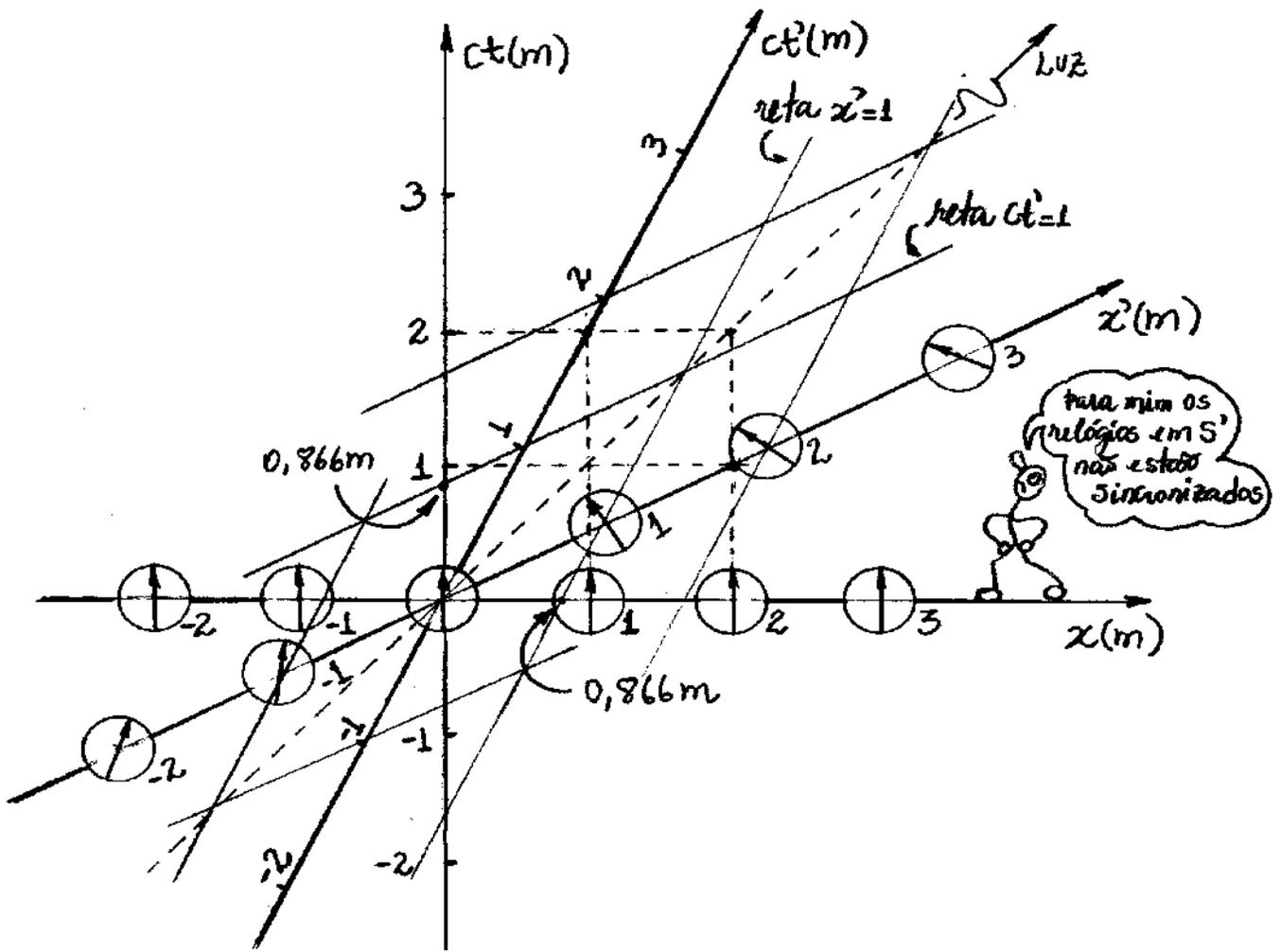


Fig.1.18 - Diagramas espaço-tempo das referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  do ponto de vista de  $S$ .

Não se deve ficar surpreso com o fato de que os eixos  $x$  e  $x'$  não são paralelos. Eles são paralelos no espaço mas não no espaço-tempo, uma vez que este mostra o movimento tanto no espaço como no tempo.

As relações entre as escalas dos diagramas espaço-tempo das referenciais  $S$  e  $S'$ , também podem ser encontradas com a ajuda das transformações de Lorentz.

Os pontos de interseção das retas  $x'$  paralelas ao eixo  $ct'$  em  $S'$  com o eixo  $x$  em  $S$ , são calculados assumindo  $ct=0$  na transformação de Lorentz para  $x$ , isto é,

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct) = \gamma x$$

ou

$$x = \frac{1}{\gamma} x' = x' \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (1.53)$$

Por exemplo, na Fig. 1.18, onde  $\beta = 1/2$ , a reta  $x' = 1$  intercepta o eixo  $x$  em  $x = 1\sqrt{1 - 1/4} \approx 0,866m$ .

Similarmente, os pontos de interseção das retas  $ct'$  paralelas ao eixo  $x'$  em  $S'$  com o eixo  $ct$  em  $S$ , são calculados assumindo  $x=0$  na transformação de Lorentz para  $t$ , isto é,

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \Rightarrow ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct$$

ou

$$ct = \frac{1}{\gamma} ct' = ct' \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (1.54)$$

As eqs. (1.53) e (1.54) mostram que, do ponto de vista de um observador em  $S$ , a escala do referencial  $S'$  está contraída de um fator  $1/\gamma$ .

Falta ainda encontrar as leituras dos relógios colocados ao longo do eixo  $x'$  do referencial  $S'$ , do ponto de vista do observador do referencial  $S$ . Para isso, é suficiente adotar  $ct=0$  na transformação de Lorentz  $ct' = \gamma(ct - \beta x)$ , isto é,

$$ct' = -\gamma\beta x. \quad (L.55)$$

Quando  $x = -1$  tem-se  $ct' = \gamma\beta$ , isto é, o resultado é um intervalo de tempo positivo, tal que, este encontra-se adiantado em relação a  $ct'=0$ . Por outro lado, quando  $x = +1$  tem-se  $ct' = -\gamma\beta$ , isto é, o resultado é um intervalo de tempo negativo, tal que, este encontra-se atrasado em relação a  $ct'=0$ .

Assim, de acordo com o observador em  $S$ , os relógios colocados em  $S'$  não estão sincronizados. Mais precisamente, como mostrado na Fig. 1.18 os relógios situados no semi-eixo negativo de  $x'$  estão adiantados em relação ao relógio da origem e os relógios situados no semi-eixo positivo de  $x'$  estão atrasados em relação ao mesmo relógio de origem.

### 1.8.5 - Dilatação dos Tempos e Contração dos Comprimentos.

Os intervalos de tempo e espaço entre eventos, não devem depender do tipo de instrumento usado para medi-los ou de qual seja o evento analisado.

Sejam  $(x_A, t_A)$ ,  $(x_B, t_B)$  e  $(x'_A, t'_A)$ ,  $(x'_B, t'_B)$  as coordenadas espaço-tempo de dois eventos A e B do ponto de vista dos referenciais S e S', respectivamente, com S' movendo-se com velocidade  $v$  em relação a S. Nesse caso, de acordo com a transformação inversa da eq. (1.46), o intervalo de tempo entre os eventos no referencial S será

$$\Delta t = \gamma (\Delta t' + \Delta x' v / c^2), \quad (1.56)$$

onde  $\Delta t = t_B - t_A$ ,  $\Delta t' = t'_B - t'_A$  e  $\Delta x' = x'_B - x'_A$ . Se os eventos ocorrem no mesmo local em S',  $\Delta x' = x'_B - x'_A = 0$  na eq. (1.56) e, nesse caso

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma T_p, \quad (1.57)$$

onde  $T_p$  é um intervalo de tempo que pode ser medido por um único relógio no mesmo local e é denominado de tempo próprio.



Nesse exemplo, um pulso luminoso sai da origem  $x'_A = 0$  de  $S'$ , se propaga até  $x'_B = 1m$ , onde é refletido em um espelho e retorna a mesma origem  $x'_C = 0$  de  $S'$ , após um intervalo de tempo identificado por  $c\Delta t' = 2m$ .

A saída do pulso luminoso é representada como um evento A e o retorno do mesmo como um evento C. É evidente que os eventos A e C ocorrem no mesmo local, na origem do referencial  $S'$ . A dilatação dos tempos pode ser observada diretamente, comparando as escalas temporais dos diagramas espaço-tempo na Fig. 1.19.

No referencial  $S$ , o pulso luminoso retorna a origem  $x'_C = 0$  do referencial  $S'$ , após um intervalo de tempo identificado por

$$c\Delta t = \gamma c\Delta t' = \gamma(2m) = \frac{2m}{\sqrt{1-(1/2)^2}} = 1,15(2m) = 2,30m.$$

Assim, do ponto de vista do referencial  $S$ , o relógio em  $S'$  está atrasando, isto é, o tempo está ficando mais lento. Como os eventos ocorrem no mesmo local na origem de  $S'$ , isto é,  $x'_C - x'_A = 0$ , então, de acordo com as transformações de Lorentz, a distância  $\Delta x$  entre os eventos no referencial  $S$  é

$$\Delta x = x_C - x_A = \gamma(x'_C + vt'_C) - \gamma(x'_A + vt'_A) = \gamma v(t'_C - t'_A) = \gamma v \Delta t'$$

ou

$$\Delta x = \gamma \frac{v}{c} (c\Delta t') = 1,15(1/2)(2m) = 1,15m.$$

Um outro fenômeno relativístico importante, associado à dilatação dos tempos, é a contração dos comprimentos.

Seja, por exemplo, a medida do comprimento de uma barra, mantida em repouso num referencial  $S'$ . O comprimento da barra no referencial em que está em repouso é denominado de comprimento próprio  $L_p$ .

Se  $x'_A$  e  $x'_B$  são as posições das extremidades da barra no referencial  $S'$ , medidas simultaneamente no instante de tempo  $t'_A = t'_B$ , e  $x_A$  e  $x_B$  são as posições das mesmas extremidades no referencial  $S$ , medidas nos instantes de tempo  $t_A$  e  $t_B$ . Então, das transformações de Lorentz

$$L_p = \Delta x' = x'_B - x'_A = \gamma(x_B - vt_B) - \gamma(x_A - vt_A) = \gamma(x_B - x_A) - \gamma v(t_B - t_A)$$

ou

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} L_p + v \Delta t, \quad (1.58)$$

onde  $\Delta x = x_B - x_A$  e  $\Delta t = t_B - t_A$ .

Na Fig. 1.20, uma barra de comprimento próprio  $L_p = 1\text{m}$ , é observada do ponto de vista de referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  numa representação de diagrama espaço-tempo. Nessa figura, o referencial  $S'$  move-se com uma velocidade  $v = \frac{1}{2}c$  em relação a  $S$ , tal que  $\beta = \frac{1}{2}$ , e a barra encontra-se em repouso no referencial  $S'$ .

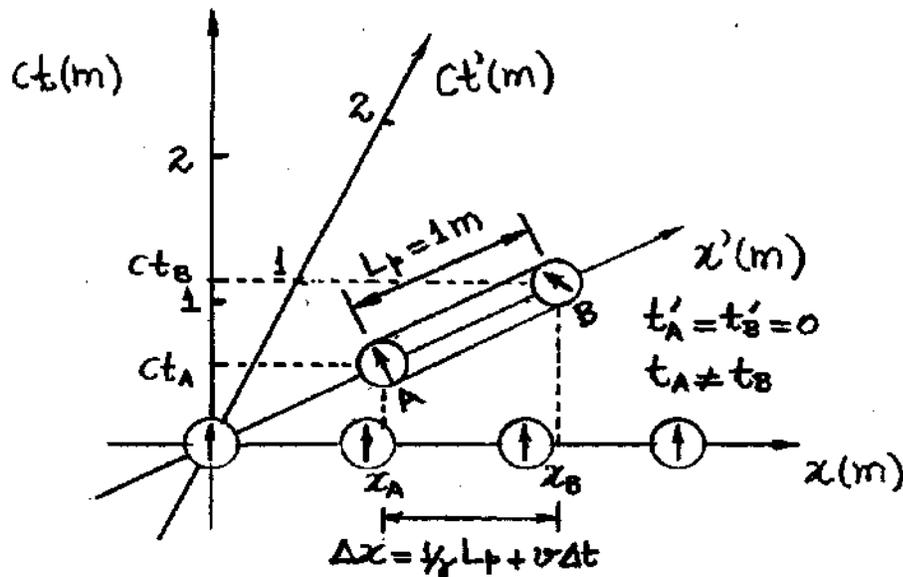


Fig. 1.20 - Diagrama espaço-tempo para  $\beta = 1/2$ , mostrando eventos A e B, representados pelas extremidades de uma barra, simultâneos em  $S'$  e não simultâneos em  $S$ , tal que  $\Delta x = \frac{1}{2} L_p + v \Delta t$ .

Evidentemente, a barra está colocada sobre o eixo  $x'$  no referencial  $S'$ , tal que a medida de suas extremidades  $x'_A$  e  $x'_B$  são feitas simultaneamente em  $t'_A = t'_B = 0$ . Por outro lado, como para o observador em  $S$  a barra está em movimento, ele não pode, diretamente do seu referencial, medir, simultaneamente, as posições de suas extremidades  $x_A$  e  $x_B$ , tal que,  $t_A \neq t_B$ . Obviamente, o valor de  $\Delta x$ , dado na eq. (1.58), é uma medida válida, fornece a distância entre os eventos A e B, não simultâneos em  $S$ , mas nada tem a ver com o comprimento  $L$  da barra observada nesse referencial. Assim, a Fig. 1.20 não serve para ilustrar, corretamente, o comprimento  $L$  da barra do ponto de vista do observador em  $S$ .

Entretanto, é possível calcular o comprimento  $L$  da barra, como de fato é observado em  $S$ , assumindo, simplesmente,  $\Delta t = t_B - t_A = 0$  na eq. (1.58), isto é,

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p \quad (1.59)$$

Essa equação formaliza o fenômeno da contração dos comprimentos e mostra que o comprimento  $L$  da barra é menor quando medida no referencial  $S$ , onde ela está em movimento.

A Fig. 1.21 mostra a forma correta de ilustrar a contração dos comprimentos num diagrama espaço-tempo para o caso  $\Delta x' = x'_B - x'_A = L_p = 1\text{m}$  e  $\beta = v/c = 1/2$ . Observa-se que a simultaneidade das medidas das extremidades  $A$  e  $B$  da barra no referencial  $S$ , é alcançada quando se busca correspondências entre pontos do referencial  $S'$  e pontos do referencial  $S$ .

Nessa Figura, a reta paralela ao eixo  $x'$  que passa pelas extremidades  $A$  e  $B$  da barra, correspondem a  $t'_A = t'_B = 0$  em  $S'$  e  $t_A = t_B = 0$  em  $S$ . Assim, as retas paralelas ao eixo  $ct'$  e que passam pelas extremidades  $A$  e  $B$  da barra, interceptam o eixo  $x$  em pontos que definem corretamente o comprimento da barra em movimento no referencial  $S$ , como  $L = \frac{1}{\gamma} L_p$ .

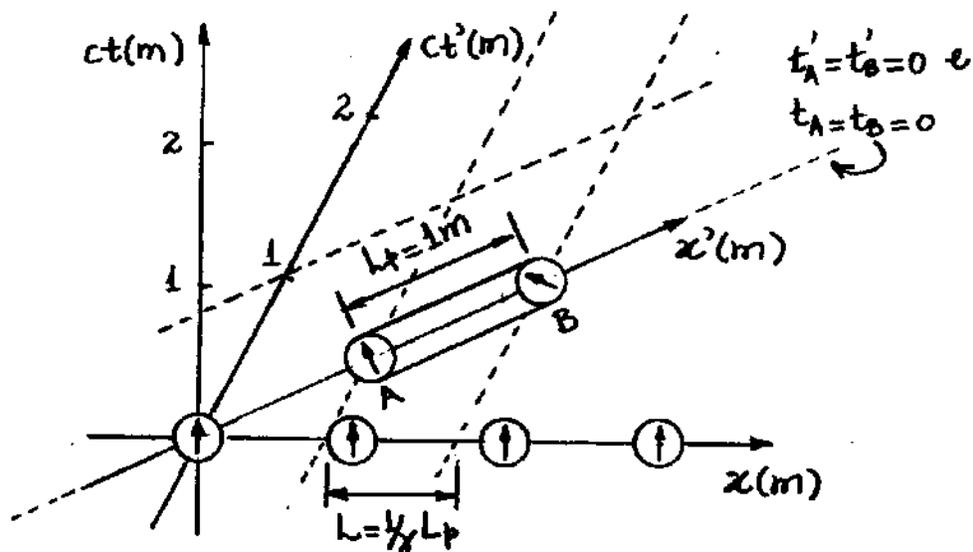


Fig. 1.21. Diagrama espaço-tempo para  $\beta = 1/2$ , mostrando eventos  $A$  e  $B$ , representados pela extremidades de uma barra numa forma apropriada para ilustrar a contração dos Comprimentos.

No exemplo da Fig. 1.21, como o movimento relativo entre os referenciais  $S$  e  $S'$  é identificado por  $\beta = v/c = 1/2$ , então o comprimento da barra no referencial  $S$  é contraído para

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{1m}{\frac{1}{\sqrt{1-1/4}}} \approx 0,87 m.$$

Como se viu na seção 1.6.1, mesmo antes de Einstein ter proposto a teoria da relatividade, Lorentz e Fitzgeral, já havia sugerido que o resultado nulo do experimento de Michelson-Morley poderia ser explicado admitindo que as distâncias na direção do movimento fossem contraídas, como na eq. (1.59). Por causa disso, a contração dos comprimentos também é conhecida como contração de Lorentz-Fitzgerald.

Exemplo 1.4.

Se um avião voa a  $2000 \text{ km/h} \approx 555 \text{ m/s}$ , quanto tempo deve voar para que o relógio de bordo se atrase  $1 \text{ s}$ , em virtude da dilatação dos tempos?

Os relógios no avião e na terra estarão dessincronizados por

$$\Delta T = \Delta t - \Delta t' = 1 \text{ s}.$$

Como o tempo analisado é o tempo de um relógio em movimento no avião, então este deve ser o tempo próprio  $\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t$ . Assim,

$$\Delta t - \frac{1}{\gamma} \Delta t = 1 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = (1 - \frac{1}{\gamma})^{-1} \text{ s}.$$

Da expansão binomial,  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $x \ll 1$ ; tem-se

$$\frac{1}{\gamma} = (1 - \beta^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2,$$

uma vez que  $\beta = v/c \ll 1$ . Logo,

$$\Delta t = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right) \right]^{-1} \text{ s} = \left( \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \text{ s} = 2 \frac{c^2}{v^2} \text{ s}$$

ou

$$\Delta t = 5,83 \times 10^{11} \text{ s} \approx 18456 \text{ anos}.$$

### 1.8.6. Técnicas Experimentais de Medidas de Espaço e Tempo em Relatividade - FACULTATIVO.

Nesta seção é feita uma breve discussão sobre duas técnicas de medida de intervalos de tempo e espaço na relatividade. Tais técnicas se baseiam no uso de dois relógios de alta precisão, denominados de relógio de luz e relógio atômico.

#### 1.8.6.1. Relógio de Luz.

O relógio de luz baseia-se na medida dos tempos de deslocamentos da luz em dois diferentes percursos, como mostra a Fig. 1.22.

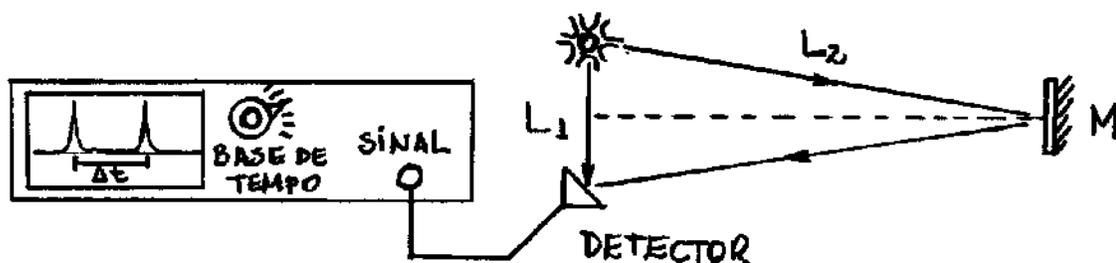


Fig. 1.22 - Relógio de luz para medida de intervalos de tempo com alta precisão.

Um detector capta dois pulsos de uma mesma fonte luminosa, que são enviados para um osciloscópio de alta taxa de varredura temporal.

O segundo pulso tem sua origem na luz refletida por um espelho M distante. O intervalo de tempo  $\Delta t$  entre os pulsos, pode ser medido a partir do deslocamento entre os mesmos na tela do osciloscópio e da taxa de varredura fixada no equipamento.

O intervalo de tempo  $\Delta t$  está relacionado com as distâncias  $L_1$  e  $L_2$  como

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L_2}{c} - \frac{L_1}{c}.$$

Relógios como esse, calibrados e comparados com outros relógios, são freqüentemente usados em experimentos de altas energias em física nuclear.

### 1.8.6.2 - Relógio Atômico.

O relógio atômico usa como base certas transições quânticas de átomos, detectadas por técnicas espectroscópicas de fluorescência. O famoso relógio atômico de Césio é esquematizado na Fig. 1.23.

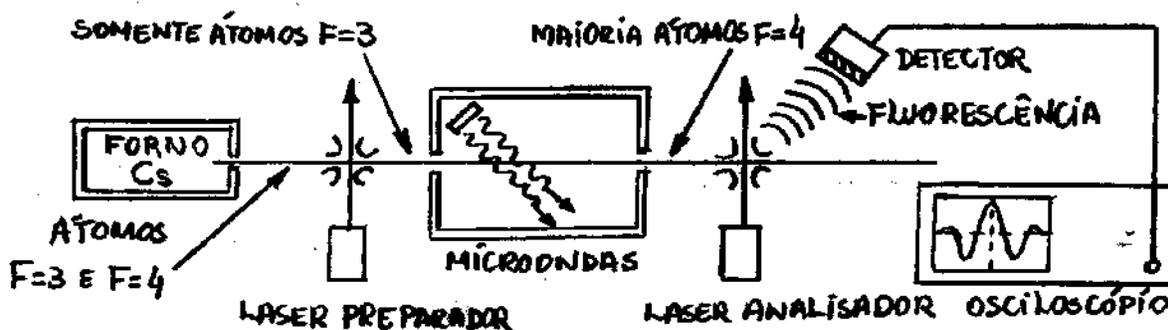


Fig. 1.23 - Diagrama esquemático de um relógio atômico de  $Cs^{133}$ .

Átomos de Césio ( $\text{Cs}^{133}$ ), na forma metálica, são aquecidos num forno, produzindo um feixe atômico com velocidade média de 200 m/s. Ao emergir do forno, os átomos podem estar em um de seus estados energéticos de "spin" (propriedade quântica que será abordada posteriormente) que decorrem da interação entre o spin eletrônico e o spin nuclear. Tais estados, caracterizados por  $F=3$  e  $F=4$ , são a essência da utilização de átomos como relógios de precisão, pois a frequência da radiação necessária para converter um no outro é extremamente bem determinada e, portanto, um excelente padrão de tempo.

O feixe de Césio interage com o primeiro laser após sair do forno e todos os átomos são convertidos, por efeito óptico, no estado  $F=3$ . Uma vez preparado, o feixe passa em uma cavidade onde existe radiação de microondas, convertendo os átomos para o estado  $F=4$ . Esses átomos são analisados por interação com um segundo laser, sintonizado com uma frequência adequada. Nessa interação, os átomos no estado  $F=4$  absorvem e reemitem a luz do laser. Tal reemissão, denominada de fluorescência, é convertida, por um sistema de lentes e detectores, em um sinal elétrico que pode ser medido por um osciloscópio e processado por um microcomputador.

A cavidade de radiofrequência, onde é gerada as microondas, é blindada por um metal especial, denominado de micrometal, para evitar interferências com campos magnéticos externos. A cavidade de radiofrequência, o conjunto de lasers e o feixe atômico, ficam contidos em um ambiente construído com aço inoxidável a uma pressão entre 10 e 7 torr, onde o torr é uma unidade equivalente ao milímetro de mercúrio.

Quanto mais intensa a fluorescência, maior o número de átomos que mudam de estado. A intensidade da fluorescência reflete diretamente a interação dos átomos com a radiação eletromagnética. Variando a frequência dessa radiação, a máxima fluorescência ocorre quando ela é exatamente  $\nu_{\max} = 9,192631770 \times 10^9 \text{ Hz}$ , como mostrado no gráfico da Fig. 1.24.

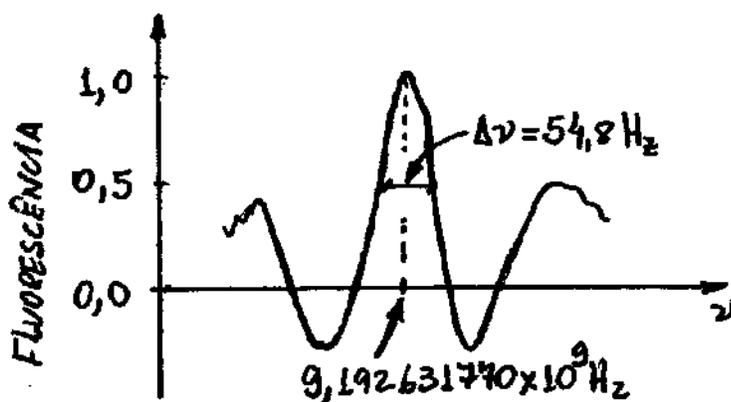


Fig. 1.24 - Sinal de Fluorescência em função da frequência do laser analisador.

O relógio atômico procura manter inalterada a radiação que produz o máximo de fluorescência, para garantir o fator de frequência como padrão temporal.

Como o relógio atômico de Césio define 1 segundo como  $9,192\,631\,770 \times 10^9$  ciclos de transições atômicas, pode-se associar a ele uma precisão da ordem de  $1\text{ns}$ . Um relógio atômico convencional tem um erro de  $\pm 1\text{s}$  a cada 63400 anos.

É importante mencionar que a cavidade com as microondas, por onde os átomos passam, é dividida em duas zonas, não explicitadas na Fig. 1.23. Essa técnica de dividir a interação dos átomos em duas zonas é conhecida como método das franjas de Ramsey e foi proposta por Norman Ramsey para aumentar a precisão do relógio atômico. Os pontos de máximo e mínimos presentes na Fig. 1.24 definem as franjas de Ramsey. Esse cientista recebeu o prêmio Nobel de Física em 1989 por causa de seu trabalho com o relógio atômico.

Em 1975, Carroll O. Alley realizou um teste da relatividade usando um relógio atômico, colocado a bordo de um avião da Marinha norte-Americana. O avião repetiu várias vezes

O mesmo trajeto durante 15 horas, voando a uma altitude de 8 a 10 km na região da baía de Chesapeake. O relógio atômico do avião foi comparado com um conjunto de relógios idênticos e calibrados, constatando um atraso esperado pela dilatação relativística dos tempos.

### 1.8.7. Intervalo no Espaço-Tempo.

As transformações de Lorentz mostram que as coordenadas espaço-tempo de um determinado evento físico dependem do referencial inercial a partir do qual estão sendo observados.

Deve-se investigar agora a existência de alguma grandeza, associada as coordenadas espaço e tempo, que seja invariante em relação as transformações de Lorentz.

Tal grandeza de fato existe, é definida como

$$(\Delta S)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

e é denominada de intervalo no espaço-tempo.

ou, para o caso de uma dimensão espacial,

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2, \quad (1.60)$$

que se interpreta como

$$\left( \begin{array}{c} \text{INTERVALO} \\ \text{ENTRE EVENTOS} \end{array} \right)^2 = \left( \begin{array}{c} \text{DISTÂNCIA NO TEMPO} \\ \text{ENTRE EVENTOS} \end{array} \right)^2 - \left( \begin{array}{c} \text{DISTÂNCIA NO ESPAÇO} \\ \text{ENTRE EVENTOS} \end{array} \right)^2.$$

O intervalo  $\Delta s$  é a única grandeza que descreve pares de eventos no espaço-tempo para os quais, em qualquer referencial inercial, obtém-se o mesmo valor numérico. Para se verificar isso, sejam o intervalo de tempo e a distância definidos pelas transformações de Lorentz:

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right), \quad \Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t').$$

A substituição dessas equações na eq. (1.60) resulta

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= c^2 \gamma^2 \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x' + v \Delta t')^2 \quad \leftarrow \\ &= c^2 \gamma^2 \left( \Delta t'^2 + 2 \Delta t' \frac{v}{c^2} \Delta x' + \frac{v^2}{c^4} \Delta x'^2 \right) - \gamma^2 (\Delta x'^2 + 2 \Delta x' v \Delta t' + v^2 \Delta t'^2) \\ &= c^2 \gamma^2 \Delta t'^2 + 2 \gamma^2 \Delta t' v \Delta x' + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \Delta x'^2 - \gamma^2 \Delta x'^2 - 2 \gamma^2 \Delta x' v \Delta t' - \gamma^2 v^2 \Delta t'^2 \\ &= \gamma^2 \Delta t'^2 c^2 (1 - v^2/c^2) - \gamma^2 \Delta x'^2 (1 - v^2/c^2) \end{aligned}$$

ou, como  $1/\gamma^2 = 1 - v^2/c^2$ ,

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s')^2, \quad (1.61) \quad \leftarrow$$

o que mostra que essa grandeza é, de fato, invariante do ponto de vista de diferentes referências inerciais.

A eq. (1.60) mostra que o quadrado do intervalo no espaço-tempo  $(\Delta S)^2$  pode assumir valores positivos, negativos ou nulos, dependendo das relações entre  $c\Delta t$  e  $\Delta x$ . Essas relações fornecem informações sobre a natureza causal dos pares de eventos e, como mostra a Fig. 1.25, associadas a elas define-se os seguintes tipos de intervalos no espaço-tempo:

- se  $c\Delta t > \Delta x$ , o intervalo é do tipo temporal.
- se  $c\Delta t < \Delta x$ , o intervalo é do tipo espacial.
- se  $c\Delta t = \Delta x$ , o intervalo é do tipo luminoso.

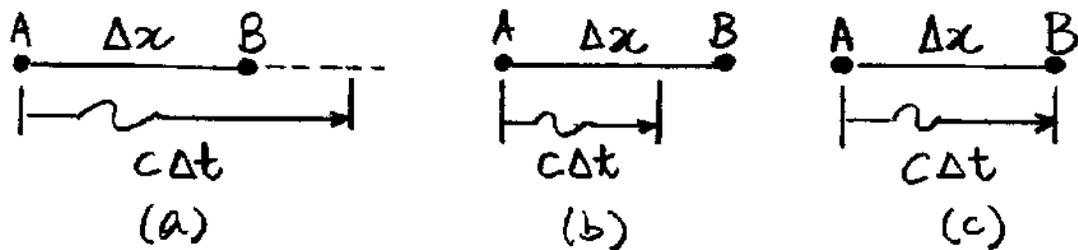


Fig. 1.25 - Dupla de eventos A e B com intervalos do tipo: (a) temporal ( $c\Delta t > \Delta x$ ), (b) espacial ( $\Delta x > c\Delta t$ ) e (c) luminoso ( $c\Delta t = \Delta x$ ).

O intervalo do tipo temporal ( $c\Delta t > \Delta x$ ), está associado a pares de eventos que podem ocorrer no mesmo local ( $\Delta x = 0$ ) mas não podem ser simultâneos ( $\Delta t \neq 0$ ), como se evidencia na

Fig. 1.25 (a). Este é o caso em que se pode definir um tempo próprio  $T_p$  entre dois eventos.

Da eq. (1.60) e da definição de tempo próprio,  $\Delta t = T_p$  para  $\Delta x = 0$ , tem-se

$$\Delta S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \sqrt{c^2 T_p^2 - 0} = c T_p. \quad (1.62)$$

Assim, para intervalos  $\Delta S$  do tipo temporal, o tempo próprio  $T_p$  de qualquer par de eventos, pode ser determinado usando medidas de  $\Delta S$  executadas em qualquer referencial inercial, pois para tais referenciais  $\Delta S$  é invariante.

O intervalo do tipo espacial ( $\Delta x > c\Delta t$ ), está associado a pares de eventos que não podem ocorrer no mesmo local ( $\Delta x \neq 0$ ) mas podem ser simultâneos ( $\Delta t = 0$ ), como se vê na Fig. 1.25(b). Nesse caso, a eq. (1.60) é convenientemente escrita como

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2. \quad (1.63)$$

Esse é o caso em que se pode definir o comprimento próprio  $L_p$ , onde os eventos são simultâneos ( $\Delta t = 0$ ) para o observador em  $S$  tal que

$$\Delta S = \Delta x = L_p. \quad (1.64)$$

Assim, para intervalos  $\Delta S$  do tipo espacial, o comprimento próprio  $L_p$  pode ser determinado usando medidas de  $\Delta S$  executadas em qualquer referencial inercial, pois para tais referenciais  $\Delta S$  é invariante.

O intervalo do tipo luminoso ( $c\Delta t = \Delta x$ ), está associado a pulsos luminosos que, ao deixar o local do primeiro evento, chega ao local do segundo evento no mesmo instante em que este ocorre, como se vê na Fig. 1.25(c).

Deve-se observar que, sendo o intervalo do tipo luminoso um caso limite entre os intervalos dos tipos temporal e espacial, as eqs. (1.62) e (1.64) se aplicam também a esse intervalo. Entretanto, se o intervalo é do tipo luminoso, das eqs. (1.62) e (1.64), o tempo próprio  $T_p$  e o comprimento próprio  $L_p$  são ambos nulos uma vez que  $\Delta S = 0$ . Como se sabe, a linha do universo de um pulso luminoso é a bissetriz entre os eixos  $ct$  e  $x$  no diagrama espaço-tempo. Relativamente à origem comum dos diagramas espaço-tempo dos referenciais  $S$  e  $S'$ , mostrados na Fig. 1.26, qualquer evento que ocorre na região hachurada, apresenta um intervalo do tipo temporal, e tem em comum o fato de suas ordens no tempo serem as mesmas para ambas as referências.

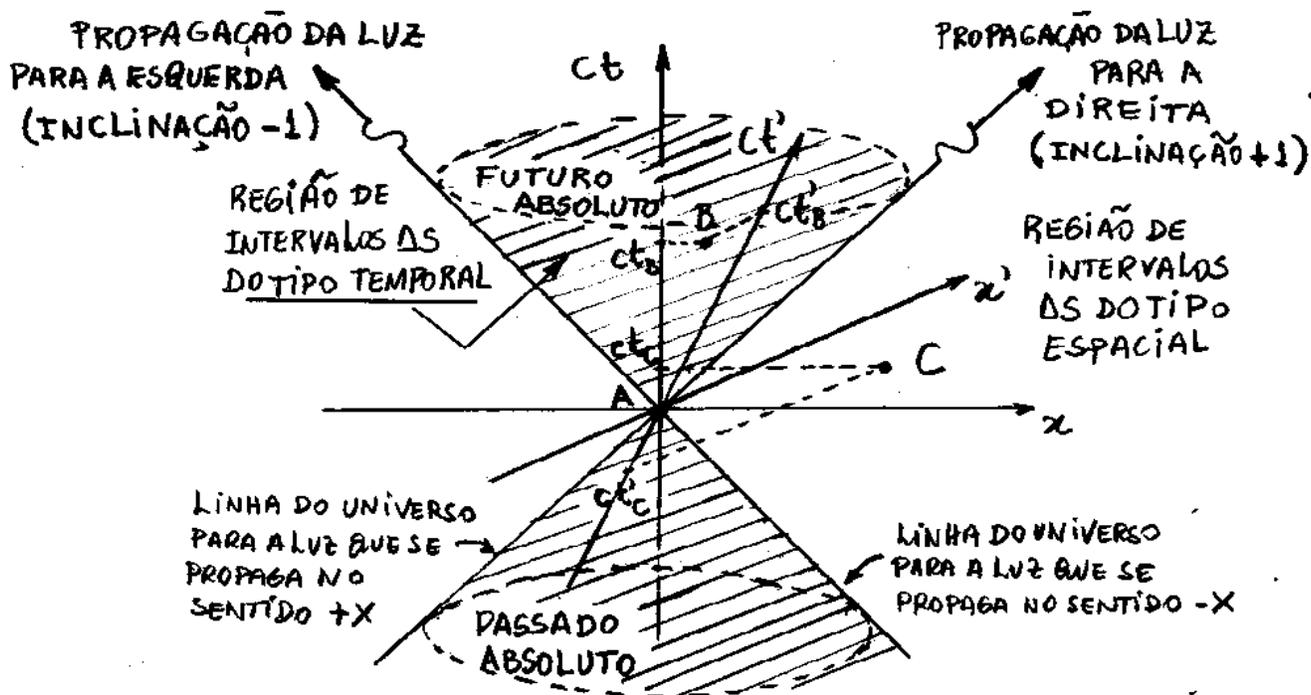


Fig. 1.26 - Diagramas espaço-tempo dos referenciais  $S$  e  $S'$  mostrando as ocorrências dos eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Por exemplo, os observadores em  $S$  e  $S'$  concordam que o evento A ocorre antes de B, embora obtenham diferentes valores para as medidas de espaço e tempo. Por outro lado, a ordem no tempo de eventos separados por um intervalo do tipo espacial depende do referencial considerado. Por exemplo, o evento A ocorre antes de C em  $S$ , mas ocorre depois de C em  $S'$ .

### 1.8.8 - Efeito Doppler na Relatividade.

O efeito Doppler é um desvio na frequência observado nas ondas quando emitidas por uma fonte, que está em movimento em relação ao observador. Foi-lhe atribuído esse nome em homenagem a Johann Christian Andreas Doppler, que o descreveu teoricamente pela primeira vez em 1842. A primeira comprovação da teoria do efeito Doppler foi feita por Christoph Hendrik Diederik' Buys Ballot em 1845, em um experimento com ondas sonoras. Com ondas eletromagnéticas, o fenômeno foi descoberto, independentemente, em 1848, por Armand Hippolyte Louis Fizeau. Nesse caso, o fenômeno é conhecido também como efeito Doppler - Fizeau.

Em 1905, Albert Einstein mostrou que o efeito Doppler - Fizeau pode ser obtido diretamente da Teoria da relatividade especial.

A Fig. 1.27 mostra a emissão de uma onda eletromagnética de uma fonte luminosa colocada na origem de um referencial inercial  $S'$ , que se move para a direita com uma

velocidade  $v$  em relação ao referencial inercial  $S$ . A fonte luminosa é acionada quando a origem  $O'$  de  $S'$  coincide com a origem  $O$  de  $S$ . Na figura destacam-se dois raios luminosos, que representam o comportamento da onda eletromagnética até um ponto  $P$  de observação, de acordo com observadores colocados em ambos os referenciais  $S$  e  $S'$ . Os raios luminosos são esboçados de modo a pertencerem ao plano  $xy$  no referencial  $S$  e ao plano  $x'y'$  no referencial  $S'$ . Os raios luminosos fazem um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $x$  e um ângulo  $\theta'$  em relação ao eixo  $x'$ .

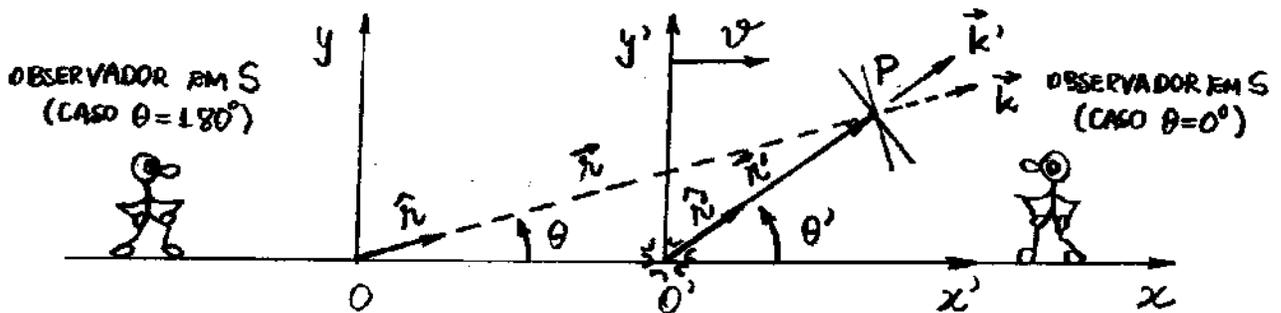


Fig. 1.27- Emissão de uma onda eletromagnética de uma fonte luminosa colocada na origem do referencial inercial  $S'$ , que se move com uma velocidade  $v$  em relação ao referencial inercial  $S$ .

Os casos particulares  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$  do ponto de vista do referencial  $S$ , tem um destaque especial na análise do efeito Doppler. Seja o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  da onda eletromagnética emitida pela fonte luminosa do ponto de vista do referencial inercial  $S$ , descrito na forma de uma onda plana monocromática, isto é,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.65)$$

onde  $\vec{E}_0$  é a amplitude do campo elétrico,  $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  é o ângulo de fase da onda plana,  $\omega = 2\pi\nu$  é a frequência angular escrita em termos da frequência  $\nu$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n}$$

é o vetor de onda, escrito em termos do comprimento de onda  $\lambda$ , perpendicular ao plano de propagação da onda.

O vetor de onda  $\vec{k}$  tem a mesma direção e sentido do vetor  $\vec{r}$  porque a onda luminosa é descrita em termos de um raio luminoso e, nesse caso, o plano de propagação contém somente um ponto.

Como o espaço é homogêneo e isotrópico, do ponto de vista de qualquer um dos referenciais,  $S$  ou  $S'$ , uma onda plana continua sendo plana na troca de referenciais. Além disso, como a velocidade da luz é a mesma para ambos os referenciais  $S$  e  $S'$ , então, os pontos das ondas que chegam em  $P$  são os mesmos pontos que partem das origens dos referenciais  $S$  e  $S'$  em  $t = t' = 0$ . Assim, como sugerido na Fig. 1.28, também são os mesmos os ângulos de fase associados aos campos elétricos das ondas eletromagnéticas do ponto de vista de ambos os referenciais, isto é,

$$\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t' = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad (1.66)$$

É oportuno mencionar aqui a importância do resultado expresso na eq. (1.66). Trata-se de mais

um elemento invariante presente na relatividade especial. Assim como ocorre com o intervalo  $\Delta S$  no espaço-tempo, a fase de uma onda eletromagnética permanece a mesma do ponto de vista de qualquer referencial inercial. Na verdade, o intervalo no espaço-tempo e a fase de uma onda eletromagnética, não são os únicos elementos invariantes na relatividade especial. Em particular, como se verá mais adiante, a grandeza dinâmica energia de uma partícula em repouso, também apresenta essa propriedade.

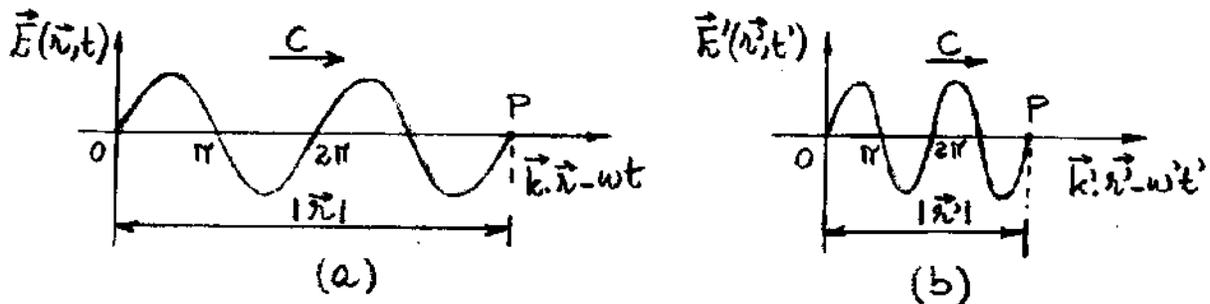


Fig. 1.28 - Comportamento dos campos elétricos das ondas emitidas, desde as origens  $O$  e  $O'$  em  $t = t' = 0$  até o ponto  $P$ , (a) para o caso da fonte em repouso e (b) para o caso da fonte em movimento para a direita, ambos observados do ponto de vista do referencial  $S$ .

De acordo com a Fig. 1.27 deve-se concluir que

$$\hat{n} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} \quad \text{e} \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (1.67)$$

Assim, a fase da onda plana no referencial  $S$  pode ser expressa como

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t = \left( \frac{\cos\theta x}{c/\nu} + \frac{\sin\theta y}{c/\nu} - \nu t \right) 2\pi$$

ou

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \left( \frac{v}{c} \cos \theta x + \frac{v}{c} \sin \theta y - vt \right) 2\pi, \quad (1.68)$$

onde usou-se a definição  $\lambda = c/v$ , para eliminar o comprimento de onda  $\lambda$ . Similarmente, obtém-se

$$\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t' = \left( \frac{v'}{c} \cos \theta' x' + \frac{v'}{c} \sin \theta' y' - v' t' \right) 2\pi. \quad (1.69)$$

Substituindo as transformações de Lorentz

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y = y' ; t = \gamma(t' + v/c^2 x')$$

na eq. (1.68), obtém-se

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \left[ \frac{v}{c} \cos \theta \gamma(x' + vt') + \frac{v}{c} \sin \theta y' - v \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \right] 2\pi$$

ou

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \left[ \frac{\gamma v}{c} (\cos \theta - \beta) x' + \frac{v}{c} \sin \theta y' - \gamma v (1 - \beta \cos \theta) t' \right] 2\pi \quad (1.70)$$

pois  $\beta = v/c$ . Como a fase da onda eletromagnética é invariante em relação aos referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ , a comparação da eq. (1.69) com a eq. (1.70) resulta:

$$\begin{aligned} \gamma v \cos \theta' &= \gamma v (\cos \theta - \beta) \\ \gamma v' \sin \theta' &= v \sin \theta \\ \gamma v' &= \gamma v (1 - \beta \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.71)$$

ou, dividindo a segunda equação pela primeira,

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)} \quad (1.72)$$

$$\nu' = \gamma \nu (1 - \beta \cos \theta) \quad (1.73)$$

A eq. (1.73) fornece a transformação das frequências  $\nu'$  e  $\nu$ , da fonte fixa e móvel, respectivamente, para diferentes ângulos  $\theta$  de observação, o que formaliza o efeito Doppler relativístico. Como  $\nu$  é a frequência da luz no referencial onde a fonte está em repouso, ela é denominada de frequência própria. Por outro lado, a eq. (1.72) formaliza o efeito relativístico denominado de aberração luminosa. Essa equação mostra como as direções de propagação da onda luminosa  $\theta'$  e  $\theta$  se transformam entre dois diferentes referenciais inerciais. Transformações inversas às eqs. (1.72) e (1.73), podem ser obtidas trocando-se  $\beta$  por  $-\beta$ .

Experiências em Física de altas energias confirmam as expressões relativísticas do efeito Doppler e da aberração luminosa.

### Exemplo 1.6 - FACULTATIVO.

Usar a expressão relativística da aberração luminosa para justificar a aberração das estrelas mencionada na seção 1.6.2.

Considere o caso de uma estrela no zênite no referencial  $S$ , cuja direção de propagação está ao longo da direção  $y$ , isto é,  $\theta = 270^\circ = 3\pi/2$  rd. No referencial  $S'$ , que no caso é a terra em movimento com velocidade  $v$ , de acordo com a eq. (1.72), a direção  $\theta'$  de propagação é

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\operatorname{sen} 3\pi/2}{\gamma (\cos 3\pi/2 - \beta)} = \frac{-\sqrt{1-\beta^2}}{-\beta}$$

Como nesse caso,  $v \ll c$ ,  $\beta^2 = v^2/c^2 \sim 0$ . Assim, pode-se escrever  $\operatorname{tg} \theta' \approx 1/\beta$ , ou  $\theta' = \operatorname{tg}^{-1}(1/\beta)$ . A Fig. 1.29 mostra que a direção de propagação da luz da estrela

$\theta = 3\pi/2$  em  $S$  e  $\theta' = \operatorname{tg}^{-1}(1/\beta)$  em  $S'$ , relacionam-se com a direção  $\alpha$  do telescópio por

$\alpha = \theta - \theta' = 3\pi/2 - \operatorname{tg}^{-1} 1/\beta$ . Por outro lado, sabe-se que  $\operatorname{tg}^{-1} \beta \approx 3\pi/2 - \operatorname{tg}^{-1} 1/\beta$ , para  $\beta = v/c$  pequeno que é o caso aqui. Assim,

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \beta = \operatorname{tg}^{-1}(v/c), \quad (1.74) \quad \text{devido ao movimento da terra } S'$$

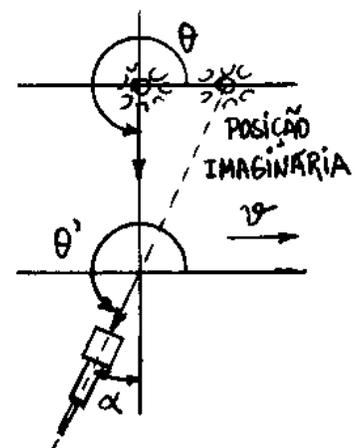


Fig. 1.29 - Aberração da luz de uma estrela

devido ao movimento da terra  $S'$  que concorda com o efeito da aberração de primeira ordem discutida na seção 1.6.2. É importante mencionar que, nenhuma outra teoria pode explicar, satisfatoriamente, a aberração das estrelas.

Para investigar o comportamento do efeito Doppler-Fizeau em função da direção  $\theta$  de observação, seja a eq. (1.73) escrita na seguinte forma:

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (1.75)$$

ou

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma} (1 - \beta \cos \theta)^{-1} = \frac{\nu'}{\gamma} (1 + \beta \cos \theta - \beta^2 \cos^2 \theta + \dots)$$

Na aproximação clássica,  $\beta \ll 1$ , ou  $\gamma \approx 1$ , obtém-se

$$\nu \approx \nu' (1 + \beta \cos \theta), \quad (1.76)$$

Essa equação mostra que o efeito Doppler-Fizeau pode ocorrer mesmo para  $v \ll c$ . A dependência da frequência com  $\beta = v/c$  fica mais evidente considerando casos familiares. Por exemplo, para  $\theta = 0^\circ$ , que representa o observador em S vendo a fonte se aproximar, ou ele se aproximando da fonte, tem-se

$$\nu \approx \nu' (1 + \beta) = \nu' (1 + v/c), \quad \theta = 0^\circ, \quad (1.77)$$

que mostra que a frequência  $\nu$  é ligeiramente maior do que a frequência própria  $\nu'$ . Diz-se, neste caso, que a frequência é desviada para o azul ("blue shift"). Por outro lado, para  $\theta = 180^\circ$ , que representa o observador em S vendo a fonte se afastar, ou ele se afastando da fonte, tem-se

$$\nu \approx \nu' (1 - \beta) = \nu' (1 - v/c), \quad \theta = 180^\circ, \quad (1.78)$$

o que mostra que a frequência  $\nu$  é ligeiramente menor do que a frequência própria  $\nu'$ . Diz-se, neste caso, que a frequência é desviada para o vermelho ("red shift").

Do ponto de vista relativístico, isto é, quando  $v$  não for pequeno quando comparado a  $c$ , a eq. (1.75), para o caso  $\theta=0^\circ$ , resulta

$$v = \frac{v'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} = v' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = v' \frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)^2}}$$

ou

$$v = v' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = v' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (1.79)$$

Por outro lado, para o caso  $\theta=180^\circ$ , tem-se

$$v = v' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = v' \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (1.80)$$

Em relatividade, os casos  $\theta=0^\circ$  e  $\theta=180^\circ$ , são conhecidos como Efeito Doppler Longitudinal. Estes resultados foram primeiramente verificados, em 1938, por Herbert Eugene Ives e G.R. Stilwell usando um feixe de átomos excitados de hidrogênio produzido em um forno aquecido em alta temperatura. A experiência foi repetida em 1961 por Hirsch I. Mandelberg e Louis Witten com mais precisão, confirmando definitivamente o efeito Doppler relativístico.

O caso  $\theta=90^\circ$  é conhecido como Efeito Doppler Transversal. Observa-se, na eq. (1.76), que o efeito Doppler transversal não está presente na Física Clássica. Esse é um efeito puramente relativístico e pode ser obtido da eq. (1.75) como

$$v = \frac{v'}{\gamma(1-\beta\cos 90^\circ)} = \frac{v'}{\gamma} \quad (1.81)$$

Assim, se a observação fosse na direção  $\theta = 90^\circ$ , em relação ao movimento relativo, a frequência seria sempre menor que a frequência própria  $\nu'$  da fonte, provocando um desvio para o vermelho. Esse efeito foi também confirmado experimentalmente por Ives e Stilwell em 1938. Uma observação direta foi feita por W. Kundig em 1963, usando raios  $\gamma$  de uma fonte radioativa colocada numa centrífuga em alta rotação.

Quando se compara o espectro da luz oriunda de uma galáxia distante, onde se identifica linhas de absorção características, com as mesmas linhas num espectro terrestre, observa-se que as frequências da luz oriunda da galáxia são desviadas para o vermelho ( $\nu < \nu'$ ). Em 1929, o astrônomo Edwin Powell Hubble sugeriu que esse desvio seja devido ao efeito Doppler, com a galáxia observada se afastando da terra, com um certo valor de  $\beta$ , determinado da eq. (1.80) a partir de  $\nu/\nu'$ . A aplicação da sugestão de Hubble a várias galáxias mostrou que a velocidade  $v$  é proporcional à distância  $r$  entre galáxias, isto é,

$$v = H_0 r, \quad (1.82)$$

onde  $H_0$  é denominado de constante de Hubble. Os valores de  $r$  foram obtidos por medidas de ângulos  $p$  de paralaxe das estrelas, observadas relativamente as estrelas distantes, em diferentes posições da órbita da terra, como mostra a Fig. 1.30. O valor de  $H_0$  é difícil de ser determinado com precisão, por causa da incerteza na escala das distâncias astronômicas.

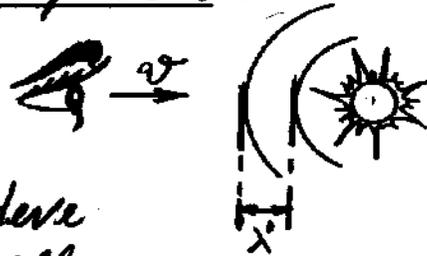
O valor da Constante de Hubble está entre 50 km/s e 100 km/s para cada Mpc (Mega parsec), onde 1 pc é a distância correspondente ao ângulo de paralaxe  $p=1''$ , equivalente a 3,6 anos-luz. O ano-luz é uma unidade astronômica de distância e corresponde a distância percorrida pela luz durante 1 ano, isto é,

$$1 \text{ ano-luz} = 1 \text{ c. ano} = 9,461 \times 10^{15} \text{ m.} \quad (1.93)$$

O resultado de Hubble foi a primeira evidência de que o universo encontra-se em expansão.

### Exemplo 1.7

A que velocidade um observador deve se aproximar de uma luz vermelha ( $\lambda' = 650 \text{ nm}$ ) para que ela pareça verde ( $\lambda = 525 \text{ nm}$ )?



Da frequência de aproximação,  $v = v' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow \lambda = \lambda' \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$ , pois  $v = c/\lambda$  e  $v' = c/\lambda'$ . Assim,

$$(c+v)\lambda^2 = (c-v)\lambda'^2 \Rightarrow v\lambda^2 + v\lambda'^2 = c\lambda'^2 - c\lambda^2 \quad \text{ou}$$

$$v = \frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda'^2 + \lambda^2} c = \frac{650^2 - 525^2}{650^2 + 525^2} c = 0,21 c.$$

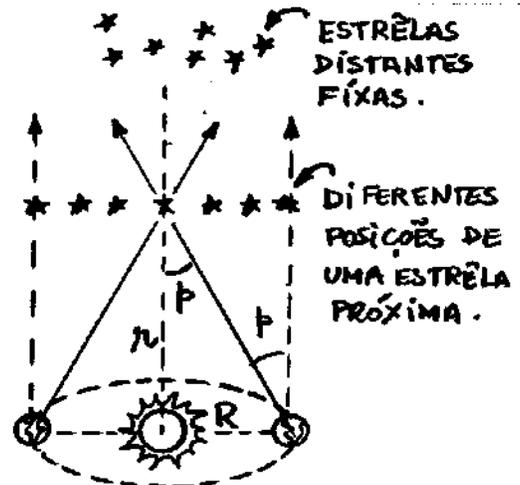


Fig. 1.30 - Medida da distância  $n$  das galáxias por paralaxe estelar.

### 1.8.9 - Paradoxo dos Gêmeos.

O paradoxo dos gêmeos, ou paradoxo do relógio, refere-se a uma discordância temporal aparente de dois observadores gêmeos, quando um deles faz uma viagem e retorna ao ponto de partida.

Sejam Pedro e Paulo irmãos gêmeos idênticos. Suponha que Paulo viaje em alta velocidade para um planeta distante e, logo em seguida, retorne a terra. Se Pedro fica na Terra durante toda a viagem de Paulo, qual seria o intervalo de tempo dessa viagem do ponto de vista dos dois irmãos? A Fig.1.31 mostra a ilustração do problema.

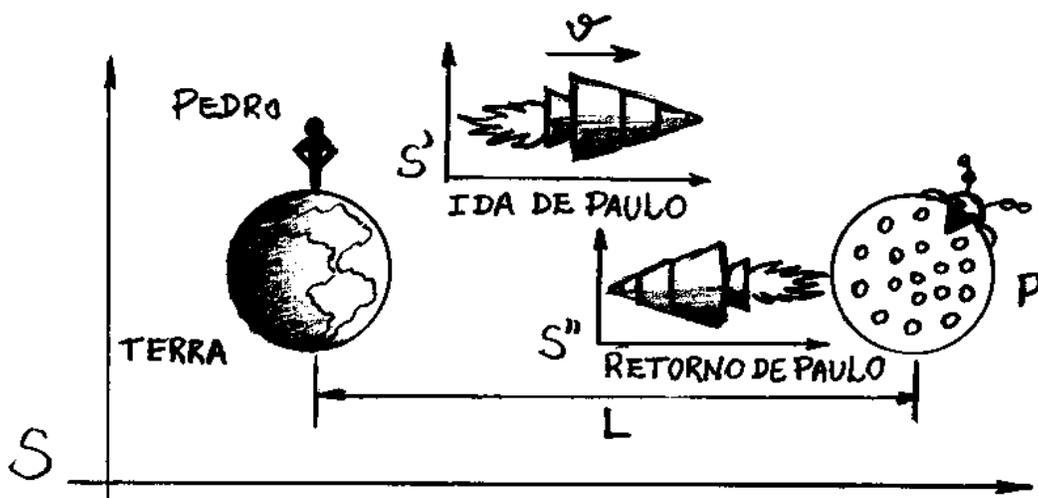


Fig. 1.31 - Viagem de Paulo da Terra, onde ficou seu irmão gêmeo Pedro, com destino a um planeta P distante.

O planeta P, a Terra e Pedro são mantidos num referencial inercial S. Por outro lado, a nave de Paulo é mantida no referencial inercial S' na ida e no referencial inercial S'' no retorno.

Paulo rapidamente adquire a velocidade  $v$  e viaja em S' até chegar ao planeta P. Nesse momento, pára momentaneamente no referencial S. Em seguida, readquire a velocidade  $v$ , viaja em S'' até chegar a Terra, onde novamente fica em repouso.

Seja, por exemplo, a distância  $L = 4$  anos-luz entre o planeta P e a Terra e  $v = 0,8c$ . Nesse caso, tem-se

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5/3 \quad (1.84)$$

Do ponto de vista de Pedro, a viagem de Paulo até o planeta P durou

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{4 \text{ c anos}}{0,8c} = 5 \text{ anos} \quad (1.85)$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Assim, Pedro ficou 10 anos mais velho, quando Paulo retorna de viagem. Em virtude da dilatação dos tempos, a viagem de Paulo até o planeta P, durou somente

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{5 \text{ anos}}{5/3} = 3 \text{ anos} \quad (1.86)$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Assim, Pedro concluirá que Paulo terá envelhecido somente 6 anos durante toda a sua viagem.

O problema ocorre quando as cálculos para Pedro, são feitos do ponto de vista de Paulo. Do ponto de vista de Paulo, é a Terra e o planeta P que se movem em relação a ele com velocidade de  $v = -0,8c$ . Como para Paulo, a viagem até o planeta P durou  $\Delta t' = 3$  anos, o intervalo de tempo  $\Delta t''$  na terra deveria ser reduzido para

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{3}{5/3} = 1,8 \text{ anos}$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Então, por que Pedro não envelheceu somente 3,6 anos durante toda a viagem de Paulo? Evidentemente, este é o paradoxo.

A discordância dos resultados deve-se do fato que as situações dos gêmeos não são simétricas. A Fig. 1.32 mostra os diagramas espaço-tempo dos referenciais  $S, S'$  e  $S''$  do ponto de vista do referencial  $S$ . Como se pode observar nessa figura, Pedro permanece o tempo todo no mesmo referencial inercial, enquanto Paulo muda de referencial. Mesmo que seja pequeno o tempo de mudança de referencial, quando comparado ao tempo total de viagem, esse fato é essencial para comparar as idades dos irmãos no final da viagem.

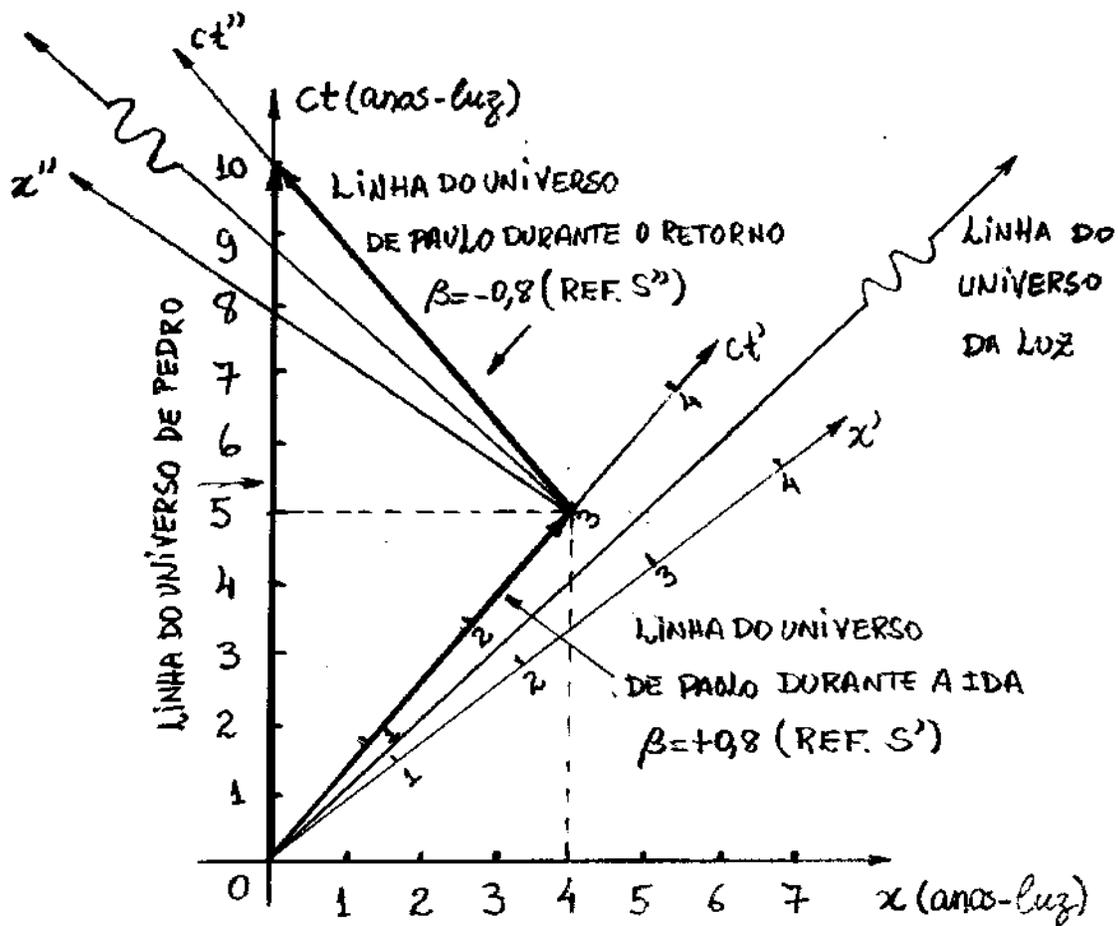


Fig. 1.32 - Diagramas espaço-tempo da viagem de Paulo ao planeta P no referencial S em que Pedro, o planeta e a Terra estão em repouso.

A Fig. 1.32 mostra as duas mudanças de referenciais mais importantes durante a viagem de Paulo. Na verdade espera-se que haja uma mudança contínua de referenciais sempre que a velocidade da nave varia na mesma proporção. Qualquer uma dessas mudanças de referenciais deve quebrar a simetria do problema. Se Paulo se deslocasse sempre com a mesma velocidade constante em linha reta, ele nunca voltaria para casa. Nesse caso, cada gêmeo insistiria de fato que o tempo do outro se atrasaria em relação ao seu próprio referencial.

O problema ocorre quando se compara as leituras de um relógio em repouso com outro que com certeza estava em movimento. Para retornar de viagem, Paulo teria que variar a sua velocidade e portanto estaria sujeito a uma aceleração.

Se cada gêmeo transportasse consigo um "acelerômetro", eles poderiam saber quem de fato mudou de velocidade. A mudança da velocidade, ou direção, seria facilmente detectada pelo "acelerômetro". Não se pode sentir o movimento de um automóvel se este estiver com velocidade constante em linha reta. Mas, faça-o descrever uma curva, subir ou descer, acelerar ou desacelerar, que você será o próprio "acelerômetro". Assim, é possível distinguir os gêmeos do fato que, aquele que executou a viagem de ida e volta experimentou e registrou acelerações, enquanto que aquele que permaneceu em casa, não.

Deve-se concluir que a dilatação dos tempos na forma  $T = \gamma T_p$ , pode ser adotada do ponto de vista de Pedro mas não do ponto de vista de Paulo, pois ele não permanece o tempo todo mesmo referencial inercial. Assim, a relatividade especial simplesmente não se aplica do ponto de vista de Paulo e o paradoxo deixa de ocorrer. O cálculo correto, do ponto de vista de Paulo, deve levar em conta efeitos de aceleração na mudança dos referenciais, assunto que é tratado na Teoria da relatividade geral.

Não é fácil aceitar que Paulo realmente ficará mais jovem do que Pedro quando retornar de viagem. O relógio comum poderia ser substituído por um relógio biológico tal como o batida do coração ou a pulsação. Poderia-se dizer que Paulo viveu numa razão mais lenta do que Pedro durante a sua viagem. Os relógios biológicos comportam-se do mesmo modo que os relógios comuns. É interessante mencionar a aceitação pública de que a vida humana pode ser retardada por resfriamento, tal que um envelhecimento diferente para os gêmeos pode ser conseguido também por diferenças de temperatura. Do mesmo modo que as diferenças de temperatura são mensuráveis e combináveis pelos gêmeos, as diferenças de movimento também são. Assim, é razoável admitir que o movimento relativístico poderia ser uma outra forma de retardar o envelhecimento.

As discussões sobre o paradoxo dos gêmeos permite fazer um comentário importante sobre o fenômeno da dilatação dos tempos. Não se deve esperar que as mudanças dos tempos dependa simplesmente do movimento relativo entre diferentes referenciais inerciais. Na verdade, o que está por trás das mudanças no tempo na relatividade é a aceleração. Se existe um movimento entre diferentes referenciais inerciais é porque houve em algum momento uma aceleração relativa entre esses referenciais e é exatamente nesse momento que as mudanças no tempo ocorrem. Assim, em certos aspectos, pode-se dizer que a teoria da relatividade especial está incompleta, pois apesar de fazer previsões corretas sobre a dilatação dos tempos, não é capaz de explicar porque o fenômeno ocorre. O fenômeno é explicado corretamente no contexto da teoria da relatividade geral.

### Exemplo 1.8 - FACULTATIVO

Uma solução apropriada para o problema do paradoxo dos gêmeos se baseia na dedução lógica de que a única forma aceitável para o movimento dos gêmeos deve ser representada pelos diagramas espaço-tempo mostrado na Fig. 1.32. Use essa figura e a invariância do intervalo no espaço-tempo para mostrar que o tempo  $\Delta t$  ocorrido no referencial de Pedro durante toda a viagem de Paulo foi de fato 10 anos.

Deve-se observar que o intervalo espaço-tempo  $\Delta S'$  no referencial  $S'$  de Paulo é do tipo temporal, pois é sempre possível definir um par de eventos que ocorrem no mesmo local em  $S'$  tal que  $c\Delta t' > \Delta x'$ . Nesse caso, Paulo deve registrar um tempo próprio em  $S'$  dado por  $T_p = \Delta S'/c$ , de acordo com a eq. (1.62). Usando a eq. (1.60) e o fato de que o intervalo no espaço-tempo é invariante, deve-se concluir que

$$(\Delta S/c)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2 = (\Delta S'/c)^2 = T_p^2$$

ou

$$(\Delta t)^2 = T_p^2 + (\Delta x/c)^2 \quad (1.87)$$

Como  $(\Delta x/c)^2 > 0$ , então Pedro deve registrar um tempo  $\Delta t > T_p$ . O tempo  $T_p = 3$  anos é registrado por Paulo para a viagem de ida. Neste exemplo, no referencial de Pedro, a razão entre  $\Delta x$  e  $\Delta t$  é  $\Delta x/\Delta t = 0,8c$  ou  $\Delta x/c = 0,8\Delta t$  e então

$$(\Delta t)^2 = (3\text{anos})^2 + (0,8\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{9/0,36} = 5\text{anos}$$

ou ainda 10 anos para a viagem completa, como concluído anteriormente.

Exemplo 1.9 - FACULTATIVO

O paradoxo dos gêmeos pode ser resolvido, sem recorrer a teoria da relatividade geral, por um procedimento proposto por Charles Galton Darwin, neto do lendário naturalista Charles Robert Darwin, que utiliza o efeito Doppler relativístico. Discuta esse procedimento utilizando o exemplo dos gêmeos Pedro e Paulo.

Suponha que Pedro e Paulo combinem, a cada ano, enviar um sinal luminoso para o outro. Cada irmão poderá saber a idade do outro simplesmente contando os sinais recebidos. Evidentemente, a frequência de sinais recebidos não será de 1 por ano, por causa do efeito Doppler. Quando os dois irmãos estão se afastando, a frequência  $\nu_{af}$  será

$$\nu_{af} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu' = \sqrt{\frac{c-0,8c}{c+0,8c}} \nu' = \sqrt{\frac{0,2}{1,8}} \nu' = \sqrt{\frac{2}{18}} \nu' = \frac{1}{3} \nu' \quad (1.88)$$

e quando os dois irmãos estão se aproximando,  $\nu_{ap} = 3\nu'$ , onde  $\nu'$  é a frequência dos sinais nos seus referenciais de repouso. A Tab. 1.1 mostra o número total de sinais recebidos por Pedro e Paulo a partir da duração da viagem registrada por Paulo. Por essa tabela, Pedro deve concluir que Paulo envelheceu 6 anos e Paulo deve concluir que Pedro envelheceu 10 anos, como de fato teria ocorrido.

	SINAIS RECEBIDOS POR PAULO	SINAIS RECEBIDOS POR PEDRO
VIAGEM DE IDA $\nu_{af} = \frac{1}{3}\nu'$	1 SINAL NOS SEUS 3 PRIMEIROS ANOS	3 SINAIS NOS SEUS 9 PRIMEIROS ANOS
VIAGEM DE VOLTA $\nu_{ap} = 3\nu'$	9 SINAIS NOS SEUS 3 ÚLTIMOS ANOS	3 SINAIS NO SEU ÚLTIMO ANO
TOTAL	10 SINAIS	6 SINAIS

Tab. 1.1. Sinais recebidos pelos gêmeos contados a partir do tempo de Paulo.

## 1.9. Dinâmica Relativística.

As leis de conservação do momento e da energia estão entre os princípios mais importantes da física. A simplicidade e a universalidade dessas leis de conservação sugerem a busca de equações análogas às usadas na mecânica clássica, que sejam compatíveis com a conservação do momento e da energia também na mecânica relativística.

### 1.9.1. Momento Relativístico.

É fácil mostrar que o momento linear da mecânica clássica não é conservado na mecânica relativística. Para mostrar isso, é suficiente examinar um processo isolado de colisão entre dois corpos idênticos, onde a resultante das forças externas seja nula. Nessas condições, o momento linear total

$$\vec{P} = m\vec{u} \quad (1.89)$$

é conservado na mecânica clássica. O objetivo é mostrar que a conservação do momento linear, a partir da eq. (1.89), é somente uma aproximação válida para baixas velocidades.

A Fig. 1.33 mostra um processo de colisão, perfeitamente elástico, entre dois corpos A e B de massas  $m$  idênticas, observado em três situações diferentes.

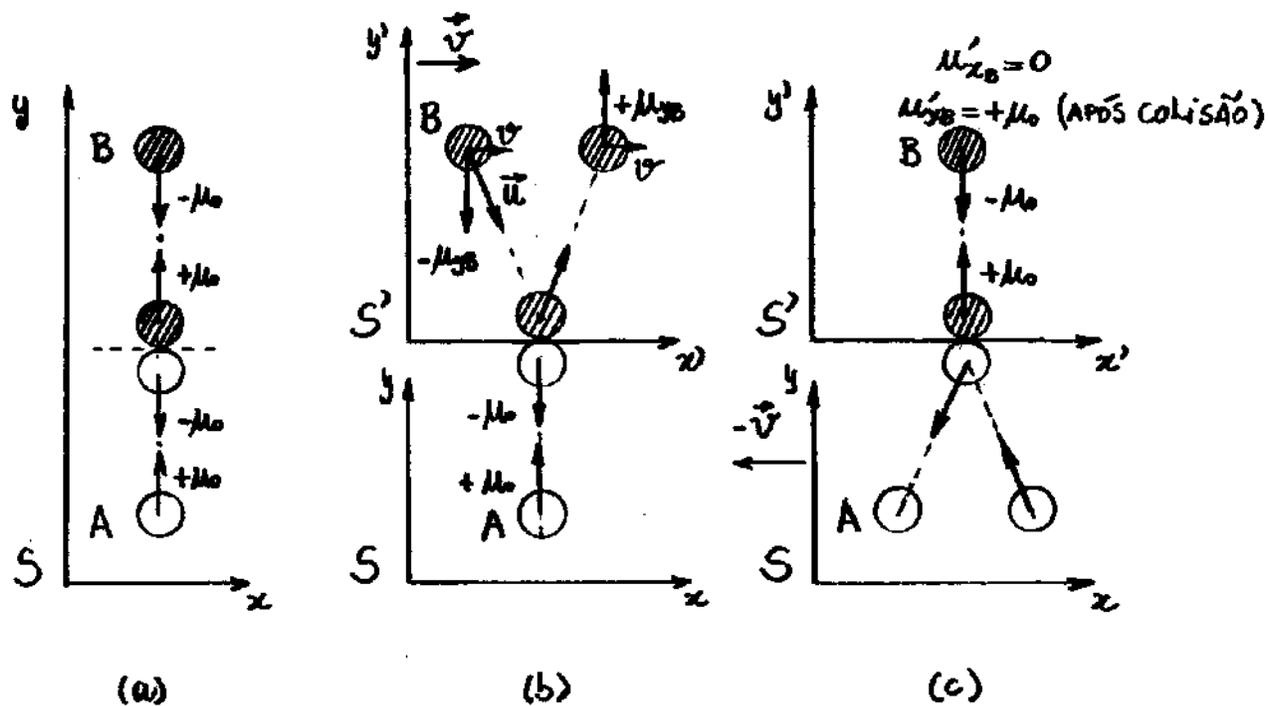


Fig. 1.33 - Colisões perfeitamente elásticas entre dois corpos A e B idênticas, (a) num mesmo referencial S, (b) do ponto de vista de um observador em S e (c) do ponto de vista de um observador em S'.

Na Fig. 1.33 (a), ambas os corpos estão no mesmo referencial S e são arremessadas na direção y, em sentidos opostos, com a mesma velocidade  $\mu_0$  em módulo. Após a colisão, as componentes  $\mu_{yA}$  e  $\mu_{yB}$  das velocidades dos corpos A e B também são iguais a  $\mu_0$  em módulo. Portanto, após a colisão, a componente  $p_y = m\mu_y$  do momento linear é conservada, como se espera na mecânica clássica.

Nas Figs. 1.33 (b) e (c), entretanto, os corpos A e B estão em diferentes referenciais inerciais S e S', que se movem com uma velocidade relativística de módulo  $v$ , um em relação ao outro.

A Fig. 1.33(b), mostra o processo de colisão do ponto de vista do referencial  $S$  e a Fig. 1.33(c), mostra o processo de colisão do ponto de vista do referencial  $S'$ . Obviamente, cada observador nota que o corpo arremessado por ele, adquire a velocidade de módulo  $u_0$  após a colisão, tal que o momento  $p_y = mu_y = mu_0$  é conservado em seu próprio referencial. Deseja-se verificar se a conservação do momento  $p_y = mu_y$  continua valendo quando as dois referenciais são consideradas durante a colisão entre os corpos A e B.

Do ponto de vista do referencial  $S$ , ilustrado na Fig. 1.33(b), após a colisão, o corpo A tem uma componente  $y$  de velocidade dada por

$$u_{yA} = -u_0 \quad (1.90)$$

Por outro lado, após a colisão, o corpo B tem uma componente  $x$  de velocidade  $u_{xB} = v$  e, de acordo com a transformação de velocidades, uma componente  $y$

$$u_{yB} = \frac{u'_{yB}}{\gamma(1 + u'_{xB}v/c^2)} = + \frac{u_0}{\gamma} \quad (1.91)$$

pois, do ponto de vista do observador em  $S'$ , ilustrado na Fig. 1.33(c), após a colisão,  $u'_{yB} = +u_0$  e  $u'_{xB} = 0$ .

Assim, após a colisão, em módulo, tem-se

$$p_{yA} = mu_{yA} = mu_0 \neq p_{yB} = mu_{yB} = mu_0/\gamma$$

Conclui-se, então, que não há conservação do momento clássico  $\vec{p} = m\vec{v}$  no processo de colisão entre os corpos A e B do ponto de vista do observador em S.

A análise do problema do ponto de vista de um observador em S', leva exatamente à mesma conclusão, já que os papéis de A e B são simétricos e intercambiáveis. No limite clássico ( $v \ll c$ ) obviamente o momento é conservado pois, nesse limite,  $\gamma \approx 1$  e  $\mu_{y0} \approx +\mu_0$  de acordo com a eq. (1.91).

O motivo para a definição do momento na forma da eq. (1.89) na mecânica clássica é que esta grandeza é conservada na ausência de forças externas, como no exemplo acima. Sabe-se agora que esta grandeza é conservada somente na aproximação  $v \ll c$ . É possível, entretanto, definir um momento relativístico  $\vec{p}$  para uma partícula que apresente as seguintes propriedades:

1.  $\vec{p}$  é conservado nas colisões.
2.  $\vec{p} \rightarrow m\vec{v}$ , quando  $v/c \rightarrow 0$ .

Propõe-se aplicar a primeira dessas condições à colisão entre dois corpos discutida acima, observando o seguinte fato:

" A velocidade do corpo em módulo é  $\mu_0$  no seu próprio referencial e  $\mu = (\mu_0^2 + v^2)^{1/2}$  no outro referencial".

- A falta de conservação do momento não pode ser atribuída às velocidades, pois estas são corrigidas pela transformação de Lorentz. Nesse caso, o problema deve estar associado à massa do corpo.

Seja examinar a lei de conservação da componente  $y$  do momento, do ponto de vista do observador em  $S$  na Fig. 1.33(b), chamando a massa do corpo arremessado pelo observador em  $S$  de  $m(\mu_0)$  e a massa do corpo arremessado pelo observador em  $S'$  de  $m(\mu)$ , como

$$\sum_i p_{y(\text{antes colisão})} = \sum_i p_{y(\text{depois colisão})}$$

$$\underbrace{m(\mu_0)\mu_0}_A - \underbrace{m(\mu)\mu_{yB}}_B = -\underbrace{m(\mu_0)\mu_0}_A + \underbrace{m(\mu)\mu_{yB}}_B$$

$$\Rightarrow 2m(\mu_0)\mu_0 = 2m(\mu)\mu_{yB}$$

ou

$$\frac{m(\mu)}{m(\mu_0)} = \frac{\mu_0}{\mu_{yB}} = \frac{\gamma\mu_0}{\mu_0} = \gamma \quad (1.92)$$

pois, da eq. (1.91),  $\mu_{yB} = \mu_0/\gamma$ .

Deve-se tentar descobrir agora o comportamento de  $m(\mu)$  como função da variável  $\mu$ . Sabe-se que o caso limite  $\mu_0 \rightarrow 0$  deve estar previsto no caso geral. Nesse caso, como ilustrado na Fig. 1.34, a colisão é de "raspão", com o corpo B passando pelo corpo A com velocidade  $\mu = v$ , tal que a eq. (1.92) torna-se

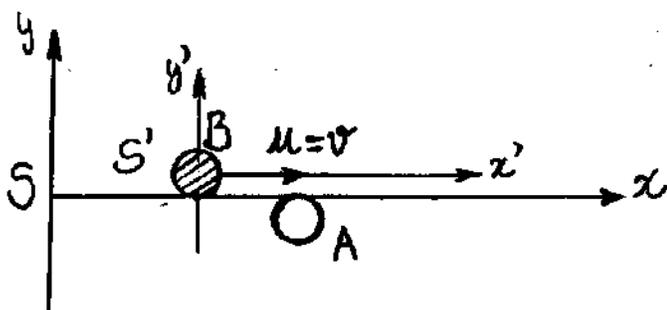


Fig. 1.34 - Colisão de raspão entre os corpos A e B do ponto de vista do referencial S.

$$\frac{m(u=v)}{m(u_0=0)} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

ou

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (1.93)$$

Deve-se observar na Fig. 1.34, que o referencial S' é o próprio referencial do corpo B que se move com uma velocidade  $u$  em relação ao referencial S.

Como o corpo A está em repouso no referencial S, sua massa  $m(u_0=0)$  será a massa Newtoniana comum, que é denominada de massa de repouso  $m_0$ . Como os dois corpos são idênticas,  $m_0$  é também a massa do corpo B, quando ela está em repouso.

Por outro lado, o corpo B está se movendo com uma velocidade  $u$  no referencial S e sua massa  $m(u)$ , denominada de massa relativística, deve aumentar com o valor de  $u$ , de acordo com a eq. (1.93).

Observa-se, imediatamente, que quando  $u \ll c$ , obtém-se  $m = m_0$ , como se deve esperar para uma partícula clássica.

Para preservar, então a lei clássica da conservação do momento, é necessário escrever a massa de uma partícula em movimento na forma da eq. (1.93), e definir a componente y do momento relativístico como

$$p_y = m u_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (1.94)$$

onde  $u^2 = u_x^2 + u_y^2$ . Na dedução do momento relativístico, adotou-se um caso particular de conservação do momento na direção do eixo y. O que se fez, na verdade, é evitar deduções gerais, um tanto quanto complicadas, que levam exatamente aos mesmos resultados. No caso geral, o momento relativístico da partícula, assume a seguinte forma vetorial:

$$\vec{p} = m \vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (1.95)$$

onde

$$p_x = m_0 u_x / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad p_y = m_0 u_y / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad p_z = m_0 u_z / \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$e \quad u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

É importante observar que  $u$  é a velocidade da partícula em relação ao referencial  $S$  e não tem, necessariamente, nenhuma conexão com a velocidade relativa  $v$  entre os referenciais  $S$  e  $S'$ . A massa de repouso  $m_0$  é, frequentemente, denominada de massa própria, pois é medida no referencial da própria partícula.

### Exemplo 1.9

Calcular os valores de  $u/c$  para os quais a massa relativística de uma partícula exceda sua massa de repouso por uma fração relativa  $f = (m - m_0)/m_0$ .

$$f = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1$$

ou, resolvendo para  $u/c$ , obtém-se

$$u/c = \frac{\sqrt{f(2+f)}}{1+f} \quad (1.96)$$

Pode-se escolher alguns valores particulares de  $f$ . Por exemplo; para  $f = 0,001 = 0,1\%$ , obtém-se  $u/c = 0,014$ ; para  $f = 1 = 100\%$ , obtém-se  $u/c = 0,87$ ; para  $f = 100$ , obtém-se  $u/c = 0,999$ .

## 1.9.2 - Energia Relativística

De acordo com a eq. (1.95), do ponto de vista relativístico, a 2ª lei de Newton fornece

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{u}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (1.97)$$

Escrita nessa forma, a 2ª lei de Newton exibe a lei da conservação do momento relativístico diretamente. Quando  $\vec{F}$  é nula,  $\vec{p} = m_0 \vec{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2}$  deve ser uma constante. Isto é, na ausência de forças externas, o momento relativístico é conservado.

De acordo com o teorema Trabalho-Energia, a energia cinética  $K$  de uma partícula é igual ao trabalho efetuado por uma força externa para acelerar a partícula desde o repouso até uma velocidade  $u$ , isto é,

$$K = \int_{u=0}^u F dx = \int \frac{d\vec{p}}{dt} dx = \int d(mu) \frac{dx}{dt} = \int (mdu + udm)u$$

ou

$$K = \int_{u=0}^u (mudu + u^2 dm). \quad (1.98)$$

As variáveis  $m$  e  $u$  são relacionadas por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow m^2 - m^2 \frac{u^2}{c^2} = m_0^2 \Rightarrow m^2 c^2 = m^2 u^2 + m_0^2 c^2.$$

Diferenciando esta equação, obtêm-se

$$2mc^2 dm = m^2 2u du + u^2 2m dm$$

ou, dividindo ambos os lados por  $2m$ , obtêm-se

$$c^2 dm = m u du + u^2 dm,$$

que é exatamente o integrando da eq. (1.98).

Assim, a expressão da energia cinética relativística da partícula, pode ser escrita como

$$K = \int_{u=0}^u c^2 dm = c^2 \int_{m=m_0}^m dm = mc^2 - m_0 c^2, \quad (1.99)$$

onde os limites de integração foram trocados por causa da mudança de variáveis. Para a partícula em repouso ( $u=0$ ), sua massa é a massa de repouso  $m_0$ , e para a partícula com velocidade  $u$ , sua massa é a massa relativística  $m$ .

A expressão da energia cinética tem, portanto, um termo que depende da velocidade  $u$  da partícula e outro, constante, que independe desta grandeza. O termo constante

$$E_0 = m_0 c^2, \quad (1.100)$$

é denominado de energia de repouso, ou energia própria da partícula. O primeiro termo do lado direito, na eq. (1.99), define a energia total relativística  $E$  para uma partícula livre tal que

$$E = K + m_0 c^2 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (1.101)$$

onde usou-se a definição da massa relativística  $m$ , dada na eq. (1.93). Comparando a eq. (1.100) com a eq. (1.101), obtém-se

$$E = E_0 + K = \frac{E_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.102)$$

Deve-se observar da eq. (1.102) que  $K \rightarrow \infty$  quando  $u \rightarrow c$ . Isso significa que, como  $K = \int_{u=0}^u F dx$ , é necessário um trabalho infinito sobre a partícula para acelerá-la até a velocidade da luz. Novamente, observa-se que  $c$  desempenha o papel de um limite de velocidades para partículas e raios eletromagnéticos.

Para mostrar que a energia relativística se reduz ao caso clássico à baixas velocidades, é suficiente escrever a eq. (1.101) como

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right].$$

Usando a aproximação  $(1+x)^n \approx 1 + nx$  para  $x \ll 1$ , obtém-se

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2},$$

para o caso  $u/c \ll 1$ . Logo, nesse caso,

$$K \approx m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} m_0 u^2,$$

que é o resultado clássico esperado.

Uma expressão útil, que relaciona energia relativística e momento relativístico, pode ser obtida subtraindo os quadrados das energias total  $E$  e de repouso  $E_0$ , isto é,

$$E^2 - E_0^2 = (mc^2)^2 - (m_0c^2)^2 = \left( \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)^2 - (m_0c^2)^2$$

$$= (m_0c^2)^2 \left( \frac{1}{1-u^2/c^2} - 1 \right) = m_0^2c^4 \left( \frac{u^2/c^2}{1-u^2/c^2} \right) = c^4 \frac{u^2}{c^2} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)^2$$

ou, como  $m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$  e  $p = mu$ , obtêm-se

$$E^2 - E_0^2 = c^2 m^2 u^2 = c^2 p^2$$

ou ainda

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \quad (1.103)$$

A eq. (1.103) é bastante útil na solução de problemas de relatividade que envolvem energia e momento de uma partícula. O triângulo retângulo da Fig. 1.35, é um artifício mnemônico útil para lembrar as eqs. (1.103) e (1.102).

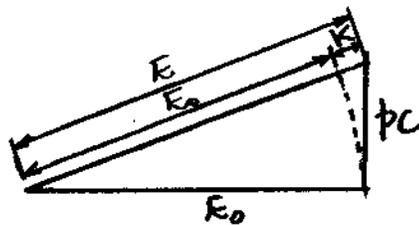


Fig. 1.35- Artifício mnemônico para lembrar a eq. (1.103).

A maioria das aplicações da relatividade ocorre com partículas subatômicas. Nesses casos, é conveniente usar o elétron-volt (eV) como uma unidade de energia relativística. O elétron-volt é a energia adquirida por um elétron de carga  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , quando submetido a um potencial de 1V, isto é,

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} . \quad (1.104)$$

### Exemplo 1.10

A energia de repouso de um próton é de 938 MeV. Se a sua energia cinética também é 938 MeV, calcular (a) o momento e (b) a velocidade do próton.

(a) Como  $E_0 = K = 938 \text{ MeV}$ , então, a energia total  $E$  será  $E = K + E_0 = E_0 + E_0 = 2E_0$ . Assim,

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \Rightarrow (pc)^2 = 3E_0^2 \Rightarrow pc = \sqrt{3} \times 938 \approx 1625 \text{ MeV}$$

ou

$$p \approx 1625 \text{ MeV}/c .$$

(b) Como  $E = E_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2} = 2E_0$ , então

$$\frac{1}{1 - u^2/c^2} = 4 \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} c \Rightarrow u = 0,866c .$$

### 1.9.3 - Transformações das Grandezas Dinâmicas.

Nesta seção, apresenta-se as relações que transformam as grandezas dinâmicas, momento, energia, massa e força, de um referencial inercial  $S$ , para um referencial inercial  $S'$ , que se move com velocidade constante  $v$  em relação a  $S$ , ao longo do eixo comum  $x, x'$ .

Inicialmente, é necessário descobrir como o módulo da velocidade  $u'$  de uma partícula, num referencial  $S'$ , se transforma na velocidade  $u$  no referencial  $S$ . Para isso, é suficiente usar as transformações relativísticas das componentes  $x$  e  $y$  da velocidade da partícula, isto é,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} ; u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v / c^2} . \quad (1.105)$$

Dessas equações, pode-se obter o quadrado do módulo da velocidade da partícula em  $S'$  como

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 = \left[ \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \right]^2 + \left[ \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v / c^2} \right]^2 . \quad (1.106)$$

Os cálculos apresentados no exemplo 1.11 mostram que uma manipulação da eq. (1.106), fornece

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \gamma \frac{(1 - u_x v / c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} . \quad (1.107)$$

onde  $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2$  é o quadrado do módulo da velocidade da partícula em  $S'$ .

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  é o fator de Lorentz.

### Exemplo 1.11 - FACULTATIVO

Mostrar que a eq. (1.106) resulta na eq. (1.107).

Rearranjando a eq. (1.106), obtêm-se

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + u_y^2 \left( \frac{c^2 - v^2}{c^2} \right)}{\left( \frac{c^2 + u_x v}{c^2} \right)^2} = \frac{c^4 u_x^2 + c^4 v^2 - 2u_x v c^4 + c^2 u_y^2 (c^2 - v^2)}{(c^2 + u_x v)^2}$$

ou

$$u'^2 = \frac{c^4 u_x^2 + c^4 v^2 - 2u_x v c^4 + c^4 u_y^2 - c^2 u_y^2 v^2}{(c^2 - u_x v)^2}$$

Esta equação torna-se mais compacta quando é subtraída do quadrado da velocidade da luz, isto é,

$$\begin{aligned} c^2 - u'^2 &= c^2 \left[ 1 - \frac{c^2 u_x^2 + c^2 v^2 - 2u_x v c^2 + c^2 u_y^2 - u_y^2 v^2}{(c^2 - u_x v)^2} \right] \\ &= c^2 \left[ \frac{(c^2 - u_x v)^2 - (c^2 u_x^2 + c^2 v^2 - 2u_x v c^2 + c^2 u_y^2 - u_y^2 v^2)}{(c^2 - u_x v)^2} \right] \\ &= c^2 \left[ \frac{c^4 + u_x^2 v^2 - 2c^2 u_x v - c^2 u_x^2 - c^2 v^2 + 2u_x v c^2 - c^2 u_y^2 + u_y^2 c^2}{(c^2 - u_x v)^2} \right] \\ &= c^2 \left[ \frac{c^2 (c^2 - u_x^2 - u_y^2) - v^2 (c^2 - u_x^2 - u_y^2)}{(c^2 - u_x v)^2} \right] = c^2 \left[ \frac{c^2 (c^2 - u^2) - v^2 (c^2 - u^2)}{(c^2 - u_x v)^2} \right] \end{aligned}$$

ou

$$c^2 - u'^2 = c^2 \frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - uv)^2},$$

onde  $u'^2 = u_x^2 + u_y^2$ . Dessa equação, pode-se calcular o fator  $1/\sqrt{1 - u'^2/c^2}$  como

$$\frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - uv)^2} = \frac{c^2 - u'^2}{c^2} = 1 - \frac{u'^2}{c^2}.$$

Invertendo e extraindo a raiz quadrada dessa equação, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} &= \frac{c^2 - uv}{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}} = \frac{c^2(1 - uv/c^2)}{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}} \\ &= \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{\frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{c^4}}} = \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{\frac{(c^2 - u^2)}{c^2} \frac{(c^2 - v^2)}{c^2}}} = \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

o que resulta na eq. (1.107) quando se usa o fator de Lorentz  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

As transformações das componentes  $x$  do momento linear e da energia da partícula entre diferentes referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ , são:

$$\begin{aligned} p_x' &= m_0 u_x' / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad p_x = m_0 u_x / \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ e \\ E' &= m_0 c^2 / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Substituindo a primeira eq. (1.105) e a eq. (1.107) na primeira eq. (1.108), obtêm-se

$$p_x' = m_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right] u_x' = m_0 \left[ \gamma \frac{(1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \frac{(u_x - v)}{(1 - uv/c^2)}$$

$$= \gamma \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{m_0 v}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \gamma \left( p_x - \frac{m_0 c^2 v/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$

ou

$$p_x' = \gamma (p_x - E v/c^2). \quad (1.109)$$

Similarmente, mostra-se que  $p_y' = p_y$  e  $p_z' = p_z$ .

Por outro lado, substituindo a eq. (1.107) na terceira eq. (1.108), obtém-se

$$\begin{aligned} E' &= m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right] = m_0 c^2 \left[ \gamma \frac{(1-u_x v/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right] \\ &= \gamma \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} v \right) \end{aligned}$$

ou

$$E' = \gamma (E - v p_x). \quad (1.110)$$

As relações inversas, obtidas trocando  $v$  por  $-v$  e permutando as quantidades em  $S$  e  $S'$ , são

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma (p_x' + E' v/c^2), \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z' \\ e \\ E &= \gamma (E' + v p_x'). \end{aligned} \quad (1.111)$$

Se os resultados obtidos acima são comparados com as transformações de Lorentz, encontra-se uma surpreendente analogia. As quantidades  $p_x', p_y', p_z'$  e  $E'/c^2$  transformam-se exatamente como as coordenadas do espaço-tempo  $x', y', z'$  e  $t'$  de uma partícula. Por exemplo, dividindo ambos os lados da eq. (1.110) por  $c^2$ , as componentes  $(x', t')$  e  $(p_x', E'/c^2)$  transformam-se como

$$x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad t' = \gamma(t - xv/c^2) \quad (1.112)$$

$$p_x' = \gamma(p_x - vE/c^2) \quad ; \quad E'/c^2 = \gamma(E/c^2 - p_x v/c^2).$$

Essa analogia é um excelente artifício "mnemônico" para lembrar essas transformações.

A interdependência entre o momento e a energia, como se viu acima, é uma consequência natural das leis de conservação. Se a energia e o momento são conservados numa interação, do ponto de vista de um observador num referencial inercial, então para qualquer outro observador inercial eles também são conservados.

A transformação para a massa segue diretamente da transformação da energia.

Como  $E' = m'c^2$ ,  $E = mc^2$  e  $p_x = m\mu_x$ , a eq. (1.110),  $E' = \gamma(E - v p_x)$ , fornece

$$m'c^2 = \gamma(m c^2 - v m \mu_x)$$

ou

$$m' = \gamma m (1 - \mu_x v/c^2), \quad (1.113)$$

cuja relação inversa é

$$m = \gamma m' (1 + \mu_x v/c^2). \quad (1.114)$$

Finalmente, para obter a transformação para a força, deve-se partir de suas componentes em  $S$  e  $S'$ , isto é,

$$F_x' = \frac{dp_x'}{dt'}, \quad F_y' = \frac{dp_y'}{dt'}, \quad F_z' = \frac{dp_z'}{dt'}.$$

A dedução completa para a transformação da força é, algebricamente, um tanto quanto complicado e vai além dos objetivos deste curso. Entretanto, em princípio deve ser imediato quando se usa as equações de transformação estabelecidas anteriormente. Ao proceder os cálculos é possível mostrar que as componentes da força seguem as transformações:

$$F_x' = \frac{F_x - (v/c^2) \vec{u} \cdot \vec{F}}{(1 - u_x v/c^2)}, \quad (1.115)$$

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \quad F_z' = \frac{F_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

cujas relações inversas são

$$F_x = \frac{F_x' + (v/c^2) \vec{u}' \cdot \vec{F}'}{(1 + u_x' v/c^2)}, \quad (1.116)$$

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma(1 + u_x' v/c^2)}, \quad F_z = \frac{F_z'}{\gamma(1 + u_x' v/c^2)}$$

onde  $\vec{u}' = u_x' \vec{i} + u_y' \vec{j} + u_z' \vec{k}$ ,  $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$  e  $\vec{F}' = F_x' \vec{i} + F_y' \vec{j} + F_z' \vec{k}$ ,  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ . Pode-se verificar que, no limite clássico  $v/c \ll 1$ , essas equações reduzem-se a  $\vec{F}' = \vec{F}$ , como é de se esperar.

Exemplo 1.12 - FACULTATIVO.

Considere um referencial inercial  $S'$  que se move com uma velocidade  $\vec{v} = +0,6c \vec{i}$  em relação a um referencial inercial  $S$ . No referencial  $S'$  existem duas partículas idênticas e independentes, de massas de repouso  $m_{o1}' = m_{o2}' = 4 \text{ kg}$  que se aproximam uma da outra, ao longo do eixo  $x'$  do referencial  $S'$ , com velocidades  $u_{x1}' = +0,6c$  e  $u_{x2}' = -0,6c$ , respectivamente, como mostra a Fig. 1.36.

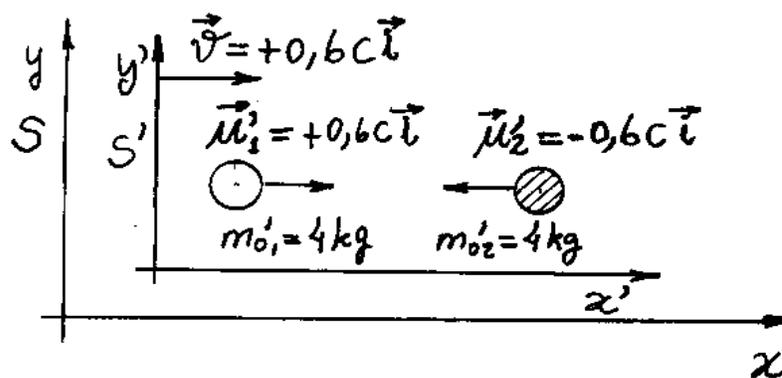


Fig. 1.36 - Partículas em movimento no referencial inercial  $S'$ .

- Calcular o momento total  $\vec{p}'$ , a energia total  $E'$  e a massa de repouso  $m_o'$  do sistema que compõe as duas partículas no referencial  $S'$ .
- Calcular a massa de repouso  $m_o$ , do ponto de vista do referencial  $S$ , e mostrar a invariância da massa de repouso na troca de referenciais inerciais.

(a) No referencial  $S'$  tem-se

$$p_{x1}' = p_{x2}' = m_0' u_{x1}' = \frac{m_0' u_{x1}'}{\sqrt{1 - u_{x1}'^2/c^2}} = \frac{4 \times 0,6c}{\sqrt{1 - 0,36}} = 3c,$$

pois  $u_{x1}' = u_{x1}'$ .

$$E_1' = E_2' = \sqrt{(p_{x1}'c)^2 + (m_0'c^2)^2} = c^2 \sqrt{(p_{x1}'/c)^2 + m_0'^2} = c^2 \sqrt{3^2 + 4^2} = 5c^2 \text{ kg}$$

$$E' = E_1' + E_2' = 10c^2 \text{ kg} \quad ; \quad p_x' = p_{x1}' + p_{x2}' = 3c - 3c = 0$$

$$m_0' = \sqrt{(E'/c^2)^2 - (p_x'/c)^2} = \sqrt{10^2 - 0^2} = 10 \text{ kg}.$$

Assim, a massa do sistema é maior do que a soma das massas das duas partículas. A diferença 2kg não pode ser considerada como energia de ligação, pois as partículas são independentes. Essa diferença também não está distribuída igualmente entre as partículas, mas constitui uma propriedade do sistema como um todo.

(b) No referencial  $S$  tem-se

$$E = \gamma(E' + v p_x') = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} (10c^2 \text{ kg} + 0,6c \times 0) = 1,25 \times 10c^2 \text{ kg} = 12,5c^2 \text{ kg}.$$

$$p_x = \gamma(p_x' + v E'/c^2) = 1,25 [0 + (0,6c)(10c^2 \text{ kg})/c^2] = +7,5c \text{ kg}.$$

$$m_0 = \sqrt{(E/c^2)^2 - (p/c)^2} = \sqrt{(12,5c^2/c^2)^2 - (7,5c \text{ kg})^2} = 10 \text{ kg} \equiv m_0'$$

O que mostra a invariância da massa de repouso do sistema de duas partículas.

### 1.9.4. Invariância da Energia de Repouso.

Viu-se que a teoria da relatividade especial prevê que os valores das coordenadas espacial e temporal de um evento físico dependendo do referencial inercial no qual são determinadas. Dessa forma, o tempo  $t$  passa a ser uma quarta coordenada com a mesma importância das coordenadas espaciais  $x, y, z$ , num "mundo" relativístico quadridimensional que se denomina espaço-tempo. O espaço tridimensional define uma geometria Euclidiana enquanto que o espaço-tempo quadridimensional define uma geometria Lorentziana. Essa diferença se torna mais evidente quando se compara a distância  $\Delta r$  entre dois pontos no espaço, com o intervalo  $\Delta s$  entre dois eventos no espaço-tempo. A primeira é um vetor cujo módulo

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (1.117)$$

é invariante a uma transformação de Galileu, pois  $\Delta x' = x'_B - x'_A = (x_B - vt) - (x_A - vt) = x_B - x_A = \Delta x$ ,  $\Delta y' = \Delta y$  e  $\Delta z' = \Delta z$ . Por outro lado, o módulo do segundo

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2 \quad (1.118)$$

é invariante a uma transformação de Lorentz. O intervalo  $\Delta s$  é o análogo quadridimensional do vetor  $\Delta \vec{r}$  e, por causa disso, é denominado de quadrivetor espaço-tempo.

A energia e o momento são Componentes de outro quadrvetor na relatividade, denominado quadrvetor energia-momento.

Sabe-se agora, que é possível definir a energia e o momento, tal que satisfaçam as transformações relativísticas e, ao mesmo tempo, as leis de conservação. Da eq. (1.103), tem-se  $E_0^2 = E^2 - (pc)^2$  ou, dividindo ambos os lados por  $c^2$ ,  
$$(E_0/c)^2 = (E/c)^2 - p^2. \quad (1.119)$$

Comparando a eq. (1.119) com a eq. (1.118), nota-se que, assim como o quadrvetor espaço-tempo  $\Delta S$  é invariante para diferentes referenciais inerciais, o quadrvetor energia-momento  $E_0/c$ , também possui essa propriedade. As grandezas  $(E/c)^2$  e  $p^2$  são as análogas dinâmicas das grandezas cinemáticas  $(c\Delta t)^2$  e  $\Delta r^2$ , respectivamente.

#### 1.9.5 - Partículas sem Massa.

Assim como o quadrado do intervalo no espaço-tempo  $(\Delta S)^2$ , na eq. (1.118), o quadrado da energia de repouso  $(E_0/c)^2 = (m_0 c)^2$ , na eq. (1.119), formalmente pode assumir valores positivos, negativos ou nulos. Até aqui, assumiu-se somente valores positivos para essa grandeza. O caso em que a expressão assume um valor negativo, aparece em física de partículas no estudo de partículas e anti-

partículas e será considerado num momento oportuno. Aqui, propõe-se investigar a terceira possibilidade, isto é, o caso  $(E_0/c)^2 = (m_0 c)^2 = 0$  ou  $m_0 = 0$ . Deve-se observar que isso não faz sentido do ponto de vista clássico, uma vez que, a energia cinética  $E = \frac{1}{2} m_0 u^2$  e o momento  $p = m_0 u$  anulam-se para  $m_0 = 0$ . Assim, classicamente um objeto de massa nula não se distingue do vazio absoluto, pois não possui nem energia nem momento. Do ponto de vista relativístico, entretanto, ao se tomar  $m_0 = 0$  na eq. (1.119), obtém-se

$$E = pc. \quad (1.120)$$

Por outro lado, das definições de Energia e momento relativísticos,  $E = mc^2$  e  $p = mu$ , a eq. (1.120), fornece

$$mc^2 = mu c$$

ou

$$u = c, \quad (1.121)$$

isto é, toda partícula de massa nula deve estar se movendo com a velocidade da luz. Reciprocamente, toda partícula que se move com a velocidade da luz deve ter necessariamente massa nula e energia  $E = pc$ .

A existência de partículas com  $m_0 = 0$  é amplamente comprovada por observações experimentais. As teorias atuais sugerem a existência de pelo menos três dessas partículas. A mais famosa delas é o fóton, partícula associada à radiação eletromagnética.

O modelo dos fótons surgiu para explicar certas circunstâncias da interação da radiação com a matéria, em que o modelo ondulatório de Maxwell não era capaz de explicar. De acordo com esse modelo, a energia e o momento linear da onda eletromagnética se comporta como pequenas pacotes concentrados de radiação. Como se sabe, o intervalo espaço-tempo  $\Delta s$  para a luz também é nulo. Na verdade, o 2º postulado de Einstein impede a existência de uma transformação de Lorentz para o referencial de repouso da luz, já que esta se move com velocidade  $c$  em relação a todas as referências inerciais. Assim, o termo massa de repouso não faz sentido para a luz.

Uma segunda partícula de massa nula é o neutrino. Experimentos realizados na década de 1980 estabeleceram um limite superior para a massa do neutrino da ordem de  $6 \text{ eV}/c^2$ , o que não exclui a possibilidade de ser nula e portanto que poderia se mover com a velocidade da luz. O resultado mais recente, realizado em 1998 no Japão, usando um detector denominado Super-Kamiokande, sugere um limite inferior de  $0,07 \text{ eV}/c^2$  que, se confirmado, significaria que os neutrinos se movem com velocidades ligeiramente inferior a da luz.

Uma terceira partícula de massa nula é o gráviton. Essas partículas são responsáveis pela "transmissão" das forças gravitacionais. Desempenha para a gravidade o mesmo papel que os fótons para o eletromagnetismo. Atualmente não existe nenhuma comprovação experimental da existência dos grávitons.

## 1.10 - Velocidades Superlumínicas e os Táquions.

Encerra-se este capítulo discutindo a possibilidade da existência de velocidades maiores do que a velocidade da luz  $c$ . As transformações de Lorentz não se aplicam quando a velocidade relativa de dois referenciais inerciais é maior do que a velocidade da luz, já que o fator  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  se tornaria imaginário. Interpreta-se este fato como uma indicação de que nenhum tipo de massa, energia ou informação pode viajar mais depressa do que a luz. Entretanto, é possível que certos processos ocorram com velocidades superlumínicas sem violar a teoria da relatividade. Um exemplo disso é o movimento do ponto em que as lâminas de uma tesoura gigante se interceptam quando a tesoura é fechada rapidamente. O fenômeno é conhecido como paradoxo da tesoura e é mostrado na Fig. 1.37.

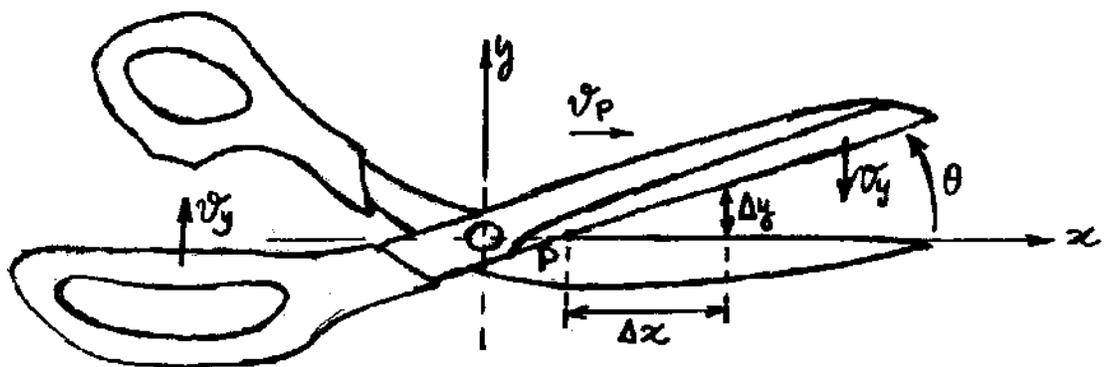


Fig. 1.37 - Paradoxo da tesoura.

Uma das lâminas faz um ângulo  $\theta$  com a outra lâmina, que é mantida ao longo do eixo  $x$ , e se move no sentido negativo do eixo  $y$  com velocidade  $v_y = \Delta y / \Delta t$ .

Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , o ponto  $P$  de interseção das lâminas, desloca-se de uma distância  $\Delta x$  para a direita com velocidade

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta y / v_y} = \frac{v_y}{\operatorname{tg} \theta} \quad (1.122)$$

pois, de acordo com a Fig. 1.37,  $\Delta y / \Delta x = \operatorname{tg} \theta$ . Como  $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$  quando  $\theta \rightarrow 0$ , é sempre possível encontrar um valor de  $\theta$  suficientemente próximo de zero para que  $v_p > c$ , seja qual for o valor de  $v_y$ .

Naturalmente, o ponto  $P$  do paradoxo da tesoura é um ponto geométrico e não um ponto energético. Portanto, nada impede que o ponto  $P$  possa se mover com uma velocidade maior do que a velocidade da luz.

Alguns cientistas levantaram a hipótese de existirem partículas cujas velocidades são sempre maiores do que a velocidade da luz. Uma das razões para esta hipótese é por uma questão de simetria: Como  $v < c$  para as partículas comuns e  $v = c$  para os fótons e outras partículas sem massa de repouso, a presença de partículas com  $v > c$  tornaria simétrica a classificação das partículas elementares.



Na figura é mostrado o diagrama espaço-tempo do referencial  $S$ , fixo no laboratório, onde a linha do universo de um táquion, com velocidade  $v > c$ , criado na origem e viajando no sentido positivo do eixo  $x$ , faz um ângulo menor que  $45^\circ$  com o eixo  $x$ , isto é, está abaixo da linha do universo de um pulso luminoso.

Algum tempo depois, o táquion atinge um detector instalado num ponto  $P$  a bordo de uma nave que se move com uma velocidade  $v < c$ , também no sentido positivo do eixo  $x$ . O detector cria um novo táquion e o envia no sentido negativo do eixo  $x$  e, obviamente, no sentido do futuro de  $S'$ , isto é, no sentido positivo do eixo  $ct'$ .

O segundo táquion chega ao laboratório no ponto  $M$  em  $x=0$ , isto é, num instante anterior àquele no qual o primeiro táquion foi emitido do ponto  $O$ .

Ao enviar um táquion no passado do laboratório, poderia-se modificar os eventos ocorridos no intervalo de tempo entre  $M$  e  $O$ , o que levaria a contradições causais.

Por exemplo, um outro detector de táquions no laboratório poderia ser ligado ao equipamento usado para criar o primeiro táquion por meio

de um computador programado para cancelar a emissão do primeiro táquion caso o segundo táquion fosse detectado. Isso faz lembrar o famoso filme "O exterminador do futuro".

Foram contradições lógicas como essa, combinada com ausência de indícios experimentais, que induziram os cientistas à conclusão de que não deve existir partículas que se movem mais rapidamente do que a luz.

## Lista de Exercícios

### Questões conceituais

1- O que diz a relatividade de Newton e em que situação ela não é verificada? Quais são os pontos mais importantes postulados por Einstein para a elaboração da teoria da relatividade especial? Essa teoria desvalida ou inclui a relatividade Newton como um caso especial? Justifique!

2- O final do século XIX é a época em que a visão mecânica dominava e, por causa disso, não se aceitava que a luz se propagasse no vácuo, como se previa na teoria de Maxwell. Para os cientistas da época deveria existir um meio denominado “éter”, em repouso absoluto, por onde a luz se propagasse com velocidade  $c$ . Dessa forma, as transformações clássicas de Galileu e o eletromagnetismo de Maxwell seriam ambos preservados. Entretanto, o resultado nulo da experiência de Michelson – Morley estaria descaracterizando a idéia do “éter”. Isso era tão incrível que alguns cientistas da época, na tentativa de preservar o éter, propuseram as seguintes hipóteses: Contração de Lorentz – Fitzgerald e Arrastamento do Éter. Com poucas palavras, explique qualitativamente estas hipóteses e descreva as experiências que as descaracterizaram.

3- O relógio atômico é um dos relógios de precisão mais utilizado em testes experimentais de relatividade. Faça um desenho esquemático de um relógio atômico de Césio convencional e explique em poucas palavras o seu funcionamento.

4- Esboce diagramas espaço - tempo de referenciais  $S$  e  $S'$  para o caso  $\beta = v/c = 1/2$  e faça uma ilustração da contração do comprimento de uma barra de comprimento próprio  $L_p = 2\text{ m}$  colocada entre os pontos  $x' = 1\text{ m}$  e  $x' = 3\text{ m}$  do referencial próprio  $S'$ . Calcule o comprimento  $L$  da barra no referencial  $S$ .

5- O intervalo no espaço - tempo, no caso espacial unidimensional, é definido, como  $\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  onde  $c\Delta t$  é a distância no tempo entre dois eventos  $A$  e  $B$ , e  $\Delta x$  é a distância no espaço entre esses mesmos eventos. Defina os intervalos do tipo temporal, espacial e luminoso. Explique porque que o tempo próprio é  $T_p = \Delta S/c$  somente para o caso de intervalo do tipo temporal e que o comprimento próprio é  $L_p = \Delta S$  somente para o caso de intervalo do tipo espacial.

6- O que é o paradoxo dos gêmeos e como esse paradoxo pode ser justificado? Esboce diagramas espaço-tempo para fazer essa justificativa. Sem recorrer a relatividade geral, o que os irmãos gêmeos podem fazer para verificar qual deles tem razão no cálculo da idade do outro?

### Problemas

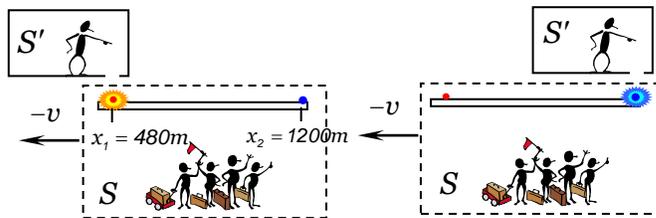
1- A vida média própria dos píons é  $T_p = 2,6 \times 10^{-8}\text{ s}$ . Se um feixe de píons tiver a velocidade de  $v = 0,85c$ , (a) qual seria o respectivo tempo de vida média  $T$  medido no laboratório? (b) Qual a distância  $L$  que os píons percorreriam, em média, antes de decaírem? (c) Qual seria a sua resposta à indagação da parte (b) se você não levasse em conta a dilatação dos tempos? Resp.: (a)  $T = 4,94 \times 10^{-8}\text{ s}$ , (b)  $L = 12,6\text{ m}$ , (c)  $L = 6,63\text{ m}$ .

2- Uma nave espacial parte da terra em direção à alfa do Centauro, que está a  $4\text{ anos} - \text{luz}$  de distância. A nave espacial desloca-se com a velocidade  $v = 0,75c$ . Quanto tempo leva a nave para chegar ao seu destino (a) no referencial da Terra? (b) no referencial de um passageiro da nave? Resp. (a)  $\Delta t = 5,33\text{ anos}$ , (b)  $\Delta t' = 3,53\text{ anos}$

3- Qual deve ser a velocidade  $v$  de um múon para que a sua vida média seja  $T = 46\mu\text{ s}$ , sabendo-se que a vida média em repouso é  $T' = 2\mu\text{ s}$ ? Resp.  $v = 0,9991c$

4- Qual deve ser a velocidade de uma vara de um metro, no referencial de um observador, para que o seu comprimento, medido pelo observador, seja  $50\text{cm}$ , quando a vara se move na direção do próprio eixo? Resp.:  $2,6 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

5- Observadores num referencial  $S$  vêem uma explosão localizada em  $x_1 = 480\text{m}$ . Uma segunda explosão ocorre  $\Delta t = 5\mu\text{s}$  depois, em  $x_2 = 1200\text{m}$ . Num referencial  $S'$ , que se move sobre o eixo dos  $+x$ , com velocidade  $v$  para a direita, um observador nota que as explosões ocorrem num mesmo ponto do espaço. Evidentemente, para ele é o referencial  $S$  que se move para a esquerda com uma velocidade  $-v$  como mostra a Figura ao lado. Qual a separação no tempo  $\Delta t'$  entre as duas explosões no referencial  $S'$ ? Resp.:  $\Delta t' = 4,39\mu\text{s}$ .



6- Os aviões supersônicos a jato têm velocidades máximas  $v = 3 \times 10^{-6} c$ . (a) Qual a contração percentual  $\eta = 100 \frac{(L_p - L)}{L_p}$  do comprimento de um jato que estiver com esta velocidade, visto num referencial ligado a Terra? (b) Durante um intervalo de tempo de  $1\text{ano} = 3,15 \times 10^7 \text{ s}$ , marcado num relógio na terra, quantos minutos perdem o relógio do piloto em cada ano do relógio da terra? (Sugestão: Como  $v \ll c$ , no item (b) adote a aproximação  $\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ ). Resp.: (a)  $\eta = 4,5 \times 10^{-10} \%$ , (b)  $\Delta T = 2,37 \times 10^{-6} \text{ min}$

7- Um relógio está num satélite em órbita terrestre, com um período de  $T = 90 \text{ min}$ . Considerando o raio da Terra  $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$  e a velocidade do satélite  $v = \frac{2\pi}{T} R_T$ , qual é o intervalo de período  $\Delta T$  que mede a diferença entre a leitura deste relógio e a de um outro, idêntico a ele, que ficou na Terra, depois de um intervalo de tempo  $\Delta t = 1\text{ano} = 3,16 \times 10^7 \text{ s}$ ? (Sugestão: Observe que nesse caso  $v \ll c$  e, portanto,

$$\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \text{ ). Resp.: (a) } \eta = 4,5 \times 10^{-10} \%, \text{ (b) } \Delta T = 2,37 \times 10^{-6} \text{ min}$$

8- Duas naves espaciais idênticas de comprimento de repouso de  $100\text{m}$ , aproximam-se uma da outra, com velocidade de  $0,8c$  em relação a Terra. (a) Qual o comprimento de cada nave no referencial da terra? (b) Qual a velocidade de uma nave no referencial de um observador na outra nave? (c) Qual o comprimento de uma das naves no referencial de um observador na outra nave? (d) Na terra, em  $t = 0$ , as proas das naves estão no mesmo ponto, pois neste instante uma começa a passar pela outra. Em que instante, na terra, as popas coincidem? (e) Fazer um desenho em escala, no referencial de uma das naves, da passagem da outra nave, desde a proa até a popa, para visualizar a contração dos comprimentos.

$$\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \text{ ). Resp.: } \Delta T \approx 9,64\text{ms}.$$

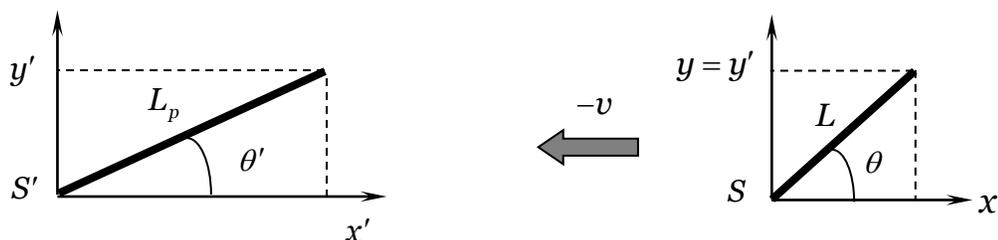
9- Uma nave espacial desloca-se da terra para um sistema estelar à distância de  $L = 12c.\text{anos}$  (medida no referencial da Terra). A viagem leva um tempo  $\Delta t' = 15\text{anos}$ , no referencial da nave. (a) Qual a velocidade  $v$  da nave em relação a terra? (b) Quando a nave chega ao seu destino, envia um sinal para a terra. Quantos anos se passam até que a terra receba este sinal? (Sugestão: Considere a duração  $\Delta t$  da viagem da nave no referencial da Terra no cálculo do tempo total para o sinal chegar a terra). Resp.: (a)  $v = 0,625c$ , (b)  $T = \Delta t + 12\text{anos} = 31,2\text{anos}$ .

10- Duas naves espaciais estão se aproximando uma da outra. (a) Se a velocidade de cada uma delas for  $0,6c$ , em relação a Terra, qual é a velocidade de uma em relação à outra? (b) Se a velocidade de cada uma delas em

relação a Terra for  $30000\text{m/s}$  (cerca de 100 vezes a velocidade do som), qual a velocidade de uma em relação à outra? Resp.: (a)  $u_x = -0,882c$ , (b)  $u_x \approx -60000 + 6 \times 10^{-4}\text{m/s}$ .

11- Mostrar que se uma partícula se move sob um ângulo  $\theta$  com o eixo dos  $x$ , com a velocidade  $u$  num referencial  $S$ , então ela deve se mover com um ângulo  $\theta'$  com o eixo dos  $x'$  em  $S'$  dado, por  $\text{tg}\theta' = \frac{\text{sen}\theta}{\gamma(\text{cos}\theta - v/u)}$ , onde  $S'$  é um referencial com velocidade  $v$  em  $S$ .

12- Uma vara de comprimento próprio  $L_p$  faz o ângulo  $\theta'$  com o eixo dos  $x'$  num referencial  $S'$ . O referencial  $S'$  move para a direita com velocidade  $v$ , em relação a um referencial  $S$ . A Figura abaixo mostra o ponto de vista do referencial  $S'$ , onde é o referencial  $S$  move para a esquerda com velocidade  $-v$ .



Mostrar que o ângulo  $\theta$  que a vara faz com o eixo  $x$  no referencial  $S$  é  $\text{tg}\theta = \gamma \text{tg}\theta'$  e que o comprimento da vara em  $S$  é  $L = L_p \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \text{cos}^2 \theta' + \text{sen}^2 \theta'}$ . (Sugestão: Note que  $L \neq \frac{L_p}{\gamma}$  mas  $x = \frac{x'}{\gamma}$ , pois aqui somente a componente  $x$  do comprimento da vara está na direção do movimento).

13- A equação da frente de onda esférica de um pulso de luz que principia na origem, no instante  $t=0$  é  $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$ . Usando a transformação de Lorentz, mostrar que  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$ , ou seja, que o pulso de luz é uma frente de onda esférica também no referencial  $S'$ .

14- Dois eventos em  $S$  estão separados pela distância  $D = x_2 - x_1$  e pelo intervalo de tempo  $T = t_2 - t_1$ . (a) Usar a transformação de Lorentz para mostrar que no referencial  $S'$ , que se move com a velocidade  $v$  em  $S$ , a separação no tempo é  $T' = \gamma \left( T - \frac{vD}{c^2} \right)$ , onde  $T' = t'_2 - t'_1$  é o intervalo de tempo medido em  $S'$ . (b) Mostrar

que os eventos podem ser simultâneos e independentes no referencial  $S'$  somente se  $D > cT$ . (c) Se um dos eventos for a causa do outro (eventos dependentes), deve-se ter  $D < cT$  pois  $D/c$  é o menor tempo que um sinal leva para percorrer a distância entre  $x_1$  e  $x_2$  no referencial  $S$ . Mostrar que se  $D < cT$ , então  $t'_2 > t'_1$  em todos os referenciais. Isto mostra que se uma causa precede o seu efeito, num certo referencial, a mesma causa precederá o seu efeito em todos os outros referenciais. (Sugestão: Isole o termo  $cT$  na equação

$T' = \gamma \left( T - \frac{vD}{c^2} \right)$ , imponha a condição que  $D < cT$  e mostre que  $T' = t'_2 - t'_1 > 0$ , isto é, que  $t'_1 < t'_2$  em  $S'$ ). (d)

Suponha que um sinal pudesse ser enviado com velocidade  $c' > c$ , de modo que no referencial  $S$  a causa precedesse o efeito pelo tempo  $T = D/c'$ . Mostrar que há então um referencial que se move com a velocidade  $v < c$  no qual o efeito precede a causa. (Sugestão: Substitua  $T = D/c'$  na equação  $T' = \gamma \left( T - \frac{vD}{c^2} \right)$ , isole o

termo  $c'$ , imponha a condição  $c' > c$  e mostre que  $T' = t'_2 - t'_1 < 0$ , isto é, que  $t'_2 < t'_1$  em  $S'$ ).

15- Seja um referencial inercial  $S'$  movendo-se com velocidade  $v$  em relação a um referencial inercial  $S$ , ao longo da direção do eixo  $x$ . Mostre que as fórmulas da transformação relativística para as componentes  $y$  e  $z$  da aceleração de uma partícula, do ponto de vistas dos referenciais  $S$  e  $S'$ , são dadas por:

$$a'_y = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left[ a_y + \frac{u_y v}{c^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} a_x \right] \quad ; \quad a'_z = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left[ a_z + \frac{u_y v}{c^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} a_x \right]$$

(Sugestão: Mostre primeiramente que  $a'_y = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left[ \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \frac{du_y}{dt'} + \frac{u_y v}{c^2} \frac{du_x}{dt'} \right]$ . Em seguida, mostre que

$$\frac{du_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt} \frac{dt}{dt'} = a_x \gamma \left( \frac{1 - v^2/c^2}{1 - u_x v/c^2} \right) \text{ e } \frac{du_y}{dt'} = \frac{du_y}{dt} \frac{dt}{dt'} = a_y \gamma \left( \frac{1 - v^2/c^2}{1 - u_x v/c^2} \right).$$

Complete a demonstração combinando essas equações. Finalmente, note que a demonstração para  $a'_z$  é totalmente similar à demonstração para  $a'_y$ ).

16- Um amigo da sua idade viaja para Alfa do Centauro, a  $4\text{anos-luz} = 4c.\text{anos}$  de distância, e volta imediatamente. Ele afirma que a viagem durou apenas  $6\text{anos}$ . (a) Com que velocidade seu amigo viajou? (b) Qual a diferença de idade entre vocês dois quando voltaram a se encontrar? (c) Desenhe um diagrama espaço - tempo para confirmar as respostas dos itens (a) e (b).

17- No referencial  $S$ , o evento  $B$  ocorre  $2\mu\text{s}$  depois do evento  $A$  e a uma distância  $D = 1,5\text{km}$  deste evento. (a) Qual deve ser a velocidade de um observador num referencial  $S'$  no sentido positivo do eixo  $x$  para que os dois eventos ocorram simultaneamente nesse referencial? (b) É possível que o evento  $B$  preceda o evento  $A$  para algum observador? (c) Desenhe um diagrama espaço - tempo que ilustre as respostas dos itens (a) e (b). (d) Determine o valor do intervalo no espaço - tempo e a distância própria entre os eventos.

18- Os referenciais  $S$  e  $S'$  estão se movendo com os eixos  $x$  e  $x'$  paralelos. Seus relógios são ajustados para  $t = t' = 0$  no momento em que as origens dos dois referenciais coincidem. No referencial  $S$ , o evento  $A$  ocorre em  $x_1 = 1\text{ano-luz} = 1c.\text{ano}$  e  $t_1 = 1\text{ano}$  e o evento  $B$  ocorre em  $x_2 = 2\text{anos-luz} = 2c.\text{anos}$  e  $t_2 = 0,5\text{anos}$ . Estes eventos ocorrem simultaneamente no referencial  $S'$ . (a) Mostre esses eventos num diagrama espaço - tempo (b) Determine o módulo e direção da velocidade de  $S'$  em relação à  $S$ . (c) Em que instantes estes eventos ocorrem no referencial  $S'$ ? (d) O intervalo no espaço - tempo  $\Delta s$  é do tipo espacial, temporal ou luminoso? Qual é o valor de  $\Delta s$ ? Qual é a distância própria  $L_p$  entre os eventos?

19- Uma estudante, na Terra, ouve num rádio uma gravação que parece estar sendo tocada num disco que gira muito depressa. A gravação é de um disco que está sendo tocado por uma emissora de uma nave espacial, que se aproxima da terra com a velocidade  $v$ . Tendo um disco de 33 rpm, da mesma gravação, a estudante observa que o som é o mesmo que o do seu disco tocado a 78 rpm, isto é, a razão entre a frequência de aproximação  $\nu_{ap}$  e a frequência emitida  $\nu$  é dada por  $78/33$ . Qual deve ser a velocidade da nave? Resp.:  $v = 0,696c$ .

20- Uma galáxia distante se afasta da Terra com a velocidade  $v = 1,85 \times 10^7 \text{ m/s}$ . Calcular o deslocamento relativo para o vermelho  $\frac{(\lambda_{af} - \lambda)}{\lambda}$  na luz proveniente da galáxia. Resp.:  $0,0637$ .

21- A luz do sódio, de comprimento de onda  $\lambda = 589\text{nm}$ , está sendo emitida por uma fonte que se afasta da terra com a velocidade  $v$ . Qual deve ser o valor desta velocidade, se o comprimento de onda medido no referencial da terra é  $\lambda_{af} = 620\text{nm}$ . Resp.:  $v = 0,0512c$ .

22- Use a eq. (1.74) para mostrar que a aberração luminosa não é observada na direção longitudinal ( $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ ).

23- Um elétron, com energia de repouso  $E_0 = 0,511\text{MeV}$ , move-se com a velocidade  $u = 0,2c$ . (a) Achar a energia total, (b) a energia cinética e (c) o momento. Resp.: (a)  $E = 0,522\text{MeV}$ , (b)  $K = 0,011\text{MeV}$ , (c)  $p = 0,106\text{MeV}/c$ .

24- Um próton, com a energia de repouso de  $E_0 = 938\text{MeV}$ , tem a energia total  $E = 1400\text{MeV}$ . (a) Qual a sua velocidade? (b) Qual o seu momento? Resp.: (a)  $u = 0,74c$ , (b)  $p = 1034\text{MeV}/c$ .

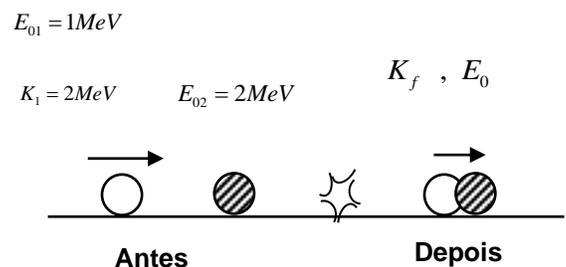
25- Qual a energia cinética  $K$  que seria necessária para acelerar uma partícula de massa de repouso  $m_0$  desde o repouso até a velocidade de (a)  $u = 0,5c$  (b)  $u = 0,9c$  e (c)  $u = 0,99c$ ? Expressar as respostas como múltiplos da energia de repouso  $E_0$ . Resp.: (a)  $K = 0,155E_0$ , (b)  $K = 1,294E_0$ , (c)  $K = 6,089E_0$ .

26- Se a energia cinética  $K$  de uma partícula for igual à sua energia de repouso  $E_0$ , qual o erro que se comete em usar  $p = p_0 = m_0v$  como o seu momento? Resp.: *erro = 50%*.

27- Qual o erro percentual que se comete tomando-se  $\frac{1}{2}m_0v^2$  como a energia cinética de uma partícula quando a sua velocidade for (a)  $v = 0,1c$  e (b)  $v = 0,9c$ . Resp.: (a) *erro = 0,751%*, (b) *erro = 68,7%*.

28- O sol irradia energia à taxa de  $P = 4,0 \times 10^{26}\text{W}$ , aproximadamente. Vamos admitir que esta energia seja originada por uma reação nuclear cujo resultado é a fusão de 4 núcleos de  $H$  para formar um núcleo de  $He$ , com a libertação de  $E_0 = 25\text{MeV} = 4 \times 10^{-12}\text{J}$  de energia por núcleo de  $He$  formado. Calcular o número  $N = \Delta E/E_0 = P\Delta t/E_0$  de reações nucleares e a perda da massa em repouso  $\Delta M_0 = Nm_0$ , ocorridas no sol durante um dia ou  $\Delta t = 8,64 \times 10^4\text{s}$ .

29- Uma partícula, que tem energia de repouso de  $E_{01} = 1\text{MeV}$  e energia cinética  $K_1 = 2\text{MeV}$ , colide com uma partícula estacionária de energia de repouso de  $E_{02} = 2\text{MeV}$ . Depois da colisão, as partículas ficam unidas, como mostra a Figura ao lado. Achar (a) a velocidade da primeira partícula antes da colisão, (b) a energia total da primeira partícula antes da colisão, (c) o momento total inicial do sistema, (d) a energia cinética total depois da colisão e (e) a massa em repouso do sistema depois da colisão. Resp.: (a)  $u_1 = 0,943c$ , (b)  $E_1 = 3\text{MeV}$ , (c)  $p_1 = 2,83\text{MeV}/c$ , (d)  $M_0c^2 = 4,12\text{MeV}$ , (e)  $K_f = 0,88\text{MeV}$ .



30- O raio da órbita de uma partícula carregada, num campo magnético  $B$ , está relacionado com o momento da partícula por  $p = BqR$ . Esta equação vale classicamente com  $p = m_0u$  e relativisticamente com

$p = \frac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ . Um elétron com a energia cinética  $K = 1,50\text{MeV}$ , se desloca sobre uma órbita circular

perpendicular a um campo magnético uniforme  $B = 5 \times 10^{-3}\text{T}$ . (a) Achar o raio da órbita. (b) Qual o resultado que seria obtido se fosse usada a relações clássicas  $p = m_0u$  e  $K = p^2/2m_0$ ? Considere nos cálculos

$e = 1,6 \times 10^{-19} C$ , para a carga do elétron,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} Kg$  para a massa do elétron e  $E_0 = 0,511 MeV$  para a energia de repouso do elétron. Resp.:  $R = 1,3m$ , (b)  $R = 0,826m$ .

31- Numa simples experiência imaginária, Einstein mostrou que existe uma massa associada à radiação eletromagnética. Seja uma caixa de comprimento  $L$  e massa  $M$  sobre uma superfície sem atrito. Na parede esquerda da caixa está uma fonte luminosa que emite radiação de energia  $E$  que é absorvida pela parede direita da caixa. De acordo com a teoria eletromagnética clássica, esta radiação é portadora de um momento cujo módulo é  $p = E/c$ . (a) Achar a velocidade de recuo da caixa de modo que o momento seja conservado quando a luz for emitida. Como  $p$  é pequeno e  $M$  é grande, o cálculo pode ser feito usando a mecânica clássica. (b) Quando a luz for absorvida na parede da direita da caixa, a caixa pára tal que, o momento total permanece nulo. Se a velocidade, muito pequena da caixa, for desprezada, o tempo que a radiação leva para cobrir o comprimento da caixa é  $\Delta t = L/c$ . Achar a distância  $\Delta x$  que a caixa percorre neste intervalo de tempo. (c) Mostrar que, se o

centro de massa  $x_{CM} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}$  do sistema permanece imóvel, como se espera, a radiação deve ter uma

massa  $m \simeq E/c^2$

# CAPÍTULO 2 – PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO

## ÍNDICE

- 2.1- Radiação Térmica
- 2.2- Radiação de Cavidade e o Corpo Negro
- 2.3- Teoria Clássica de Rayleigh - Jeans para a Radiação de Corpo Negro
- 2.4- Teoria Quântica de Planck para a Radiação de Corpo Negro
- 2.5- Efeito Fotoelétrico
- 2.6- Efeito Compton
- 2.7- Natureza Dual da Radiação
- 2.8- Produção de Raios X
- 2.9- Produção e Aniquilação de Pares

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **5 aulas de quatro créditos**.

## CAPÍTULO 2

### PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO

#### 2.1- Radiação Térmica

Um trabalho apresentado por Max Karl Ludwig Planck, em 14 de dezembro de 1900, com o título "Sobre a Teoria da Lei da Distribuição de Energia do Espectro Normal", mostrou falhas importantes na teoria clássica da Termodinâmica. Essa data marcou o início de mais uma revolução na física denominada Teoria quântica.

Assim como a Teoria da relatividade, a Teoria quântica é um caso geral que inclui a Teoria clássica como um caso particular.

Os sólidos aquecidos emitem uma radiação denominada de radiação térmica que, em geral, tem uma distribuição espectral contínua de frequências. As radiações térmicas são ondas eletromagnéticas geradas pelas oscilações das partículas carregadas que compõem os sólidos aquecidos.

Em baixas temperaturas, um sólido pode ser visto, não por emissão, mas por reflexão da luz. Entretanto, em altas temperaturas os sólidos podem emitir luz visível, embora mais de 90% esteja na região do infravermelho do espectro eletromagnético. Carvão em brasa, filamento aquecido de uma lâmpada e estrelas, são exemplos de sólidos aquecidos que irradiam no visível.

A energia irradiada por um sólido aquecido a uma temperatura  $T$ , em função da frequência  $\nu$ , é descrita em termos de uma distribuição espectral de intensidades de radiação  $I(\nu)$ , ou simplesmente, radiância espectral  $R(\nu)$ . Adota-se aqui a primeira nomenclatura do fenômeno. A partir da distribuição espectral de intensidades  $I(\nu)$ , é possível determinar a intensidade de radiação  $dI$  emitida entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , como  $dI = I(\nu)d\nu$ . Em particular, a intensidade de radiação  $I_{12}$ , emitida em um intervalo de frequências entre  $\nu_1$  e  $\nu_2$  e a intensidade de radiação total  $I_T$ , são dados, respectivamente, por

$$I_{12} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I(\nu) d\nu \quad ; \quad I_T = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu \quad (2.1)$$

A distribuição espectral de intensidades de radiação em um sólido aquecido a uma temperatura  $T$ , também pode ser descrita em termos do comprimento de onda  $\lambda$ , tal que

$$I_T = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda \quad (2.2)$$

A integral sobre  $\nu$  pode ser transformada em uma integral sobre  $\lambda$ , como

$$I_T = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu = \int_{\infty}^0 I(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = - \int_0^{\infty} I(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda.$$

Os limites de integração foram invertidos por causa da relação inversa  $\nu = c/\lambda$  entre  $\nu$  e  $\lambda$ . Comparando o último integrando dessa equação com o último integrando da eq. (2.2), obtém-se

$$I(\lambda) = - I(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = I(\nu) \frac{c}{\lambda^2} \quad (2.3)$$

pois, como  $\nu = c/\lambda$  então  $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$ . Em geral, para quaisquer funções  $F(\lambda)$  e  $F(\nu)$ ,

$$F(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} F(\nu) \quad (2.4)$$

Assim, a dependência de uma função  $F(\nu)$  com  $\nu$  não é equivalente a dependência de uma função  $F(\lambda)$  com  $\lambda$ .

## 2.2. Radiação de Cavidade e o Corpo Negro.

Em geral, o espectro de radiação térmica emitido por um sólido aquecido depende da sua composição. Sólidos formados por diferentes materiais exibem diferentes espectros de radiação térmica. Esse fato traz sérias dificuldades na elaboração de uma teoria básica para explicar o fenômeno. Entretanto, a experiência mostra que é possível definir um sólido aquecido ideal que emite um espectro de radiação térmica que independe da natureza do material. Trata-se do radiador de cavidade, ou cavidade ressonante. Tal dispositivo se refere a uma cavidade contida no interior de um sólido qualquer, aquecido a uma temperatura  $T$ , que se comunica com o meio externo através de um pequeno orifício como mostra a Fig. 2.1.

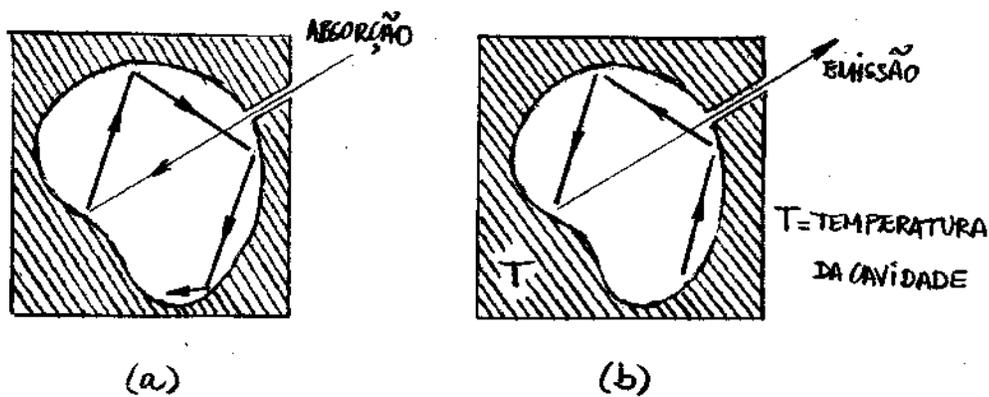


Fig. 2.1 - Caverna construída no interior de um sólido dotado de um pequeno orifício. (a) Absorção de radiação térmica pela caverna e (b) emissão de radiação térmica pela caverna, após aquecimento a uma temperatura  $T$ .

Praticamente, toda a radiação, vinda do meio externo, que entra na caverna através do orifício, não conseguindo sair dela, acaba sendo absorvida pelas suas paredes. Com a agitação térmica, as partículas carregadas que compõem as paredes da caverna, oscilam e produzem radiação térmica, que é emitida através do orifício. Por causa da habilidade de absorver toda a radiação vinda do meio externo, o orifício da caverna tem características de um corpo negro e a radiação térmica emitida por ele é conhecida como radiação de corpo negro.

Em 1879, Josef Stefan, usando argumentos empíricos, demonstrados teoricamente mais tarde por Ludwig Edward Boltzmann, concluiu que a intensidade de radiação total  $I_T$ , emitida por uma caverna aquecida, a uma temperatura  $T$ , deve ser dada por

$$I_T = \sigma T^4 \quad (2.5)$$

onde  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$  é uma constante universal denominada de constante de Stefan-Boltzmann e a eq.(2.5) é conhecida como a lei de Stefan-Boltzmann.

A Fig. 2.2 mostram as distribuições espectrais de intensidades de radiação  $I(\lambda)$  de cavidade, ou corpo negro, para diferentes temperaturas  $T$ , obtidas por Otto Richard Lummer e Ernest Pringheim em 1899.

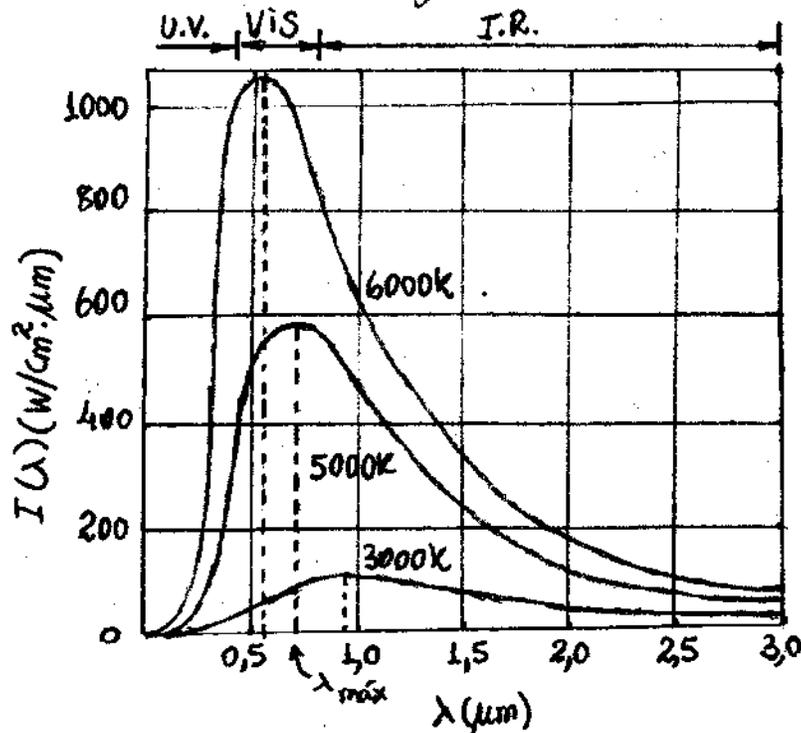


Fig. 2.2 - Distribuições espectrais de intensidades de radiação  $I(\lambda)$  para um corpo em termos de comprimentos de onda  $\lambda$  e temperatura  $T$ .

A Fig. 2.2 mostra que os máximos das distribuições espectrais de intensidades de radiação, correspondentes aos comprimentos de onda  $\lambda_{\text{máx}}$ , ou frequências  $\nu_{\text{máx}} = c/\lambda_{\text{máx}}$ , deslocam-se do vermelho para o azul à medida que a temperatura  $T$  aumenta.

Em 1893, Wilhelm Jan Wien, usando argumentos da Termodinâmica, já tinha mostrado que o valor de  $\lambda_{\text{máx}}$  é inversamente proporcional à temperatura  $T$ , tal que

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (2.6)$$

Tal comportamento ficou conhecido como a lei do deslocamento de Wien.

O pirômetro óptico é um instrumento que utiliza a lei do deslocamento de Wien para registrar a temperatura de um sólido aquecido a partir da sua distribuição espectral de intensidades de radiação.

As leis empíricas de Stefan-Boltzmann e do deslocamento de Wien, são expressões matemáticas que se aplicam somente ao caso idealizado da radiação de corpo negro, emitido por um radiador de cavidade. Por outro lado, a radiação térmica emitida a partir da superfície de um sólido aquecido, varia com a temperatura  $T$  de uma forma um pouco mais complicada, diferindo conforme o material. Nesses casos, é comum escrever a lei de Stefan-Boltzmann na sua forma generalizada:

$$J_T = e I_T = e \sigma T^4 \quad (2.7)$$

onde  $e$  é a emissividade do sólido que varia entre 0 e 1, dependendo do material. No caso do radiador de cavidade  $e=1$ . A Fig. 2.3 mostram as distribuições espectrais de intensidades de radiação em função do comprimento de onda  $\lambda$  para o tungstênio e para uma cavidade construída de mesmo material, ambos aquecidos a uma mesma temperatura  $T = 2000 \text{ K}$ .

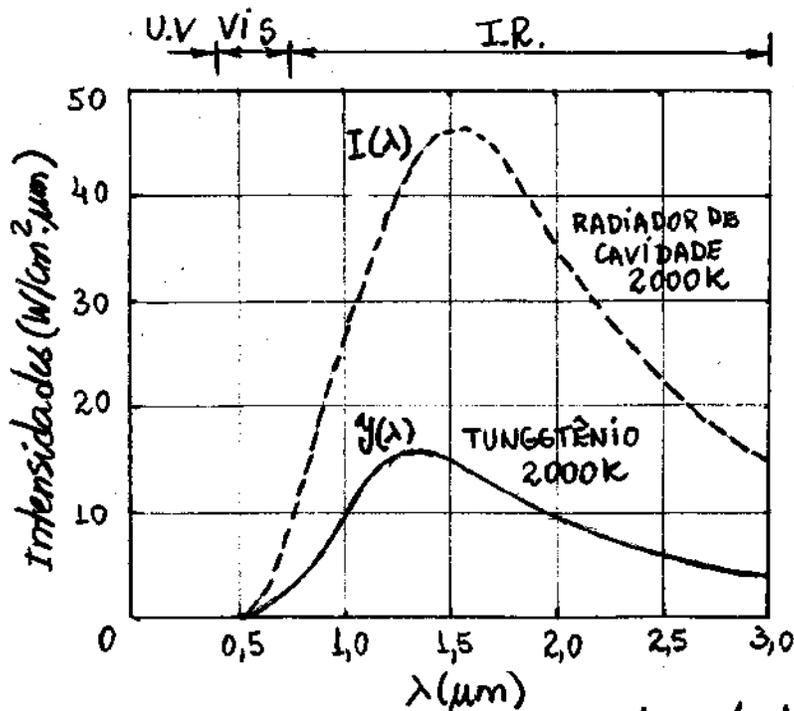


Fig. 2.3. Distribuição espectral de intensidades de radiação para o tungstênio e para a cavidade construída de mesmo material, ambos submetidos a uma mesma temperatura  $T$ .

Dev-se observar que a radiação térmica proveniente da cavidade é mais intensa do que a emitida pelas suas paredes externas. Como na eq. (2.2), a intensidade de radiação total é dada pela área abaixo da curva  $I(\lambda)$  ou  $\gamma(\lambda)$  em função de  $\lambda$ . As intensidades de radiação totais emitidas pelo tungstênio e pela cavidade correspondente, calculados a partir das curvas da Fig. 2.3, são dadas respectivamente por,  $\gamma_T = 23,5 \text{ W/cm}^2$  e  $I_T = 90,0 \text{ W/cm}^2$ . Substituindo esses dados na eq. (2.7), obtém-se a emissividade  $\epsilon = 0,26$  para o tungstênio à temperatura  $T = 2000 \text{ K}$ .

### Exemplo 2.1

Supondo que a superfície das estrelas se comportam como corpos negros, faça uma estimativa, (a) da temperatura  $T$  e (b) da intensidade de radiação total  $I_T$ , para o Sol e para a estrela do Norte, sabendo que para o Sol  $\lambda_{\text{máx}} = 510 \text{ nm}$  e para a estrela do Norte  $\lambda_{\text{máx}} = 350 \text{ nm}$ .

(a) Usando a lei do deslocamento de Wien, obtêm-se

para o Sol:  $510 \times 10^{-9} T = 2,9 \times 10^{-3} \Rightarrow T = 5700 \text{ K}$

para a estrela do Norte:  $350 \times 10^{-9} T = 2,9 \times 10^{-3} \Rightarrow T = 8300 \text{ K}$ .

Como a estrela do Norte emite mais intensamente no ultravioleta (U.V.), então ela é mais quente do que o Sol. O Sol emite mais intensamente na região do visível, sugerindo que, durante a evolução humana, os olhos do homem tornaram-se mais sensíveis aos comprimentos de onda dessa região do espectro eletromagnético.

(b) Como as superfícies das estrelas se comportam como um corpo negro, então a lei de Stefan-Boltzmann, fornece

para o Sol:  $I_{TS} = 5,67 \times 10^{-8} \times (5700)^4 = 5,9 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \approx 6000 \text{ W/cm}^2$ .

para a Estrela do Norte:  $I_{TN} = 5,67 \times 10^{-8} \times (8300)^4 \approx 27000 \text{ W/cm}^2$ .

### 2.3 - Teoria Clássica de Rayleigh-Jeans para a Radiação de Corpo Negro.

No início do século XX, John William Strutt Rayleigh e James Hopwood Jeans, utilizaram a teoria clássica para estudar a densidade de energia de radiação de cavidade, ou de corpo negro, o que resultou em sérias inconsistências com dados experimentais.

Nesta seção, propõe-se apresentar os cálculos realizados por Rayleigh e Jeans e destacar as inconsistências observadas. Na seção subsequente, propõe-se apresentar a teoria quântica de Max Planck para a radiação de corpo negro, que estabeleceu a quantização da energia como um novo princípio físico.

O comportamento espectral da radiação de corpo negro emitida através do orifício existente em uma cavidade, equivalente ao mostrado na Fig. 2.1, pode ser representado pela distribuição espectral de intensidades de radiação  $I(\lambda)$ . Entretanto, é mais útil representar a distribuição espectral de intensidades de radiação  $I(\lambda)$  em termos de uma distribuição espectral de densidades de energia de radiação  $u(\lambda)$  confinada no interior da cavidade. Tais distribuições são proporcionais e, de acordo com o exemplo 2.2, os cálculos mostram que

$$I(\lambda) = c/4 u(\lambda) \quad (2.8)$$

ou, em termos de frequência  $\nu$ ,

$$I(\nu) = c/4 u(\lambda) \quad (2.9)$$

pois, da eq. (2.3),  $I(\lambda) = c/\lambda^2 I(\nu)$  e  $u(\lambda) = c/\lambda^2 u(\nu)$ .

### Exemplo 2.2 - FACULTATIVO

Use a cavidade esférica com orifício, ilustrada na Fig. 2.4, para mostrar que a distribuição espectral de intensidades de radiação  $I$  pode ser escrita em termos da distribuição espectral de densidades de energia de radiação  $u$ , confinada no seu interior, como  $I = c/4 u$ .

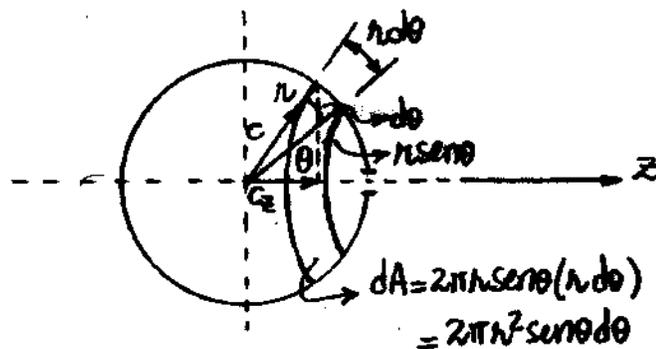


Fig. 2.4 - Cavidade esférica com orifício.

Deve-se observar que somente um dos hemisférios contém um orifício e, portanto, num intervalo de tempo  $\Delta t$  a energia irradiada  $E$  será metade da energia no interior da cavidade  $E_c$ . Além disso, como somente radiações de velocidade média  $\langle C_z \rangle$  passam pelo orifício, então

$$I = \frac{E}{\Delta t} = \frac{1}{A} \frac{\langle \Delta z \rangle}{\langle \Delta z \rangle} = \frac{1}{2} \langle C_z \rangle \frac{E_c}{\Delta V} = \frac{1}{2} \langle C_z \rangle u,$$

sendo  $\langle C_z \rangle$  ponderada na área da semi-esfera, isto é,

$$\begin{aligned} \langle C_z \rangle &= \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C_z dA}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dA} = \frac{2 \int_0^{\pi/2} C_z dA}{2 \int_0^{\pi/2} dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} (C \cos \theta) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta} \\ &= \frac{2\pi r^2 C \int_1^0 z dz}{2\pi r^2 \int_1^0 dz} = \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

onde adotou-se a mudança de variável  $z = \cos \theta$ . Assim, combinando as duas últimas equações, obtém-se

$$I = C/4 u$$

Como se queria demonstrar.

Para evitar complicações desnecessárias e ao mesmo tempo não perder aspectos gerais do problema, deve-se assumir uma cavidade cúbica de lados de comprimento  $L$  e perfeitamente condutora, como mostra a Fig. 2.5.

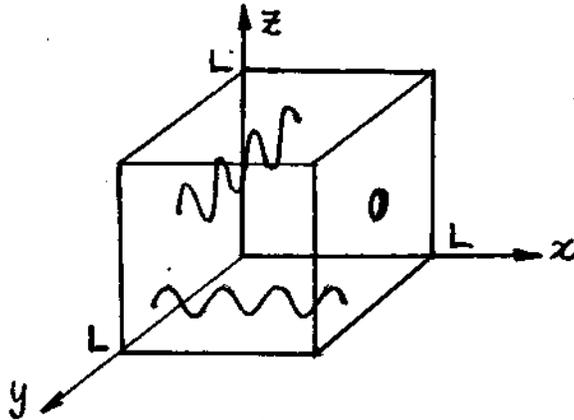


Fig. 2.5 - Cavidade cúbica perfeitamente condutora.

Nesse caso, a radiação eletromagnética fica confinada no interior da cavidade cúbica e as três componentes do campo elétrico e do campo magnético, podem ser tratadas separadamente. Por causa das múltiplas reflexões nas paredes planas e paralelas da cavidade cúbica, as componentes dos campos recombinam-se formando ondas eletromagnéticas estacionárias que, assim como as componentes, satisfazem as equações de Maxwell. Como se verá mais adiante, a energia total das ondas eletromagnéticas estacionárias é armazenada na forma de modos eletromagnéticos discretos de frequências  $\nu$ , onde cada modo tem uma energia média  $\langle E \rangle$ . Assim, a distribuição espectral de densidades de energia de radiação  $U(\nu)d\nu$ , armazenada no intervalo de frequências entre

$\nu$  e  $\nu+d\nu$ , pode ser calculado contando o número de modos eletromagnéticos  $\eta(\nu)d\nu$ , no mesmo intervalo de frequências, multiplicando pela energia  $\langle E \rangle$  de cada modo e dividindo pelo volume  $V=L^3$  da cavidade, isto é,

$$u(\nu)d\nu = \frac{\eta(\nu)d\nu}{V} \langle E \rangle. \quad (2.10)$$

A função distribuição  $\eta(\nu)$  define o número de modos  $\nu$  por unidade de intervalo de frequências  $d\nu$  e é denominada de densidade de estados eletromagnéticos. Não é difícil perceber que  $\eta(\nu)$  depende somente do volume  $V$  da cavidade e não da sua forma.

Para calcular os modos eletromagnéticos discretos associados às ondas eletromagnéticas estacionárias confinadas no interior da cavidade cúbica, pode-se recorrer às propriedades básicas do eletromagnetismo clássico.

O comportamento espacial e temporal dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são obtidos por meio das soluções das equações de Maxwell. Entretanto, por causa da natureza vetorial desses campos, a solução geral do problema deve incluir suas três componentes espaciais. Para alcançar esse objetivo, deve-se resolver inicialmente uma situação hipotética onde a cavidade é unidimensional de comprimento  $L$ . Com base nos resultados, estende-se a solução ao caso geral.

Seja então a propagação de uma onda eletromagnética ao longo do eixo  $x$ , onde paredes metálicas planas e paralelas, encontram-se nas posições  $x=0$  e  $x=L$ , como mostra a Fig. 2.6 (a).

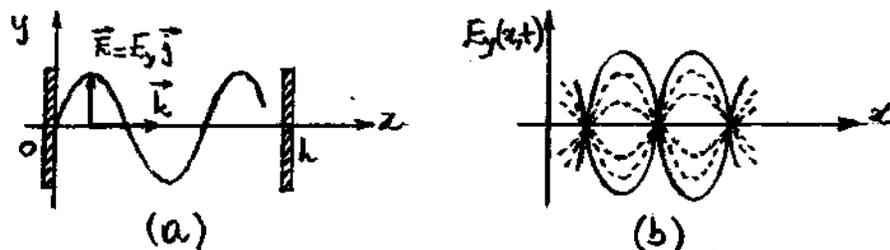


Fig. 2.6- Propagação da onda eletromagnética estacionária ao longo do eixo  $x$ .

A componente  $E_y = E_y(x,t)$  do campo elétrico  $\vec{E}$ , deve satisfazer a equação da onda eletromagnética

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Como se pode verificar por substituição direta, a onda plana co-senoidal que se desloca para a direita  $E_y(x,t) = E_0 y \cos(kx - \omega t)$  e a onda plana co-senoidal que se desloca para a esquerda  $E_y(x,t) = -E_0 y \cos(-kx - \omega t) = -E_0 y \cos(kx + \omega t)$ , são soluções apropriadas da eq. (2.11). Para uma verificação é importante lembrar que a velocidade da luz  $c$  no vácuo pode ser escrita em termos do número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  e da frequência angular  $\omega = 2\pi\nu$ , como  $c = \lambda\nu = 2\pi/k \cdot \omega/2\pi = \omega/k$ . Como a eq. (2.11) é uma equação diferencial parcial (EDP) linear de 2ª ordem, a combinação linear, ou superposição, das duas soluções anteriores

$$E_y(x,t) = E_0 y [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] = E_0 y \sin \omega t \sin kx \quad (2.12)$$

fornece a solução geral do problema.

Pode-se recorrer a identidade trigonométrica  $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ , para demonstrar a eq. (2.12). Também por substituição direta, pode-se verificar que a eq. (2.12) é de fato solução da eq. (2.11). A eq. (2.12) descreve uma onda senoidal ( $\sin kx$ ) fixa no tempo cuja amplitude ( $E_0 \sin \omega t$ ) tem uma variação senoidal no tempo. Seu comportamento é mostrado na Fig. 2.6(b) e fornece a descrição geral das ondas eletromagnéticas estacionárias que se formam no interior da cavidade unidimensional.

Como a onda eletromagnética é uma vibração transversal, com o campo elétrico  $\vec{E}$  perpendicular à direção de propagação, então esse campo é paralelo às paredes da cavidade cúbica metálica. Por causa disso, ele acaba sendo neutralizado com o surgimento de correntes elétricas na superfície do condutor. Assim, deve-se esperar que as ondas eletromagnéticas estacionárias, que se propagam ao longo do eixo  $x$ , apresentam nodos de energia nos planos  $x=0$  e  $x=L$ , exatamente como ocorre com uma corda oscilante com ambas as extremidades fixas.

Para que o campo  $E_y(x,t)$ , na eq. (2.12), seja nulo em  $x=L$ , é necessário que  $\sin kL = 0$  ou

$$k = n\pi/L, \quad \text{com } n=1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

Como  $k = 2\pi/\lambda$ , os comprimentos de onda  $\lambda$  das ondas estacionárias devem assumir somente valores discretos como

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.14)$$

ou, em termos de frequência  $\nu$ ,

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L} n, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.15)$$

Esta condição determina um conjunto de valores possíveis de comprimentos de onda  $\lambda$ , ou frequência  $\nu$ , das ondas eletromagnéticas estacionárias que se propagam na cavidade unidimensional. A Fig. 2.7 mostra as três primeiras ondas eletromagnéticas estacionárias, de acordo com a eq. (2.14), definidas para  $n=1,2,3$ .

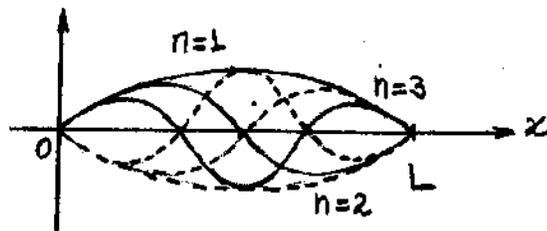


Fig. 2.7 - Três primeiras ondas estacionárias definidas para  $n=1,2,3$ .

Condições similares ocorrem também para as outras duas componentes do campo elétrico individualmente.

O exemplo 2.3 mostra que, no caso tridimensional, as frequências dos modos eletromagnéticos no interior da cavidade são

$$\nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \quad \text{com } n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

uma equação análoga à eq. (2.15) que, entretanto, depende dos números inteiros  $n_x, n_y, n_z$  correspondentes a cada uma das coordenadas espaciais.

### Exemplo 2.3 - FACULTATIVO.

Usar a versão tridimensional da equação da onda eletromagnética para mostrar que as frequências dos modos eletromagnéticos no interior da cavidade são dadas pela eq. (2.16).

No caso tridimensional, o campo elétrico é uma função das três componentes espaciais, isto é,  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ . Nesse caso, a equação de onda apropriada para a onda eletromagnética é

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.18)$$

é o operador diferencial laplaciano, ou "nabla". Substituindo a eq. (2.18) na eq. (2.17) e escrevendo o campo elétrico como  $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

e equações similares para as componentes  $E_y$  e  $E_z$ .

Em analogia ao caso unidimensional, as ondas eletromagnéticas estacionárias devem satisfazer as seguintes condições de contorno para a cavidade

cúbica metálica:

$$\begin{aligned} E_x \parallel \text{eixos } y \text{ e } z &\Rightarrow E_x = 0 \text{ em } y=0, L \text{ e } z=0, L, \\ E_y \parallel \text{eixos } x \text{ e } z &\Rightarrow E_y = 0 \text{ em } x=0, L \text{ e } z=0, L, \\ E_z \parallel \text{eixos } x \text{ e } y &\Rightarrow E_z = 0 \text{ em } x=0, L \text{ e } y=0, L. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como as componentes do campo elétrico  $\vec{E}$  perpendiculares às paredes da cavidade cúbica metálica são incapazes de gerar correntes elétricas sobre a superfície condutora, as seguintes condições de contorno devem ser incluídas no caso tridimensional:

$$\begin{aligned} E_x \perp \text{eixos } y \text{ e } z &\Rightarrow E_x \neq 0 \text{ em } x=0, L, \\ E_y \perp \text{eixos } x \text{ e } z &\Rightarrow E_y \neq 0 \text{ em } y=0, L, \\ E_z \perp \text{eixos } x \text{ e } y &\Rightarrow E_z \neq 0 \text{ em } z=0, L. \end{aligned} \quad (2.21)$$

As versões tridimensionais da equação de onda eletromagnética unidimensional, dada na eq. (2.12), devem ser soluções das equações de onda como a eq. (2.19) e também satisfazer as condições de contorno dadas nas eqs. (2.20) e (2.21). Não é difícil verificar que tais equações são:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \sin \omega t, \\ E_y &= E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \sin \omega t, \\ E_z &= E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \sin \omega t, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

Deve-se observar que os termos cossenoidais são incluídos para satisfazer as condições de contorno dadas na eq. (2.21). Substituindo a primeira eq. (2.22) na eq. (2.19), obtém-se

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)E_x = -\frac{1}{c^2}\omega^2 E_x$$

ou, usando a eq. (2.23) e o fato que  $\omega = 2\pi\nu$ , obtêm-se a eq. (2.16).

A contagem do número de modos  $\eta(\nu)d\nu$ , no intervalo de frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , pode ser calculada construindo uma esfera de raio

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \quad (2.24)$$

em coordenadas retangulares no espaço  $n_x, n_y, n_z$ , tal que o conjunto de inteiros  $(n_x, n_y, n_z)$  definam pontos no interior de um octante, como mostra a Fig. 2.8. O espaço é limitado a um octante somente, porque  $n_x, n_y, n_z > 0$ .

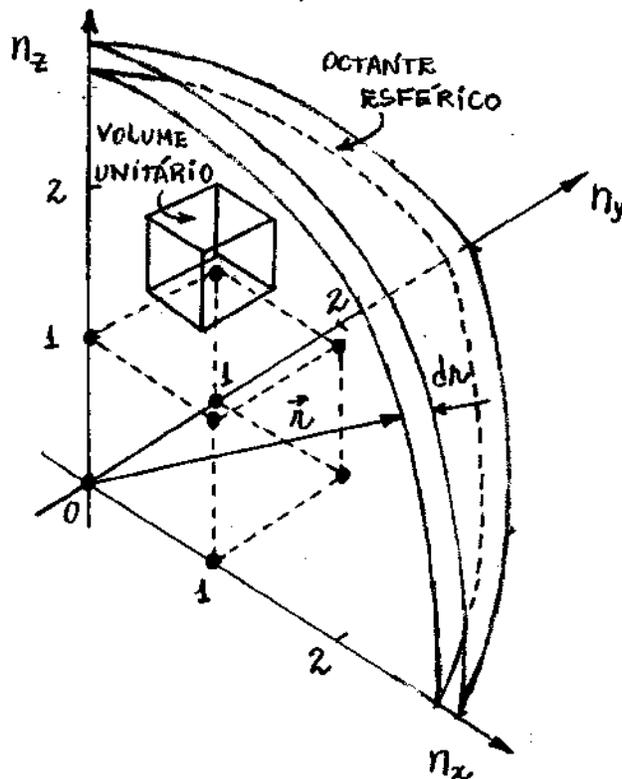


Fig. 2.8 - Octante esférico de raio  $r$  no espaço  $n_x, n_y, n_z$ .

O volume total do octante esférico pode ser dividido em volumes unitários contendo, cada um, somente um ponto  $(n_x, n_y, n_z)$ , tal que a densidade de pontos  $\mu_p$  seja

$$\mu_p = 1 \text{ ponto / unid. de Volume} \quad (2.25)$$

Cada ponto define uma frequência  $\nu$ , cuja dependência com o raio  $r$ , de acordo com as eqs. (2.16) e (2.24), é

$$r = \frac{2L}{c} \nu \quad (2.26)$$

Assim, o cálculo do número de modos  $\eta(\nu)d\nu$  entre  $\nu$  e  $\nu+d\nu$ , é equivalente ao cálculo do número de pontos  $\eta(r)dr$ , contidos na região esférica entre os raios  $r$  e  $r+dr$ . O número  $\eta(r)dr$  pode ser calculado multiplicando o volume esférico entre os raios  $r$  e  $r+dr$ , pela densidade de ponto  $\mu_p$ , isto é,

$$\eta(\nu)d\nu = \eta(r)dr = \left(\frac{1}{8} 4\pi r^2\right) dr \mu_p = \frac{1}{2} \pi r^2 dr, \quad (2.27)$$

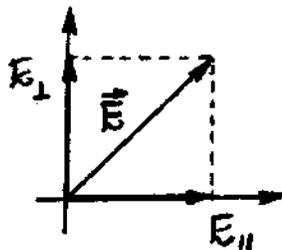
pois  $\mu_p = 1$ . Substituindo a eq. (2.26) e sua derivada,  $dr = 2L/c d\nu$ , na equação anterior, obtém-se

$$\eta(\nu)d\nu = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2L}{c} \nu\right)^2 \left(\frac{2L}{c}\right) d\nu = \frac{4\pi \nu^2 V}{c^3} d\nu \quad (2.27)$$

onde, tomou-se o volume da cavidade como  $V = L^3$ .

Finalmente, deve-se multiplicar o resultado da eq. (2.27) por um fator 2, pois existem na verdade duas ondas independentes, correspondentes a dois possíveis estados de polarização para a radiação eletromagnética, como mostrado na Fig. 2.9.

Fig. 2.9 - Duplo estado de polarização para a onda eletromagnética.



Assim, a forma correta de se escrever a eq. (2.27) é

$$\eta(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (2.28)$$

Combinando a eq. (2.28) com a eq. (2.10), obtém-se

$$U(\nu) d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \langle E \rangle d\nu \quad (2.29)$$

A energia média  $\langle E \rangle$  dos modos eletromagnéticos no interior da cavidade cúbica, pode ser calculada utilizando o conceito clássico termodinâmico do "princípio da equipartição da energia". Esse princípio se aplica a um sistema de partículas formado por átomos ou moléculas, livres de potenciais, em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , e afirma que: "A energia cinética média por átomo, ou molécula, por grau de liberdade, é

onde  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$   <sup>$\frac{1}{2} k_B T$</sup>  é a constante de Boltzmann."

Deve-se observar que as energias dos modos eletromagnéticos resultam das oscilações das partículas carregadas que formam as paredes da cavidade cúbica. O princípio da equipartição da energia pode ser aplicado a esse sistema de partículas desde que se considere também a energia potencial de confinamento das partículas. No equilíbrio térmico, em média, as contribuições da energia cinética e potencial para a energia total, são iguais a  $\frac{1}{2} k_B T$ . Logo, nessas condições, a energia total média será  $k_B T$ . No caso em questão, tem-se somente um grau de liberdade, dado pela duração de oscilação das partículas carregadas geradoras dos modos eletromagnéticos. Conclui-se, portanto, que cada modo eletromagnético tem energia total média dada por

$$\langle E \rangle = k_B T. \quad (2.30)$$

É importante mencionar que, do ponto de vista da teoria clássica, a energia total média tem o mesmo valor para todos os modos eletromagnéticos na cavidade, independentemente de suas frequências. Substituindo a eq. (2.30) na eq. (2.29), obtém-se a densidade de energia de radiação no interior da cavidade, com frequências entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , de acordo com a previsão clássica, como

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi \nu^2 k_B T}{c^3} d\nu \quad (2.31)$$

ou, em termos de comprimento de onda  $\lambda$ ,

$$u(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} d\lambda \quad (2.32)$$

pois  $\nu = c/\lambda$  e, de acordo com a eq. (2.3),  $u(\lambda) = c/\lambda^2 u(\nu)$ . As eqs. (2.31) e (2.32) são referidas como a Lei de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro.

A Fig. 2.10 mostra o comportamento da distribuição espectral de intensidades  $I(\lambda) = c/4 \cdot u(\lambda)$ , obtida a partir da eq. (2.32), para  $T=2000\text{K}$ , bem como o resultado experimental correspondente. Observa-se uma discordância evidente. A distribuição espectral de intensidades de radiação clássica se aproxima do resultado experimental somente no limite para grandes comprimentos de onda  $\lambda$ , ou para pequenas frequências  $\nu$ . A medida que o comprimento de onda  $\lambda$  diminui, ou a frequência  $\nu$  cresce, o resultado teórico tende ao infinito enquanto que o resultado experimental tende a zero.

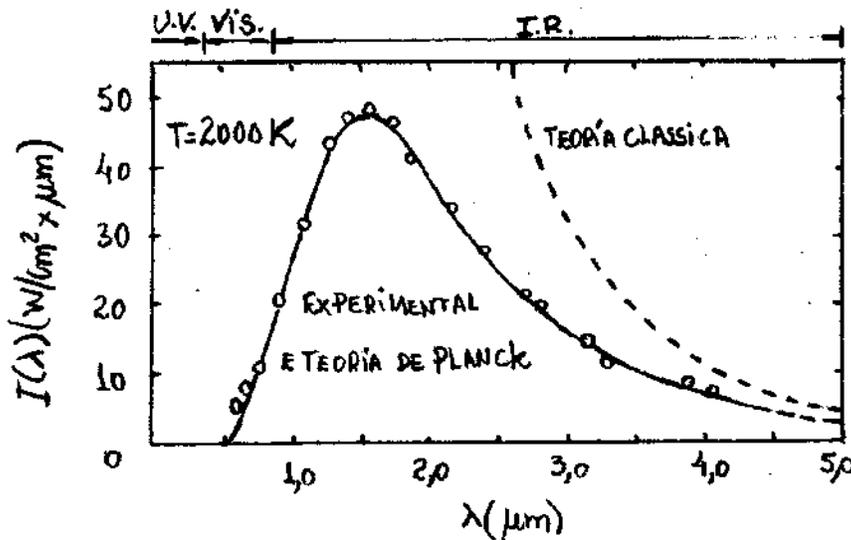


Fig. 2.10 - Comparação entre resultados, clássico, quântico e experimental da distribuição espectral de corpo negro a  $T=2000\text{K}$ .

A tendência ao infinito para pequenas comprimentos de onda  $\lambda$ , ou grandes frequências  $\nu$ , com a teoria clássica de Rayleigh-Jeans, ficou conhecida como a catástrofe do ultravioleta.

O problema da radiação de corpo negro foi resolvido por Max Planck, admitindo uma hipótese sobre o princípio da equipartição da energia contraditória com a teoria clássica da termodinâmica. Na seção seguinte será discutido os detalhes da teoria de Planck bem como a sua importância para a origem da teoria quântica moderna.

## 2.4 - Teoria quântica de Planck para a Radiação de Corpo Negro

Na tentativa de solucionar a inconsistência entre a teoria clássica e a experiência para a radiação de cavidade, Max Karl Ernst Ludwig Planck teve que assumir uma hipótese que violava o princípio da equipartição da energia. Planck percebeu que o resultado experimental não era reproduzido, quando

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \langle E \rangle = k_B T \quad \text{e} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle E \rangle = 0,$$

isto é, a energia total média tende a  $k_B T$ , como na teoria clássica, quando a frequência tende a zero, mas tende a zero quando a frequência tende ao infinito. Assim, Planck supôs que a energia média das ondas eletromagnéticas seja uma função da frequência  $\nu$ , contrariando o princípio da equipartição da energia.

O princípio da equipartição da energia tem sua origem na distribuição de partículas clássicas de Boltzmann, que fornece a probabilidade de encontrar o sistema, em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , com uma energia entre  $E$  e  $E+dE$ . Dispensando os detalhes da demonstração, que serão considerados em Capítulos posteriores, a distribuição de partículas clássicas de Boltzmann, é dada por

$$P(E)dE = \frac{1}{k_B T} e^{-E/k_B T} dE. \quad (2.33)$$

A energia média  $\langle E \rangle$  pode ser calculada a partir da distribuição de Boltzmann observando que

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E P(E) dE}{\int_0^{\infty} P(E) dE} = \int_0^{\infty} E P(E) dE = \text{ÁREA} . \quad (2.34)$$

O denominador fornece a probabilidade de encontrar o sistema com alguma energia E sendo, portanto, igual a unidade. A integral na eq. (2.34) pode ser calculada utilizando a eq. (2.33) e o resultado reproduz o princípio da equipartição da energia, com

$$\langle E \rangle = k_B T . \quad (2.35)$$

A eq. (2.34) mostra que  $\langle E \rangle = k_B T$  é a área abaixo do gráfico de  $E P(E)$  em função de  $E$ , como mostra a Fig. 2.11. A função  $E P(E)$  foi obtida diretamente da eq. (2.33). Pode-se mostrar que o ponto de máximo desta função também ocorre para  $E = k_B T = \langle E \rangle$ .

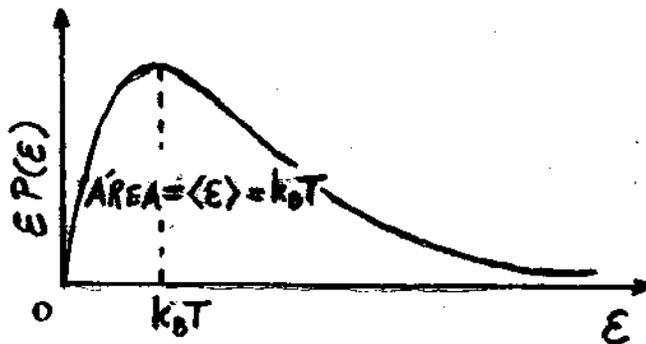


Fig. 2.11 - Gráfico de  $E P(E)$  em função de  $E$ .

A grande contribuição de Planck se deu quando ele descobriu que a condição  $\lim_{E \rightarrow 0} \langle E \rangle = 0$ , poderia ser alcançada, se fosse modificado o cálculo de  $\langle E \rangle$  a partir de  $P(E) dE$ . Planck observou que, em vez de assumir valores contínuos, a energia  $E$  deveria assumir somente valores discretos e que tais valores discretos fossem distribuídos uniformemente como

$$E = 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E, \dots \quad (2.36)$$

onde  $\Delta E$  é uma variável constante entre valores discretos de energia. Com essa hipótese, as integrais na eq. (2.34), usadas para calcular  $\langle E \rangle$ , devem ser substituídas por somatórios, isto é,

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)} \quad (2.37)$$

A Fig. 2.12 mostra cálculos gráficos de  $\langle E \rangle$  a partir de  $E P(E)$  para, (a)  $\Delta E \ll k_B T$ , (b)  $\Delta E \approx k_B T$  e (c)  $\Delta E \gg k_B T$ . O valor de  $\langle E \rangle$ , em cada caso, é dado pela área dos retângulos hachurados.

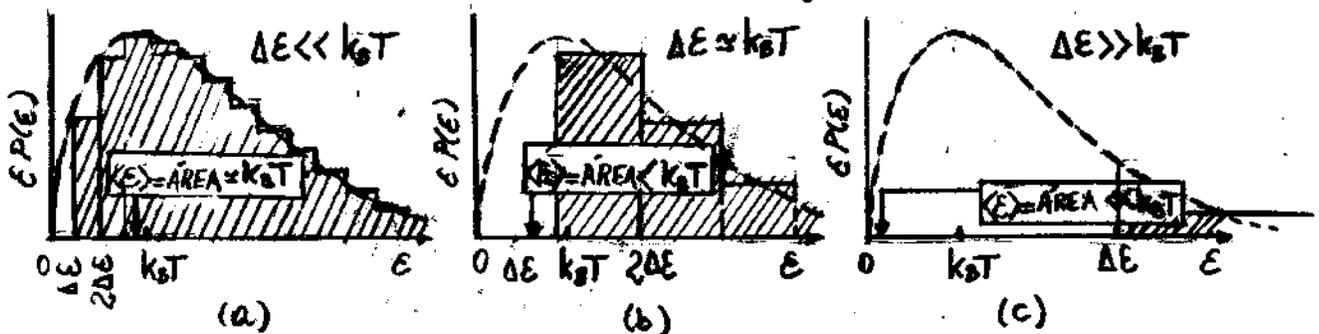


Fig. 2.12- Comportamento gráfico de  $\langle E \rangle$  de acordo com eq. (2.37).

O valor de  $k_B T$  será a área abaixo da curva suave. Observa-se que quando  $\Delta E \ll k_B T$ , o valor de  $\langle E \rangle \approx k_B T$ , isto é, praticamente igual ao resultado clássico. Entretanto, quando  $\Delta E \approx k_B T$  ou  $\Delta E \gg k_B T$ , o valor  $\langle E \rangle$  será menor que  $k_B T$ , pois a redução da área definida pelos elementos discretos começa a se tornar importante quando comparada com a área definida pelos elementos contínuos. Assim, pode-se concluir que

$\langle E \rangle \approx k_B T$  para  $\Delta E$  pequeno

e

$\langle E \rangle \approx 0$  para  $\Delta E$  grande.

Como Planck precisava obter o primeiro resultado para baixas frequência  $\nu$  e o segundo para grandes valores de  $\nu$ , então o valor  $\Delta E$  deveria ser proporcional a  $\nu$ , isto é,

$$\Delta E = h\nu, \quad (2.38)$$

onde  $h$  é a constante de proporcionalidade. Cálculos posteriores permitiram que Planck determinasse o valor de  $h$ , ajustando resultados teóricos com dados experimentais, obtendo

$$h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \approx 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}. \quad (2.39)$$

Esta constante ficou conhecida como a constante de Planck. A conversão de Joule em elétron-volt foi feita a partir da identidade,  $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ , definida na eq. (1.104) do Capítulo anterior.

Assumindo, então

$$E = nh\nu, \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (2.40)$$

nas eqs. (2.37) e (2.33), obtém-se

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E P(E)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{k_B T} e^{-nh\nu/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_B T} e^{-nh\nu/k_B T}} = k_B T \left( \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} \right), \quad \leftarrow$$

onde

$$\alpha = \frac{h\nu}{k_B T}. \quad (2.41)$$

ou, como

$$-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}},$$

então,

$$\langle E \rangle = k_B T \left( -\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}, \quad \leftarrow$$

onde usa-se o valor de  $\alpha$  dado na eq. (2.41). Usando a expansão binomial,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots = (1 - e^{-\alpha})^{-1},$$

obtém-se

$$\langle \epsilon \rangle = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln(1 - e^{-\alpha})^{-1} = \frac{-h\nu}{(1 - e^{-\alpha})^{-1}} (-1)(1 - e^{-\alpha})^{-2} e^{-\alpha}$$

$$= \frac{h\nu e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{h\nu}{e^{\alpha} - 1}$$

ou

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (2.42)$$

Substituindo a eq. (2.42) na eq. (2.29), obtém-se a distribuição espectral de densidade de energia de radiação, no intervalo de frequências entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , como

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu, \quad (2.43)$$

ou, em termos do comprimento de onda  $\lambda$ ,

$$u(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda.$$

pois, de acordo com a eq. (2.3),  $u(\lambda) = c/\lambda^2 u(\nu)$  e  $\nu = c/\lambda$ . As eqs. (2.43) e (2.44) são referidas como a Lei de Planck para a radiação de corpo negro.

A Fig. 2.10 mostra o espectro de radiação de corpo negro, para  $T = 2000 \text{ K}$ , de acordo com o modelo teórico de Planck. Observa-se uma excelente concordância com o resultado experimental.

A lei de Stefan-Boltzmann na eq. (2.2), e a lei do deslocamento de Wien na eq. (2.7), podem ser obtidas a partir da fórmula de Planck. A lei de Stefan-Boltzmann pode ser obtida integrando a fórmula de Planck sobre todo o espectro de comprimentos de onda  $\lambda$ . Por outro lado, a lei do deslocamento de Wien pode ser obtida encontrando o ponto de máximo da função  $u(\lambda)$ , isto é,

$$d u(\lambda) / d \lambda = 0. \quad (2.46)$$

Para este último caso, o resultado é

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,965 k_B} \approx 2,9 \times 10^{-3} \text{ m} \times \text{K}, \quad (2.47)$$

que está de acordo com a lei do deslocamento de Wien.

### Exemplo 2.3

Obter a lei de Stefan-Boltzmann a partir da fórmula de Planck para a radiação de corpo negro.

A distribuição espectral de intensidades de radiação  $I(\nu)d\nu$ , entre  $\nu$  e  $\nu+d\nu$ , emitidas por uma cavidade aquecida a uma temperatura  $T$ , pode ser calculada substituindo a eq. (2.43) na eq. (2.9), isto é,

$$I(\nu)d\nu = \frac{c}{4} u(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Assim, a intensidade de radiação total emitida pela cavidade aquecida, será

$$I_T = \int_0^{\infty} I(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{\alpha} - 1},$$

onde usam-se a seguinte mudança de variável:

$$\alpha = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} \alpha \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} d\alpha.$$

Quando se recorre a uma tabela de integrais, encontra-se

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{\alpha} - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Logo

$$I_T = \sigma T^4,$$

onde

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,8 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \times \text{K}^4,$$

que está de acordo com o valor da constante obtida por Stefan e Boltzmann.

A quantização da energia proposta por Planck para explicar a emissão da radiação de corpo negro, foi a principal inspiração de Einstein para propor o modelo Corpuscular da radiação e explicar o mecanismo da interação da radiação com a matéria. A perfeita harmonia entre essa hipótese e os resultados experimentais, foi suficiente para justificar a quantização da energia como um novo princípio físico.

Nas próximas seções apresentam-se os diferentes tipos de interação da radiação com a matéria e destacam-se as evidências experimentais do Comportamento Corpuscular da radiação.

## 2.5 - Efeito Fotoelétrico.

Um processo de emissão de cargas elétricas negativas por uma superfície metálica foi descoberto por Heinrich Rudolf Hertz em 1887. A Fig. 2.13 mostra um esquema da montagem utilizada por Hertz. Um catodo C (emissor de cargas negativas) e um anodo A (receptor de cargas negativas) são mantidos no vácuo a uma diferença de potencial de alguns volts.

Quando luz ultravioleta ( $\nu \sim 10^{16} \text{ Hz}$ ), atinge o catodo C, observa-se um fluxo de corrente elétrica através do anodo A. Esse fenômeno ficou conhecido como efeito fotoelétrico.

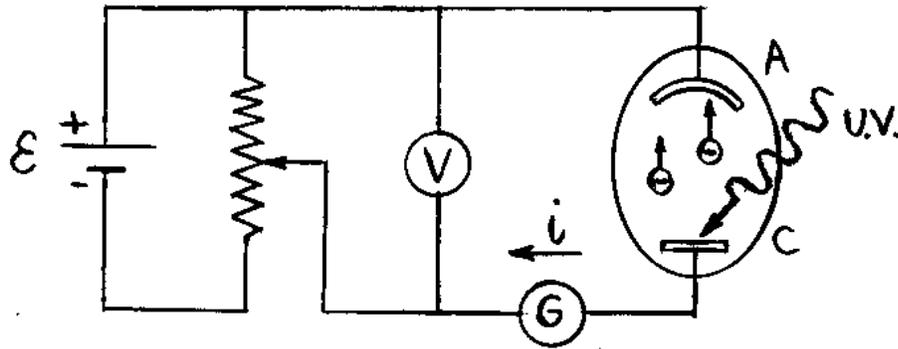


Fig. 2.13 - Experimento de Hertz para o efeito fotoelétrico.

A identificação dos elétrons em 1879, por Joseph John Thomson através da medida da razão  $e/m$  entre a carga e a massa das partículas num tubo de raios catódicos, sugeriu que as partículas carregadas negativamente do efeito fotoelétrico também fossem elétrons. Esta hipótese foi confirmada em 1900 por Philipp von Lenard, quando mediu a razão  $e/m$  das partículas fotoelétricas e mostrou que era a mesma que a dos elétrons medida por Thomson.

A experiência de Lenard esclareceu dúvidas relativas à identidade das partículas fotoelétricas, entretanto, mostrou também algumas propriedades do efeito fotoelétrico, muito difíceis de serem explicadas em termos das teorias da física clássica. Lenard mediu a corrente através do anodo A como função

da diferença de potencial aplicada entre os eletrodos para intensidades altas e baixas da luz incidente. O resultado é mostrado na Fig. 2.14.

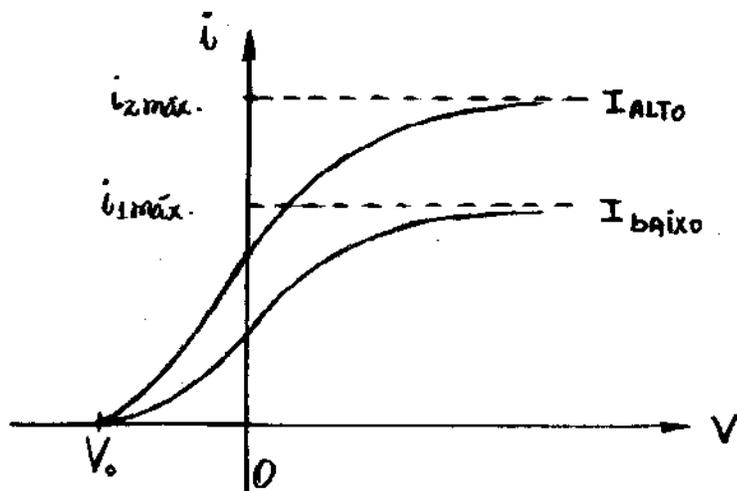


Fig. 2.14 - Corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial para diferentes intensidades.

A corrente fotoelétrica satura para valores altos da diferença de potencial  $V$ . Nessas condições, todos os fotoelétrons emitidos por  $C$  são coletados por  $A$ . Quando  $V$  é invertido ( $V < 0$ ), o anodo torna-se negativo e repele os elétrons liberados pelo catodo, entretanto, a corrente fotoelétrica não cai imediatamente a zero como se esperaria. Este fato sugere que os elétrons sejam emitidos de  $C$  com alguma energia cinética. Alguns elétrons alcançam o anodo  $A$ , mesmo que o campo elétrico se oponha ao seu movimento. Quando a diferença de potencial atinge um valor  $V_0$ , chamado de potencial frenador, a corrente fotoelétrica torna-se nula, independentemente do valor da intensidade da luz incidente.

Nesse momento, nenhum elétron, mesmo aquele mais fracamente ligado ao metal e, conseqüentemente, os de maior energia cinética, alcançam o anodo A. A energia cinética desses elétrons mais rápidos  $K_{\text{máx}}$ , é dada em função do potencial frenador  $V_0$  como

$$K_{\text{máx}} = e V_0. \quad (2.48)$$

onde  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$  é a carga do elétron.

A teoria ondulatória clássica afirma que a intensidade  $I$  de uma onda é proporcional ao quadrado do campo elétrico  $E$ , isto é,  $I \propto E^2$ . Como a força sobre um elétron é  $\vec{F} = e\vec{E}$ , isso sugere que a energia cinética  $K$  dos fotoelétrons seja proporcional a intensidade, isto é,  $K \propto I$ . Entretanto, a eq. (2.48), obtida da experiência, mostra que a energia cinética deve independe da intensidade da luz.

A Fig. 2.15 mostra o comportamento do potencial frenador  $V_0$  em função da frequência  $\nu$  da luz incidente sobre uma superfície de sódio, obtida por Robert Andrews Millikan em 1914.

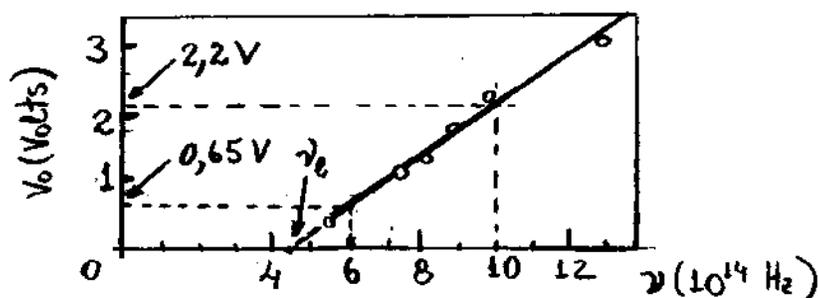


Fig. 2.15 - Comportamento do potencial frenador em função da frequência da luz numa superfície de sódio.

Observa-se a presença de um limiar de frequência  $\nu_0$  abaixo do qual o efeito fotoelétrico deixa de ocorrer espontaneamente.

Pela teoria clássica, o efeito fotoelétrico deveria ocorrer para qualquer frequência da luz incidente, desde que a intensidade seja suficiente para ejetar os elétrons. Entretanto, o gráfico da Fig. 2.15 mostra a existência de um limiar de frequência para o efeito fotoelétrico para qualquer que seja a intensidade da luz incidente.

Uma outra importante divergência do efeito fotoelétrico com a teoria ondulatória clássica, ocorre com o intervalo de tempo entre a incidência de luz e a ejeção do elétron. Seja, por exemplo, uma placa de potássio a uma distância  $R = 1,0 \text{ m}$  de uma fonte luminosa pouco intensa, de potência  $P = 1,0 \text{ W}$ . Supõe-se que o elétron ejetado tenha sua energia absorvida na área circular correspondente ao raio atômico  $r \approx 10^{-10} \text{ m}$ . Na distância  $R$  a potência  $P$  é distribuída isotropicamente em uma área de casca esférica  $4\pi R^2$ . O elétron no átomo ocupa somente um pedaço  $\pi r^2$  dessa área total. Assim, a potência  $P_{\text{alvo}}$  sobre o alvo atômico é uma fração da potência  $P$  dada por

$$P_{\text{alvo}} = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} P = \frac{\pi \times (10^{-20} \text{ m}^2)}{4\pi \times (1,0 \text{ m}^2)} \times 1,0 \text{ W} = 2,5 \times 10^{-21} \text{ J/s}.$$

Se a energia necessária para remover um elétron da superfície do potássio é  $\Delta E = 2,1 \text{ eV} = 3,4 \times 10^{-19} \text{ J}$ , então o tempo necessário para o elétron absorver uma energia igual a essa é

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P_{\text{alvo}}} = \frac{3,4 \times 10^{-19}}{2,5 \times 10^{-21}} = 140 \text{ s} \approx 2 \text{ minutos}.$$

Assim, durante todo esse intervalo finito de tempo, o elétron deveria estar absorvendo energia da luz até o seu escape. Entretanto, nenhum tempo de retardo jamais foi observado. De fato, experiências posteriores realizadas por Ernest Orlando Lawrence e Jesse Wakefield Beams em 1928, usando uma fonte de luz várias ordens de grandeza menos intensa do que a considerada acima, mostraram um atraso menor que 1 ns.

Em 1905, Einstein propôs a teoria quântica do efeito fotoelétrico. De acordo com a teoria quântica de Planck, partículas e campos eletromagnéticos oscilantes a frequência  $\nu$ , podem mudar de energia somente por múltiplas inteiras da energia quântica  $h\nu$ . Einstein sugeriu que, no processo de ir de um estado de energia  $n h\nu$  para outro  $(n-1) h\nu$ , a fonte emite uma porção de energia eletromagnética.

$$E = h\nu \quad (2.49)$$

Einstein assumiu que tal porção de energia emitida, estivesse localizada num pequeno volume do espaço e que se afasta da fonte com uma velocidade  $c$ . Esse quantum de energia tem características de partícula sem massa, como se verifica na sequência, e foi denominado de fóton.

Do ponto de vista relativístico, a energia total de uma partícula de massa de repouso  $m_0$  e velocidade  $u$  é

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = K + m_0 c^2 \quad (2.50)$$

Como a velocidade do fóton é  $c$  e sua energia  $E = h\nu$  é finita, então a sua massa de repouso  $m_0$  deve ser nula para que  $E$  não tenda ao infinito quando  $u=c$ , mas a algo que é a sua energia cinética  $K$ . Logo, o fóton é uma partícula de massa de repouso nula e energia total relativística  $E$  puramente cinética.

No processo fotoelétrico, um fóton é absorvido completamente por um elétron do fotocátodo, que é emitido da superfície do metal com uma energia cinética  $K = h\nu - w$ , onde  $h\nu$  é a energia do fóton incidente e  $w$  é o trabalho necessário para remover o elétron do metal. Alguns elétrons estão mais fortemente ligados ao metal do que outros. Alguns perdem energia por colisões na sua trajetória. No caso do elétron mais fracamente ligado ao metal, o foto elétron deve emergir com a energia cinética máxima

$$K_{\text{máx.}} = h\nu - w_0, \quad (2.51)$$

onde  $w_0$ , uma energia característica do metal denominada de função trabalho, é a energia mínima necessária para o elétron escapar às forças atrativas de ligação ao metal.

Como se pode ver na eq. (2.51), a teoria quântica do efeito fotoelétrico concorda com a observação de Lenard de que  $K_{\text{máx}}$  independe da intensidade. Aumentar a intensidade da luz meramente aumenta o número de fótons e

consequentemente a fotocorrente, mas isto não altera a energia  $h\nu$  de cada fóton.

O limiar de frequência  $\nu_e$ , observado por Millikan, é obtido também da eq. (2.51) tomando-se  $K_{\text{max}} = 0$ , tal que

$$h\nu_e = W_0. \quad (2.52)$$

Um fóton de frequência  $\nu_e$  tem somente a energia suficiente para retirar o elétron do metal. Se a frequência for menor que  $\nu_e$ , nenhum elétron será ejetado independentemente da intensidade, ou número de fótons, da luz incidente.

Finalmente, a emissão de um fotoelétron será imediata logo que este absorva um fóton da luz incidente. A energia é fornecida em pacotes concentrados e não se espalha uniformemente sobre uma área extensa como se supôs no exemplo com a teoria ondulatória clássica.

Combinando a eq. (2.48) com a eq. (2.51), obtém-se

$$V_0 = (h/e)\nu - W_0/e. \quad (2.53)$$

Portanto, a teoria de Einstein prevê uma relação linear entre  $V_0$  e  $\nu$ , concordando com o resultado experimental de Millikan mostrado na Fig. 2.15. A inclinação  $(h/e)$  da reta pode ser calculada diretamente do gráfico e o resultado é  $h/e = 3,9 \times 10^{-15} \text{ V}\cdot\text{s}$ . Usando  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , obtém-se  $h = 6,2 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  para a constante de Planck.

De uma análise muito mais criteriosa realizada posteriormente, com superfícies de lítio, Millikan obteve um valor  $h = 6,57 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ , com uma precisão de aproximadamente 0,5%. Esta medida estava muito próxima do valor de  $h$  deduzido da teoria quântica de Planck para a radiação de corpo negro. A concordância numérica de  $h$ , usando teorias completamente diferentes, era notável. Um valor atual de  $h$ , conhecido com sete algarismos significativos, é  $h = 6,626076 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,135669 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$ .

Em 1921 Einstein recebeu o prêmio Nobel pela teoria quântica do efeito fotoelétrico e, em 1923, Millikan recebeu o prêmio Nobel pela comprovação experimental do efeito fotoelétrico.

A hipótese do fóton é atualmente usada, não somente no visível ou ultravioleta, mas para todas as regiões do espectro eletromagnético. Para  $\lambda = 10 \text{ cm}$ , um comprimento de onda típico das microondas, pode-se calcular a energia do fóton para obter  $1,2 \times 10^{-5} \text{ eV}$ . Por ser baixa, esta energia é incapaz de ejetar fotoelétrons de uma superfície metálica. Para raios X, ou raios  $\gamma$ , tais como os que são emitidos por fontes radioativas, a energia do fóton pode atingir valores maiores do que  $10^6 \text{ eV}$ . Estes fótons podem ejetar elétrons fortemente ligados a átomos extremamente pesados.

### Exemplo 2.4

O lítio foi um dos metais estudados por Millikan para comprovar a teoria de Einstein do efeito fotoelétrico. Esse metal tem uma função trabalho  $w_0 = 2,42 \text{ eV}$ . (a) Calcular o limiar fotoelétrico para uma radiação incidente neste metal. (b) Calcular o número de fótons dessa radiação que atingem uma área  $A = 1 \text{ cm}^2$  do lítio, num tempo  $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ , sabendo que a fonte possui uma potência  $P = 1 \text{ W}$  e é emitida a uma distância  $R = 1 \text{ m}$ .

a) Da eq. (2.52),  $\nu_e = \frac{w_0}{h} = \frac{2,42 \text{ eV}}{4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}} = 5,84 \times 10^{14} \text{ Hz}$ .

O comprimento de onda correspondente, é  $\lambda_e = c/\nu_e = 514 \text{ nm}$ , que está na região do visível (luz verde). Assim, qualquer comprimento de onda menor do que este deve ejetar elétrons do lítio.

b) A potência  $P_{\text{alvo}}$  da radiação que atinge o alvo de área  $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$  do lítio será

$$P_{\text{alvo}} = \frac{A}{4\pi R^2} P_0 = \frac{10^{-4}}{4\pi (1)^2} (1 \text{ W}) \approx 8,0 \times 10^{-6} \text{ W}.$$

A energia total  $E$  dos fótons que atingem o alvo durante um tempo  $\Delta t = 1 \mu\text{s}$  é

$$E = P_{\text{alvo}} \Delta t = 8,0 \times 10^{-6} \text{ J} = 5,0 \times 10^{13} \text{ eV},$$

pois  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Se cada fóton tem uma energia igual a função trabalho do lítio  $w_0 = 2,42 \text{ eV}$ , então

$$n_{\text{fótons}} = \frac{E}{w_0} = \frac{5,0 \times 10^{13} \text{ eV}}{2,42 \text{ eV}} \approx 2,1 \times 10^{13} \text{ fótons}.$$

Isso mostra que a concentração de fótons que atinge o metal é extremamente grande mesmo que a intensidade seja pequena.

## 2.6 - Efeito Compton.

Em 1923, a natureza corpuscular da radiação foi definitivamente comprovada por Arthur Holly Compton, observando variações de comprimentos de onda da radiação, resultantes do espalhamento ou colisão por alvos de átomos pesados. A experiência de Compton mostrada na Fig. 2.16, consiste na incidência de um feixe de raios X, de comprimento de onda  $\lambda_0$ , sobre um alvo de grafite.

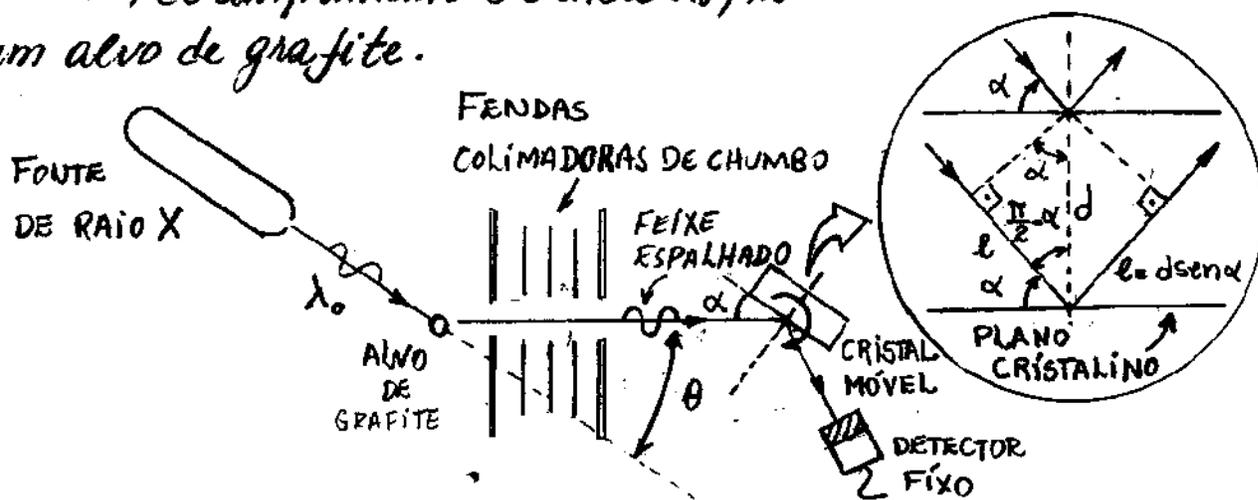


Fig. 2.16 - Diagrama da experiência de Compton.

A função do cristal no experimento é identificar os comprimentos de onda do feixe espalhado pela condição de interferência construtiva nos planos cristalinos

$$\lambda = 2d \sin \alpha \quad (2.54)$$

denominada, neste caso, condição de Bragg, onde  $d$  é a distância entre os planos cristalinos e  $\alpha$  é o ângulo do feixe em relação à superfície do cristal, como mostrado na Fig. 2.16.

As intensidades  $I$  dos raios X espalhados, foram medidas como função dos comprimentos de onda, para vários ângulos  $\theta$  de espalhamento. A Fig. 2.17 mostra os resultados obtidos. Observa-se que, embora o feixe incidente consiste de um único comprimento de onda  $\lambda_0$ , os raios X espalhados tem máximos de intensidades em dois comprimentos de onda. Um dos comprimentos de onda é o próprio  $\lambda_0$  incidente e o outro, representado por  $\lambda_1$ , é maior do que  $\lambda_0$ . Este fenômeno é conhecido como efeito Compton e a quantidade  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$  é denominada de deslocamento Compton. A Fig. 2.17 mostra que  $\Delta\lambda$  depende do ângulo  $\theta$ , segundo o qual os raios X espalhados são analisados.

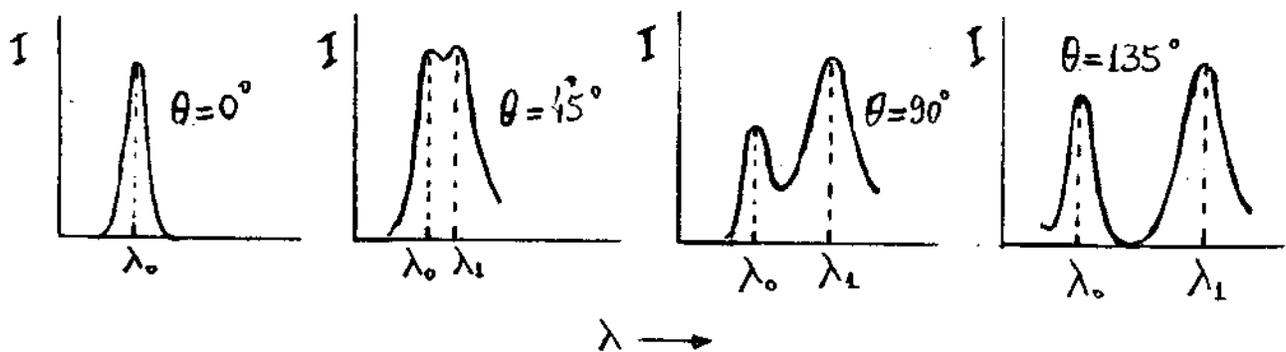


Fig. 2.17- Espectros obtidos no experimento de Compton.

A presença do comprimento de onda  $\lambda_1$  não pode ser explicada se os raios X forem tratados como ondas eletromagnéticas clássicas. Classicamente, os elétrons livres do grafite oscilam com a mesma frequência  $\nu$  da onda incidente. Esses elétrons, como qualquer carga, devem irradiar ondas eletromagnéticas com a mesma

frequência  $\nu$ . Assim, o modelo ondulatório clássico prevê somente um comprimento de onda no espalhamento da radiação.

Para explicar seus resultados experimentais, Compton assumiu que os raios X incidentes fossem formados por fótons de energia  $E = h\nu$ , que colidem com os elétrons do alvo da mesma forma que bolas num jogo de bilhar. Nesse caso, os fótons são considerados como partículas de massa de repouso nula ( $m_0 = 0$ ), tal que, a equação relativística  $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$ , permite calcular o momento  $p$  do fóton como

$$p = E/c = h\nu/c = h/\lambda, \quad (2.55)$$

onde  $\lambda = c/\nu$  é o comprimento de onda do fóton. É importante mencionar que a equação  $p = E/c$  é também prevista na teoria clássica de Maxwell da radiação. Entretanto, nesse caso,  $p$  e  $E$  são definidas como grandezas por unidade de volume de radiação, não exibindo necessariamente o caráter corpuscular da radiação. A Fig. 2.18 mostra o espalhamento de um fóton por um elétron de acordo com o modelo de Compton.

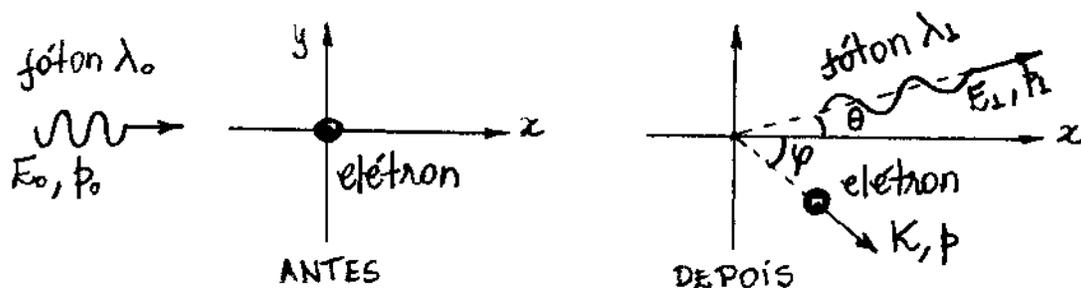


Fig. 2.18 - Espalhamento Compton de um fóton por um elétron.

Deve-se mencionar que, diferentemente do efeito fotoelétrico, no modelo de Compton o fóton é espalhado em vez de simplesmente absorvido.

Como o fóton e o elétron movem-se com velocidades altas, então o problema deve ser tratado do ponto de vista da teoria da relatividade. O fóton de energia total  $E_0$  e momento  $p_0$ , colide com o elétron de energia de repouso  $m_0c^2$ . O fóton é, então, espalhado de um ângulo  $\theta$  e se afasta com energia total  $E_1$  e momento  $p_1$ , enquanto que o elétron recua com energia cinética  $K$  e momento  $p$ , formando um ângulo  $\varphi$  com a direção horizontal.

A conservação do momento fornece

$$p_0 = p_1 \cos \theta + p \cos \varphi \Rightarrow p_0 - p_1 \cos \theta = p \cos \varphi$$

e

$$p_1 \sin \theta = p \sin \varphi .$$

Elevando ao quadrado essas equações e, em seguida, somando-as, obtêm-se

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos \theta = p^2 . \quad (2.56)$$

A conservação da energia total relativística fornece

$$E_0 + m_0c^2 = E_1 + K + m_0c^2$$

ou

$$E_0 - E_1 = K$$

ou ainda, como  $E_0 = p_0c$  e  $E_1 = p_1c$ ,

$$c(p_0 - p_1) = K . \quad (2.57)$$

Substituindo  $E = K + m_0 c^2$  na equação  $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$ , para o elétron, obtêm-se

$$(K + m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

ou

$$K^2 + 2K m_0 c^2 = p^2 c^2$$

ou ainda

$$\frac{K^2}{c^2} + 2K m_0 = p^2 \quad (2.58) \leftarrow$$

Substituindo  $p^2$  da eq. (2.56) e  $K$  da eq. (2.57) na eq. (2.58), obtêm-se

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0 c (p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cancel{p_0^2} + \cancel{p_1^2} - 2p_0 p_1 + 2m_0 c (p_0 - p_1) = \cancel{p_0^2} + \cancel{p_1^2} - 2p_0 p_1 \cos \theta$$

ou

$$m_0 c (p_0 - p_1) = p_0 p_1 (1 - \cos \theta)$$

ou ainda

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad \leftarrow$$

Multiplcando ambos os lados desta equação por  $h$  e aplicando as expressões  $\lambda_1 = h/p_1$  e  $\lambda_0 = h/p_0$ , obtêm-se o deslocamento Compton como

$$\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad (2.59)$$

onde

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,0243 \text{ \AA} \quad (2.60)$$

é denominado de comprimento de onda Compton para o elétron.

Observa-se que  $\Delta\lambda$  só depende do ângulo de espalhamento  $\theta$ , variando desde zero, para  $\theta=0$  (colisão de "raspad") até  $2h/m_0c = 0,049\text{\AA}$ , para  $\theta=180^\circ$  (colisão frontal). A eq. (2.59) está de acordo com os resultados experimentais de Compton, dados na Fig. 2.17.

A eq. (2.59) explica também a existência do primeiro máximo nos experimentos de Compton, mostrados na Fig. 2.17. O motivo está associado aos elétrons que estão fortemente ligados aos átomos do alvo e que também participam do processo de colisão. Se um elétron de massa  $m_0$  não é ejetado de um átomo de massa  $M_0$ , quem retem durante a colisão é o próprio átomo. Nesse caso, a massa característica para o processo é a massa  $M_0$  do átomo, que deve substituir a massa eletrônica  $m_0$ , na eq. (2.60). Como  $M_0 \gg m_0$ , em particular  $M_0 \approx 22000 m_0$  para o carbono, vê-se que  $\Delta\lambda$  é extremamente pequeno, de modo que o comprimento de onda do fóton espalhado permanece praticamente inalterado. Assim, no efeito Compton, alguns fótons são espalhados por elétrons que são liberados na colisão (esses fótons têm seus comprimentos de onda modificados). Outros fótons são espalhados por elétrons que permanecem ligados após a colisão (esses fótons não têm seus comprimentos de onda modificados).

O processo de espalhamento de fótons, no qual o comprimento de onda não é alterado, é denominado espalhamento Thomson, pois já tinha sido observado e explicado por Joseph John Thomson em 1900, utilizando a teoria eletromagnética

clássica. Embora a explicação clássica do espalhamento Thomson seja diferente da explicação quântica, ambas explicam o mesmo fato experimental. Nesse contexto, o espalhamento Thomson é um caso onde resultados clássicos e quânticos se equivalem.

Existem regiões do espectro eletromagnético onde o espalhamento Thomson é dominante e regiões onde o espalhamento Compton é dominante. Se por exemplo, a radiação incidente está abaixo da região do visível (infravermelho, microondas, ou rádio), então  $\Delta\lambda \sim 0$ , pois difícilmente um elétron é liberado na colisão. Nesse caso, a onda espalhada terá um comprimento de onda igual ao comprimento de onda da onda incidente dentro da precisão experimental. Assim, a medida que  $\lambda \rightarrow \infty$ , os resultados quânticos são equivalentes aos resultados clássicos e o espalhamento Thomson é dominante. A medida que a radiação incidente se aproxima da região dos raios X, o espalhamento Compton começa a se tornar importante. Na região dos raios X onde  $\lambda \rightarrow 0$ , a energia do fóton é tão grande que um elétron sempre é liberado na colisão e o espalhamento Compton torna-se dominante. Assim, é na região de pequenos comprimentos de onda que a teoria clássica deixa de explicar o espalhamento da radiação, da mesma forma que é também nessa região que as previsões clássicas não explicam o espectro de radiação de corpo negro.

### Exemplo 2.5 - Eisberg 02.16 (a) - FACULTATIVO

Fótons de comprimento de onda  $\lambda_0 = 0,024 \text{ \AA}$  incidem sobre elétrons livres. Calcule o comprimento de onda  $\lambda_1$  de um fóton que é espalhado de um ângulo  $\theta = 30^\circ$  em relação à direção de incidência, e a energia cinética transferida ao elétron.

O deslocamento Compton para  $\theta = 30^\circ$  será

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta) = 0,0243(1 - \cos 30^\circ) = 0,003256 \text{ \AA}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - 0,024 = 0,003256 \Rightarrow \lambda_1 \cong 0,027 \text{ \AA}$$

A energia cinética transferida ao elétron, pode ser calculada a partir da eq. (2.57) e do fato que  $p = h/\lambda$ , isto é,

$$K = c(p_0 - p_1) = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

$$= 6,63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \left( \frac{1}{0,024 \times 10^{-10}} - \frac{1}{0,027 \times 10^{-10}} \right)$$

$$= 92,08 \times 10^{-16} \text{ J}$$

ou, como  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ,

$$K \cong 0,057 \text{ MeV}$$

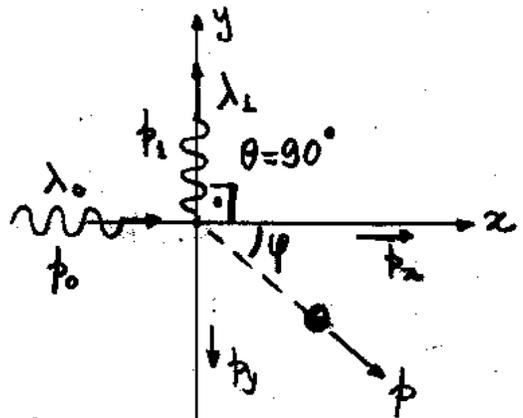
## Exemplo 2.6 - Exemplo do Mullin

Raios X de comprimento de onda  $\lambda_0 = 0,711 \text{ \AA}$ , incidem sobre elétrons livres de uma amostra de grafite. Se os fótons espalhados numa direção  $\theta = 90^\circ$ , são detectados, encontre o módulo  $p$  do momento do elétron e o ângulo  $\varphi$  de recuo desse elétron.

Como  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$ ,  
o comprimento de onda  $\lambda_1$   
do fóton espalhado será

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$= 0,711 + 0,0243(1 - \cos 90^\circ) = 0,735 \text{ \AA}$$



A conservação do momento fornece

$$p_x = p_0 = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{0,711 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

$$p_y = p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{0,735 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

Logo,

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 12,97 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

O ângulo  $\varphi$  de recuo será

$$\text{tg } \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{9,02 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{9,32 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}} \Rightarrow \varphi = 44^\circ$$

## 2.7 - Natureza Dual da Radiação.

A hipótese da existência do fóton para explicar processos que envolvem a interação da radiação com a matéria é satisfatória, todavia, ao mesmo tempo é necessária a concepção ondulatória da radiação para entender os fenômenos de interferência e Difração. Nesse contexto, a radiação se comporta como onda em certas circunstâncias e como partícula em outras. Essa dualidade onda-partícula se evidencia nos trabalhos experimentais de Compton. Por um lado, a presença de um comprimento de onda adicional na interação da radiação com a matéria, só pode ser explicada por um modelo corpuscular da radiação. Por outro lado, a detecção desses comprimentos de onda por estruturas periódicas cristalinas, só pode ser explicada por um modelo ondulatório da radiação.

No início, quando foi sugerida, a natureza dual onda-partícula da radiação eletromagnética foi difícil de ser reconhecida. Entretanto, essa dualidade foi, nos pontos, sendo reconhecida quando a mecânica quântica previa que tal comportamento é, na verdade, uma propriedade de todos os entes físicos.

## 2.8 - Produção de Raios X.

Os raios X, radiação eletromagnética de comprimento de onda menor do que  $1\text{Å}$ , recebeu esse nome porque quando foi descoberto, em 08 de novembro de 1895, por Wilhelm Conrad Röntgen, tinha natureza desconhecida. Os raios X podem ser produzidos quando um feixe de elétrons de alta energia são desacelerados ao atingir um alvo de átomos pesados, como mostra a Fig. 2.19. De acordo com a teoria eletromagnética clássica, a desaceleração dos elétrons causaria emissão de um espectro contínuo de radiação, desde comprimentos de onda zero até infinito.

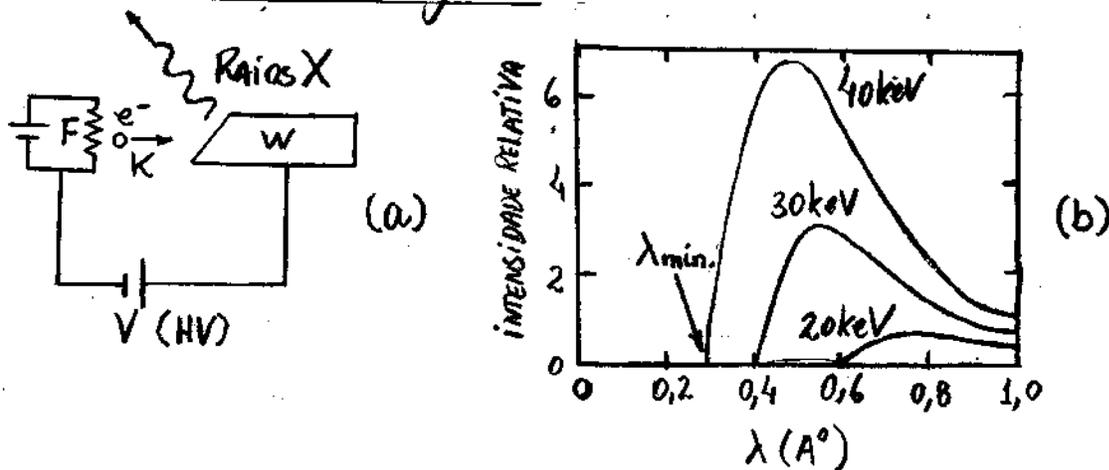


Fig. 2.19-(a) Sistema para produção de raios X, onde F é um filamento aquecido e A é um alvo. (b) Espectros contínuos de raios X para um alvo de Tungstênio W.

Entretanto, como mostrado também na Fig. 2.19 para o caso de um alvo de tungstênio W, o espectro de raios X, observado para diferentes voltagens de aceleração, não está totalmente de acordo com a previsão clássica.

A característica mais importante observada nos espectros da Fig. 2.19, é que para uma dada energia dos elétrons, existe um comprimento de onda mínimo  $\lambda_{\min}$  muito bem definido. Para qualquer material, o valor de  $\lambda_{\min}$  dependerá somente da diferença de potencial  $V$ . Este é o fato que a teoria eletromagnética clássica não pode explicar, pois de acordo com essa teoria, o espectro emitido deveria ser contínuo, não havendo razão para a existência de um limiar de comprimento de onda. Se entretanto o modelo de fótons for adotado para o Raio X, então o fenômeno terá uma explicação satisfatória, como se verifica na sequência.

Um elétron de energia cinética  $K$  é desacelerado na interação com o núcleo pesado do alvo. A energia perdida pelo elétron nesse processo é convertida em um fóton de raio X como mostra a Fig. 2.20. Esse processo é conhecido como bremsstrahlung. Do Alemão, "brems" que significa "freagem" e "strahlung" que significa "radiação".



Fig. 2.20 - Processo de bremsstrahlung para produção de raios X.

Se a energia cinética do elétron após a desaceleração é  $K'$ , então a energia do fóton gerado será:

$$h\nu = K - K' ,$$

ou, em termos de comprimentos de onda,

$$\frac{hc}{\lambda} = K - K' \quad (2.61)$$

Antes de chegar ao repouso, o elétron experimenta vários processos bremsstrahlung. As consequentes perdas de energias cinéticas, resultam no espectro contínuo observado na Fig. 2.19. O fóton de menor comprimento de onda  $\lambda_{\min}$ , é emitido quando um elétron perde toda a sua energia cinética ( $K'=0$ ) num único processo de bremsstrahlung. Nesse caso, a eq. (2.61) torna-se

$$\lambda_{\min} = hc/K,$$

ou, assumindo  $K = eV$ ,

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} \quad (2.62)$$

Assim, o limite mínimo dos comprimentos de onda corresponde a uma conversão completa da energia dos elétrons em fótons de raios X. A eq. (2.62) mostra, explicitamente, que  $\lambda_{\min} \rightarrow 0$  para  $h\nu \rightarrow 0$ , que é a previsão clássica. Entretanto, é o fato de  $h$  ser diferente de zero que confere a  $\lambda_{\min}$  uma manifestação da quantização da energia radiante.

É interessante observar que bremsstrahlung e efeito fotoelétrico são processos inversos. No bremsstrahlung, ocorre emissão de fótons devido a absorção da energia de elétrons, enquanto que no efeito fotoelétrico, ocorre emissão de elétrons devido a absorção da energia de fótons.

### Exemplo 2.7 - FACULTATIVO

Um elétron, acelerado até uma energia cinética  $K = 50 \text{ keV}$  em um tubo de raios X, sofre duas colisões sucessivas antes de atingir o repouso no alvo, emitindo dois fótons de bremsstrahlung no processo, como mostra a Fig. 2.21. O segundo fóton emitido tem um comprimento de onda  $0,95 \text{ \AA}$  a mais do que o primeiro.

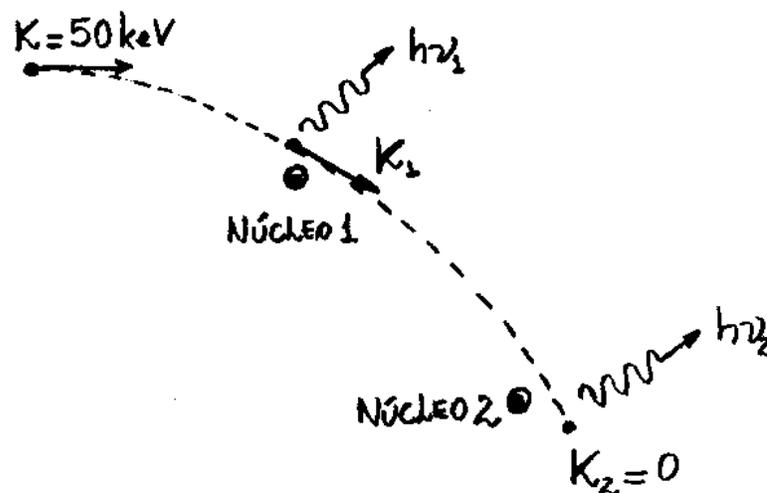


Fig. 2.21 - Processos bremsstrahlung com geração de dois fótons de raios X.

(a) Quais são os comprimentos de onda dos dois fótons? (b) Qual é a energia do elétron após a emissão do primeiro fóton?

De acordo com a lei da conservação da energia, tem-se

$$\text{NÚCLEO 1} \rightarrow K = h\nu_1 + K_1 \quad ; \quad \text{NÚCLEO 2} \rightarrow K_1 = h\nu_2$$

(a) Combinando as equações anteriores e adotando  $\lambda_2 = \lambda_1 + 0,95 \text{ \AA}$ , obtém-se

$$K = h\nu_1 + h\nu_2 = h\left(\frac{c}{\lambda_1} + \frac{c}{\lambda_2}\right) = hc\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\right)$$

$$\Rightarrow K = hc\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_1 + 0,95}{\lambda_1(\lambda_1 + 0,95)}\right] = hc\left(\frac{2\lambda_1 + 0,95}{\lambda_1^2 + 0,95\lambda_1}\right)$$

ou

$$\frac{K}{hc}\lambda_1^2 + (0,95\frac{K}{hc} - 2)\lambda_1 - 0,95 = 0$$

Como  $\frac{K}{hc} = \frac{50000 \text{ eV}}{12400 \text{ eV}\cdot\text{\AA}} \approx 4,0 \text{ 1/\AA}$ , então

$$4,0\lambda_1^2 + 1,8\lambda_1 - 0,95 = 0$$

cuja solução é

$$\lambda_1 = \frac{-1,8 \pm \sqrt{18,44}}{8} = \frac{-1,8 + 4,3}{8} = 0,31 \text{ \AA}$$

Para o segundo fóton, tem-se

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 0,95 \text{ \AA} = 0,31 \text{ \AA} + 0,95 \text{ \AA} = 1,26 \text{ \AA}$$

$$(b) K_2 = h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{12400 \text{ eV}\cdot\text{\AA}}{1,26 \text{ \AA}}$$

ou

$$K_2 \approx 9,8 \text{ keV}$$

## 2.9 - Produção e Aniquilação de Pares.

No processo de produção de pares, mostrado na Fig. 2.22, um fóton de alta energia perde toda a sua energia  $h\nu$  numa colisão com um núcleo, criando um par elétron-pósitron. O pósitron é uma partícula que tem as mesmas propriedades do elétron, exceto o  sinal de sua carga e seu momento magnético, que são opostos ao do elétron.

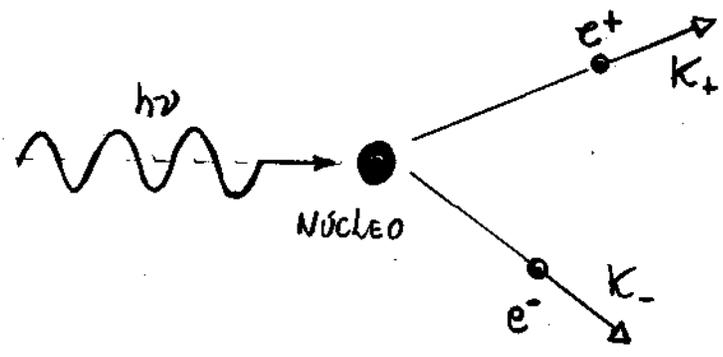


Fig. 2.22 - Processo de produção de pares.

Na produção de pares o seio do núcleo é desprezível. Assim, a conservação da energia relativística fornece

$$h\nu = K_- + K_+ + 2m_0c^2, \quad (2.63)$$

onde  $K_-$  e  $K_+$  são as energias cinéticas do elétron e do pósitron, respectivamente. Observa-se que as duas partículas tem a mesma energia de repouso  $m_0c^2$ . O pósitron tem uma energia cinética um pouco maior do que a energia cinética do elétron por causa da repulsão coulombiana do pósitron e atração do elétron com o núcleo.

Da eq. (2.63) observa-se que a energia mínima necessária para um fóton criar um par elétron-positron é  $2m_0c^2$ , ou 1,02 MeV, correspondente a um comprimento de onda 0,012 Å. Logo, o processo de produção de pares é um fenômeno de alta energia, com fótons nas regiões dos raios X, ou raios  $\gamma$ , do espectro eletromagnético. Na natureza, pares elétron-positrons são produzidos por fótons de raios cósmicos (raios  $\gamma$ ) e em laboratório por fótons de bremsstrahlung (raios X), obtidos em aceleradores de partículas. Resultados experimentais confirmam a teoria quântica para o processo de produção de pares. Não existe qualquer explicação satisfatória para o fenômeno na teoria clássica.

Um processo inverso ao processo de produção de pares ocorre quando um elétron e um positron estão próximos um do outro, formando um sistema ligado, ou "átomo", chamado positrônio. O positrônio tem um tempo de vida extremamente curto, da ordem de  $10^{-10}$  s. Após esse intervalo de tempo, as duas partículas se fundem, produzindo energia radiante, num processo denominado de aniquilação de pares, mostrado na Fig. 2.23.



Fig. 2.23 - Processo de aniquilação de pares.

Como o momento inicial é zero, não é possível a criação de apenas um fóton, pois um único fóton não poderia ter momento nulo. A criação de dois fótons, mostrado na Fig. 2.23, é mais provável, embora seja possível também a formação de três fótons.

No processo de aniquilação de pares para formação de dois fótons, a conservação do momento fornece  $p_1 = p_2$  ou  $h\nu_1/c = h\nu_2/c$  ou ainda

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad (2.64)$$

indicando que os dois fótons são idênticos. Por outro lado, a conservação da energia relativística fornece  $m_0c^2 + m_0c^2 = h\nu + h\nu$  ou

$$h\nu = m_0c^2 = 0,51 \text{ MeV}. \quad (2.65)$$

Como  $E = pc$ , pode-se obter o momento  $p$  do fóton em termos da massa de repouso  $m_0$  das partículas como

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{m_0c^2}{c} = m_0c \quad (2.66)$$

de forma que, o comprimento de onda  $\lambda$  será

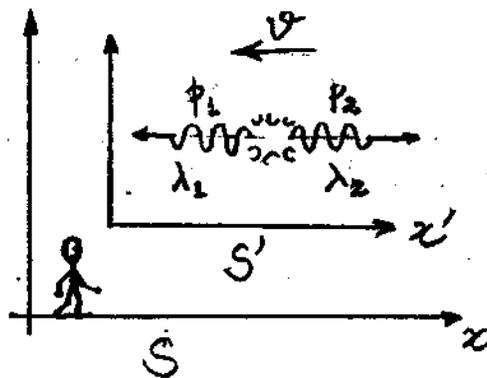
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0c} = 0,024 \text{ \AA}. \quad (2.67)$$

A semelhança com o comprimento de onda Compton  $\lambda_c$  é mera coincidência. Se o par tivesse, inicialmente, alguma energia cinética, a energia do fóton excederia aos 0,51 MeV e seu comprimento de onda seria ainda menor do que 0,024 \AA.

### Exemplo 2.8 - Exemplo do Eisberg - FACULTATIVO.

Considere um processo de aniquilação de pares ocorrendo num referencial  $S'$  que se move, para a esquerda, com velocidade  $v$  em relação a um referencial fixo  $S$ . Determine os comprimentos de onda dos fótons medidos por um observador que está sobre o eixo  $x$  do referencial  $S$ .

Nesse caso, como o par se move para a esquerda com velocidade  $v$ , o seu momento inicial será  $2mv$ , em vez de zero como antes. Nesse caso, a conservação do momento fornece



$$2mv = p_1 - p_2 \Rightarrow 2mv c = p_1 c - p_2 c \quad (2.68)$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são os momentos lineares dos fótons no referencial  $S$ . Por outro lado, agora o par tem energia total relativística inicial de  $2mc^2$ , em vez da energia da energia de repouso  $2m_0c^2$  e, como  $E = pc$  para um fóton, a conservação da energia fornece

$$2mc^2 = p_1 c + p_2 c \quad (2.69)$$

Somando as eqs. (2.68) e (2.69) e adotando  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , obtém-se

$$p_1 = m(c+v) = m_0 \frac{(c+v)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0 c \sqrt{\frac{(c+v)^2}{(c-v)(c+v)}} = m_0 c \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Substituindo esse resultado na eq. (2.67) obtém-se o comprimento de onda para o primeiro fóton, como

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \lambda \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}, \quad (2.70)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda dos fótons no referencial  $S'$ .  
 Similarmente, subtraindo as eq.s. (2.68) e (2.69), obtém-se o comprimento de onda do segundo fóton no referencial  $S$ , como

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (2.71)$$

Assim, os fótons não devem ter o mesmo comprimento de onda, pois estes são alterados pelo efeito Doppler, em relação ao valor  $\lambda$  que possuem no referencial de repouso  $S'$ . Se as partículas aproximam do observador, ele detectará o fóton 1 com um comprimento de onda menor do que o comprimento de onda de repouso, e detectará o fóton 2 com um comprimento de onda maior do que o comprimento de onda do repouso.

# Lista de Exercícios

## Questões conceituais

- 1- Um corpo negro tem que ser necessariamente negro? Justifique o termo corpo negro!
- 2- Uma das primeiras tentativas de se explicar a distribuição espectral de um corpo negro foi feita por Rayleigh – Jeans, a partir de conceitos clássicos da termodinâmica. Em que região do espectro eletromagnético a lei de Rayleigh – Jeans não se verifica, e que fato ficou conhecido como catástrofe do ultravioleta?
- 3- Um pedaço de metal brilha com uma cor avermelhada a  $1100\text{ K}$ . Entretanto, nessa mesma temperatura, um pedaço de quartzo não brilha. Justifique este fato sabendo-se que, ao contrário do metal, o quartzo é transparente à luz visível.
- 4- Na tentativa de explicar os resultados experimentais observados no espectro de um corpo negro, Planck concluiu que o problema estava principalmente num conceito clássico da termodinâmica. Qual seria esse conceito, e que alteração foi sugerida por Planck? Essa alteração invalida conceitos clássicos da termodinâmica, ou redefine esses conceitos de modo a incluir os casos clássicos como particulares? Justifique!
- 5- Em muitos sistemas clássicos as frequências possíveis são quantizadas, tal como por exemplo a propagação de ondas sonoras num tubo ressonante. Nestes casos, a energia também é quantizada? Justifique!
- 6- Nas experiências do efeito fotoelétrico, a fotocorrente é proporcional à intensidade da luz. Esse resultado isolado pode ser usado para distinguir as teorias quântica e clássica? Justifique!
- 7- Por que mesmo para radiações incidente monocromáticas os fotoelétrons são emitidos com diferentes velocidades?
- 8- O limiar fotoelétrico é considerado como sendo a objeção mais evidente da teoria ondulatória. Explique essa afirmativa!
- 9- É mais fácil observar o efeito Compton com alvos compostos de átomos com número atômico alto ou baixo? Justifique! O efeito Compton pode ser observado com luz visível? Justifique! Discuta o espalhamento Thomson, comparando-o com o espalhamento Compton.
- 10- Discuta o processo de *bremstrahlung* como sendo o inverso do efeito Compton e do efeito fotoelétrico. Pensando nas energias dos elétrons num tubo de televisão, você esperaria que esse eletrodoméstico poderia emitir raios  $X$ ? Justifique! Quais efeitos que se tem sobre o espectro resultante quando se diminui a voltagem num tubo de raios  $X$ ?

## Problemas

- 1- Em que comprimento de onda um radiador de cavidade a  $6000\text{ K}$  irradia mais por unidade de comprimento de onda? Resp.:  $4830\text{ \AA}$ .
- 2- Faça uma estimativa para encontrar o comprimento de onda em que corpo humano emite sua radiação térmica máxima.
- 3- Em uma explosão termonuclear, a temperatura no centro da explosão é momentaneamente  $10^7\text{ K}$ . Calcule o comprimento de onda para o qual a radiação emitida é máxima.

4- A uma dada temperatura,  $\lambda_{\max} = 6500 \text{ \AA}$  para uma cavidade de corpo negro. Qual será o valor de  $\lambda_{\max}$  se a intensidade de radiação total  $I_T$  for duplicada? Resp.  $\lambda_{\max} = 546,6 \text{ nm}$ .

5- (a) Utilizando a relação  $P(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon/k_B T}}{k_B T}$  mostre que  $\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon = k_B T$ . (b) Mostre que o ponto de máximo da função  $\varepsilon P(\varepsilon)$  ocorre para  $\varepsilon = k_B T$ .

6- Na determinação clássica da energia total média de cada modo da radiação no interior de uma cavidade ressonante, adotou-se a lei da equipartição da energia. De acordo com essa lei, moléculas de um gás que se movem em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , a energia cinética média por grau de liberdade da molécula é  $\frac{1}{2} k_B T$ . Essa lei poderia ser aplicada ao problema do corpo negro desde que se adotasse um modelo mecânico de oscilador harmônico para as partículas que compõe as paredes da cavidade, como se fossem pequenos sistemas massa – molas, de modo que a energia potencial também deveria ser incluída na determinação da energia total. A vibração dessas partículas, por consequência da temperatura, daria origem as vibrações dos campos elétricos associados as ondas eletromagnéticas transversais. Baseado nesse modelo mecânico, conclui-se que a energia total média por grau de liberdade deveria ser  $k_B T$ , isto é, o dobro da energia cinética média que se esperaria para cada partícula oscilante. Considerando-se que a energia total de um oscilador harmônico simples é  $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ , onde  $k$  é a constante elástica da mola,  $m$  é a massa da partícula,  $v$  sua velocidade e  $x = x_0 \cos \omega t$  sua posição em cada instante de tempo, mostre que essa energia total é o dobro da energia cinética média.

7- O máximo da distribuição espectral de intensidade de radiação para uma certa cavidade ocorre para um comprimento de onda de  $27,0 \mu\text{m}$  (na região do infravermelho). A temperatura da cavidade é aumentada até que a potência total irradiada se torne três vezes maior. (a) Determine a nova temperatura da cavidade. (b) Determine a nova posição do máximo da distribuição espectral.

8- A energia solar que atinge a parte superior da atmosfera da terra é  $1360 \text{ W/m}^2$ , a chamada **constante solar**. (a) Supondo que a terra se comporte como um corpo negro de temperatura uniforme use a equação de Stefan - Boltzmann para estimar a temperatura de equilíbrio da terra. (b) Se o raio do sol é da ordem de  $6,96 \times 10^8 \text{ m}$ , a distância da terra ao sol é de aproximadamente  $1,50 \times 10^{11} \text{ m}$  e supondo que o sol irradie como um corpo negro, use a equação de Stefan - Boltzmann para estimar a temperatura na sua superfície. Resp.: (a)  $T = 393,5 \text{ K}$ , (b)  $T_{\text{sol}} = 5759 \text{ K}$ .

9- Um radiador de cavidade a  $6000 \text{ K}$  tem um orifício de  $10 \text{ mm}$  de diâmetro feito em sua parede. Ache a potência irradiada através do orifício no intervalo de comprimentos de onda entre  $5500 \text{ \AA}$  a  $5510 \text{ \AA}$ . (Sugestão:

Usualmente, a intensidade de radiação seria calculada por  $I = \int_{5500 \text{ \AA}}^{5510 \text{ \AA}} I(\lambda) d\lambda$  multiplicada pela área do orifício.

Entretanto,  $\Delta\lambda$  é pequeno o suficiente para permitir uma aproximação do tipo  $I = \text{área abaixo da curva} \approx I(\bar{\lambda}) \Delta\lambda$ , em que  $\bar{\lambda}$  é o valor médio entre os comprimentos de onda  $5500 \text{ \AA}$  e  $5510 \text{ \AA}$ , e  $I(\bar{\lambda})$  pode ser calculada utilizando a fórmula de Planck para a radiação de corpo negro).

Resp.:  $P \approx 7,50 \text{ W}$ .

10- Obtenha a lei do deslocamento de Wien,  $\lambda_{m\acute{a}x}T = 2,9 \times 10^{-3} K \times m$ , a partir da distribuição espectral de densidade de energia de radiação de um corpo negro obtida por Planck  $u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$ . (Sugestão:

faça a substituição de variável  $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ , e reescreva a distribuição espectral de densidade de energia de

radiação na forma  $u(\lambda) = \frac{8\pi(k_B T)^5}{h^4 c^4} g(x)$ , onde  $g(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}$  descreve a forma universal do espectro de um

corpo negro para qualquer temperatura. Encontre a condição para o qual a função  $g(x)$  é máxima, derivando-a em relação a  $x$  e igualando a zero. Mostre que a operação resulta numa equação transcendental, isto é, na igualdade entre duas funções cuja a solução é gráfica. Mostre que a solução representada pelo ponto de

interseção entre os dois gráficos é  $x_{m\acute{a}x} \approx 4,965$ . Use esse valor na equação  $x_{m\acute{a}x} = \frac{hc}{\lambda_{m\acute{a}x} k_B T}$  e obtenha o resultado procurado).

11- (a) A energia necessária para que um ele tron seja removido do sódio é  $2,3 eV$ . Pode-se observar o efeito fotoelétrico no sódio utilizando-se radiação de comprimento de onda  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ? (b) Qual é o comprimento de onda limiar para a emissão fotoelétrica do sódio? Resp.: (b)  $5400 \text{ \AA}$ .

12- Radiação de comprimento de onda  $2000 \text{ \AA}$  incide sobre uma superfie de alumínio. Para o alumínio, são necessários  $4,2 eV$  para remover um ele tron. Qual é a energia cinética do fotoele tron emitido (a) mais rápido e (b) mais lento? (c) Qual é o potencial frenador? (d) Qual o comprimento de onda limiar para o alumínio? (e) Se a intensidade da luz incidente é  $2,0 W / m^2$ , qual é o número médio de fótons por unidade de tempo e por unidade de área que atinge a superfie?

13- O potencial frenador para fotoele trons emitidos por uma superfie atingida por luz de comprimento de onda  $\lambda = 4910 \text{ \AA}$  é  $0,71 V$ . Quando se muda o comprimento de onda da radiação incidente, encontra-se para este potencial um valor de  $1,43 V$ . Qual é o novo comprimento de onda?

14- A função trabalho para uma superfie de Lítio é  $2,3 eV$ . Faça um esboço do gráfico do potencial frenador  $V_0$  em função da frequência da luz incidente para uma tal superfie, indicando suas características importantes.

15- Numa experiência fotoelétrica na qual se usa luz monocromática e um fotocatodo de sódio, encontra-se um potencial frenador de  $1,85 V$  para  $\lambda = 3000 \text{ \AA}$  e de  $0,82 V$  para  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ . Destes dados, determine (a) o valor da constante de Planck, (b) a função trabalho do sódio, e (c) o comprimento de onda limiar para o sódio? Resp.: (a)  $6,6 \times 10^{-34} J \times s$ , (b)  $2,3 eV$ , (c)  $5400 \text{ \AA}$ .

16- Considere uma incidência de luz sobre uma placa fotográfica. A luz será "gravada" se houver uma dissociação de moléculas de  $AgBr$  da placa. A energia mínima necessária para dissociar essas moléculas é da ordem de  $10^{-19} J$ . Calcule o comprimento de onda limiar, acima do qual a luz não vai sensibilizar a placa fotográfica.

17- Fótons de comprimento de onda  $\lambda = 0,024 \text{ \AA}$  incidem sobre ele trons livres. (a) Ache o comprimento de onda de um fóton espalhado de um ângulo de  $30^\circ$  em relação à direção de incidência e a energia cinética transmitida ao ele tron. Resp.: (a)  $0,027 \text{ \AA}$ ,  $0,057 MeV$ , (b)  $0,060 \text{ \AA}$ ,  $0,31 MeV$ .

18- Um fóton de energia inicial  $1,0 \times 10^5 eV$  que se move no sentido positivo do eixo x, incide sobre um elétron livre em repouso. O fóton é espalhado de um ângulo de  $90^\circ$ , dirigindo-se no sentido positivo do eixo y. Ache as componentes do momento do elétron.

19- Qual é a energia cinética máxima possível de um elétron envolvido no processo Compton em termos da energia do fóton incidente  $h\nu$  e da energia de repouso do elétron  $m_0c^2$ ?

20- Determine a variação máxima do comprimento de onda no espalhamento Compton de fótons por prótons. Resp.:  $2,64 \times 10^{-5} A^\circ$ .

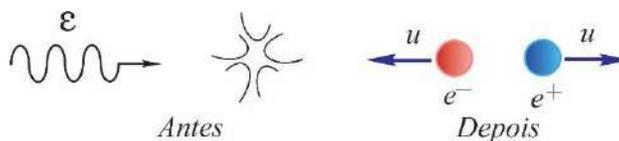
21- (a) Qual a voltagem mínima que deve ser aplicada a um tubo de raios X para que seja produzido raios X com o comprimento de onda Compton do elétron? E com o comprimento de onda de  $1A^\circ$ ? (b) Qual é a voltagem mínima necessária para que a radiação de *bremsstrahlung* resultante seja capaz de produzir um par?

22- (a) Mostre que o comprimento de onda mínimo no espectro contínuo de raios X é dado por  $\lambda_{\min} = 12,4 A^\circ/V$ , onde V é a voltagem aplicada em quilovolts. (b) Se a voltagem aplicada a um tubo de raios X é  $186 KV$ , qual deve ser o valor de  $\lambda_{\min}$ ? Resp.: (a)  $\lambda_{\min} \approx 12,4 A^\circ/V$ , (b)  $\lambda_{\min} \approx 0,067 A^\circ$ .

23- Um raio  $\gamma$  de comprimento de onda  $0,005 nm$  incide sobre um elétron inicialmente em repouso e é retro espalhado. Calcule o comprimento de onda do raio  $\gamma$  espalhado e a energia cinética, em  $KeV$ , do elétron recuado.

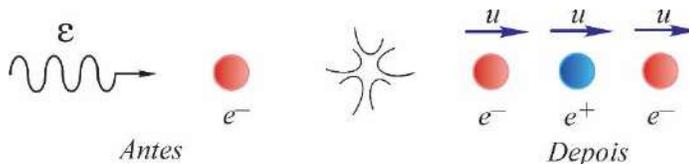
24- Um raio  $\gamma$  de comprimento de onda  $0,0062 nm$  incide sobre um elétron inicialmente em repouso. O elétron é recuado com energia cinética de  $K = 60 KeV$ . (a) Calcule a energia do raio  $\gamma$  espalhado, em  $KeV$ . (b) Determine a direção de espalhamento. Resp.:  $140 keV$ ,  $96^\circ$ .

25- Um raio  $\gamma$  cria um par elétron – pósitron como mostra a Figura abaixo. Mostre diretamente que, sem a presença de uma terceira partícula (o núcleo), para absorver uma parte do momento, a energia e o momento *não se conservam simultaneamente*.



(Sugestão: Iguale as energias e mostre que isto implica em momentos diferentes antes e depois da interação).

26- Um raio  $\gamma$  pode produzir um par elétron - pósitron na vizinhança de um elétron em repouso, na forma  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$ , da mesma maneira como ocorre nas vizinhanças de um núcleo atômico. A Figura abaixo mostra, de modo simplificado, como este processo de interação pode ser representado. Mostre que nesse caso a energia mínima é  $4m_0c^2$ .



(Sugestão: Use as leis da conservação do momento linear e da energia, para mostrar que  $u = \frac{\varepsilon c}{\varepsilon + m_0 c^2}$ , ou

$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\varepsilon + m_0 c^2}{\sqrt{2\varepsilon m_0 c^2 + m_0^2 c^4}}$ . Substitua esses resultados na equação resultante da conservação do momento

e mostre que  $\varepsilon = \frac{9m_0 c^2 - m_0 c^2}{2} = 4m_0 c^2$ ).

# CAPÍTULO 3 – MODELOS ATÔMICOS E A VELHA TEORIA QUÂNTICA

## ÍNDICE

- 3.1- Primórdios da Teoria Atômica
- 3.2- Modelo Atômico de Dalton
- 3.3- Modelo Atômico de Thomson
- 3.4- Modelo Atômico de Rutherford
  - 3.4.1- Trajetória da Partícula  $\alpha$  Espalhada
  - 3.4.2- Cálculo Estatístico do Espalhamento de Partículas  $\alpha$
  - 3.4.3- Cálculo da Seção de Choque de Espalhamento - FACULTATIVO
- 3.5- Espectro Atômico
- 3.6- Modelo Atômico de Bohr
- 3.7- Experimento de Franck e Hertz
- 3.8- Integral de Ação e Regras da Quantização
- 3.9- Modelo Atômico de Sommerfeld

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **4 aulas de quatro créditos**.

## CAPÍTULO 3

### MODELOS ATÔMICOS E A VELHA TEORIA QUÂNTICA.

#### 3.1. Primórdios da Teoria Atômica.

Em 400 a.c. Demócrito de Abdera propôs que a matéria ou "ente" fosse formada por partículas indivisíveis, que em grego significa "átomos", e que o vácuo fosse um "não ente". Para Demócrito, a matéria seria então discreta e composta por combinações de átomos dos quatro elementos (ar, terra, fogo e água). O atomismo grego de Demócrito é a evidência histórica mais antiga sobre a origem da teoria quântica.

Aristóteles, ao contrário de Demócrito, postulou o modelo da matéria contínua, onde a matéria não seria constituída por partículas indivisíveis. Apesar da elegância da teoria atômica de Demócrito, o modelo da matéria contínua de Aristóteles foi adotado pelos filósofos e pensadores até o final do século XVI d.c.

### 3.2. Modelo atômico de Dalton

Durante o início do século XIX, o químico e físico Inglês John Dalton propôs o primeiro modelo atômico da era moderna. Mais precisamente, em 1803 Dalton publicou um trabalho intitulado "Absorption of Gases by Water and other liquids", onde enunciava a lei das pressões parciais, ou lei de Dalton, e reintroduzia o conceito de átomos como partículas indivisíveis.

Em 1808, Dalton propôs o modelo atômico onde o átomo seria uma minúscula esfera maciça, contínua, indivisível e neutra, que ficou conhecido como modelo da bola de biliar. Para Dalton, todos os átomos de um mesmo elemento químico são idênticos. Em 1810 foram publicadas testes de comprovação da lei das pressões parciais de Dalton.

Apesar da simplicidade, foi o modelo atômico de Dalton que inspirou os cientistas a considerar novamente o átomo como uma possível estrutura elementar da natureza.

### 3.3 - Modelo Atômico de Thomson.

Mesmo antes da estrutura atômica ter sido confirmada por experiências, suspeitava-se que os átomos tinham uma estrutura interna formada por partículas carregadas. Várias foram as evidências, observadas antes de 1900, que levaram a esta convicção:

- 1 - Experiência de Faraday sobre eletrólise, que detectava a presença de partículas carregadas, ou íons, em soluções.
- 2 - Emissão de radiação pela matéria, indicando a existência de alguns tipos de oscilações de cargas no interior de sistemas atômicos.
- 3 - Fenômenos radioativos, que demonstravam a habilidade de alguns elementos emitirem partículas carregadas.

O elétron é a partícula carregada mais importante na formação da estrutura da matéria. Essa partícula foi identificada em 1897 por Joseph John Thomson por meio de medições precisas da razão entre a carga e a massa  $e/m$ . Thomson identificou o elétron observando feixes de partículas carregadas, submetidos a campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$ , num tubo de raios catódicos, como mostrado na Fig. 3.1(a).

Elétrons, gerados por um filamento aquecido, são acelerados a partir de um cátodo, por uma determinada diferença de potencial  $V$ .

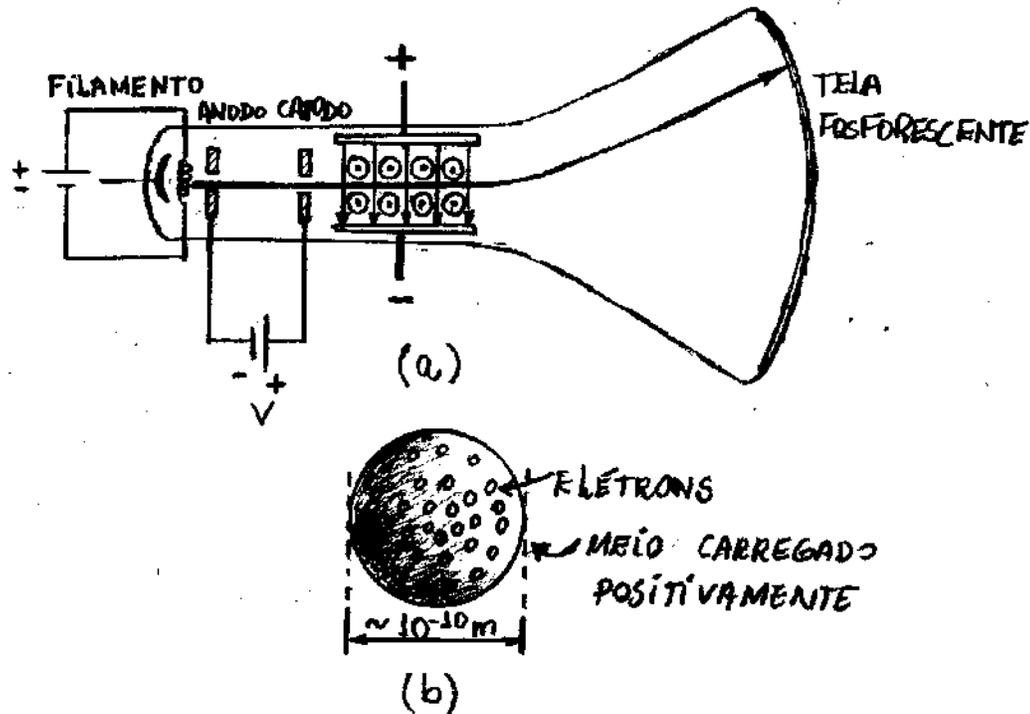


Fig. 3.1. (a) Experimento de Thomson e, (b) modelo atômico do "pudim de ameixas" de Thomson.

A carga negativa do elétron foi identificada observando a deflexão do feixe quando submetido aos campos elétrico e magnético transversais. Thomson determinou a razão  $e/m$  atuando no valor do campo elétrico aplicado, até que as forças elétrica e magnética fossem iguais. Essa condição é alcançada quando a deflexão do feixe deixa de ser observada numa tela fosforescente.

Nas condições de equilíbrio, os átomos são neutros e, nesse caso, o número de cargas negativas é igual ao número de cargas positivas. Como a massa do elétron é muito menor do que a massa do átomo, praticamente toda a massa do átomo, deveria estar associada a massa das cargas positivas.

Com essas considerações, Thomson propôs o seu modelo atômico, segundo o qual os elétrons estariam localizados no interior de uma distribuição contínua de carga positiva. Para ele, a forma da distribuição da carga positiva deveria ser esférica, de diâmetro da ordem de  $10^{-10}$  metros, obtido a partir da densidade de um sólido e do número de Avogadro. Por causa de repulsões mútuas, os elétrons estariam uniformemente distribuídos na esfera de carga positiva como na Fig. 3.1(b), numa configuração conhecida como "pudding de ameixas".

Thomson esperava que as frequências observadas da luz poderia ser explicada a partir dos movimentos periódicos dos elétrons no interior da esfera carregada positivamente. Entretanto, esta concepção não estaria correta como ficaria demonstrado em experiências posteriores.

Em 1911, Ernest Rutherford, ex-aluno de Thomson, demonstrou definitivamente a inviabilidade do modelo atômico de Thomson. Rutherford já tinha ganhado o prêmio Nobel de Química em 1908 pela investigação do decaimento de substâncias radioativas. Entretanto, seu maior desejo

Como um físico, era dar uma contribuição relevante para a física.

Rutherford sabia que as partículas  $\alpha$  eram átomos de Hélio duplamente ionizados, isto é, átomos de He com dois elétrons retirados. Rutherford estudou o espalhamento de partículas  $\alpha$  por películas metálicas delgadas usando a montagem experimental mostrada na Fig. 3.2(a).

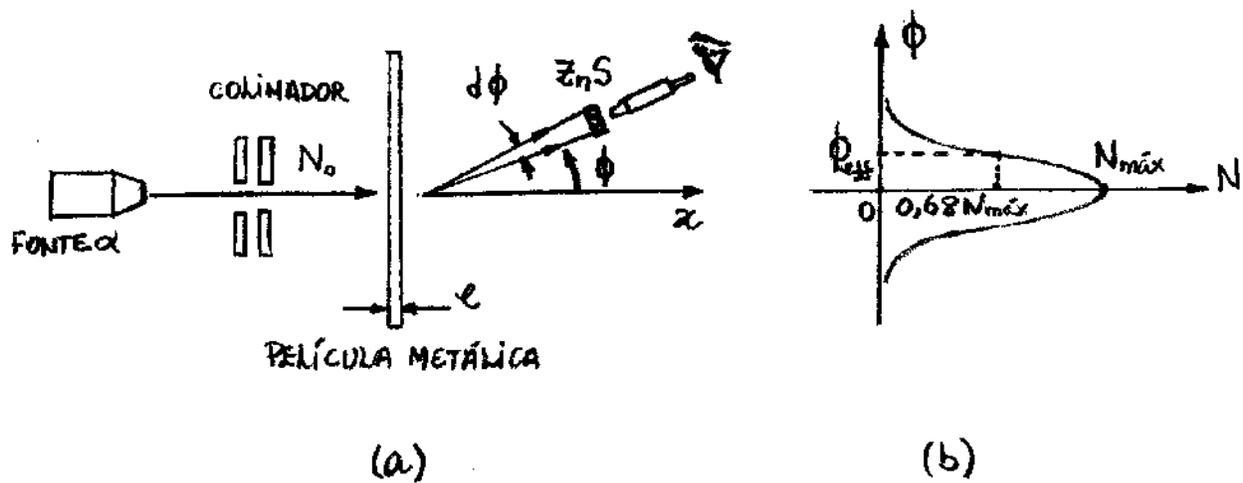


Fig. 3.2- (a) Montagem experimental de Rutherford para estudar o espalhamento de partículas  $\alpha$  por películas metálicas delgadas. (b) Contagem do número  $N$  de partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, espalhadas em função do ângulo de espalhamento  $\phi$ .

As partículas  $\alpha$  são emitidas por uma fonte radioativa e colimadas por um par de diafragmas de chumbo. Com esse procedimento, forma-se um feixe com  $N_0$  partículas  $\alpha$  por unidade de tempo que, ao atingir perpendicularmente a superfície metálica delgada, passa através dela sem grandes dificuldades.

Por causa de forças Coulombianas, as partículas  $\alpha$  sofrem diversas deflexões no interior da película e emergem como um feixe divergente. As partículas  $\alpha$  emergentes são detectadas por um cristal de sulfeto de zinco ( $ZnS$ ), que tem a propriedade de produzir cintilações quando atingido por essas partículas. Utilizando um microscópio, conta-se o número  $N$  de cintilações, ou partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, para vários ângulos de espalhamento  $\phi$ .

O modelo atômico de Thomson pode ser avaliado teoricamente por meio de uma formulação estatística do espalhamento de partículas  $\alpha$  em átomos de Thomson. Pode-se supor o espalhamento de uma partícula  $\alpha$  de um ângulo  $\theta$ , por um único átomo de Thomson, como mostra a Fig. 3.3.

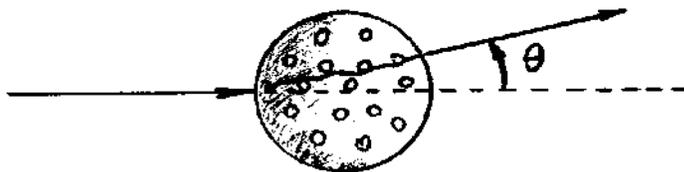


Fig. 3.3 - Espalhamento de uma partícula  $\alpha$  por um átomo de Thomson.

Ao longo de toda a espessura  $l$  da película metálica, o ângulo de espalhamento  $\phi$  pode variar de zero a  $180^\circ$ . Utilizando a teoria estatística; conhecida como "Caminhada aleatória" ("random walk"), é possível fazer previsões sobre a distribuição dos ângulos de espalhamento  $\phi$  de partículas  $\alpha$ , em uma

película metálica formada por átomos de Thomson. De acordo com essa teoria, o número de partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, espalhadas no intervalo angular entre  $\phi$  e  $\phi + d\phi$ , é

$$N(\phi)d\phi = \frac{2N_0}{\phi_{\text{eff}}^2} \phi e^{-\phi^2/\phi_{\text{eff}}^2} d\phi \quad (3.1)$$

onde

$$\phi_{\text{eff}} = \sqrt{n} \theta_{\text{eff}}.$$

Nessa última equação,  $n$  é o número total de átomos espalhadores e  $\phi_{\text{eff}} = \sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$  é o valor efetivo do ângulo de espalhamento  $\phi$ , correspondente a  $N \approx 0,68 N_{\text{máx}}$ , onde  $N_{\text{máx}}$  é o valor máximo de  $N$  e  $\langle \phi^2 \rangle$  é o valor médio de  $\phi^2$ . Ainda na mesma equação, em analogia a  $\phi_{\text{eff}}$ , define-se  $\theta_{\text{eff}} = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$  como o valor efetivo do ângulo de espalhamento  $\theta$  por um único átomo espalhador. A Fig. 3.2(b) mostra o comportamento de  $N$  em função de  $\phi$  de acordo com a eq. (3.1).

Valores de ângulos de espalhamento  $\theta$  podem ser calculados hipoteticamente incidindo partículas  $\alpha$ , uma a uma, em um átomo de Thomson. De posse de um conjunto grande desses valores, é possível determinar o valor máximo  $\theta_{\text{máx}}$  e o valor efetivo  $\theta_{\text{eff}} = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ . Sabe-se que a massa da partícula  $\alpha$  é muito maior do que a massa do elétron e que a sua repulsão coulombiana na distribuição contínua de cargas positivas do átomo de Thomson, deve ser pequena por causa da pequena dimensão atômica ( $\sim 10^{-10}$  m).

Usando como base essas hipóteses, o exemplo 3.1 mostra que o valor efetivo  $\theta_{\text{eff}}$  do ângulo de espalhamento por um único átomo de Thomson não pode ser maior do que  $10^{-4} \text{rd}$ , isto é,

$$\theta_{\text{eff}} \leq 10^{-4} \text{rd}.$$

Supondo uma película metálica de espessura  $l = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$ , é possível calcular o número  $n$  de átomos espalhadores dividindo-se o valor dessa espessura pelo valor aproximado de  $10^{-10} \text{m}$  para o diâmetro atômico, isto é,

$$n = \frac{10^{-6} \text{m}}{10^{-10} \text{m}} = 10^4 \text{ átomos}.$$

Nesse caso, o valor efetivo  $\phi_{\text{eff}}$  para o ângulo de espalhamento  $\phi$  na película metálica será

$$\phi_{\text{eff}} = \sqrt{n} \theta_{\text{eff}} = 10^{-2} \text{rd} \approx 1^\circ$$

Assim, de acordo com o modelo atômico de Thomson, é possível mostrar, a partir da eq. (3.1) com  $\phi_{\text{eff}} \approx 1^\circ$ , que o número de partículas  $\alpha$  espalhadas por ângulos  $\phi$  maiores do que  $90^\circ$  é

$$N(\phi > 90^\circ) = \int_{90^\circ}^{180^\circ} N(\phi) d\phi = N_0 e^{-8100} \approx 0.$$

Com o objetivo de comprovar os resultados teóricos obtidos com o modelo atômico de Thomson, Rutherford realizou uma série de experimentos de espalhamento de partículas  $\alpha$  utilizando uma película de ouro de espessura  $l = 1 \mu\text{m}$ .

Os experimentos de Rutherford consistiam na contagem do número  $N$  de partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, para vários ângulos de espalhamento  $\phi$ . De posse de um grande número de medidas, Rutherford concluiu que, de fato,  $\phi_{\text{eff}} \approx 1^\circ$ . Mas, por outro lado, concluiu que o número de partículas  $\alpha$  espalhadas em ângulos  $\phi$  maiores do que  $90^\circ$  é

$$N(\phi > 90^\circ) \approx 10^{-4} N_0$$

o que está em total desacordo com a previsão teórica, próxima de zero, obtida do modelo atômico de Thomson.

A probabilidade pequena, porém não nula, para o espalhamento de partículas  $\alpha$  em grandes ângulos, não poderia ser aplicada em termos do modelo atômico de Thomson. Rutherford observou que algumas partículas  $\alpha$  eram espalhadas por ângulos muito grandes, até  $180^\circ$ . Para Rutherford, isso era tão inusitado como atirar uma pedra contra um papel de seda e a pedra retornar na direção do atirador.

### Exemplo 3.1 - FACULTATIVO.

Mostrar que o ângulo de espalhamento máximo  $\theta_{\max}$ , num átomo de Thomson não deve ser maior do que  $10^{-4}$  rad.

Para fazer esta estimativa é suficiente utilizar teoria clássica pois, para as partículas  $\alpha$ ,  $v/c \approx 0,05$ . Supõe-se que a deflexão seja devida às forças Coulombianas entre a partícula  $\alpha$  e as cargas das várias partes do átomo. De acordo com a lei de Coulomb, a força devido a uma região do átomo de carga  $dq$  cuja distância à partícula  $\alpha$  é  $r$  será

$$d\vec{F} = K \frac{ze dq}{r^2} \hat{r} \quad (3.2)$$

onde  $\hat{r}$  é o vetor unitário que está na direção da reta determinada pelas posições da carga  $dq$  e da partícula  $\alpha$ ,  $ze$  é a carga da partícula  $\alpha$  e  $K = 9,0 \times 10^9 \text{ Nxm}^2/\text{C}^2$  é a constante eletrostática do vácuo.

Inicialmente seja calcular a deflexão máxima esperada aos elétrons do átomo. Usando as leis de conservação do momento e da energia, não é difícil mostrar que, na colisão de um corpo massivo, movendo inicialmente com velocidade  $\vec{v}$ , com um corpo em repouso de massa muito pequena, a velocidade do corpo leve não pode ser maior do que  $2\vec{v}$ . Como a massa  $m$  do elétron é

muito menor do que a massa  $M$  da partícula  $\alpha$ , então o momento máximo que pode ser transferido ao elétron é  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Esse momento tem que ser igual em módulo ao momento  $\Delta\vec{p}_\alpha$  perdido pela partícula  $\alpha$  durante a colisão, isto é,

$$\Delta\vec{p}_\alpha = 2m\vec{v}.$$

Para calcular a ordem de grandeza do ângulo de espalhamento máximo  $\theta_{\text{máx}}$ , pode-se supor que a variação de momento  $\Delta\vec{p}_\alpha$  seja perpendicular ao momento inicial  $\vec{p}_\alpha$  da partícula  $\alpha$ , como mostra a Fig. 3.4.

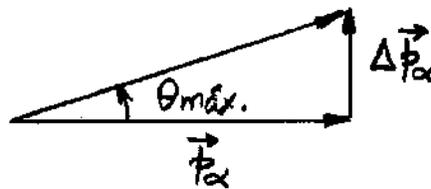


Fig. 3.4 - Ilustração do ângulo de espalhamento máximo  $\theta_{\text{máx}}$  quando uma partícula  $\alpha$  de momento  $\vec{p}_\alpha$  perde o momento  $\Delta\vec{p}_\alpha$ .

Como a partícula  $\alpha$  é formada por 2 prótons e 2 nêutrons e que cada uma dessas partículas tem massa  $1836m$ , a Fig. 3.4 mostra que

$$\theta_{\text{máx}} \sim \text{tg} \theta_{\text{máx}} = \frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{2m\upsilon}{M\upsilon} = \frac{2m\upsilon}{4(1836)m\upsilon} = 10^{-4} \text{ rad.}$$

Como não se deve esperar muitas colisões da partícula  $\alpha$  com elétrons do átomo de Thomson, o valor máximo do ângulo total de deflexão pelas colisões também deve ser da ordem de  $10^{-4}$  rad.

Para calcular a deflexão máxima esperada devida às forças exercidas pelas cargas positivas do átomo, deve-se integrar a eq. (3.2) sobre a distribuição de carga positiva, isto é,

$$F_{\text{máx}} \sim 2eK \int \frac{dq}{r^2}$$

onde  $r$  é a distância da posição da partícula  $\alpha$  a um elemento de volume contendo a carga  $dq$  em um determinado instante de tempo  $t$ . A ordem de grandeza da integral pode ser calculada assumindo a média  $\langle 1/r^2 \rangle$  de  $1/r^2$  sobre uma região do espaço de dimensões atômicas, isto é,

$$F_{\text{máx}} \sim 2Ke \langle 1/r^2 \rangle \int dq = 2Keq \langle 1/r^2 \rangle .$$

Como  $q = Ze$  é a carga positiva total do átomo e  $\langle 1/r^2 \rangle \sim 1/R^2$ , onde  $R$  é o raio do átomo, então

$$F_{\text{máx}} \sim 2KZe^2/R^2 .$$

Se a força  $F_{\text{máx}}$  atua na partícula  $\alpha$  durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  de travessia do átomo, então o impulso correspondente,  $I = F_{\text{máx}} \Delta t$ , deve ser igual à variação de momento  $\Delta p_\alpha$  da partícula  $\alpha$ , isto é,

$$\Delta p_\alpha \sim F_{\text{máx}} \Delta t \sim \frac{2KZe^2}{R^2} \Delta t .$$

Como o intervalo de tempo  $\Delta t$  é aproximadamente igual a  $R/v$ , onde  $v$  é a velocidade da partícula  $\alpha$ , então

$$\Delta p_\alpha \sim 2KZe^2/Rv .$$

Finalmente, como no caso anterior, encontra-se

$$\theta_{\max} \sim \frac{\Delta p_x}{p_x} \sim \frac{2KZe^2}{RMv^2}$$

Supondo um átomo que contém uma carga positiva elevada ( $Z=100$ ) e substituindo as constantes e grandezas conhecidas,  $K \approx 9,0 \times 10^9$ ,  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $R \approx 10^{-10} \text{ m}$ ,  $M \approx 8,0 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $v = 2,0 \times 10^7 \text{ m/s}$ , obtém-se novamente  $\theta_{\max} \sim 10^{-4} \text{ rad}$ . Vê-se, portanto, que a carga positiva pode produzir também deflexões pequenas. Isso ocorre porque, sendo a carga  $+Ze$  uniformemente distribuída sobre o átomo de Thomson de raio  $R \approx 10^{-10} \text{ m}$ , a partícula  $\alpha$  de alta velocidade nunca se aproxima de uma quantidade de carga suficiente para que a força Coulombiana tenha intensidade necessária para produzir grandes deflexões.

### Exemplo 3.2

Considere um elétron de carga  $-e$  no interior de uma região esférica de raio  $R$  e densidade de carga positiva  $\rho$ , como no modelo atômico de Thomson. (a) Mostre que o movimento do elétron pode ser representado por um movimento harmônico simples. (b) Considere a carga positiva distribuída uniformemente sobre uma esfera de raio  $R = 1,0 \times 10^{-10} \text{ m}$ , e suponha que a carga positiva total seja igual, em módulo, à carga de um elétron, tal que a carga total do átomo seja nula. Calcule a constante elástica  $k$  e a frequência  $\nu$  do movimento do elétron.

(a) Se o elétron está a uma distância  $r$  do centro do átomo, com  $r < R$ , a força que atua no elétron será  $F = eE$ , onde  $E$  é o campo elétrico que atua na posição esférica de raio  $r$ . De acordo com a lei de Gauss,  $E = (1/4\pi\epsilon_0) q/r^2$  e, portanto,

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qe}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \frac{e}{r^2} = -\frac{\rho e}{3\epsilon_0} r$$

Assim, pode-se escrever  $F = -kr$ , onde

$$k = \frac{\rho e}{3\epsilon_0}$$

é a constante elástica, isto é, o elétron executa um movimento harmônico simples.

(b) Nesse caso particular,  $\rho = e/(4/3)\pi R^3$ , de modo que

$$k = \frac{\rho e}{3\epsilon_0} = \frac{e}{4/3\pi R^3} \frac{e}{3\epsilon_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

ou,

$$k = 9,0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(1,0 \times 10^{-10} \text{ m})^3} = 230 \text{ N/m}$$

A frequência do movimento harmônico simples, será

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{230 \text{ N/m}}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

A radiação emitida pelo átomo é equivalente a radiação emitida por elétrons que oscilam numa antena. O comprimento de onda correspondente é

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}} = 120 \text{ nm}.$$

que está na região do ultravioleta longínquo do espectro eletromagnético. Pode-se mostrar também que um elétron que se move em uma órbita circular estável no interior do átomo de Thomson, gira com essa mesma frequência e, portanto, também irradia com essa mesma frequência.

### 3.4. Modelo Atômico de Rutherford

Baseado no fato que algumas partículas  $\alpha$  poderiam ser espalhadas por ângulos maiores do que  $90^\circ$ , em 1911 Ernest Rutherford propôs um novo modelo atômico. Nesse modelo, toda a carga positiva do átomo e, portanto, praticamente toda a sua massa, estaria concentrada numa pequena região denominada de núcleo do átomo.

Se a partícula  $\alpha$  passasse suficientemente próximo ao núcleo, devido a uma forte repulsão Coulombiana, poderia ser espalhada por um ângulo grande, mesmo que atravessasse um único átomo.

Rutherford utilizou o seu modelo atômico para calcular a distribuição angular esperada no espalhamento de partículas  $\alpha$  para o caso de ângulos grandes. Nesse caso, o espalhamento poderia ser atribuído somente à força Coulombiana repulsiva com o núcleo atômico. Além disso, os cálculos de Rutherford considerava somente espalhamentos por átomos parados, de modo que, o núcleo não recuasse e nem fosse penetrado durante o espalhamento.

### 3.4.1. Trajetória da partícula $\alpha$ Espalhada

A Fig. 3.5(a) mostra o espalhamento de uma partícula de carga  $+ze$  e massa  $M$  ao passar próximo a um núcleo de carga  $+Ze$ , onde  $z$  e  $Z$  são os números de cargas positivas em cada partícula. O núcleo está fixo na origem de um sistema de coordenadas polares  $(r, \varphi)$ .

As velocidades antes e depois do espalhamento são especificadas por  $v$  e  $v'$ , respectivamente. Os parâmetros de impacto  $b$  e  $b'$  são as distâncias de retas assintóticas à trajetória da partícula em relação aos eixos coordenados antes e depois do espalhamento, respectivamente. A posição  $r = R$  é denominado de distância de maior aproximação e  $r = D$  é o valor particular de  $R$  para o caso de colisão frontal, mostrado na Fig. 3.5(b).

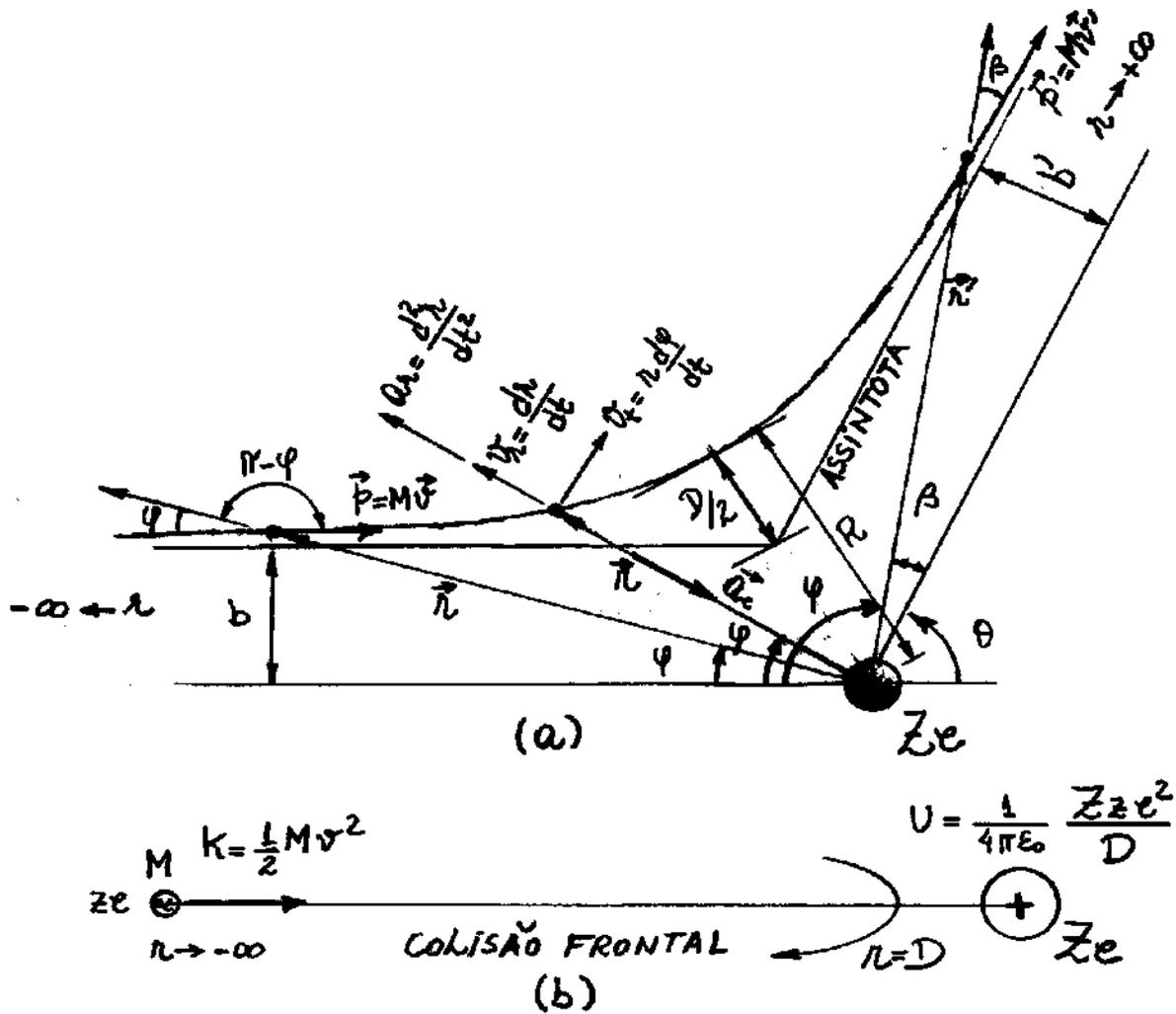


Fig.3.5 - Espalhamento de uma partícula por um núcleo atômico pesado. (a) Caso geral, onde o ângulo de espalhamento é  $\theta$  e (b) caso particular de colisão frontal onde  $\theta = 180^\circ$ .

A velocidade da partícula, em qualquer ponto, é composta por uma componente radial  $\vec{v}_r$  e uma componente tangencial  $\vec{v}_t$ , cujos módulos são

$$v_r = dr/dt, \quad v_t = r\omega = r d\phi/dt.$$

A força resultante que atua sobre a partícula está sempre na direção radial e, portanto, o torque é nulo, isto é,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv 0$$

Assim, o momento angular  $\vec{L}$  é uma constante durante todo o movimento, pois  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt = 0$  ou  $\vec{L} \equiv \text{constante}$ . Os valores do momento angular antes e depois do espalhamento são, respectivamente,

$$L = r p \sin(\pi - \varphi) = r M v \sin \varphi = M v b \quad \leftarrow$$

e

$$L' = r' p' \sin \beta = r' M v' \sin \beta = M v' b',$$

pois  $b = r \sin \varphi$  e  $b' = r' \sin \beta$  como se pode verificar na Fig. 3.5. Como  $L = L'$ , então

$$L = M v b = M v' b' \quad (3.3)$$

Como o núcleo permanece estacionário durante o espalhamento, a energia cinética  $K$  da partícula também se conserva e, portanto,

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v'^2 \Rightarrow v' = v$$

Assim, a eq. (3.3) mostra que  $b = b'$  durante todo o processo de espalhamento.

Na Fig. 3.5(b) observa-se que, na colisão frontal, a energia cinética  $K$  da partícula em  $r = -\infty$ , é igual a energia potencial  $U$  em  $r = D$ , onde a partícula para e inverte o seu sentido de movimento, isto é,

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{D} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{M v^2} = \frac{D}{2} \quad (3.4)$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton ao movimento da partícula, obtém-se

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} = M(a_r - a_c) = M \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right], \quad (3.5) \leftarrow$$

onde o termo à esquerda é a força Coulombiana,  $a_r = d^2 r / dt^2$  é a aceleração radial devido à variação do módulo de  $\vec{r}$  e  $a_c = r\omega^2 = r(d\varphi/dt)^2$  é a aceleração centrípeta devido à variação na direção de  $\vec{r}$ , que aponta para o centro do sistema de coordenadas.

A solução da eq.(3.5) pode ser encontrada utilizando a seguinte mudança de variável:

$$r = 1/\mu. \quad (3.6)$$

O exemplo 3.2 mostra que essa mudança de variável faz com que a eq.(3.5) torne-se

$$\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2 b^2} = -\frac{D}{2b^2}, \quad (3.7) \leftarrow$$

onde substituiu-se a eq.(3.4) na última igualdade.

### Exemplo 3.3 - FACULTATIVO.

Fazer a mudança de variável  $r = 1/\mu$  na eq.(3.5) para mostrar a eq.(3.7).

Como  $L = r p = r M v = r M u r = M r^2 d\varphi/dt$  ou  
 $d\varphi/dt = L/Mr^2 = L\mu^2/M$ , então

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\mu} \frac{d\mu}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{d\varphi} \frac{L\mu^2}{M} = -\frac{L}{M} \frac{d\mu}{d\varphi} \quad (3.8)$$

e

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dr}{dt} \right] = \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{dr}{dt} \right] \frac{d\varphi}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left[ -\frac{L}{M} \frac{d\mu}{d\varphi} \right] \frac{L\mu^2}{M} = -\frac{L^2 \mu^2}{M^2} \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} \quad (3.9)$$

Assim, a eq. (3.5) torna-se

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{L\mu^2} = M \left[ -\frac{L^2 \mu^2}{M^2} \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} - \frac{1}{\mu} \left( \frac{L\mu^2}{M} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2 \mu^2}{M} = \frac{L^2 \mu^2}{M^2} \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \frac{L^2 \mu^3}{M^2} \Rightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2 \mu^2}{M} = \frac{L^2 \mu^2}{M^2} \left( \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu \right)$$

ou

$$\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2 M}{L^2},$$

que combinada com a equação  $L = Mvb$  resulta na eq. (3.7).

A solução da eq. (3.7) é

$$\mu = A \cos \varphi + B \sin \varphi - \frac{D}{2b^2}, \quad (3.10) \leftarrow$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes que devem ser determinadas. Para verificar que é solução, basta substituir a eq. (3.10) na eq. (3.7) e encontrar uma identidade.

Para determinar as constantes  $A$  e  $B$ , pode-se adotar as seguintes condições de contorno para a eq. (3.10):

$$\text{quando } \varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad v_r = \frac{dr}{dt} \rightarrow -v \quad (3.11)$$

O sinal (-) é devido ao fato que  $\vec{v}_r$  tem sentido inverso à velocidade  $\vec{v}$  no trecho considerado. De exemplo 3.3 mostra que  $A = D/2b^2$  e  $B = 1/b$ . Logo, a eq. (3.10) torna-se

$$u = \frac{1}{r} = \frac{D}{2b^2} \cos \varphi + \frac{1}{b} \sin \varphi - \frac{D}{2b^2}$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) \quad (3.12)$$

Essa equação mostra que a trajetória da partícula tem a forma hiperbólica no sistema de coordenadas polares  $(r, \varphi)$ .

Exemplo 3.4 - FACULTATIVO. Mostrar que  $A = D/2b^2$  e  $B = 1/b$ .

Adotando a condição  $r \rightarrow -\infty$  quando  $\varphi \rightarrow 0$  na eq. (3.10) e a condição  $dr/dt = -v$  quando  $\varphi \rightarrow 0$  na equação

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{M} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{M} (-A \sin \varphi + B \cos \varphi),$$

obtem-se

$$u = \frac{1}{r} = 0 = A \cos 0^\circ + B \sin 0^\circ - \frac{D}{2b^2} \Rightarrow A = \frac{D}{2b^2},$$

$$-v = -\frac{1}{M} (-A \sin 0^\circ + B \cos 0^\circ) \Rightarrow B = \frac{Mv}{L} = \frac{Mv}{Mvb} = \frac{1}{b}.$$

A Fig. 3.6(a) mostra que quando  $\varphi \rightarrow \pi - \theta$ , então  $r \rightarrow +\infty$ . De acordo com o exemplo 3.4, quando se aplica esta condição na eq. (3.12), obtém-se

$$\text{ctg } \theta/2 = 2b/D. \quad (3.13)$$

Por outro lado, a Fig. 3.6(b) mostra que quando  $2\varphi + \theta = \pi$  ou  $\varphi = (\pi - \theta)/2$ , então  $r = R$ . Também de acordo com o exemplo 3.4, quando se aplica esta condição na eq. (3.12), obtém-se

$$R = D/2 \left[ 1 + 1/\text{sen}(\theta/2) \right]. \quad (3.14)$$

Observa-se nesta equação, que quando  $\theta \rightarrow \pi$ , o que corresponde a  $b=0$  na eq. (3.13), ou a uma colisão frontal, tem-se  $R=D$  como é de se esperar.

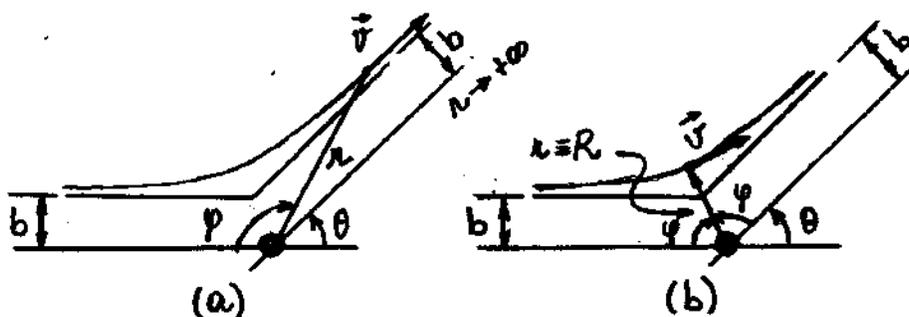


Fig. 3.6 - Método para obtenção, (a) do ângulo de espalhamento  $\theta$  e (b) da distância  $R$  de maior aproximação.

### Exemplo 3.5 - FACULTATIVO.

Usar a eq. (3.12) e as Figs. 3.6(a) e 3.6(b) para mostrar, (a) a eq. (3.13) e (b) a eq. (3.14).

(a) Substituindo  $r \rightarrow +\infty$  e  $\varphi = \pi - \theta$  na eq. (3.12), obtêm-se

$$\frac{1}{r} = 0 = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) \Rightarrow -\frac{1}{b} \sin \varphi = \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$$

ou

$$2b/D = (1 - \cos \varphi) / \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi / 2 = \operatorname{tg} (\pi - \theta) / 2 = \operatorname{tg} (\pi/2 - \theta/2) = \operatorname{ctg} \theta/2.$$

(b) Substituindo  $r = R$  e  $\varphi = (\pi - \theta)/2$  na eq. (3.12), obtêm-se

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b} \sin (\pi - \theta)/2 + \frac{D}{2b^2} [\cos (\pi - \theta)/2 - 1], \quad (3.15)$$

Por outro lado, da eq. (3.13),

$$b = \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \theta/2 = \frac{D}{2} \operatorname{tg} (\pi - \theta)/2 = \frac{D}{2} \frac{\sin (\pi - \theta)/2}{\cos (\pi - \theta)/2} \Rightarrow \cos (\pi - \theta)/2 = \frac{D}{2b} \sin (\pi - \theta)/2,$$

cujas substituições na eq. (3.15) e, após algumas manipulações matemáticas, obtêm-se a eq. (3.14).

### 3.4.2. Cálculo estatístico do espalhamento de partículas $\alpha$ .

Da relação entre  $\theta$  e  $b$ , dada na eq. (3.13), observa-se que no espalhamento de uma partícula  $\alpha$  por um único núcleo, se o parâmetro de impacto estiver entre  $b$  e  $b + db$ , então o ângulo de espalhamento estará entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , como ilustra a Fig. 3.7. Dessa forma, pode-se afirmar que a probabilidade  $P(\theta)d\theta$  da partícula  $\alpha$  ser espalhada entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é igual, em módulo, a probabilidade  $P(b)db$  do parâmetro de impacto estar entre  $b$  e  $b + db$ , isto é;

$$P(\theta)d\theta = -P(b)db, \quad (3.16)$$

onde o sinal(-) é devido ao fato que  $d\theta = -db$ .

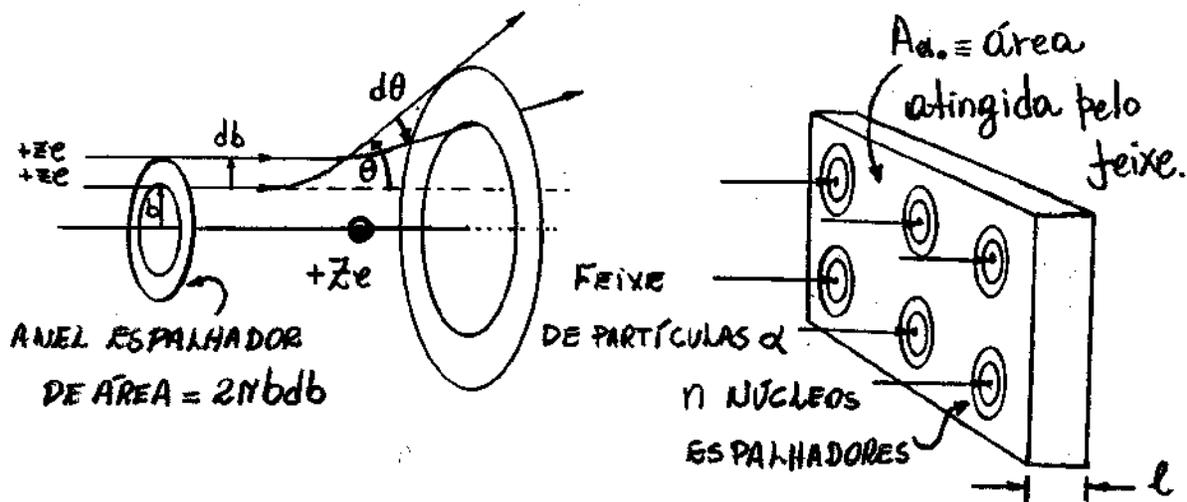


Fig. 3.7- Comportamento das partículas  $\alpha$  espalhadas pelos núcleos atômicos.

Se no volume da película existem  $n$  núcleos espalhadores numa região de área  $A_0$  atingida pelas partículas  $\alpha$ , então dispõe-se desse mesmo número de anéis espalhadores de área  $2\pi b db$ . A probabilidade  $P(b)db$ , de que uma partícula  $\alpha$  passe através de um desses anéis, é dada pela razão entre a área de todos os  $n$  anéis e a área  $A_0$  do feixe sobre a superfície espalhadora, isto é,

$$P(b)db = \frac{n \times (\text{área de um anel})}{A_0} = \frac{n}{A_0} 2\pi b db. \quad (3.17)$$

Partindo da eq. (3.13), o exemplo 3.5 mostra que

$$bdb = -\frac{D^2}{16} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (3.18)$$

Substituindo a eq. (3.18) na eq. (3.17), obtêm-se

$$P(b)db = -\frac{\pi}{8} \frac{n}{A_0} D^2 \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)} = -P(\theta)d\theta,$$

onde adotou-se a eq. (3.16) na última igualdade. Supondo uma distribuição uniforme de núcleos espalhadores, então a probabilidade da partícula  $\alpha$  ser espalhada por um único núcleo entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e a probabilidade da partícula  $\alpha$  ser espalhada por  $n$  núcleos entre  $\phi$  e  $\phi + d\phi$  devem ter a mesma relação funcional, isto é,

$$P(\theta)d\theta \equiv P(\phi)d\phi = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} D^2 \frac{\sin\phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} \quad (3.19)$$

Seja  $I_{\alpha_0} = N_{\alpha_0}/A_{\alpha_0}$  a intensidade do feixe de partículas  $\alpha$  incidente na película, onde  $N_{\alpha_0}$  é o número de partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, presentes no feixe. Assim, o número  $N(\phi)d\phi$  dessas partículas espalhadas, por unidade de tempo, entre  $\phi$  e  $\phi + d\phi$ , é

$$N(\phi)d\phi = N_{\alpha_0} P(\phi)d\phi = I_{\alpha_0} A_{\alpha_0} P(\phi)d\phi$$

ou, da eq. (3.19),

$$N(\phi)d\phi = \frac{\pi}{8} n I_{\alpha_0} D^2 \frac{\sin\phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} \quad (3.20)$$

Esta equação fornece a distribuição de partículas  $\alpha$ , espalhadas numa película delgada, de acordo com o modelo do átomo nucleado de Rutherford. Deve-se observar que embora o número de partículas espalhadas cai rapidamente com o aumento do ângulo de espalhamento  $\phi$ , essa queda é muito mais lenta do que aquela prevista no modelo de Thomson. O resultado exposto na eq. (3.20) foi confirmado experimentalmente por Johannes (Hans) Wilhelm Geiger e seu aluno Ernest Marsden alguns meses depois de ter sido obtida por Rutherford.

### Exemplo 3.6 - FACULTATIVO.

Usar a eq. (3.13) para mostrar a eq. (3.18).

Da eq. (3.13),  $b = \frac{D}{2} \operatorname{ctg}(\theta/2) = \frac{D}{2} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ , tem-se

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} \frac{D^2}{2} \operatorname{csc}^2(\theta/2) \Rightarrow db = -\frac{D}{4} \frac{d\theta}{\sin^2(\theta/2)}$$

$$\Rightarrow bdb = -\frac{D^2}{8} \frac{\cos(\theta/2) d\theta}{\sin^3(\theta/2)} = -\frac{D^2}{8} \frac{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

Como  $\sin 2\delta = 2 \sin \delta \cos \delta$ , ou  $\sin \theta/2 \cos \theta/2 = 1/2 \sin \theta$ , a equação anterior resulta na eq. (3.18).

O modelo atômico de Rutherford permite impor um limite superior para o raio nuclear. O raio nuclear não deve ser maior do que o valor da aproximação máxima  $D$  na colisão frontal, dada na eq. (3.4), como

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{1/2 Mv^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{K_\alpha}, \quad (3.21)$$

onde  $K_\alpha = 1/2 Mv^2$  é a energia cinética da partícula  $\alpha$  incidente e  $z=2$  é o número de cargas positivas no núcleo do He.

O valor de  $D$  pode ser calculado a partir da eq. (3.21) sabendo a energia cinética  $K_\alpha$  da partícula  $\alpha$  e o número de cargas positivas  $Z$  do núcleo alvo. Alternativamente, o valor de  $D$  também pode ser encontrado a partir da fórmula de Rutherford, dada na eq. (3.20), e de dados experimentais de espalhamentos de partículas  $\alpha$  com energia cinética  $K_\alpha$ . Como a teoria de Rutherford está limitada à núcleos pesados, divergências foram encontradas na obtenção de  $D$  pelos dois métodos. Entretanto, mesmo depois da massa nuclear finita ter sido considerada, as divergências continuaram para partículas  $\alpha$  de alta energia  $K_\alpha$ . Essas divergências

são atribuídas a outra condição não aplicável na teoria de Rutherford, que é a penetração de partículas  $\alpha$  na região nuclear. Portanto, o raio nuclear será corretamente definido como sendo o valor de  $R$  para um ângulo de espalhamento limite (não necessariamente  $\pi$ ), associada a uma energia crítica incidente limite  $K_\alpha$ , para o qual começa a ocorrer divergências no espalhamento Rutherford. Um experimento como este foi realizado com partículas  $\alpha$  de diferentes energias, para determinar o raio nuclear do alumínio e o resultado obtido foi de  $10^{-14} \text{ m} = 10 \text{ F}$ . Aqui,  $1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}$  é uma unidade de medida, denominada Fermi, muito usada em Física nuclear.

### Exemplo 3.7 - Eisberg.

Ao atravessar uma película fina de ouro, uma partícula  $\alpha$  de energia  $K_\alpha = 5,30 \text{ MeV}$ , é espalhada de um ângulo  $\theta = 60^\circ$  por um único núcleo. Calcular, (a) a distância  $D$  de maior aproximação na colisão frontal e (b) o parâmetro de impacto  $b$  correspondente.

(a) De acordo com a eq. (3.21), o valor de  $D$  será

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{K_\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{5,3 \times 10^6 \text{ eV}} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 2 \cdot 79 \cdot 1,6 \times 10^{-19}}{5,3 \times 10^6}$$

$$\Rightarrow D = 42,9 \times 10^{-15} \text{ m} = 42,9 \text{ F}$$

pois,

$$z = 2 \text{ (part. } \alpha \text{)}, Z = 79 \text{ (Au)}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2, e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

(b) Como  $\text{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D}$ , o parâmetro de impacto  $b$  será

$$b = \frac{D}{2} \text{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{42,9 \times 10^{-15}}{2} \text{ctg} \frac{60^\circ}{2} = 21,45 \times 10^{-15} \frac{1}{\text{tg} 30^\circ}$$

$$\Rightarrow b = 37,1 \times 10^{-15} \text{ m} = 37,1 \text{ f.}$$

### Exemplo 3.8 - FACULTATIVO

Uma película de ouro de espessura  $l = 2,1 \times 10^{-7} \text{ m}$ , é atingida por um feixe de partículas  $\alpha$  com  $N_{\alpha_0} = 10^4$  partículas/segundo e energia cinética  $K_{\alpha} = 5,30 \text{ MeV}$ . (a) Sabendo que a densidade do ouro é  $\rho = 19,3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a massa molar do ouro é  $M = 0,197 \text{ kg/mol}$  e o número de Avogadro é  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , calcular a densidade numérica  $\delta = N_A/V$  de núcleos contidos numa amostra de ouro. (b) Calcular o número  $n/A_{\alpha_0}$  de núcleos espalhadores na película de ouro por unidade de área  $A_{\alpha_0}$  do feixe de partículas  $\alpha$  incidente. (c) Usar a distância de maior aproximação  $D = 42,9 \text{ f}$ , calculado no exemplo 3.6, e a equação de espalhamento de Rutherford para calcular o número total  $N_{\alpha}$  de partículas  $\alpha$  retro espalhadas por segundo entre  $\phi = \pi/2$  e  $\phi = \pi$ .

$$(a) \delta = \frac{N_A}{V} = \frac{M}{V} \frac{N_A}{M} = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{19,3 \times 10^3 \times 6,02 \times 10^{23}}{0,197} = 5,9 \times 10^{28} \text{ núcleos/m}^3.$$

$$(b) \frac{n}{A_{\alpha_0}} = \frac{n l}{A_{\alpha_0} l} = \frac{n}{V_{\alpha_0}} = \delta l = 5,9 \times 10^{28} \times 2,1 \times 10^{-7} = 1,24 \times 10^{22} \text{ núcleos/m}^2.$$

(c) De acordo com a equação de espalhamento de Rutherford

$$N_{\alpha} = \int_{\pi/2}^{\pi} N_{\alpha}(\phi) d\phi = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin \phi}{\sin^4(\phi/2)} d\phi,$$

em que

$$J = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin \phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(\phi/2) \cos(\phi/2) d\phi}{\sin^4(\phi/2)} = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(\phi/2)}{\sin^3(\phi/2)} d\phi.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\mu = \sin(\phi/2) \Rightarrow d\mu = \frac{1}{2} \cos(\phi/2) d\phi,$$

tal que os limites de integração, tornam-se

$$\mu_1 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \sin \pi/2 = 1,$$

então

$$J = 2 \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{2d\mu}{\mu^3} = 4 \left[ -\frac{1}{2\mu^2} \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 \right] = -4 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1/2)} \right] = -4(-1/2) = 2.$$

Assim,

$$N_{\alpha} = \frac{\pi}{4} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 = \frac{\pi}{4} (1,24 \times 10^{22}) (10^4) (42,9 \times 10^{-15})^2 = 0,179 \text{ parts./s.}$$

Esse valor é comparável com as observações feitas por Geiger e Marsden.

### 3.4.3 - Seção de Choque de Espalhamento - FACULTATIVO.

Do ponto de vista experimental, o espalhamento de Rutherford é usualmente expresso em termos de uma seção de choque diferencial  $d\sigma$ , como ilustrado na Fig. 3.8.

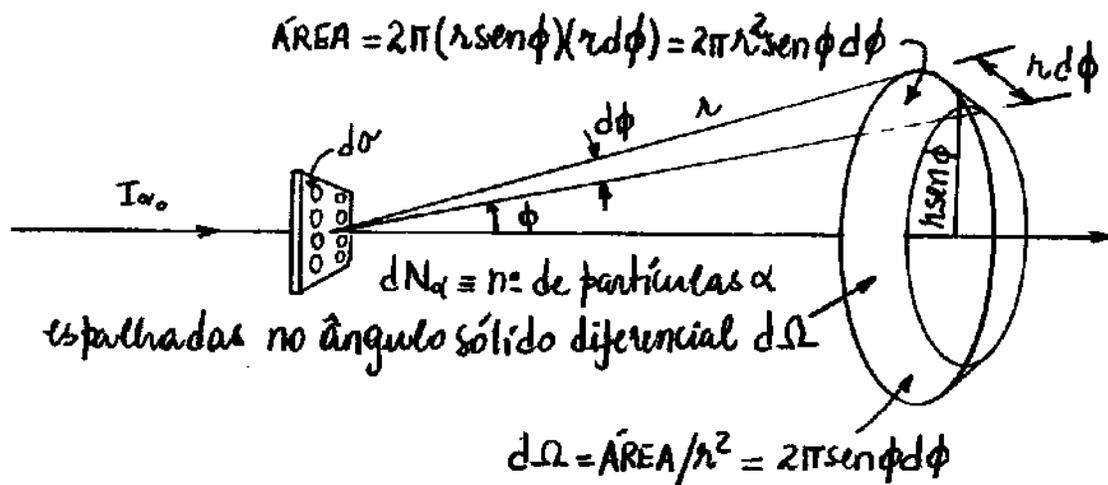


Fig. 3.8 - Ilustração da definição da seção de choque diferencial.

A seção de choque diferencial  $d\sigma$ , é a área efetiva de um dos anéis sobre um dos núcleos espalhadores, isto é,

$$d\sigma = 2\pi b db, \quad (3.22)$$

que espalha a partícula  $\alpha$  sobre um ângulo sólido diferencial  $d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi$ , na região de detecção.

A seção de choque de uma superfície espalhadora é usualmente medida em termos de uma unidade denominada de "barn", em que

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2. \quad (3.23)$$

Se  $N_{\alpha_0}$  partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, incidem numa área  $A_{\alpha_0}$  da película então, o número de partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, incidente numa secção de choque diferencial  $d\sigma$  em um dos núcleos, será

$$\text{N}^\circ \text{ de part. } \alpha \text{ incid. num núcleo} = N_{\alpha_0} \frac{d\sigma}{A_{\alpha_0}} = I_{\alpha_0} d\sigma. \quad (3.24)$$

Se  $dN_{\alpha}$  partículas  $\alpha$ , por unidade de tempo, são espalhadas por  $n$  núcleos da película, na região angular  $d\Omega$  então, o número de partículas  $\alpha$  espalhada, por um único núcleo, nessa mesma região angular, é

$$\text{N}^\circ \text{ de part. } \alpha \text{ esp. por um núcleo} = \frac{dN_{\alpha}}{n}. \quad (3.25)$$

Como cada partícula  $\alpha$  que incide sobre um núcleo, eq.(3.24), deverá ser espalhada por ele, eq.(3.25), então

$$dN_{\alpha} = n I_{\alpha_0} d\sigma \quad (3.26)$$

ou

$$dN_{\alpha} = n I_{\alpha_0} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (3.27)$$

Por outro lado, a fórmula do espalhamento de Rutherford, dada na eq.(3.20), fornece

$$dN_{\alpha} = N_{\alpha}(\phi) d\phi = \frac{n I_{\alpha_0} D^2}{16 \sin^4(\phi/2)} (2\pi \sin\phi d\phi) \quad (3.28)$$

ou

$$dN_{\alpha} = n I_{\alpha_0} d\Omega \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4(\phi/2)}, \quad (3.29)$$

pois

$$d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi. \quad (3.30)$$

Comparando a eq. (3.27) com a eq. (3.29), obtém-se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} = \frac{D^2}{16} \operatorname{cosec}^4(\phi/2), \quad (3.31)$$

que é a fórmula do espalhamento de Rutherford escrita em termos da seção de choque diferencial.

### Exemplo 3.9 - FACULTATIVO

Resolva o item (c) do exemplo 3.7 usando a fórmula do espalhamento de Rutherford na forma da eq. (3.31).

Como  $I_{\alpha_0} = N_{\alpha_0}/A_{\alpha_0}$ , a eq. (3.27), fornece

$$dN_{\alpha} = N_{\alpha_0} \frac{n}{A_{\alpha_0}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \Rightarrow N_{\alpha} = N_{\alpha_0} \frac{n}{A_{\alpha_0}} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (3.32)$$

ou, das eqs. (4.30) e (4.31),

$$N_{\alpha} = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 \int$$

ou ainda, usando os dados do exemplo 3.7,

$$N_{\alpha} = 0,179 \text{ partículas/s.}$$

### 3.5. Espectro Atômico.

O sucesso do modelo atômico de Rutherford inspirou Niels Bohr a imaginar uma separação no domínio físico dos átomos, em que os elétrons estariam associadas as propriedades químicas dos elementos, enquanto que o núcleo seria responsável por comportamentos radioativos. Essa proposta revelava uma correlação entre o número de elétrons no átomo e a sua localização numa tabela periódica de elementos.

Evidências do comportamento quântico da matéria já tinham sido observadas bem antes da época de Bohr e Rutherford. Uma das mais notáveis evidências desse comportamento era a emissão do espectro eletromagnético por átomos.

A Fig. 3.9 mostra o esquema de um espectrógrafo utilizado para observação do espectro atômico.

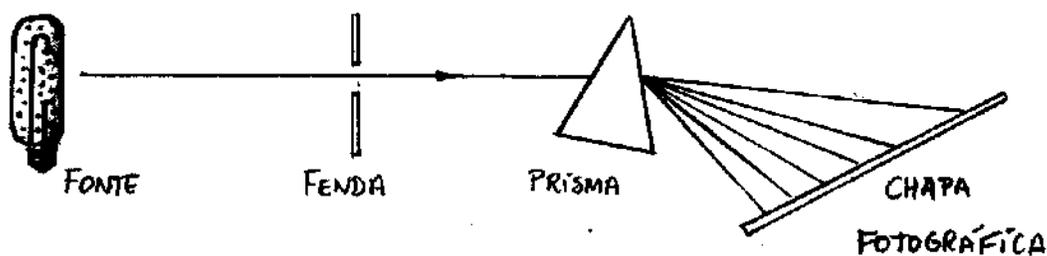


Fig. 3.9 - Espectrógrafo usado para observação do espectro eletromagnético emitido por átomos.

A fonte consiste de uma descarga elétrica num meio que contém um gás monoatômico. Os átomos são colocados fora do equilíbrio por colisões com elétrons da descarga. Ao voltar ao seu estado normal, os átomos liberam o excesso de energia emitindo radiação eletromagnética. A radiação é colimada por uma fenda e atravessa um prisma, que separa as linhas espectrais que compõe a radiação. Uma rede de difração poderia também ser usada no lugar do prisma. O espectro é registrado numa simples chapa fotográfica.

Diferentemente do espectro contínuo da radiação eletromagnética emitida, por um corpo negro, a radiação eletromagnética emitida por um átomo livre, está concentrada em um número discreto de comprimentos de onda. Observa-se que cada espécie de átomo tem o seu próprio espectro característico, isto é, tem um conjunto específico de linhas espectrais que o identifica. Em geral, os espectros atômicos são extremamente complexos, pois podem conter centenas de linhas. Entretanto, por conter somente um elétron, o espectro do átomo de hidrogênio é relativamente simples.

No final do século XIX, vários espectros do átomo de hidrogênio foram observados sem que nenhuma explicação satisfatória fosse realizada.

A Fig. 3.10 mostra as linhas emitidas pelo átomo de hidrogênio na região do visível do espectro eletromagnético. A primeira interpretação empírica bem sucedida desse espectro foi realizada por Johan Jakob Balmer em 1885.

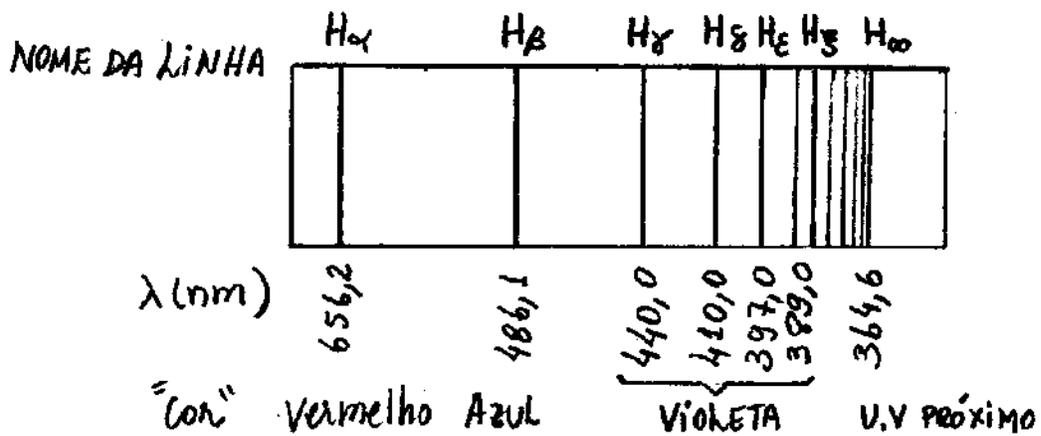


Fig. 3.10. Região Visível do espectro do hidrogênio.

A regularidade óbvia na seqüência das linhas espectrais do hidrogênio, na região do visível, induziu Balmer a propor o seguinte comportamento para os comprimentos de onda observados:

$$\lambda = 364,6(\text{nm}) \frac{n_i^2}{n_i^2 - 4}, \quad (3.33)$$

onde  $n_i = 3, 4, 5, \dots$  correspondem, respectivamente, as linhas  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  do espectro. A partir da eq. (3.33), Balmer conseguiu reproduzir, com uma precisão de 0,1%, os comprimentos de onda das nove linhas da única série do átomo de hidrogênio conhecida na época.

Após a descoberta de Balmer, várias tentativas foram realizadas para explicar outras séries de linhas observadas em outros elementos. O resultado para o átomo de hidrogênio foi generalizado em 1890 por Johannes Robert Rydberg, quando observou que a eq.(3.33) poderia ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left( \frac{n_i^2 - 4}{n_i^2} \right) = \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left( \frac{1}{1} - \frac{4}{n_i^2} \right) = \\ &= \frac{4}{364,6 \text{ nm}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad (3.34) \end{aligned}$$

onde  $R_H$  é denominado de constante de Rydberg para o hidrogênio. De acordo com dados espectroscópicos recentes

$$R_H = 10,9677576 \text{ } \mu\text{m}^{-1}. \quad (3.35)$$

Rydberg interpretou a eq.(3.34) como sendo um caso particular de uma expressão mais geral para o átomo de hidrogênio dada por

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i > n_j \quad (3.36)$$

A introdução do novo índice  $n_j$  permitiria descrever outras possíveis séries de linhas espectrais do hidrogênio, além do espectro visível ( $n_j=2$ ) observada por Balmer.

Linhas espectrais no hidrogênio para  $n_i=3$ , observadas na região do infravermelho, foram descobertas por Louis Karl Heinrich Friedrich Paschen em 1908. Em 1914, Theodore Lyman descobriu as linhas associadas a  $n_i=1$ , observadas na região do ultravioleta. Outras séries foram também reveladas mais tarde no espectro infravermelho. A Tab.3.1 resume as principais séries observadas a partir dos resultados de Rydberg.

NOME	REGIÃO	FÓRMULA
LYMAN	U.V	$1/\lambda = R_H (1/1^2 - 1/n_i^2); n_i = 2, 3, \dots$
BALMER	UV próximo e VISÍVEL	$1/\lambda = R_H (1/2^2 - 1/n_i^2); n_i = 3, 4, \dots$
PASCHEN	I.R	$1/\lambda = R_H (1/3^2 - 1/n_i^2); n_i = 4, 5, \dots$
BRACKETT	I.R	$1/\lambda = R_H (1/4^2 - 1/n_i^2); n_i = 5, 6, \dots$
PFUND	I.R	$1/\lambda = R_H (1/5^2 - 1/n_i^2); n_i = 6, 7, \dots$

Tab.3.1 - Séries de linhas espectrais mais importantes observadas no átomo de hidrogênio.

Assim, os resultados empíricos de Balmer e Rydberg, além de fornecer uma descrição quantitativa de cada linha espectral, tornou possível também a abertura de todo o código espectral do átomo de hidrogênio.

Um dos resultados mais notáveis observados nos espectros atômicos, foi o fato de que as linhas espectrais são discretas. No modelo atômico de Rutherford os elétrons se movem em torno do núcleo sob influência de uma força Coulombiana. Nesse modelo, os elétrons poderiam emitir somente radiações contínuas, resultantes de seus movimentos acelerados. As leis clássicas do eletromagnetismo prevêem que o sistema atômico poderia ter perdas radiativas de energia, levando o átomo a uma instabilidade intrínseca. Assim, o elétron poderia entrar em colapso com o núcleo, enquanto a radiação fosse emitida continuamente. Este efeito é uma consequência do tratamento clássico do modelo atômico de Rutherford.

### 3.6- Modelo Atômico de Bohr

Em 1913, Niels Bohr resolveu o problema da instabilidade atômica, a exemplo de Planck e Einstein, compendo com princípios fundamentais da física clássica. Sua proposta dava importantes contribuições para o desenvolvimento da teoria quântica.

A motivação principal de Bohr, para propor seu ousado modelo atômico, foi a regularidade dos espectros atômicos observados.

O modelo atômico de Bohr tem como base os seguintes postulados:

1- Os elétrons no átomo podem se mover, somente, em órbitas discretas, as quais definem os estados estacionários, de onde não emitem radiação eletromagnética.

2- A emissão de radiação eletromagnética ocorre somente quando o elétron faz uma transição de um estado estacionário para o outro.

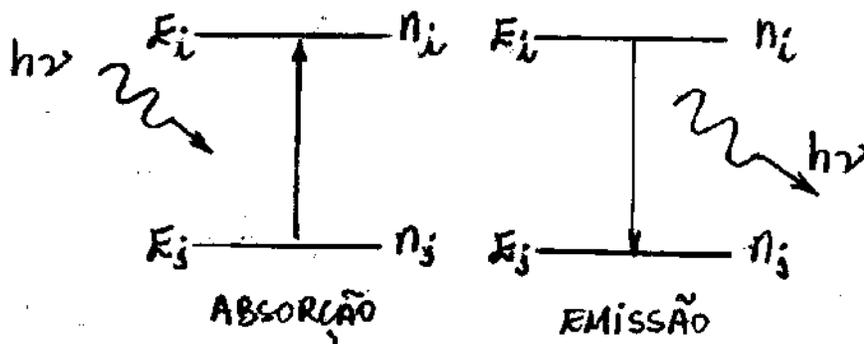


Fig. 3.11 - Estados estacionários representados por um sistema de dois níveis de energia no átomo de Bohr.

Como se vê na Fig. 3.11, na transição entre estados estacionários, o átomo pode emitir, ou absorver, um fóton de energia

$$h\nu = hc/\lambda = E_i - E_j \quad (3.37)$$

O primeiro postulado elimina o problema da instabilidade atômica assumindo que a emissão de radiação por cargas aceleradas, simplesmente, não ocorre com elétrons atômicos.

Uma consequência imediata do primeiro postulado está associada a quantização do momento angular  $L$  do elétron atômico. Tendo como base observações empíricas de espectros do átomo de hidrogênio, Bohr concluiu que os momentos angulares nas órbitas atômicas são múltiplos inteiros da constante

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 6,58 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s},$$

isto é,

$$L_n = n\hbar, \quad (3.38)$$

em que  $n = 1, 2, 3, \dots$  e a constante  $\hbar$ , que se lê " $\hbar$  cantado", possui dimensões de momento angular e tem um destaque especial na teoria quântica.

A única evidência que se tinha para justificar os postulados de Bohr, nos quais se baseia o seu modelo atômico, era a observação experimental do espectro do átomo de hidrogênio. O átomo de hidrogênio faz parte de um sistema atômico mais geral,

denominado de átomos monoelétrônicos, que são aqueles que possuem somente um elétron na sua constituição. Além do hidrogênio ( $Z=1$ ), exemplos desses sistemas atômicos são: átomo de Hélio ( $Z=2$ ) ionizado, átomo de Lítio ( $Z=3$ ) duplamente ionizado, etc. Propõe-se aqui verificar as consequências dos postulados de Bohr para esses tipos de átomos. Esses átomos são formados por duas partículas carregadas, o elétron de carga  $-e$  e o núcleo de carga  $+Ze$ , em que  $Z$  é o número de cargas positivas do núcleo.

O problema deve ser analisado então como um sistema mecânico de duas partículas em movimento de rotação em torno de um centro de massa CM comum como mostra a Fig. 3.12(a).

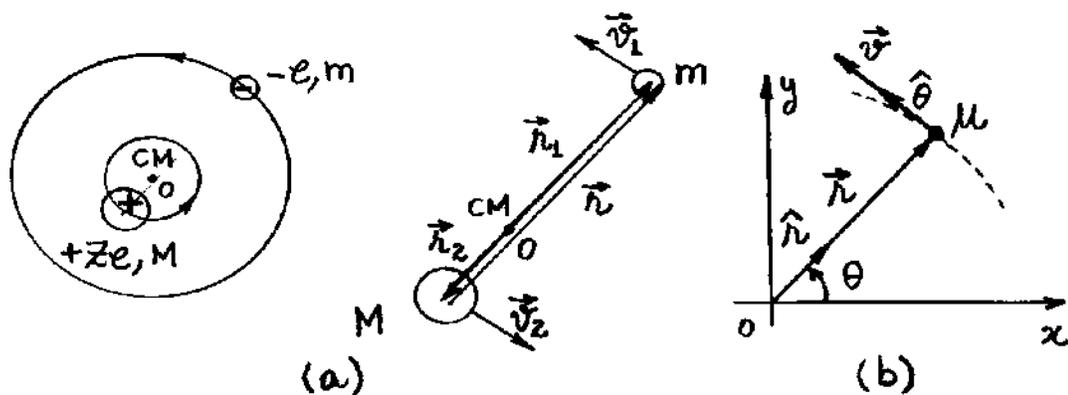


Fig. 3.12 - (a) Movimento de rotação de duas partículas em torno do centro de massa e (b) redução ao problema de uma única partícula. O sistema é equivalente ao movimento de um rotor rígido.

As velocidades das partículas atômicas em torno do centro de massa não são muito elevadas. Particularmente, para o átomo de hidrogênio, a velocidade do elétron é

$$v \approx 10^{-2}c \quad (3.39)$$

Assim, um tratamento não-relativístico pode ser adotado aqui como uma boa aproximação. Como ficará evidente na sequência, o movimento de rotação das partículas é equivalente ao movimento de um rotor rígido. A Fig. 3.12(b) mostra como se pode reduzir o problema de duas partículas ao problema de uma única partícula de massa reduzida  $\mu$  e coordenada relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = r \hat{n}, \quad (3.40)$$

em que  $\hat{n}$  é um vetor unitário na direção radial. Como o centro de massa CM está na origem do sistema de coordenadas, então  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  devem satisfazer a seguinte condição:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2}{m+M} = 0 \Rightarrow m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2 = 0. \quad (3.41)$$

Resolvendo o sistema de eqs. (3.40) e (3.41), obtém-se

$$\vec{r}_1 = \frac{M}{m+M} \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m}{m+M} \vec{r}. \quad (3.42)$$

Derivando essas equações em relação ao tempo, obtém-se as velocidades tangenciais de cada partícula como

$$\vec{v}_1 = \frac{M}{m+M} \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = -\frac{m}{m+M} \vec{v}, \quad (3.43)$$

em que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\hat{n}}{dt} = r \frac{d}{dt} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) = r(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{ou} \quad \vec{v} = r\omega \hat{\theta}, \quad (3.44)$$

é a velocidade tangencial relativa as duas partículas,  $\omega = d\theta/dt$  é a velocidade angular e  $\hat{\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$  é

um vetor unitário na direção angular. Observa-se nas eqs. (3.43) que  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são mantidos em sentidos contrários, porém, na mesma direção da velocidade relativa  $\vec{v}$ . Isso mostra que o sistema tem um movimento equivalente ao movimento de um rotor rígido.

A massa reduzida  $\mu$  do sistema de duas partículas pode ser obtida calculando a energia cinética total  $K$  a partir da eq. (3.43), isto é,

$$K = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{M}{m+M} \right)^2 v^2 + \frac{1}{2} M \left( \frac{m}{m+M} \right)^2 v^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+M)^2} v^2 (mM^2 + Mm^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{(m+M)^2} v^2 mM(m+M) = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v^2$$

ou

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (3.45)$$

em que

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{mM}{M(m/M+1)} = \frac{m}{1+m/M} \quad (3.46)$$

é a massa reduzida do sistema de duas partículas. Sabe-se que a massa  $M$  do núcleo é muito maior do que a massa  $m$  do elétron, tal que  $M \rightarrow \infty$  e  $\mu \rightarrow m$  na eq. (3.46). Em particular, para o hidrogênio o núcleo é um próton de massa  $M_p = 1836 m$ . Entretanto, o pequeno efeito da massa nuclear finita é, em geral, detectável e portanto é importante considerá-la.

Por causa da presença de uma força central Coulombiana, ocorrendo na direção radial, não há torque e o momento angular  $\vec{L}$  do sistema é uma constante de movimento. O módulo  $L$  do momento angular conservado, pode ser calculado a partir das eqs. (3.42) e (3.43), isto é,

$$L = m v_1 r_1 + M v_2 r_2 = m \left( \frac{M}{m+M} \right)^2 v r + M \left( \frac{m}{m+M} \right)^2 v r$$

$$= \frac{(mM^2 + Mm^2)}{(m+M)^2} v r = \frac{mM(M+m)}{(m+M)^2} v r = \frac{mM}{(m+M)} v r$$

ou

$$L = \mu v r \quad (3.47)$$

O módulo da força centrípeta  $F_c$  associada ao movimento circular é

$$F_c = M \frac{v_2^2}{r_2} = m \frac{v_1^2}{r_1} = m \frac{(M/m+M v)^2}{M/m+M r} = m \frac{M^2}{(m+M)^2} v^2 \frac{(m+M)}{M r}$$

ou

$$F_c = \mu \frac{v^2}{r} \quad (3.48)$$

A energia potencial  $U$  para o átomo monoelétrônico é dada diretamente em termos da variável relativa  $r$  como

$$U = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r} \quad (3.49)$$

onde  $Z$  é o número de cargas positivas no núcleo atômico.

A energia total  $E$  do sistema de duas partículas, pode ser calculada somando a eq. (3.49) com a energia cinética  $K$ , isto é,

$$E = K - \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.50)$$

Na condição de equilíbrio, a força centrípeta  $F_c$  deve ser igual, em módulo, a força Coulombiana atrativa, isto é,

$$\mu \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow K = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.51)$$

cuja substituição na eq. (3.50) resulta

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -K, \quad (3.52)$$

em que a última identidade é consequência direta da eq. (3.51).

Deve-se observar que a energia total  $E$  do átomo monoelétrônico é uma quantidade negativa pois, em módulo, a energia potencial negativa  $U$  é maior do que a energia cinética positiva  $K$ , resultando num sistema de estado ligado. Além disso, a eq. (3.52) mostra que a energia total  $E$  do átomo monoelétrônico é igual, em módulo, a energia cinética  $K$  das partículas que formam o átomo de Bohr.

Até aqui, todas as considerações do problema de duas partículas tem sido limitado a argumentos puramente clássicos. A primeira consideração quântica do problema está associado a uma das consequências dos postulados de Bohr, que trata da quantização do momento angular e que permite identificar a eq. (3.38) com a eq. (3.47), isto é,

$$L_n = \mu v r = n\hbar \quad (3.53)$$

ou

$$v \equiv v_n = \frac{n\hbar}{\mu r}$$

que, substituída na eq. (3.51) sem o fator  $\frac{1}{2}$ , fornece

$$\mu \left( \frac{n\hbar}{\mu r} \right)^2 = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow n^2 \frac{\hbar^2}{\mu r} = Z \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

ou

$$r \equiv r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 \mu} \times \frac{m}{m} \quad (3.54)$$

ou ainda

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} a_0, \quad (3.55)$$

em que

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} \approx 0,05 \text{ nm}, \quad (3.56)$$

é um parâmetro atômico importante denominado de raio de Bohr. Essa quantidade é utilizada como uma escala de comprimento em problemas de física atômica.

Assim como o raio orbital  $r_n$  é quantizado, tem-se também quantização na energia  $E$  quando se insere a eq. (3.55) na eq. (3.52'), isto é,

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 m}{Z \mu} a_0} = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} \left( \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \right).$$

ou

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} E_0, \quad (3.57)$$

onde, de acordo com a eq. (3.56),

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m}{2\hbar^2}, \quad (3.58)$$

é uma unidade de energia atômica denominada de energia de Rydberg, que também pode ser escrita, como

$$E_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\right)^2 mc^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2, \quad (3.59)$$

envolvendo a energia relativística do elétron  $mc^2$  que, no caso em questão não-relativístico, é a própria energia de repouso do elétron, e uma nova constante

$$\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c. \quad (3.60)$$

Esta constante é uma quantidade adimensional denominada Constante de estrutura fina que está associada às transições de energias mais finas no interior do átomo. Tanto o valor da constante  $\alpha$  quanto a energia de Rydberg  $E_0$ , são conhecidas com precisão experimental e são dadas por

$$E_0 = 13,6056981 \text{ eV}, \quad \alpha = 1/137,0359895. \quad (3.61)$$

A massa reduzida  $\mu$  aparece explicitamente nas expressões para  $n_n$  e  $E_n$  através da fração  $\mu/m$ . No caso do átomo de hidrogênio, onde  $M = M_p = 1836m$  é a massa do próton, a eq. (3.16), fornece

$$\mu_H = \frac{m}{1 + m/M_p} = \frac{m}{1 + m/1836m} \approx m \Rightarrow \mu_H/m \approx 1, \quad (3.62)$$

isto é, a massa reduzida  $\mu$  é praticamente igual a massa  $m$  do elétron.

Admitindo além  $Z=1$  e  $\mu/m \approx 1$  nas eqs. (3.55) e (3.57), obtêm-se os raios  $r_n$  e as energias  $E_n$  para o átomo de hidrogênio como

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} a_0 \approx n^2 a_0 \quad (3.63)$$

e

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} E_0 \approx -\frac{E_0}{n^2} \quad (3.64)$$

O caso particular  $n=1$ , isto é,

$$r_1 \approx a_0 = 0,05 \text{ nm} \text{ e } E_1 \approx -E_0 \approx -13,6 \text{ eV}, \quad (3.65)$$

fornece, respectivamente, a primeira e menor órbita de Bohr e a menor energia, ou energia do estado fundamental, do átomo de hidrogênio.

O maior valor de  $n$  se refere ao estado excitado de maior energia e maior órbita de Bohr, ocorrendo quando se faz  $n \rightarrow \infty$  nas eqs. (3.63) e (3.64), isto é,

$$r_{\infty} = \infty \text{ e } E_{\infty} = 0. \quad (3.66)$$

Nesse caso, as duas partículas tem separação infinita e nenhuma interação. Assim, o valor limite  $n \rightarrow \infty$  está associado a uma condição limiar para a ionização do átomo. A energia de ionização é determinada pela diferença entre o limiar de ionização e a energia do estado fundamental, isto é,

$$\Delta E_{1 \rightarrow \infty} = E_{\infty} - E_1 = 0 - (-13,60) = 13,60 \text{ eV.} \quad (3.67)$$

A maior credibilidade do modelo atômico de Bohr está nas corretas previsões realizadas, principalmente, com o átomo de hidrogênio. Essas previsões podem ser verificadas examinando os comprimentos de onda no espectro de emissão do átomo de Bohr. Seja, por exemplo, uma transição de um estado excitado inicial  $E_i$  para um estado final de menor energia  $E_j$ , como mostra a Fig. 3.13.

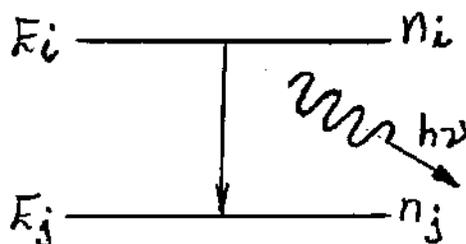


Fig. 3.13 - Emissão de um fóton numa transição  $E_i \rightarrow E_j$ .

De acordo com a eq. (3.57), essa transição radiativa libera um fóton de energia

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_j = -\frac{Z^2}{n_i^2} \frac{\mu}{m} E_0 - \left( -\frac{Z^2}{n_j^2} \frac{\mu}{m} E_0 \right) \quad (3.68)$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2}{m} \frac{\mu}{hc} \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

ou ainda

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2}{m} R_{\infty} \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.69)$$

onde, de acordo com a eq. (3.59),

$$R_{\infty} = \frac{E_0}{hc} = \frac{1/2 \alpha^2 mc^2}{hc} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{mc}{h}. \quad (3.70)$$

O resultado na eq. (3.69) é, essencialmente, o mesmo que a fórmula empírica de Rydberg, dada na eq. (3.36). A semelhança ocorre quando se identifica a constante de Rydberg  $R_H$ , para  $Z=1$ , com  $R_H = \mu/m R_{\infty} \approx R_{\infty}$ , isto é,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \approx R_{\infty} \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (3.71)$$

A notação  $R_{\infty}$  significa que esta constante é igual a  $R_H$  quando  $\mu = m$ , isto é, de acordo com a definição  $\mu = m / (1 + m/M)$  na eq. (3.46), quando  $M \rightarrow \infty$ . Tanto  $R_H$  quanto  $R_{\infty}$  são conhecidos com precisão e, em particular,

$$R_{\infty} = 10,973731534 \mu\text{m}^{-1}. \quad (3.72)$$

Assim, fica evidente que os níveis de energia, previstos no modelo atômico de Bohr, concordam com as linhas espectrais observadas no átomo de hidrogênio.

A eq. (3.71) descreve todas as séries de linhas espectrais previstas por Rydberg. Deve-se lembrar que essas séries são classificadas pela escolha sistemática de vários valores fixos para o número quântico final  $n_j$ .

As transições para  $n_f = 1$  com  $n_i \geq 2$ , fornecem a série de Lyman, as transições para  $n_f = 2$  com  $n_i \geq 3$ , fornecem a série de Balmer, as transições para  $n_f = 3$  com  $n_i \geq 4$ , fornecem a série de Paschen e assim por diante.

Essas transições, juntamente com as regiões do espectro eletromagnético correspondentes, são mostradas na Fig. 3.14, num diagrama de níveis de energia, para o átomo de hidrogênio onde, de acordo com a eq. (3.64),  $E_n = -E_0/n^2$ .

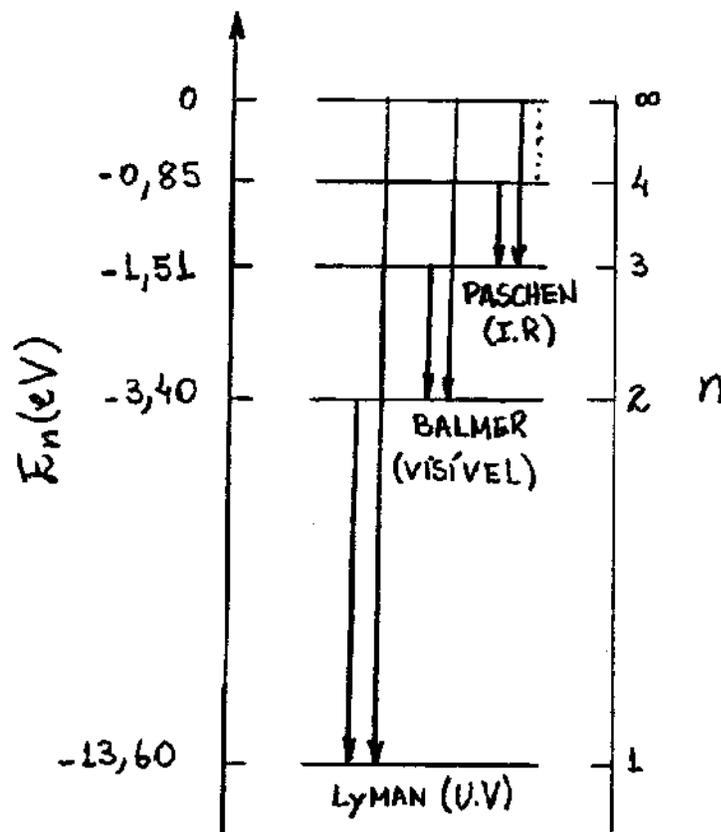


Fig. 3.14 - Níveis de energia e principais transições para o átomo de hidrogênio de acordo com o modelo atômico de Bohr.

Exemplo 3.10 - Exemplo do Mullin.

Encontrar uma expressão para o comprimento de onda mais curto nas transições do átomo de hidrogênio, previsto pelo modelo atômico de Bohr. Com esta expressão, encontrar os valores desses comprimentos de onda para as séries de Lyman, Balmer e Paschen.

A fórmula de Rydberg é

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Os comprimentos de onda mais curtos ocorrem para  $n_i \rightarrow \infty$  e, nesse caso,

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \frac{1}{n_j^2} \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{n_j^2}{R_H} \quad ; \quad R_H \approx 10,96 \mu\text{m}^{-1}$$

$$\text{Lyman } (n_j=1) \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{1^2}{10,96} = 0,0912 \mu\text{m} = 91,2 \text{ nm}$$

$$\text{Balmer } (n_j=2) \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{2^2}{10,96} = 0,3649 \mu\text{m} = 364,9 \text{ nm}$$

$$\text{Paschen } (n_j=3) \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{3^2}{10,96} = 0,8211 \mu\text{m} = 821,1 \text{ nm}$$

Exemplo 3.11 - Texto do Mullin - FACULTATIVO.

- Utilizando o modelo atômico de Bohr,
- Encontrar uma expressão para a frequência da radiação emitida numa transição  $i \rightarrow j$ .
  - Mostrar que, para números quânticos  $n$  elevados, a frequência de transição entre níveis adjacentes,  $n_i = n$  para  $n_j = n-1$ , é igual a frequência  $f_n$  da órbita eletrônica.

Como a energia quantizada é

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} E_0,$$

então, a frequência da radiação emitida na transição  $i \rightarrow j$ , será

$$\nu_{i \rightarrow j} = \frac{E_i - E_j}{h} = \frac{Z^2 \mu}{m h} \frac{E_0}{h} \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = \frac{Z^2 \mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right),$$

onde usa-se a relação,  $E_0 = \frac{1}{2} \alpha^2 m c^2$ . Escrevendo  $n_i = n$ ,  $n_j = n-1$ , e considerando o valor de  $n$  muito grande, tem-se

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m \cdot 2h} \left[ \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m \cdot 2h} \left[ \frac{1}{n^2 - 2n + 1} - \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m \cdot 2h} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{1}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right] = \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m \cdot 2h} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{1}{\frac{n-2}{n}} - 1 \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} v_n &= Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{n}{n-2} - 1 \right] = Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{n-(n-2)}{n-2} \right] \\ &= Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{2}{n-2} \right] \approx Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{2}{n} \right], \end{aligned}$$

pois  $n \gg 2$ . Assim,

$$v_n = \frac{Z^2 \mu}{n^3 m} \frac{\alpha^2 m c^2}{h}. \quad (3.73)$$

Para calcular a frequência  $f_n$  da órbita de raio  $r_n$ , é necessário calcular, antes, a velocidade  $v_n$  nessa órbita. De acordo com os postulados de Bohr,

$$L_n = \mu v_n r_n = n\hbar \quad \Rightarrow \quad v_n = \frac{n\hbar}{\mu r_n}.$$

Das eqs. (3.56) e (3.60), tem-se  $a_0 = (4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / e^2) k / \mu = \frac{1}{\mu c} k / \mu$ . Assim,

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} a_0 = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m c} = \frac{n^2}{Z} \frac{1}{\mu} \frac{\hbar}{\alpha c}.$$

Logo,

$$v_n = \frac{Z}{n} \alpha c. \quad (3.74)$$

Finalmente, de acordo com a eq. (3.74), a frequência  $f_n$  da órbita de raio  $r_n$ , será

$$f_n = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{\frac{Z}{n} \alpha c}{2\pi \frac{n^2}{Z} \frac{1}{\mu} \frac{\hbar}{\alpha c}} = \frac{Z \alpha c}{n} \frac{Z \mu \alpha c}{2\pi \hbar n^2} = \frac{Z^2 \mu}{n^3 m} \frac{\alpha^2 m c^2}{h},$$

cujos resultados é idêntico a eq. (3.73).

### 3.7. Experimento de Franck-Hertz.

O modelo atômico de Bohr é capaz de justificar o fenômeno da quantização observado no espectro atômico. Embora isso tenha sido mostrado somente para átomos monoelétrônicos, fica evidente a validade também para átomos multieletrônicos.

Deve-se lembrar que a quantização da energia nos átomos, já tinha sido proposta por Planck na teoria da radiação de corpo negro.

A confirmação experimental da quantização da energia interna dos átomos, foi realizada em 1914 por James Franck e Gustav Hertz. A Fig. 3.15 mostra o diagrama da montagem experimental, usado por Franck e Hertz.

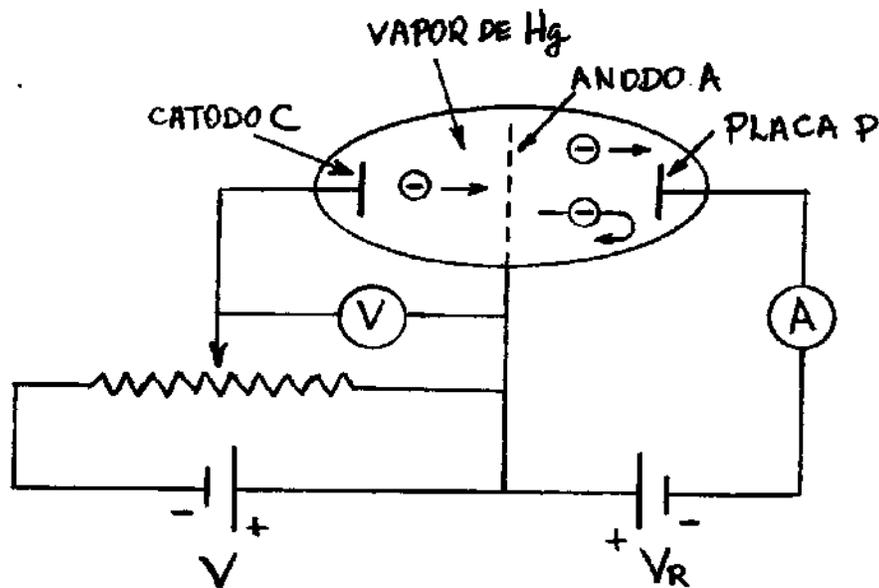


Fig. 3.15 - Diagrama esquemático do experimento de Franck-Hertz.

Elétrons de baixa energia são emitidos, termicamente, de um catodo aquecido C. Esses elétrons são acelerados em direção a um anodo A por uma diferença de potencial  $V$ , aplicada entre os dois eletrodos. Alguns dos elétrons podem atravessar orifícios no anodo e alcançar uma placa P, desde que, tenham energia cinética  $K$  suficiente para vencer um pequeno potencial retardador  $V_R$ , aplicado entre P e A. Os elétrons passam por um meio composto por um gás, ou vapor, de átomos a baixa pressão, cujas propriedades se deseja investigar. A experiência se baseia na medida da corrente elétrica  $i$ , que passa através da placa P, em função do potencial acelerador  $V$ . A Fig. 3.16 mostra um resultado para o caso de átomos de Hg.

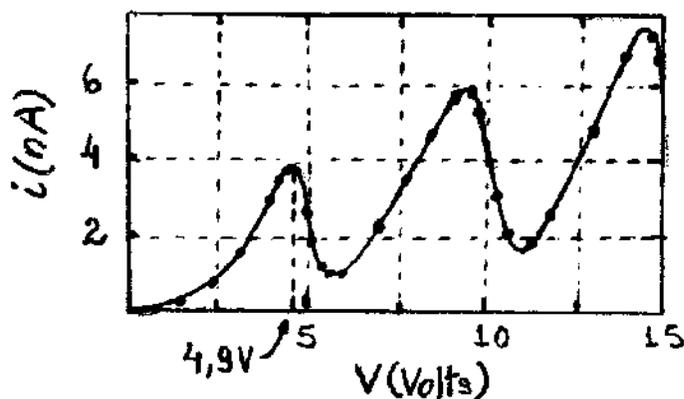


Fig. 3.16 - Resultado do experimento de Franck e Hertz para o vapor de Hg.

Observa-se que, para voltagens aceleradoras baixas, a corrente  $i$  crece com o aumento de  $V$ . No entanto, quando  $V$  atinge 4,9V, a corrente cai abruptamente.

Deve-se concluir que alguma interação entre os elétrons e os átomos de Hg tem início repentinamente, quando os elétrons adquirem a energia cinética  $K = 4,9 \text{ eV}$ . Aparentemente, elétrons com energia cinética ligeiramente superior a  $4,9 \text{ eV}$ , perde parte dela para excitar átomos de Hg e não consegue mais vencer o potencial retardador  $V_R$  para atingir a placa P.

Quando  $V$  continua crescendo, os elétrons voltam a ganhar energia cinética suficiente após o processo de excitação, superar  $V_R$  e atingir P. As mudanças bruscas na curva para determinados valores da energia cinética  $K$  dos elétrons, é consistente com a existência de estados quantizados de energia nos átomos de Hg. O primeiro estado excitado do Hg tem uma energia de  $4,9 \text{ eV}$  acima do estado fundamental.

Franck e Hertz descobriram que quando a energia dos elétrons é menor do que  $4,9 \text{ eV}$ , o vapor de Hg não emite nenhuma linha espectral e, quando é um pouco maior que esse valor, apenas uma linha é vista no espectro. A linha observada tem comprimento de onda  $\lambda = 253,6 \text{ nm}$ , que corresponde exatamente a um fóton de energia  $4,9 \text{ eV}$ .

A experiência de Franck e Hertz não forneceu somente evidências da quantização da energia, mas também um método para a medida direta das diferenças de energia entre estados quânticos de um átomo.

### 3.8. Integral de Ação e Regras de Quantização.

O modelo atômico de Bohr foi confirmado por vários resultados experimentais. Entretanto, este fato não acentuou a natureza misteriosa dos postulados nos quais se baseava o modelo. A quantização do momento angular  $L$  no modelo atômico de Bohr e a quantização da energia  $E$  na teoria de Planck foram, sem dúvida, as propostas mais arrojadas para explicar o comportamento microscópico da matéria.

Em 1916, William Wilson e Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld enunciaram uma regra de quantização válida para todos os sistemas físicos de coordenadas periódicas, que permitiu uma melhor compreensão do tema. Essa regra inclui a quantização de Planck e a quantização de Bohr como casos particulares. De acordo com Wilson e Sommerfeld, para todo sistema físico de coordenadas periódicas, vale a seguinte integral de ação:

$$\int_{\text{ciclo}} p_q dq = n_q h, \quad (3.75)$$

onde  $q$  é uma coordenada periódica generalizada,  $p_q$  é o momento generalizado associado a essa coordenada,  $n_q$  é um número quântico, e  $\int_{\text{ciclo}}$  é uma integração sobre um ciclo, ou período, da coordenada generalizada  $q$ .

Por exemplo, para o oscilador harmônico simples unidimensional, que é o modelo de gerador de radiação de cavidade proposto por Planck, a energia total é

$$E = K + U = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow \frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$$

ou

$$\frac{p_x^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (3.76)$$

onde

$$a = \sqrt{2E/k} \quad e \quad b = \sqrt{2mE} \quad (3.77)$$

que é a equação de uma elipse num espaço de fase representado pelas coordenadas  $p_x$  e  $x$ , e parametrizada pela energia constante  $E$ .

Durante um ciclo de oscilação, o ponto  $(p_x, x)$ , associado a posição e ao momento da partícula, faz uma volta completa em torno da elipse, como mostra a Fig. 3.17. Dessa forma, a integral  $\int_{\text{ciclo}} p_x dx$  fornece a área  $A = \pi ab$  da elipse, onde  $a$  é o raio maior e  $b$  é o raio menor da elipse. Assim, a regra de quantização, definida na eq. (4.75), fornece

$$\int_{\text{ciclo}} p_x dx = \pi ab = nh \quad (3.78)$$

A Fig. 3.17 mostra também como duas elipses consecutivas, correspondentes a  $n$  e  $n+1$ , podem ser construídas a partir da eq. (3.78). Deve-se observar que a área entre as elipses determina o valor de  $h$ :

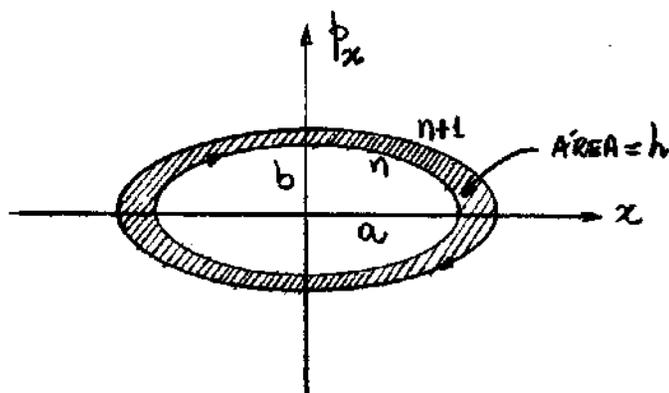


Fig. 3.17- Duas elipses associadas a dois números quânticos consecutivos  $n$  e  $n+1$ .

Substituindo as eqs. (3.77) na eq. (3.78), obtém-se

$$\pi \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{2mE} = \frac{2\pi E}{\sqrt{k/m}} = nh$$

ou

$$E = n \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = nh\nu = nh\omega, \quad (3.79)$$

pois

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu \text{ e } h = h/2\pi$$

resultando assim na quantização da energia postulada por Planck. Deve-se observar que quando  $n \rightarrow \infty$ , a área entre as elipses na Fig. 3.17 tende a se anular, isto é,  $h \rightarrow 0$ . Nesse caso, qualquer elipse, ou qualquer energia  $E$ , será permitida. Esse é o caso em que os resultados quânticos e clássicos se equivalem.

É possível também deduzir a quantização de Bohr para o momento angular a partir da regra de quantização de Wilson-Sommerfeld.

Um elétron, movendo-se numa órbita circular de raio  $r$ , tem momento angular  $L$  constante. Nesse caso, a variável periódica no tempo é a coordenada angular  $\theta$ , que cresce linearmente no tempo de  $0$  a  $2\pi$ , de  $2\pi$  a  $4\pi$  e assim por diante. Portanto, a regra de quantização na eq. (3.75) torna-se

$$\int_{\text{ciclo}} L d\theta = nh$$

ou, como  $L$  é constante,

$$\int_{\text{ciclo}} L d\theta = L \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi L \Rightarrow 2\pi L = nh$$

$$\text{ou} \quad L = nh/2\pi = n\hbar, \quad (3.80)$$

o que concorda com a proposta do modelo atômico de Bohr.

### 3.9 Modelo Atômico de Sommerfeld

O modelo atômico de Bohr prevê transições eletrônicas entre níveis de energia  $E_n$ , associadas às interações Coulombianas entre o elétron e o núcleo do átomo. Além dessas transições, outras transições menos intensas, da ordem de  $10^{-4}E_n$ , também tinham sido observadas no espectro do átomo de hidrogênio. Essas transições, conhecidas como estrutura fina, indicam que um único estado de energia do hidrogênio consiste, na verdade, de vários estados muito próximos.

Na tentativa de explicar a estrutura fina observada no espectro do hidrogênio, baseado nas regras de quantização discutidas anteriormente, Sommerfeld propôs um modelo atômico no qual o elétron poderia assumir também órbitas elípticas. A ideia de Sommerfeld tem como base a descrição do movimento do elétron em termos de coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , de modo que as condições de quantização sejam

$$\int_{\text{ciclo}} L d\theta = n_0 h \quad \text{e} \quad \int_{\text{ciclo}} p_r dr = n_r h \quad (3.81)$$

em que,  $n_0 = 1, 2, 3, \dots$  e  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$ . A primeira condição, associada a quantização do momento angular, reproduz a trajetória circular do elétron do átomo de Bohr e a segunda, reproduz trajetórias elípticas previstas nas regras de quantização de Wilson-Sommerfeld. O valor  $n_r = 0$ , ou  $p_r = 0$ , ou ainda velocidade radial nula, inclui a trajetória circular como um caso particular. A partir de um cálculo similar ao feito como modelo atômico de Bohr para átomos monoelétrônicos, com a inclusão de possíveis órbitas elípticas para o elétron, Sommerfeld obteve a mesma energia,  $E_n = -Z^2/n^2 \mu/m E_0$ , obtida anteriormente na eq. (3.57), com a diferença que

$$n = n_0 + n_r \quad (3.82)$$

Como  $n_0 = 1, 2, 3, \dots$  e  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  então, os valores de  $n$  são  $n = 1, 2, 3, \dots$

exatamente como no modelo atômico de Bohr.

Na sequência, observa-se como os possíveis valores de  $n_0 = n - n_z$  podem ser gerados para cada valor de  $n$ :

$$n=1 \Rightarrow n_0 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow n_0 = 1$$

$$n=2 \Rightarrow n_0 = 2 - 0 = 2, n_0 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow n_0 = 1, 2$$

$$n=3 \Rightarrow n_0 = 3 - 0 = 3, n_0 = 3 - 1 = 2, n_0 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow n_0 = 1, 2, 3$$

ou, para um valor qualquer de  $n$ ,

$$n_0 = 1, 2, 3, \dots, n-1, n \quad (3.83)$$

O número inteiro  $n$  é denominado de número quântico principal e  $n_0$  é denominado de número quântico secundário. Para cada valor do número quântico principal  $n$ , haverá  $n$  diferentes órbitas eletrônicas. Uma dessas órbitas,  $n_0 = n$  (correspondente a  $n_z = 0$ ), é a órbita circular descrita no modelo de Bohr, enquanto que as outras são elípticas, como mostra a Fig. 3.18.

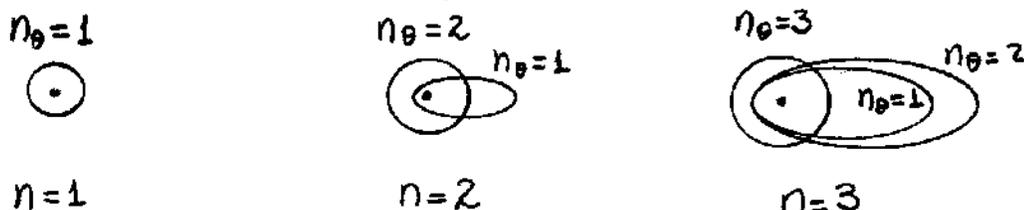


Fig. 3.18 - Órbitas de Bohr-Sommerfeld onde o núcleo está no foco comum das elipses.

A energia total,  $E_n = -Z^2/n^2 \cdot 1/1836 E_0$ , depende somente de  $n = n_0 + n_z$ . Assim, todas as órbitas, ou configurações espaciais, caracterizadas pelo mesmo valor de  $n$ , degeneram-se numa mesma energia e portanto são ditas degeneradas. Algumas degenerescências, de fato, existem por causa de certas simetrias do sistema, outras, entretanto, ocorrem devido ao uso de teorias aproximadas e podem ser removidas por teorias mais refinadas.

Sommerfeld "removiu a degenerescência" do átomo de hidrogênio tratando o problema relativisticamente. Sabe-se que para o elétron no átomo de hidrogênio  $v/c \approx 10^{-2}$ . Assim, espera-se que a correção relativística para a energia total, seja  $v^2/c^2 \approx 10^{-4}$ , que é exatamente a ordem de grandeza da separação dos níveis de energia na estrutura fina do espectro do hidrogênio.

Após os cálculos, não reproduzidos aqui, Sommerfeld mostrou que as energias do átomo monoelétrônico com órbitas eletrônicas, caracterizadas por números quânticos  $n$  e  $n_0$ , são

$$E_{n,n_0} = -\frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2n^2 \hbar^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left( \frac{1}{n_0} - \frac{3}{4n} \right) \right], \quad (3.84)$$

onde  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$  é a constante de estrutura fina definida na eq. (3.60). A Fig. 3.19 mostra algumas transições entre níveis de energia no hidrogênio de acordo com a eq. (3.84).

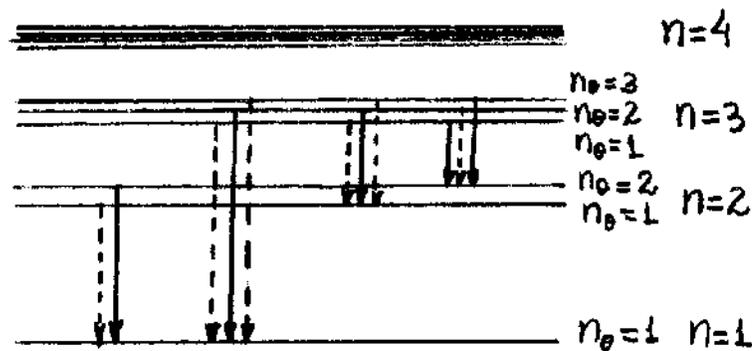


Fig. 3.19 - Transições de estrutura fina no hidrogênio.

As transições indicadas pelas setas contínuas de fato são observadas no espectro do hidrogênio.

Por outro lado, as transições indicadas pelas setas tracejadas não são encontradas no espectro e portanto não devem ser consideradas.

A Fig. 3.19 mostra que as transições permitidas são aquelas que satisfazem a seguinte condição:

$$m_{0i} - m_{0j} = \pm 1 \quad (3.85)$$

Esta condição é denominada de regra de seleção e seleciona as transições que realmente ocorrem.

Uma regra de seleção está associada a uma probabilidade média de ocorrência de determinadas transições. Para uma compreensão satisfatória desse tema, é necessário uma teoria quântica mais elaborada, que não aborda da nos próximos capítulos.

Todas as propriedades quânticas discutidas até aqui, fazem parte do que se chama de "velha teoria quântica". Em muitos casos a velha teoria quântica é bem sucedida. No entanto, a teoria tem limitações importantes que podem ser resumidas como:

- 1- A velha teoria quântica se aplica somente a sistemas periódicos. Entretanto, grande parte dos sistemas físicos importantes não são periódicos.

2 - A velha teoria quântica prevê somente as energias dos fótons emitidos, ou absorvidos, nas transições, mas não prevê as taxas, ou número médio por segundo, com que essas transições ocorrem. Tais informações são necessárias para o cálculo das intensidades das linhas espectrais.

3 - A velha teoria quântica é bem sucedida somente para átomos de um elétron, ou átomos mono-elétrônicos. Falha mesmo quando aplicada ao átomo de Hélio neutro, que possui somente dois elétrons.

Em 1925, Erwin Schrödinger propôs uma teoria quântica moderna que, além de estar livre das objeções da velha teoria quântica, permitiu compreender vários outros aspectos relacionados ao mundo microscópico. Embora seja baseada em mais um postulado (postulado de de Broglie), a teoria quântica de Schrödinger é bem diferente da velha teoria quântica. Por exemplo, como na teoria quântica de Schrödinger a localização das partículas microscópicas possui interpretação probabilística, os elétrons não podem seguir órbitas definidas como no átomo de Bohr. Entretanto, a velha teoria quântica é bastante útil como uma primeira aproximação. A razão disso é que a velha teoria quântica é capaz de gerar resultados numericamente corretos usando um formalismo matemático simplificado. Além disso, essa teoria permite uma visualização dos processos atômicos que dificilmente seriam percebidas com a linguagem abstrata da teoria quântica de Schrödinger.

## Lista de Exercícios

### Questões conceituais

1- Por que é necessário considerar uma folha fina em experiências que visam verificar a fórmula do espalhamento de Rutherford?

2- Compare a atração gravitacional entre um elétron e um próton no estado fundamental de um átomo de hidrogênio com a atração coulombiana entre eles. É razoável ignorar a atração gravitacional nesses casos?

Resp.:  $F_{grav} / F_{elet} \approx 10^{-40}$ .

3- A fórmula do espalhamento de Rutherford não está de acordo para ângulos de espalhamento muito pequenos. Explique o motivo disso.

4- Em que a relação  $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$ , que dá a trajetória de uma partícula que se move sob ação de uma força coulombiana repulsiva proporcional ao inverso do quadrado da distância, difere da dedução da trajetória de um planeta que se move sob influência do campo gravitacional do sol?

5- Mostre que a constante de Planck tem unidades de momento angular.

6- Para as órbitas do átomo de hidrogênio de Bohr, a energia potencial é negativa e maior em módulo do que a energia cinética. Qual a implicação disso?

7- Um átomo de hidrogênio pode absorver um fóton cuja energia exceda sua energia de ligação  $13,6eV$  ?

8- A energia de ionização do deutério é diferente da do hidrogênio? Explique.

### Problemas

1- Mostre que para um átomo de Thomson, com uma distribuição de carga positiva esfericamente simétrica em todo o volume do átomo, um elétron que se move em uma órbita circular estável, gira com a mesma frequência que teria caso oscilasse ao longo de um diâmetro atômico em torno do centro. (Sugestão: Mostre

que a frequência angular é  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , com  $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  onde  $R$  é o raio atômico, para ambos os casos).

2- O modelo de Thomson para o átomo de hidrogênio prevê uma frequência única de oscilação para o elétron. Considerando o raio do átomo de hidrogênio como sendo  $R = 0,05nm$ , calcule o comprimento de onda da radiação emitida por esse átomo. (Sugestão: Use o resultado obtido no Problema 1).

3- Qual deve ser o raio de um átomo de um elétron, no modelo de Thomson, para que ele irradie uma linha espectral de comprimento de onda  $\lambda = 600nm$  ?

4- Um feixe de partículas  $\alpha$  de energia  $3MeV$  bombardeia uma lâmina de alumínio. Determine a distância  $D$  de maior aproximação ao núcleo do átomo de alumínio associada a uma colisão frontal e o número de núcleos por unidade de volume na lâmina, sabendo-se que o número atômico do alumínio é 13, o número de massa é 27 e a densidade é  $\rho = 2,70g/cm^3$ .

5- Qual a distância de maior aproximação de uma partícula  $\alpha$  com  $5,30MeV$  a um núcleo de cobre em uma colisão frontal? Resp.:  $15,8 \times 10^{-15}m$ .

6- Referindo-se ao espalhamento da partícula  $\alpha$  por elétrons em um átomo de Thomson, use as leis da conservação do momento linear e da energia para mostrar que a velocidade de recuo de um elétron durante o espalhamento é da ordem do dobro da velocidade da partícula  $\alpha$ . (Sugestão: Considere uma partícula de massa  $M$  e velocidade  $v$  colidindo contra uma partícula em repouso de massa  $m$  com  $M \gg m$ . Suponha que após a colisão a partícula de massa  $M$  adquira a velocidade  $v_1$  e a partícula de massa  $m$  adquira a velocidade  $v_2$ . Use a conservação do momento para mostrar que  $v_1 = v - (m/M)v_2$ . Use a conservação da energia para mostrar que  $Mv^2 - mv_2^2 = Mv_1^2$ . Combine essas duas equações para eliminar  $v_1$ , assumindo  $m^2/M^2 \approx 0$  e conclua que  $v_2 \approx 2v$ ).

7- De acordo com a mecânica clássica, um elétron deve sempre se mover em um átomo com qualquer momento angular. Entretanto, de acordo a teoria de Bohr para o átomo de hidrogênio, o momento angular é quantizado na forma  $L = n\hbar/2\pi$ . O princípio da correspondência pode reconciliar essas duas afirmações? Explique.

8- Mostre que a frequência de revolução de um elétron no modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio é dada por  $\nu = 2|E|/hn$ , onde  $E$  é a energia total do elétron. (Sugestão: Use as equações  $|E| = 1/2mv^2 = pv/2$ ,  $v = 2\pi r/T$  válidas para átomos monoelétrônicos e o fato que  $L = n\hbar$ ).

9- (a) Mostre que no estado fundamental do átomo de hidrogênio a velocidade do elétron pode ser escrita como  $v = \alpha c$ , onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina. (b) A partir do valor de  $\alpha$ , o que se pode concluir a respeito do fato de se desprezar os efeitos relativísticos nos cálculos de Bohr? (Sugestão: Use a equação  $E_0 = 1/2mv^2$  válida para a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio).

10- (a) Calcule os três maiores comprimentos de onda da série de Balmer a partir da fórmula de Bohr. (b) A série de Balmer está entre que limites de comprimento de onda?

11- Calcule o menor comprimento de onda da série de Lyman, da série de Paschen e da série de Pfund para o átomo de hidrogênio. Em qual região do espectro eletromagnético está cada uma?

12- Quanta energia é necessária para remover um elétron de um átomo de hidrogênio em um estado com  $n = 8$ ?

13- Um átomo de hidrogênio é excitado de um estado com  $n = 1$  até  $n = 4$ . (a) Calcule a energia que deve ser absorvida pelo átomo. (b) Calcule e trace sobre um diagrama de níveis de energia as energias dos diferentes fótons que serão emitidos se o átomo voltar a seu estado  $n = 1$ . (c) Calcule a velocidade de recuo do átomo de hidrogênio, ao fazer uma transição de  $n = 4$  a  $n = 1$  em um único salto quântico, supondo que ele está inicialmente em repouso.

14- Um átomo de hidrogênio com energia de ligação (energia necessária para remover um elétron) de  $0,85eV$  sofre uma transição para um estado com energia de excitação (diferença de energia entre este estado e o fundamental) de  $10,2eV$ . (a) Calcule a energia do fóton emitido. (b) Mostre essa transição em um diagrama de níveis de energia para o hidrogênio, designando os números quânticos apropriados.

15- Calcule a energia necessária para remover um elétron de um átomo de hélio ionizado utilizando o modelo atômico de Bohr. Resp.:  $54,4eV$ .

16- Em uma experiência do tipo Franck e Hertz, bombardeiam-se átomo de hidrogênio com elétrons, e obtém-se os potenciais de excitação em  $10,21V$  e  $12,10V$ . (a) Trace um diagrama de níveis de energia para as três possíveis transições observadas. (b) Supondo que as diferenças de energia podem ser expressas como  $\Delta E = h\nu$ , obtenha os três possíveis valores de  $\nu$  e dos respectivos comprimentos de onda  $\lambda$ .

17- Suponha que, na experiência de Franck e Hertz, a energia eletromagnética emitida por um átomo de Hg, devido à absorção de energia de elétrons com  $4,9eV$  seja expressa por  $\Delta E = h\nu$ , onde  $\nu$  é a frequência correspondente à linha de ressonância  $\lambda = 253,6nm$  do mercúrio. Calcule o valor de  $h$  de acordo com essa experiência e compare com o valor obtido por Planck.

18- Nas estrelas observa-se a série de Pickering no espectro do íon de hélio  $He^+$ . Ela é emitida quando o elétron no  $He^+$  salta para o nível  $n = 4$  a partir de níveis de mais altas energias. (a) Obtenha a fórmula dos comprimentos de onda das linhas que pertencem a essa série. (b) Encontre o comprimento de onda limite dessa série. (c) Essa série pertence a qual região do espectro eletromagnético? (d) Calcule o potencial de ionização em elétrons-volt, se o  $He^+$  estiver no estado fundamental.

19- Se o momento angular da terra de massa  $M = 6,0 \times 10^{24} kg$ , devido ao seu movimento em torno do sol numa órbita de raio  $R = 1,5 \times 10^{11} m$ , fosse quantizado segundo a relação de Bohr  $L = n\hbar$ , qual seria o valor do número quântico  $n$ ? Poderíamos detectar tal quantização?

# CAPÍTULO 4 – PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DA MATÉRIA

## ÍNDICE

- 4.1- Postulados de de Broglie
- 4.2- Interpretação Probabilística da Dualidade Onda - Partícula
- 4.3- Propriedades das Ondas de Matéria
- 4.4- Princípio da Incerteza

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **3 aulas de quatro créditos**.

## CAPÍTULO 4

### PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DA MATÉRIA

#### 4.1. Postulados de de Broglie.

Em sua tese de doutorado, apresentada em 1924 à Faculdade de Ciências da Universidade de Paris, Louis Victor Pierre Raymond de Broglie postulou a existência da onda de matéria. Cinco anos mais tarde, de Broglie recebeu o prêmio nobel de física, quando suas ideias foram definitivamente comprovadas por experiências. Foi a ideia da onda de matéria de de Broglie que inspirou Erwin Schrödinger a propor a sua teoria quântica moderna.

Para de Broglie, a dualidade onda-partícula da radiação, também deveria ocorrer com a matéria. De acordo com essa hipótese, a energia  $E = h\nu$  e o momento  $p = h/\lambda$ , dados nos eqs. (2.49) e (2.55) para a radiação, se aplicam também a matéria. A segunda equação, escrita na forma

$$\lambda = h/p, \quad (4.1)$$

é conhecida como a equação de de Broglie e prevê um comprimento de onda de de Broglie para uma partícula em movimento com momento linear de módulo  $p$ .

A quantização do momento angular no átomo, proposta empiricamente por Bohr, pode ser obtida diretamente do postulado de de Broglie. Como o elétron no átomo deve mover-se em órbitas discretas e fechadas, de acordo com o postulado de Bohr, então uma órbita de raio  $r$  deve conter um número inteiro  $n$  de ondas de de Broglie do elétron, como mostra a Fig. 4.1.

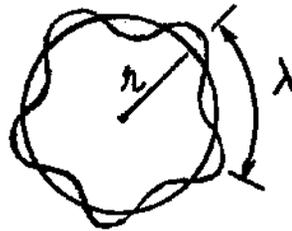


Fig. 4.1 - Estado estacionário numa órbita de Bohr.

De acordo com esta ideia, a razão entre o perímetro da órbita  $2\pi r$  e o comprimento de onda  $\lambda$  de de Broglie, resulta em um número inteiro  $n$  dado por

$$n = \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r}{h/p} = \frac{2\pi}{h} L$$

ou

$$L_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde  $L = rp$  é o momento angular clássico do elétron e  $\hbar = h/2\pi$ .

### Exemplo 4.1

Determinar: (a) o comprimento de onda de de Broglie de um elétron de energia cinética  $K = 100 \text{ eV} = 160 \times 10^{-19} \text{ J}$  e, (b) o comprimento de onda de de Broglie de uma bola de boliche de massa  $m = 1,0 \text{ kg}$ , que se move com uma velocidade de  $\mu = 10 \text{ m/s}$ .

(a) Como  $K = p^2/2m$  e para o elétron  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , então

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2mK} = 1,2 \text{ \AA} \quad (4.2)$$

(b) Para a bola de boliche, encontra-se

$$\lambda = h/p = h/m\mu = 6,6 \times 10^{-25} \text{ \AA} \quad (4.3)$$

Sabe-se que, no caso da luz, o limite de utilização da óptica geométrica ocorre para  $\lambda \ll a$ , isto é, para comprimentos de onda  $\lambda$  muito menores do que a dimensão  $a$  de aberturas, ou obstáculos. Assim, no domínio da óptica geométrica a luz se comporta como raios geométricos, similarmente ao caso das trajetórias das partículas clássicas macroscópicas. Entretanto, quando  $\lambda \gtrsim a$ , o ângulo de difração  $\theta = \lambda/a$  torna-se importante, a natureza ondulatória da luz se evidencia e o fenômeno deve ser descrito pela óptica física, ou ondulatória. Para se observar a natureza ondulatória da matéria é necessário então aberturas, ou obstáculos, convenientemente pequenos.

Na época de de Broglie, os sistemas mais apropriados para este fim eram os espaçamentos entre planos adjacentes de um cristal, onde  $a \approx 1 \text{ \AA}$ . Atualmente tem-se acesso a sistemas que envolvem dimensões nucleares, onde  $a \approx 10^{-4} \text{ \AA}$ . Considerando o comprimento de onda de de Broglie, na eq. (4.3), vê-se que não se pode esperar a detecção de qualquer evidência de movimento ondulatório no movimento da bola de boliche, onde  $\theta = \lambda/a \approx 10^{-25} \text{ \AA}$ , para  $a \approx 1 \text{ \AA}$ . Entretanto, aspectos ondulatórios do movimento do elétron com  $\lambda = 4,2 \text{ \AA}$  seriam bem evidentes para  $a \approx 1 \text{ \AA}$ . Uma montagem para testar a natureza ondulatória do elétron, similar em certos aspectos a usada no experimento de Compton com raios X, foi proposta por Walter Maurice Elsassner na Alemanha em 1926 e experimentada por Clinton Joseph Davisson e Lester Halbert Germer nos Estados Unidos em 1927. A experiência de Davisson e Germer, como é chamada, é mostrada na Fig. 4.2.

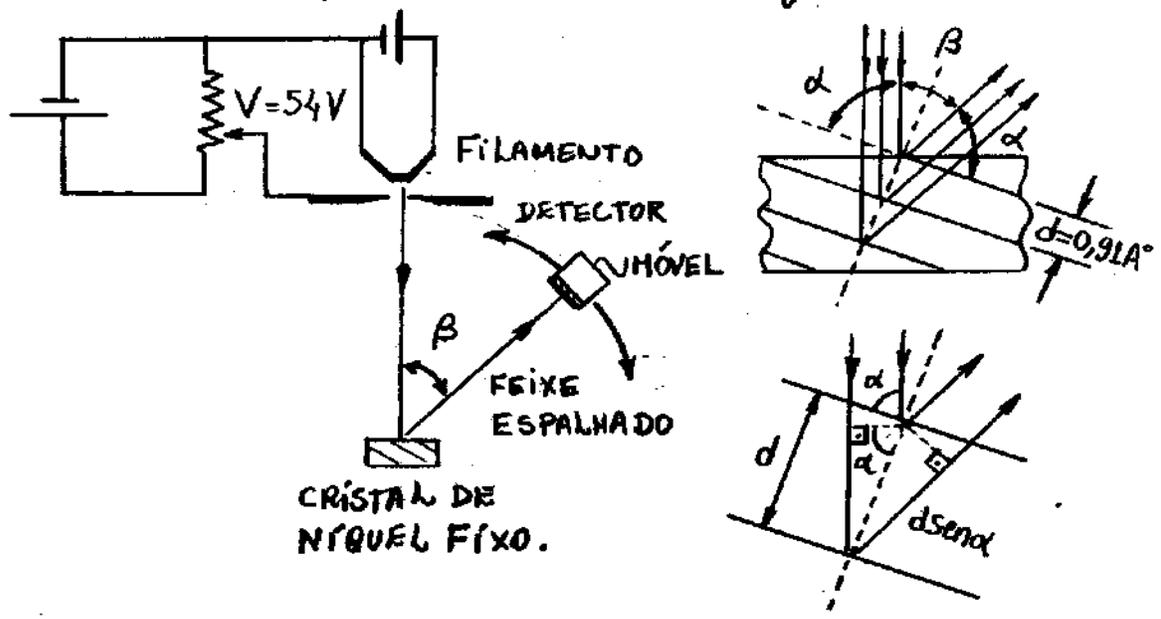


Fig. 4.2 - Experimento de Davisson e Germer.

No experimento, um feixe de elétrons de baixa energia é produzido num filamento aquecido e acelerado por uma diferença de potencial  $V$ . O feixe eletrônico incide normalmente sobre a superfície de um cristal de Níquel. Um detector é colocado a um ângulo  $\beta$  em relação ao feixe incidente para medir a intensidade do feixe espalhado. Na experiência espera-se encontrar regiões de máximos e mínimos de intensidade, resultantes das interferências construtiva e destrutiva nos planos cristalinos do cristal de Níquel. Exatamente como ocorre com o espalhamento de raios X nos cristais, para incidência normal, a condição de interferência construtiva, ou na linguagem cristalográfica "a condição de Bragg", fornece

$$2d \sin \alpha = \lambda \quad (4.4)$$

A experiência mostra que existe uma intensidade máxima para  $\beta = 50^\circ$ , ou  $\alpha = 65^\circ$ , quando  $V = 54$  V. Usando então os valores  $d = 0,91 \text{ \AA}$  e  $\alpha = 65^\circ$ , obtidas da experiência, encontra-se o comprimento de onda do feixe espalhado como

$$\lambda = 2d \sin \alpha = 2 \times 0,91 \times \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA}.$$

Por outro lado, o comprimento de onda de de Broglie para elétrons de energia cinética  $K = 54 \text{ eV} = 86,4 \times 10^{-19} \text{ J}$  será

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = 1,665 \text{ \AA}.$$

A concordância entre os resultados confirma quantitativamente a hipótese da onda de matéria de de Broglie.

Ainda em 1927, George Paget Thomson, filho de J. J. Thomson, mostrou a difração de feixes de elétrons ao passar através de películas cristalinas confirmando, de forma independente, o postulado de de Broglie.

A Fig. 4.3 mostra a figura de difração do espalhamento de elétrons numa película de cristal de ouro. O resultado é similar ao espalhamento de Raios X em cristais, onde o fenômeno da difração aparece por causa de aberturas circulares no interior do filme cristalino.

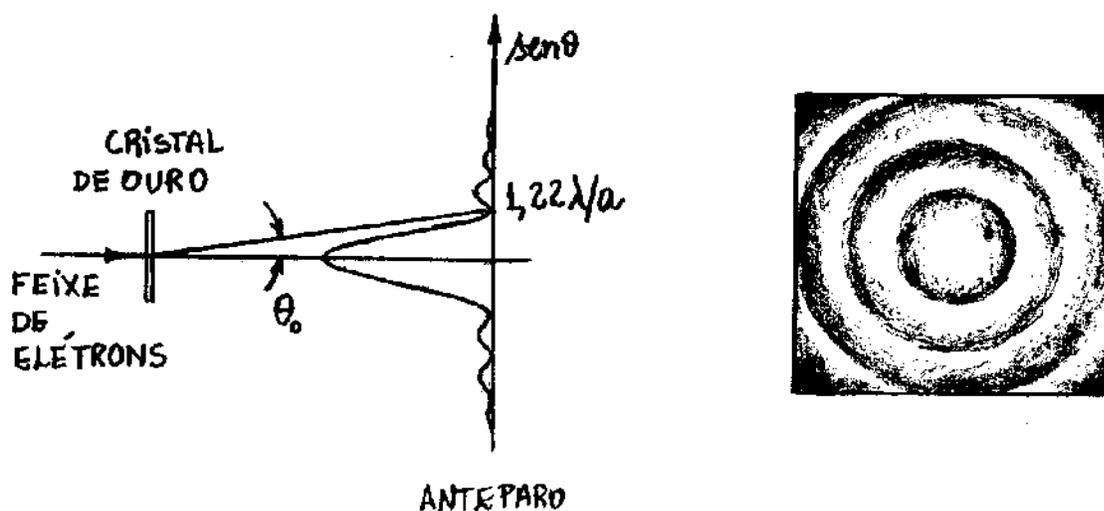


Fig. 4.3 - Experimento de George P. Thomson sobre a difração de elétrons em cristais de ouro.

É interessante mencionar que Joseph John Thomson recebeu o prêmio nobel de física em 1906 pela medida da razão carga/massa do elétron, enquanto seu filho, George Paget Thomson, recebeu o prêmio nobel de física em 1937 por experimentos de difração com elétrons, realizadas em 1927.

Assim, pode-se dizer que Thomson, o pai, recebeu o prêmio nobel por ter mostrado que o elétron é uma partícula e Thomson, o filho, recebeu o prêmio nobel por ter mostrado que o elétron é uma onda.

### Exemplo 4.2 - Eisberg 3.5 - FACULTATIVO.

Mostre que o comprimento de onda de de Broglie de uma partícula de carga  $e$ , massa de repouso  $m_0$ , movendo-se com uma velocidade relativística, é dada em função do potencial acelerador  $V$  como  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eV}} \left(1 + \frac{eV}{2m_0 c^2}\right)^{-1/2}$ .

Como  $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$  e  $E = K + m_0 c^2$ , então

$$(K + m_0 c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \Rightarrow K^2 + 2m_0 c^2 K + \cancel{(m_0 c^2)^2} = (pc)^2 + \cancel{(m_0 c^2)^2}$$

$$\Rightarrow pc = \sqrt{K^2 + 2m_0 c^2 K} = \sqrt{2m_0 c^2 K \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2}\right)}$$

$$\Rightarrow pc = c \sqrt{2m_0 K \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2}\right)^{1/2}}$$

ou,

$$p = \sqrt{2m_0 K} \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2}\right)^{1/2}$$

Assim, o comprimento de onda de de Broglie será

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K} \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2}\right)^{1/2}} \quad (4.5)$$

ou, escrevendo  $K = eV$ , a equação fica demonstrada. A energia total relativística também é dada por

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m_0 c^2 (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$$

de modo que

$$E = K + m_0 c^2 \Rightarrow m_0 c^2 (1 - u^2/c^2)^{-1/2} = K + m_0 c^2 \Rightarrow \frac{K}{m_0 c^2} = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} - 1$$

No limite clássico  $u \ll c$ ,  $u^2/c^2 \rightarrow 0$  e portanto  $K/m_0 c^2 \rightarrow 0$ . Nesse caso, a eq. (4.5) está de acordo com a definição inicial na eq. (4.2), isto é,  $\lambda = h/p = h/\sqrt{2m_0 K}$ .

### Exemplo 4.3

A resolução máxima atingida por um microscópio está limitada somente ao comprimento de onda da onda utilizada para observar o objeto. Suponha que se queira observar o interior de um átomo com detalhes da ordem de  $0,1 \text{ \AA}$ . (a) Se um microscópio óptico for usado para observar o átomo, qual seria a energia mínima para os fótons? Qual seria o momento desses fótons? Em que região do espectro eletromagnético estão esses fótons?

- (b) Se um microscópio eletrônico for usado para observar o átomo, qual seria a energia mínima para os elétrons? Qual seria o momento desses elétrons?
- (c) Qual dos microscópios seria mais prático para esse objetivo?

A onda deve ter o comprimento de onda  $\lambda = 0,1 \text{ \AA}$ .

(a) Para os fótons:  $E = pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12400 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{10^{-1} \text{ Å}} \Rightarrow E = 124 \text{ KeV}$ .

Essa energia está na região dos raios X, ou raios  $\gamma$ . O momento será,

$$p = E/c = 124 \text{ KeV}/c.$$

(b) Para os elétrons:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{10^{-11} \text{ m}} = 6,63 \times 10^{-23} \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{m}} \times \frac{1}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} \times \frac{30 \times 10^8 \text{ m/s}}{c}$$

$$= 1,24 \times 10^5 \text{ eV}/c = 0,124 \text{ MeV}/c$$

Como a energia de repouso do elétron é  $E_0 = 0,511 \text{ MeV}$ , então a energia total  $E$  e a energia cinética  $K$  serão dadas por

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 = (0,124 \text{ MeV})^2 + (0,511 \text{ MeV})^2 \Rightarrow E = 0,5258 \text{ MeV}$$

$$K = E - E_0 = 0,5258 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} \Rightarrow K = 14,8 \text{ KeV}$$

(c) Os microscópios eletrônicos são preferíveis. Os raios X, ou raios  $\gamma$ , são difíceis de serem focalizados e uma blindagem muito eficiente seria necessária.

## 4.2 - Interpretação Probabilística da dualidade onda-partícula.

Sabe-se agora que a dualidade onda-partícula se aplica tanto a radiação quanto a matéria. Em alguns casos é necessário recorrer ao modelo corpuscular e em outros ao modelo ondulatório. Entretanto, é importante mencionar que os dois aspectos não se revelam simultaneamente num mesmo experimento. Quando a radiação, ou a matéria, é detectada por interação, de modo que é localizada, ela se comporta como partícula. Por outro lado, quando ela se move no espaço livre, de modo que é deslocalizada, se comporta como uma onda e fenômenos de difração são observados.

Niels Bohr resumiu a questão em seu princípio da complementaridade: "O modelo corpuscular e ondulatório são complementares e não contraditórios": A experiência que comprova o caráter ondulatório da radiação é incapaz de comprovar o caráter corpuscular e vice-versa.

Para unificar o caráter ondulatório e corpuscular em um só experimento é necessário incorporar uma interpretação probabilística à dualidade onda-partícula.

A interpretação probabilística da dualidade onda-partícula, para o caso da radiação, foi proposta por Albert Einstein. Em seguida, Max Born usou argumentos similares para o caso da matéria. No modelo ondulatório a intensidade da radiação  $I$  é igual ao valor médio do módulo do vetor de Poynting  $\vec{S}$  e, portanto, proporcional ao quadrado do valor médio do módulo do campo elétrico  $\vec{E}$ , isto é,

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle EB \sin \theta \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle |\vec{E}|^2 \rangle, \quad (4.6)$$

onde usou-se o fato que  $B = E/c$ . Por outro lado, no modelo corpuscular, ou de fótons, a intensidade da radiação é dada em função da frequência  $\nu$  como

$$I = N h \nu, \quad (4.7)$$

onde  $N$  é o número médio de fótons por unidade de área e tempo.

Assim, as diferentes interpretações ondulatória e corpuscular para a intensidade da radiação mostram que

$$N \propto |\vec{E}|^2. \quad (4.8)$$

Espera-se, portanto, que nas regiões onde o campo elétrico  $\vec{E}$  é mais intenso, é maior aí a concentração de fótons.

O próprio conceito de fóton, proposto por Einstein para descrever a radiação eletromagnética, implica numa interpretação probabilística para a intensidade luminosa. Tal fato pode ser observado na experiência de interferência de dupla fenda de Young, mostrada na Fig. 4.4.

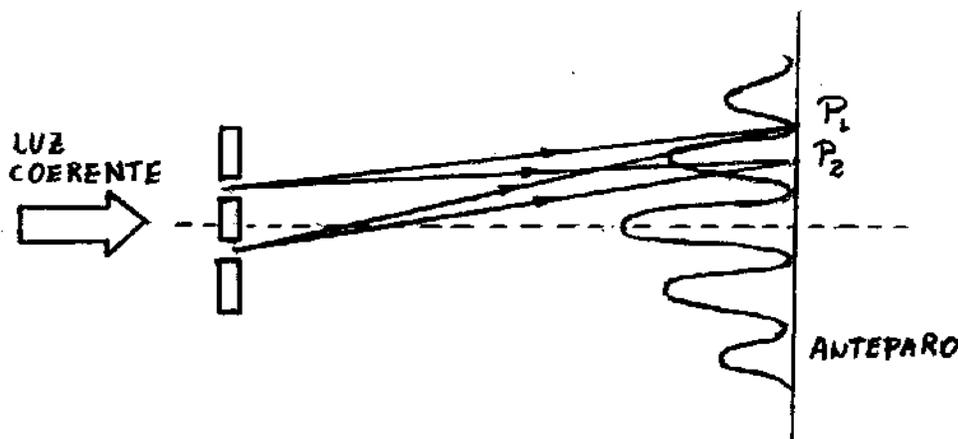


Fig. 4.4 - Experiência de dupla fenda de Young.

O padrão de interferência observado no anteparo é resultante da interferência entre as ondas provenientes das duas fendas. No ponto  $P_1$ , onde a interferência é destrutiva, o campo elétrico resultante é nulo e nenhum fóton é observado aí. No ponto  $P_2$ , onde a interferência é construtiva, o campo elétrico resultante é máximo e muitos fótons são observados aí. Se a intensidade da luz nas fendas for reduzida, observa-se ainda o padrão de interferência, desde que se substitua o anteparo por um filme fotográfico e espere-se um tempo suficientemente longo para sensibilizá-lo.

A interação da luz com o filme fotográfico é um fenômeno quântico. Se o filme for exposto durante um curto intervalo de tempo, com uma fonte de luz de baixa intensidade, não se observa somente uma versão menos intensa da figura de interferência obtida com luz intensa, mas também "pontos" resultantes das interações dos fótons com os cristálicos do filme. Como mostra a Fig. 4.5. Nas regiões onde as ondas interferem destrutivamente, não aparecem quaisquer pontos, ou seja, existe uma probabilidade nula de que fótons atinjam essas regiões. Por outro lado, nas regiões onde a interferência é construtiva, aparecem vários pontos, indicando que é grande a probabilidade de que os fótons ali chegam.

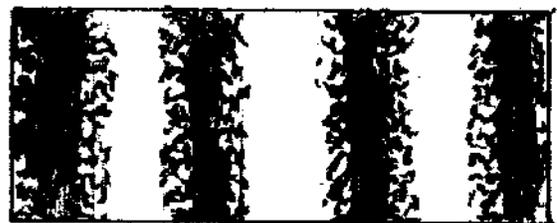
A medida que a intensidade, ou o tempo de exposição, aumenta, as flutuações uniformizam-se e não se observa mais a natureza quântica da luz.



(a) 50 fótons



(b) 5000 fótons



(c) 50000 fótons

Fig. 4.5 - Figuras de interferência para diferentes intensidades, ou número de fótons, da luz que incide na dupla fenda de Young.

Como  $|\vec{E}|^2$  é proporcional ao número  $N$  de fótons por unidade de área e tempo, pode-se concluir que  $|\vec{E}|^2$  é proporcional à probabilidade  $p$  de um fóton atingir um determinado ponto do filme, isto é, a menos de uma constante

$$p = |\vec{E}|^2. \quad (4.9)$$

Nos pontos onde  $|\vec{E}|^2$  é nulo não se observa fótons no filme, ou no anteparo, enquanto que nos pontos onde  $|\vec{E}|^2$  é grande será maior a probabilidade de se observar aí os fótons.

Baseado nas conclusões de Einstein para a radiação, Max Born propôs uma interpretação probabilística da dualidade onda-partícula para a matéria. Uma figura de interferência, similar a Fig. 4.4, pode ser obtida com um feixe de partículas.

Na teoria ondulatória da matéria, o movimento da partícula é descrito por uma função de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ . Do mesmo modo que o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  é uma solução da equação de onda para a radiação eletromagnética,  $\Psi(\vec{r}, t)$  deve ser solução de uma equação de onda apropriada. Tal equação foi obtida por Erwin Schrödinger e será discutida no próximo capítulo. A unificação da dualidade onda-partícula por Born, surgiu alguns anos após Schrödinger propor o formalismo geral da mecânica quântica, baseado no postulado de de Broglie. A grande contribuição de Born se deve pela interpretação da função de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ .

Max Born concluiu que a probabilidade de se encontrar uma partícula numa determinada região do espaço de volume infinitesimal  $dV$ , é proporcional a  $|\Psi|^2$  e também ao elemento de volume  $dV$ . Em particular, no caso unidimensional, a probabilidade diferencial  $dP$  de encontrar uma partícula numa determinada região linear  $dx$  do espaço será

$$dP = |\Psi|^2 dx = p(x) dx, \quad (4.10)$$

onde

$$p(x) = |\Psi|^2 = \frac{dP}{dx}, \quad (4.11)$$

é uma densidade de probabilidade, que descreve a distribuição de probabilidade de localização da partícula microscópica.

### 4.3. Propriedades das Ondas de Matéria.

De acordo com a proposta de Max Born, devido ao comportamento ondulatório da matéria, a localização de uma partícula deve depender de uma distribuição de probabilidade.

Esta seção tem como objetivo analisar o comportamento das ondas que controlam o movimento de uma partícula por meio de uma revisão das propriedades das ondas clássicas.

Inicia-se a análise considerando uma simples onda plana monocromática unidimensional, isto é,

$$\Psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (4.12)$$

onde  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\omega = 2\pi\nu$  são respectivamente o número de onda e a frequência angular da onda. Essa onda é uma onda plana por ser a função  $\Psi$  espacialmente constante sobre qualquer plano  $yz$ , perpendicular à direção  $x$  de propagação.

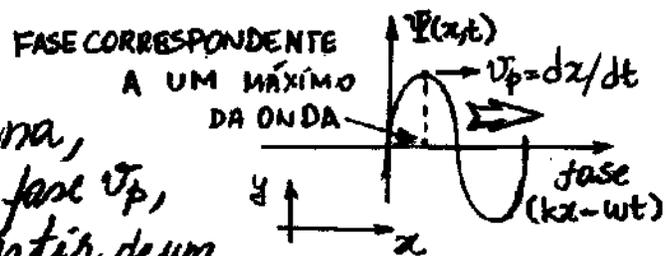


Fig. 4.6 - Ponto de máximo fixo numa onda plana.

A velocidade da onda plana, conhecida como velocidade de fase  $v_p$ , pode ser determinada a partir de um valor fixo de  $\Psi(x,t)$  na onda, tal como o seu ponto de máximo, e observando seu movimento ao longo do tempo,

Como mostra a Fig. 4.6. Formalmente, o valor fixo de  $\Psi(x,t)$  corresponde a uma fase constante da onda, isto é,

$$kx - \omega t = \text{constante}, \quad (4.13)$$

ou, diferenciando ambos os lados no tempo, obtém-se

$$v_p = dx/dt = \omega/k = 2\pi\nu/2\pi/\lambda = \lambda\nu. \quad (4.14)$$

No caso de uma onda de de Broglie, associada a uma partícula de momento  $p = h/\lambda$  e energia total  $E = h\nu$ , obtém-se

$$v_p = \lambda\nu = \frac{h}{p} \frac{E}{h} = \frac{E}{p}. \quad (4.15)$$

Usando a equação,  $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$ , para a energia relativística total da partícula, a velocidade de fase na eq. (4.15), torna-se

$$v_p = \frac{\sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}}{p} = \frac{c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}}{p}$$

ou

$$v_p = c\sqrt{1 + (m_0c/p)^2} > c. \quad (4.16)$$

Assim, a velocidade de fase de uma onda clássica não deve estar associada ao movimento da partícula pois, além de violar a relatividade, isso significaria que a onda de matéria não acompanharia a partícula cujo movimento ela controla. Deve-se observar que, no caso de fótons, controlados por ondas eletromagnéticas planas, não há problemas, pois  $m_0 = 0$  e  $v_p = c$ .

Para descobrir a correlação entre o movimento de uma onda clássica e o movimento da partícula, é suficiente avaliar a propriedade de superposição de duas ou mais ondas planas monocromáticas cujos números de onda  $k$  e frequências  $\omega$  diferem por pequenas quantidades  $\Delta k$  e  $\Delta\omega$  respectivamente. Por exemplo, no caso de duas ondas  $\Psi_1(x,t)$  e  $\Psi_2(x,t)$  de mesma amplitude  $A$ , tem-se

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t), \quad (4.17)$$

onde

$$\Psi_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad \Psi_2(x,t) = A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t].$$

Adotando  $\alpha = kx - \omega t$  e  $\beta = (k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t$ , na identidade trigonométrica

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos [(\alpha - \beta)/2] \sin [(\alpha + \beta)/2], \quad (4.18)$$

pode-se concluir que

$$\Psi(x,t) = 2A \cos\left[-\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] \sin\left[\frac{2k+\Delta k}{2}x - \frac{2\omega+\Delta\omega}{2}t\right]$$

Assumindo  $\Delta k \ll k$ ,  $\Delta\omega \ll \omega$  e o fato de que o cosseno é uma função par, obtém-se

$$\Psi(x,t) \approx \left[2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] \sin(kx - \omega t). \quad (4.19)$$

Esta equação é uma função de onda que tem a mesma forma que a eq. (4.12), com a diferença que a amplitude é modulada, tal que as oscilações de  $\Psi(x,t)$  são limitadas por uma envoltória cossenoidal que varia periodicamente no espaço e no tempo. Esse comportamento, conhecido como "batimento", é mostrado na Fig. 4.7, num gráfico de  $\Psi(x,t)$  em função de  $x$  para um tempo  $t$  fixo.

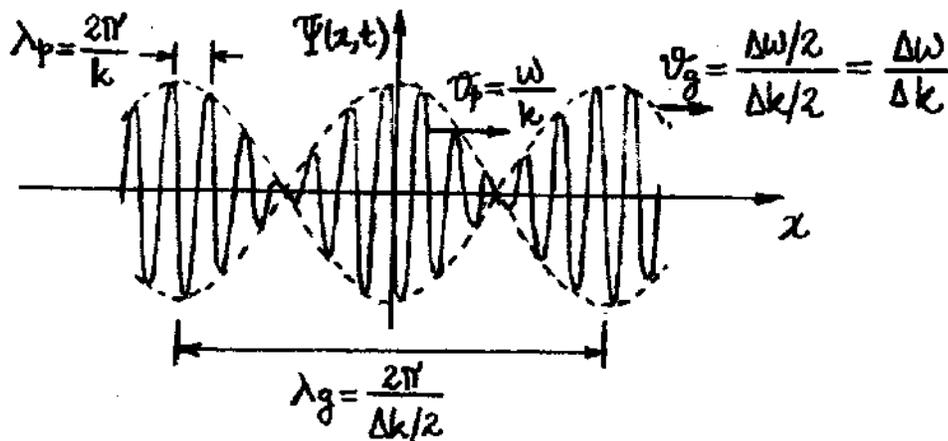


Fig. 4.7. Superposição de duas ondas senoidais deslocadas ligeiramente em números de onda  $k$  e frequência angular  $\omega$ , para um instante de tempo  $t$  fixo.

Assim, duas ondas, de frequência e número de onda ligeiramente deslocados, interferem-se construtivamente e destrutivamente, de forma alternada, gerando uma sucessão infinita de grupos. A velocidade de fase  $v_p$ , das ondas individuais, pode ser calculada a partir do segundo termo de  $\Psi(x,t)$ . Entretanto, surge agora um novo deslocamento de onda, associado ao grupo de ondas, com uma velocidade característica, denominada de velocidade de grupo  $v_g$ , que pode ser calculada a partir do termo de amplitude de  $\Psi(x,t)$ . Da mesma forma que se obtém  $v_p$  na eq. (4.14), obtém-se a velocidade de grupo, da eq. (4.19), como

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (4.20)$$

Para avaliar o caso geral de superposição de várias ondas planas monocromáticas, onde tanto a fase quanto a amplitude variam, é necessário adotar um formalismo matemático mais elaborado baseado na teoria sobre as séries de Fourier. Mesmo para o caso simples de superposição de apenas duas ondas planas de diferentes amplitudes, inevitavelmente deve-se recorrer a esse formalismo. O caso geral de superposição de infinitas ondas planas monocromáticas, de números de onda  $k$  e frequências  $\omega$ , deslocadas por quantidades infinitesimais  $dk$  e  $d\omega$ , pode ser avaliado com relativa simplicidade, assumindo a forma complexa da onda plana, isto é,

$$\Psi(x,t) = A(k) [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] = A(k) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.21)$$

A superposição de uma quantidade infinita dessas ondas, é representada pela seguinte integral:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (4.22)$$

onde a variável de integração é definida somente em função de  $k$  porque a variável angular  $\omega = v_p k = \omega(k)$ , é também uma função de  $k$ . O fator  $1/\sqrt{2\pi}$  foi introduzido na eq. (4.22) para torná-la equivalente a uma expressão recorrente no formalismo de Fourier denominada de integral de Fourier. A integral de Fourier é uma extensão das séries de Fourier que permite obter expansões de funções não-periódicas e tem um papel fundamental na mecânica quântica. Na teoria de Fourier, o tratamento algébrico da integral de Fourier tem como base o conceito de Transformada de Fourier. Uma das formas de definir a Transformada de Fourier de uma função  $f(x')$  é

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \quad (4.23)$$

Associada a essa função existe a transformada de Fourier inversa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (4.24)$$

Uma forma equivalente de definir a transformada de Fourier, é trocando os sinais das exponenciais nas eqs. (4.23) e (4.24).

Para verificar a consistência das expressões anteriores, basta substituir a eq. (4.23) na eq. (4.24), utilizar a forma complexa da função delta de Dirac

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ik(x-x')} dk \quad (4.25)$$

e encontrar uma identidade. O exemplo 4.3 mostra como isso pode ser feito. Como evidenciado na eq. (4.25), uma propriedade importante da função  $\delta(x-x')$  é a sua paridade positiva tal que  $\delta(x-x') = \delta(x'-x)$ .

Quando se compara as eqs. (4.23) e (4.24), deve-se concluir que a amplitude  $A(k)$ , que descreve a distribuição espectral da função de onda  $\Psi(x,t)$  na eq. (4.22), é identificada como a transformada de Fourier de  $\Psi(x,t)$ , para cada instante de tempo  $t$ . Particularmente, para o caso  $t=t_0=0$ , a transformada de Fourier de  $\Psi(x,0)$  é

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} dx \quad (4.26)$$

Assumindo uma função de onda  $\Psi(x,0) = e^{ik_0x}$  com um número de onda  $k_0$  particular, obtém-se

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(k-k_0)} dx$$

ou, de acordo com a função delta de Dirac dada na eq. (4.25),

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi \delta(k-k_0) = \sqrt{2\pi} \delta(k-k_0). \quad (4.27)$$

Assim, a forma espacial da função de onda  $\Psi(x,t)$  na eq. (4.22) é modulada por uma função  $A(k)$  que é diferente de zero somente em torno de um ponto  $k=k_0$ , como mostra a Fig. 4.8(a). Isso significa que  $\Psi(x,t)$  tem a forma de um grupo ou pacote de ondas espacialmente localizado, como mostra a Fig. 4.8(b), onde, fora dessa região, ocorrem somente interferências destrutivas com as infinitas ondas planas monocromáticas.

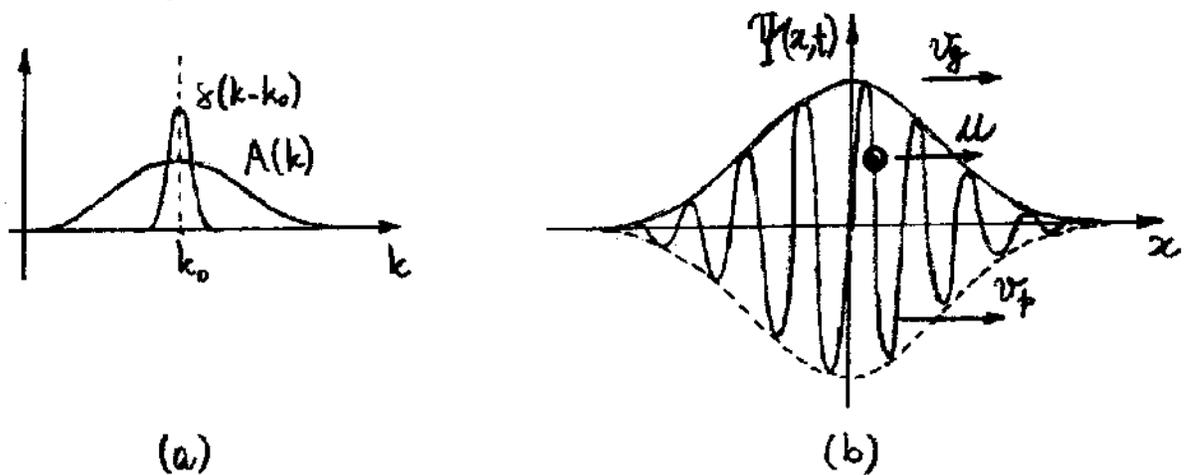


Fig. 4.8 - (a) Comportamento de  $\delta(k-k_0)$  e  $A(k)$  em função da variável  $k$ . (b) Pacote de ondas apropriado para descrever a onda de matéria.

A ideia do pacote de ondas localizado parece ser razoável para descrever a onda de De Broglie da partícula em movimento. Entretanto, é necessário ainda verificar se esse pacote de ondas acompanha a partícula em movimento.

Como a função de onda  $\Psi(z,t)$  foi obtida da superposição contínua de incrementos infinitesimais  $dk$  e  $d\omega$ , então a velocidade de grupo, na eq. (4.20), deve ser escrita nesse caso como

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.28)$$

Como a energia da partícula é  $E = h\nu$  e o comprimento de onda de de Broglie é  $\lambda = h/p$ , então

$$E = h\nu = h\omega/2\pi = \hbar\omega \quad (4.29)$$

e

$$p = h/\lambda = \hbar k/2\pi = \hbar k \quad (4.30)$$

ou,  $d\omega = dE/\hbar$  e  $dk = dp/\hbar$ , tal que

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad (4.31)$$

Aplicando o operador diferencial,  $\partial/\partial E dE + \partial/\partial p dp$ , a ambos os lados da equação relativística

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2,$$

obtem-se

$$2EdE = 2pc^2dp$$

ou

$$\frac{dE}{dp} = c^2 \frac{p}{E} \quad (4.32)$$

Assim, a velocidade de grupo será

$$v_g = c^2 \frac{p}{E} \quad (4.33)$$

Utilizando as equações relativísticas

$$E = mc^2 \quad \text{e} \quad p = m\mu, \quad (4.34)$$

onde  $m = m_0 / \sqrt{1 - \mu^2/c^2}$  é a massa relativística e  $\mu$  é a velocidade da partícula, obtém-se

$$v_g = c^2 \frac{m\mu}{mc^2} = \mu, \quad (4.35)$$

ou seja, a velocidade de grupo do pacote de ondas é exatamente igual a velocidade da partícula cujo movimento ele controla. A relação entre a velocidade de grupo  $v_g = \mu$  e a velocidade de fase  $v_f$ , pode ser obtida combinando a equação  $v_f = E/p$ , com as eqs. (4.34), isto é,

$$v_f = \frac{mc^2}{m\mu} = \frac{c^2}{\mu} = \left(\frac{c^2}{\mu^2}\right)\mu > \mu = v_g, \quad (4.36)$$

pois  $c^2/\mu^2 > 1$ . Como  $v_f > v_g$ , os pontos geométricos das ondas individuais movem-se constantemente através do grupo com uma velocidade de fase  $v_f > \mu$ , ao mesmo tempo que o grupo move-se com uma velocidade  $v_g = \mu$ . Esse mesmo fenômeno pode ser observado, produzindo perturbações apropriadas sobre a superfície da água. No caso do pacote de onda, não há nenhum impedimento de que  $v_f > c$ , pois as ondas de fase no interior do pacote descrevem, simplesmente, regiões geométricas no espaço que podem ser ocupadas pela partícula. No caso particular da luz  $\mu = c$ , as eqs. (4.35) e (4.36), fornecem  $v_g = v_f = c$ .

### Exemplo 4.4 - FACULTATIVO

Utilizar a forma complexa da função delta de Dirac para mostrar que as eqs. (4.23) e (4.24) são consistentes.

Substituindo a eq. (4.23) na eq. (4.24), obtém-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right] e^{ikx} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk \right] f(x') dx' \end{aligned}$$

ou, de acordo com a definição dada na eq. (4.24),

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x') f(x') dx' \equiv f(x)$$

onde foi adotado uma das propriedades fundamentais da função delta de Dirac na última igualdade. Esse resultado mostra a consistência das equações que definem a transformada de Fourier.

## 4.4 - Princípio da Incerteza

A representação da função de onda  $\Psi(x,t)$  em termos de um pacote de ondas de largura  $\Delta x$  têm consequências diretas na forma de definir a localização espacial de uma partícula microscópica. A partícula deve ter diferentes probabilidades de ser encontrada em diferentes posições no interior do pacote de ondas, para qualquer instante de tempo  $t=t_0$ . Seja novamente o caso particular do pacote de ondas, obtido da superposição de duas ondas planas, com  $k$  e  $\omega$  ligeiramente deslocados. Em particular, tomando  $t=t_0=0$  na eq. (4.19), obtém-se

$$\Psi(x,0) \approx \left[ 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x\right) \right] \text{sen} kx \quad (4.37)$$

A formação desse pacote de ondas é ilustrado na Fig. 4.9.

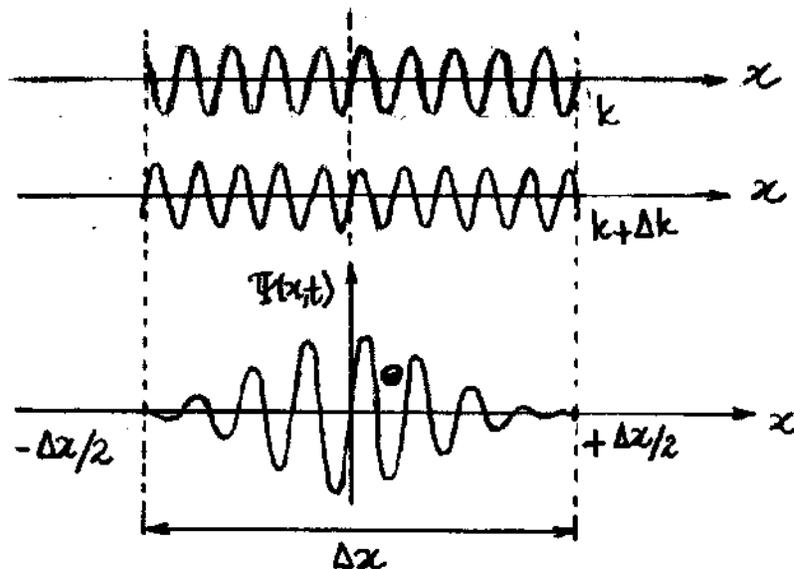


Fig. 4.9 - Grupo de ondas formado pela superposição de duas ondas de número de onda  $k$  e  $k + \Delta k$ .

A eq. (4.37) mostra que a amplitude do grupo é máxima, igual a  $2A$ , em  $x=0$  e nula em  $x=\Delta x/2$ , desde que  $\Delta k/2 \Delta x/2 = \pi/2$  ou

$$\Delta k \Delta x = 2\pi. \quad (4.38)$$

Essa equação mostra que a largura  $\Delta x$  do pacote de ondas diminui, isto é, a partícula fica mais localizada, ou tem sua posição  $x$  definida com maior precisão, a medida que  $\Delta k$  aumenta. Por outro lado,  $\Delta x$  aumenta quando  $\Delta k$  diminui. Em particular,  $\Delta x \rightarrow \infty$  quando  $\Delta k \rightarrow 0$ , deixando a partícula totalmente deslocalizada. Nesse caso, as ondas na Fig. 4.9 interferem-se constructivamente em todos os pontos do espaço e a eq. (4.37) transforma-se numa simples onda plana.

Um comportamento similar para a frequência  $\omega$ , pode ser observado no tempo, fazendo  $x=x_0=0$  na eq. (4.19), isto é,

$$\Psi(0,t) \approx \left[ 2A \cos\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \sin(-\omega t) = \left[ -2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \sin \omega t.$$

Nesse caso, a amplitude anula-se para  $t=\Delta t/2$ , desde que

$$\Delta\omega \Delta t = 2\pi, \quad (4.39)$$

o que mostra que, quanto maior o intervalo de tempo  $\Delta t$ , menor o valor do intervalo  $\Delta\omega$  e conseqüentemente a frequência  $\omega$  da onda de matéria fica definida com maior precisão.

Para o caso de um único grupo de ondas, obtido quando se soma um número infinito de ondas com  $k$  e  $\omega$  diferindo de valores infinitesimais  $dk$  e  $d\omega$  respectivamente, relações similares as eq. (4.38) e (4.39), podem ser encontradas.

Aplicando o formalismo de Fourier, partindo da equação de onda definida na forma da eq. (4.22), pode-se mostrar que as novas relações são

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

ou

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{2} \quad (4.40)$$

e

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2} \quad (4.41)$$

pois, de acordo com as eqs. (4.29) e (4.30),  $\Delta p = \hbar \Delta k$  e  $\Delta E = \hbar \Delta \omega$ . Essas inequações foram primeiramente obtidas por Werner Karl Heisenberg, em 1927 e se referem ao princípio da indeterminação ou princípio da incerteza.

O princípio da incerteza de Heisenberg garante que, mesmo com instrumentos ideais, não se pode obter resultados melhores do que aqueles definidos nas eqs. (4.40) e (4.41). Na eq. (4.40),  $\Delta p$  e  $\Delta x$  são as incertezas nas medidas simultâneas do momento  $p$  e da posição  $x$  da partícula. Na eq. (4.41), por outro lado,  $\Delta E$  é a incerteza na medida da energia total  $E$  da partícula, quando se dispõe de um intervalo de tempo  $\Delta t$  para medi-la. Quanto mais se modifica a experiência para melhorar a precisão na determinação de  $p$ , ou  $E$ , mais se abre mão da

precisão na determinação da posição  $x$ , ou  $t$ . Por exemplo, quando se conhece o momento  $p$  exatamente, nada se sabe a respeito da posição  $x$ , isto é, se  $\Delta p = 0$  então  $\Delta x = \infty$ . Portanto, a restrição não é em relação a precisão com que  $p$ , ou  $x$ , podem ser medidos individualmente, mas em relação a medida simultânea de ambos.

Sabe-se que as equações clássicas do movimento uniforme fazem previsões exatas da posição e do momento de uma partícula. Basta que se saiba a posição e o momento num certo instante de tempo, que o movimento futuro fica determinado exatamente. Entretanto, deve-se esperar que o ato de observar poderia interferir no processo de medida. Esse efeito não é importante no caso macroscópico, porque a energia de repouso ( $m_0 c^2$ ) da partícula é muito maior do que a energia do fóton usado para observá-la. Por outro lado, na escala microscópica a situação é bem diferente.

É novamente a constante de Planck  $h$  que distingue os resultados clássicos dos quânticos. Se  $h$  fosse nulo nas eqs. (4.40) e (4.41), não haveria qualquer restrição nas medidas, como ocorre na Física clássica. É exatamente o fato de  $h$  ser pequeno que ajusta o princípio da incerteza das experiências cotidianas.

Para verificar o princípio da incerteza de Heisenberg, pode-se recorrer a uma experiência "imaginária", devido a Bohr, que se baseia na observação do elétron através de um microscópio. O esquema desta experiência é mostrado na Fig. 4.10.

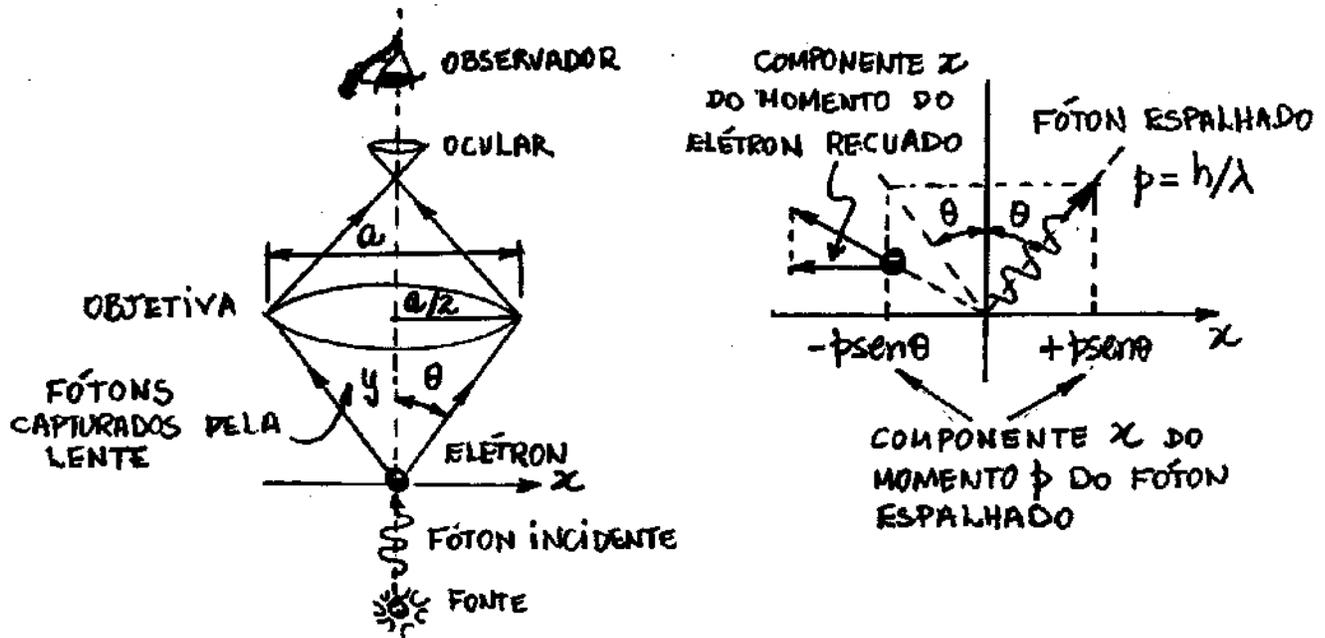


Fig. 4.10 - Experiência imaginária do microscópio de Bohr.

Para "vê" o elétron é necessário "iluminá-lo" pois, na verdade, é o fóton de luz espalhado por ele que é visto pelo observador. No momento que o elétron é iluminado, ele reua por causa do efeito Compton.

É possível reduzir, ao máximo, a perturbação sobre o elétron usando uma fonte de luz pouco intensa. Num caso extremo, podéria-se ver o elétron usando somente um fóton.

O fóton, de momento  $p = h/\lambda$ , pode ser espalhado em qualquer direção dentro da região angular  $2\theta$ .

Como se pode ver na Fig. 4.10, a componente  $x$  do momento do fóton espalhado pode variar de  $+p\sin\theta$  a  $-p\sin\theta$  de modo que, após o espalhamento, a incerteza é

$$\Delta p_x = 2p\sin\theta = (2h/\lambda)\sin\theta. \quad (4.42)$$

Pela lei da conservação do momento, na direção do eixo  $x$ , a variação do momento do elétron é igual a do fóton. Logo, o elétron tem a mesma incerteza do fóton na determinação da componente  $x$  do momento. Observa-se que para reduzir  $\Delta p_x$  pode-se aumentar  $\lambda$ , ou usar um microscópio com um ângulo de abertura  $\theta$  menor.

A imagem de um objeto pontifórmate vista através de um microscópio, não é um ponto, mas uma figura de difração. As diferentes localizações do objeto pontifórmate são definidas pelo critério de resolução de Rayleigh, como ilustrado na Fig. 4.11. Por esse critério, a resolução máxima entre duas posições do elétron ocorre quando, o máximo de difração da imagem do elétron

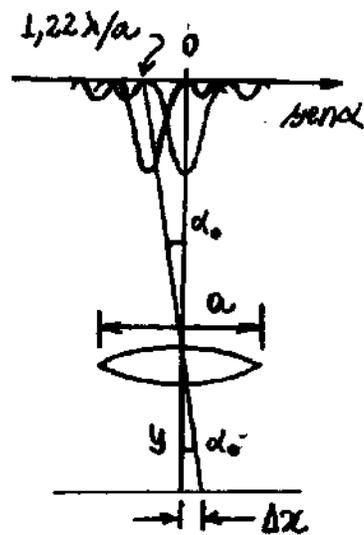


Fig. 4.11 - Critério de resolução de Rayleigh.

numa posição, coincide com o mínimo de difração do elétron numa outra posição. Nessa condição, o ângulo de difração  $\alpha_0$  é pequeno e portanto

$$1,22 \frac{\lambda}{a} = \text{sen} \alpha_0 \approx \text{tg} \alpha_0 = \frac{\Delta x}{y}$$

ou

$$\Delta x = 1,22 \frac{\lambda}{a} y.$$

Por outro lado,

$$\text{tg} \theta = \frac{a/2}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{2 \text{tg} \theta} = \frac{a \cos \theta}{2 \text{sen} \theta},$$

de modo que

$$\Delta x = 1,22 \frac{\lambda}{2 \text{sen} \theta} \cos \theta. \quad (4.43)$$

Multiplicando a eq. (4.42) pela eq. (4.43), obtêm-se

$$\Delta p_x \Delta x = (1,22 \cos \theta) h, \quad (4.44)$$

que concorda, razoavelmente, com o limite  $\hbar/2$  fixado pelo princípio da incerteza de Heisenberg.

Quando se tenta usar luz de comprimentos de onda  $\lambda$  pequeno (Raios X ou  $\gamma$ ), para melhorar a resolução, reduzindo  $\Delta x$  na eq. (4.43), aumenta-se o recuo Compton do elétron e, conseqüentemente,  $\Delta p_x$  na eq. (4.42). Na prática, uma experiência daria resultados piores do que aquele mostrado na eq. (4.44), pois trata-se da melhor situação possível.

O princípio da incerteza de Heisenberg ajuda a entender o aspecto complementar não contraditório, atribuído à dualidade onda-partícula por Niels Bohr. Seja por exemplo a experiência da dupla fenda de Young realizada com um feixe de elétrons e um anteparo apropriado. Suponha que a intensidade de elétrons sobre as fendas seja de 1 elétron/hora. Cada elétron pode passar por qual quer uma das duas fendas. Sabe-se que a baixa intensidade de partículas não deve afetar a figura clássica de interferência.

Podem-se incorporar ao experimento um microscópio de Bohr para observar por qual das duas fendas cada elétron irá passar. Com essa informação, seria possível fechar a fenda por onde o elétron não passaria. Espera-se que a figura de interferência não seja afetado por esse procedimento. Entretanto, sabe-se que uma única fenda aberta não pode gerar uma figura de interferência clássica.

É o princípio da incerteza de Heisenberg que inviabiliza a experiência acima. A simples presença do microscópio, promove uma incerteza na componente vertical do momento do elétron, suficiente para destruir a figura de interferência clássica sobre o anteparo.

Assim, é possível observar o comportamento corpuscular, ou ondulatório, de uma partícula, mas o princípio da incerteza de Heisenberg impede que se faça isso simultaneamente. A onda e a matéria são como "moedas", pois mostram somente uma das faces, nunca ambas simultaneamente. Essa é a essência do princípio da complementaridade de Bohr.

Deve-se concluir que quando o microscópio não está presente, o elétron se comporta como uma onda clássica e não é possível saber por qual das fendas o elétron vai passar. A única informação possível está relacionada à probabilidade do elétron passar por uma ou outra fenda.

#### Exemplo 4.5 - Exemplo do Eisberg.

Verificou-se que a velocidade de um projétil de massa  $m = 0,05 \text{ kg}$  e a velocidade de um elétron de massa  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , são iguais a  $300 \text{ m/s}$  com uma incerteza de  $0,01\%$ . Com que precisão fundamental poderia-se localizar cada uma dessas partículas em uma medida simultânea com a velocidade?

Para o elétron, tem-se

$$p = mv = 9,1 \times 10^{-31} \times 300 = 2,7 \times 10^{-28} \text{ kg.m/s}$$

e

$$\Delta p = 0,0001 \times 2,7 \times 10^{-28} = 2,7 \times 10^{-32} \text{ kg.m/s}$$

Assim, do princípio da incerteza,

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1,055 \times 10^{-34}}{2 \times 2,7 \times 10^{-32}} = 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,2 \text{ cm} .$$

$\approx 10^7$  diâm. atômicos

Para o projétil, tem-se

$$p = mv = 0,05 \times 300 = 15 \text{ kg.m/s}$$

e

$$\Delta p = 0,0001 \times 15 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kg.m/s},$$

Assim, do princípio da incerteza,

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1,055 \times 10^{-34}}{2 \times 1,5 \times 10^{-3}} = 3,5 \times 10^{-32} \text{ m} .$$

$\approx \frac{1}{10^{22}}$  diâm. atômicos

Portanto, para partículas macroscópicas, o princípio da incerteza não impõe nenhum limite prático ao processo de medida. Neste exemplo,  $\Delta x$  é cerca de  $10^{22}$  vezes menor que o diâmetro do átomo. Por outro lado, para objetos microscópicos, tais como elétrons, limites práticos são evidentes. Neste exemplo,  $\Delta x$  é cerca de  $10^7$  vezes maior que o diâmetro do átomo.

### Exemplo 4.6 - Eisberg - FACULTATIVO

A energia de um oscilador harmônico linear é

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 .$$

Admitindo que a incerteza  $\Delta E \equiv E$  na energia seja dada por

$$\Delta E \equiv E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{1}{2} k \Delta x^2 ,$$

(a) mostrar que  $E = \hbar^2 / 8m \xi^2 + \frac{1}{2} k \xi^2$ , onde  $\xi = \Delta x$ . (b) Mostrar então que a energia mínima é dada por

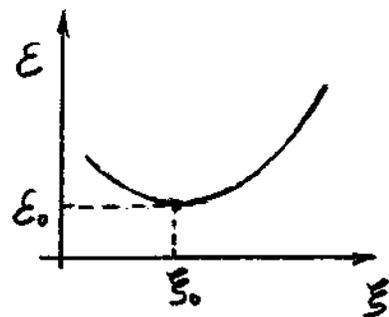
$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega , \quad (4.45)$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

(a) Do princípio da incerteza,  $\Delta p = \hbar / 2 \Delta x$ . Logo,

$$E = \frac{\hbar^2}{8m \xi^2} + \frac{1}{2} k \xi^2 ,$$

onde  $\Delta x \equiv \xi$ . A Figura ao lado mostra um gráfico da energia  $E$  em função da incerteza  $\xi$ . A presença de um ponto de mínimo é evidente.



(b) A incerteza mínima  $\xi_0$  pode ser determinada como

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{\hbar^2}{4m\xi_0^3} + k\xi_0 = 0$$

ou

$$\xi_0^2 = \sqrt{\hbar^2/4mk}$$

e portanto

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\hbar^2}{8m} \sqrt{\frac{4mk}{\hbar^2}} + \frac{1}{2} k \sqrt{\frac{\hbar^2}{4mk}} = \frac{\hbar^2}{4\hbar} \sqrt{\frac{4mk}{4m^2}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k^2}{mk}} \\ &= \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0, \end{aligned}$$

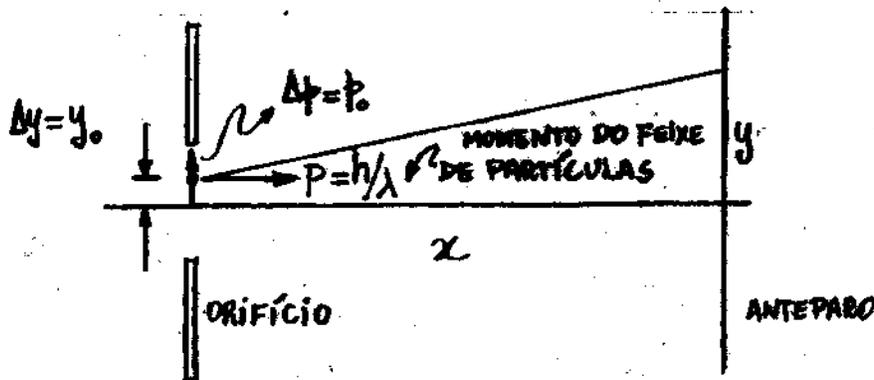
onde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

A Física clássica prevê uma energia mínima igual a zero para o caso trivial de um oscilador na origem, onde  $p=0$  e  $x=0$ . Essa configuração simplesmente viola o princípio da incerteza, pois o oscilador deve ter algum movimento mínimo devido a incerteza em  $x$  e  $p$ .

### Exemplo 4.7

Considere a imagem sobre um anteparo, produzida por um feixe de partículas, projetado através de uma abertura circular. O raio da imagem circular aumenta com o raio da abertura e, por causa da difração, também aumenta quando o raio da abertura diminui. Então, deve existir um raio limite  $R_e$  para a abertura que produz um raio mínimo  $R_{min}$  para a imagem. Usar o princípio da incerteza para calcular o raio limite  $R_e$  da abertura circular e o raio mínimo  $R_{min}$  da imagem correspondente.

Suponha que uma partícula passe através do orifício numa posição de incerteza vertical  $\Delta y = y_0$ , em relação ao eixo central do orifício, como mostrado na Figura abaixo.



De acordo com o princípio da incerteza, a componente vertical do momento da partícula tem incerteza

$$p_0 = \frac{h}{2y_0} .$$

Essa incerteza pode ser usada como uma condição inicial para o movimento subsequente da partícula. O deslocamento vertical da partícula no anteparo é

$$y = y_0 + v_{y_0} t = y_0 + \frac{p_0}{m} t = y_0 + \frac{\hbar}{2m y_0} t,$$

onde  $t$  é o tempo que a partícula leva para atingir o anteparo. A distância  $x$  ao anteparo pode ser calculada em termos do momento  $P = h/\lambda$  do feixe de partículas, como  $x = v_x t = P/m t$  ou  $t = mx/P$ , de modo que

$$y = y_0 + \frac{\hbar}{2m y_0} \frac{mx}{P} = y_0 + \frac{\hbar x}{2P} \frac{1}{y_0}.$$

Essa expressão tem um mínimo para um determinado valor de  $y_0$ , obtido da condição

$$\frac{dy}{dy_0} = 1 - \frac{\hbar x}{2P y_0^2} = 0 \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{\hbar x}{2P}}$$

e portanto

$$y_{\min} = y_0 + \frac{y_0^2}{y_0} = 2y_0. \quad (4.46)$$

Conclui-se que a imagem circular projetada no anteparo terá um raio mínimo  $R_{\min} = y_{\min} = 2y_0$  quando o orifício circular tiver um raio limite  $R_e = y_0$ , onde

$$y_0 = \sqrt{\frac{\hbar x}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\hbar x}{2\pi} \frac{\lambda}{2\hbar}} = \sqrt{\frac{\lambda x}{4\pi}}, \quad (4.47)$$

pois  $P = h/\lambda$  e  $\hbar = h/2\pi$ .

## Lista de Exercícios

### Questões conceituais

- 1- Por que a natureza ondulatória da matéria não é evidente em nossas observações diárias? O comportamento ondulatório de uma partícula clássica pode ser obtido assumindo-se  $m \rightarrow \infty$  na fórmula de de Broglie? Explique.
- 2- O comprimento de onda de de Broglie pode ser menor que a dimensão da partícula? Pode ser maior? É necessário que haja alguma relação entre essas grandezas?
- 3- A difração de elétrons pode ser utilizada para se estudar a estrutura de sólidos cristalinos? Explique.
- 4- Discuta a analogia: A óptica ondulatória é para a óptica geométrica assim como a mecânica quântica é para a mecânica clássica.
- 5- Afinal de conta o que é um elétron, uma partícula ou uma onda? Explique.
- 6- Discuta semelhanças e diferenças entre uma onda de matéria e uma onda eletromagnética.
- 7- Referindo-se ao princípio da incerteza de Heisenberg, dê exemplo de algum caso em que o processo de medida perturba o sistema que está sendo medido.
- 8- Dê uma justificativa à partir do princípio da incerteza de Heisenberg ( $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ ) que a energia de um oscilador harmônico não pode ser nula. (Sugestão: Será que o período de um oscilador pode ser infinito? Pense nisso).

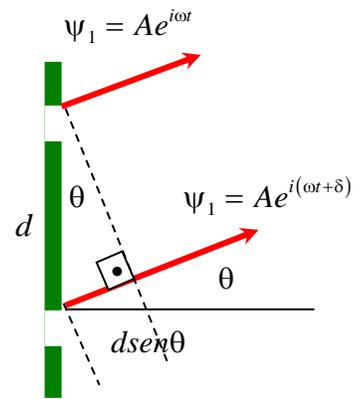
### Problemas

- 1- Um projétil de massa  $m = 40g$  move-se a uma velocidade  $v = 1000m/s$ . (a) Qual é o comprimento de onda de de Broglie que se pode associar a ele? (b) Por que sua natureza ondulatória não se revela por meio de efeitos de difração?
- 2- O comprimento de onda da emissão espectral amarela do sódio é  $\lambda = 5890\text{Å}$ . Com que energia cinética um elétron teria o mesmo comprimento de onda de de Broglie?
- 3- Um elétron e um fóton têm ambos um comprimento de onda  $\lambda = 2,0\text{Å}$ . Quais são (a) seus momentos? (b) suas energias totais? (c) Compare as energias cinéticas do elétron e do fóton.
- 4- Um nêutron térmico tem uma energia cinética  $(3/2)kT$ , onde  $T = 300K$  é a temperatura ambiente. Estes nêutrons estão em equilíbrio térmico com o ambiente. (a) Qual é a energia em elétrons - volt de um nêutron térmico? (b) Qual é o comprimento de onda de de Broglie?
- 5- Um feixe de nêutrons de  $1eV$  atinge um cristal cujos planos cristalinos estão separados por  $d = 0,025nm$ . Determine o ângulo de fase  $\varphi$  para o qual o primeiro máximo de interferência é observado.
- 6- O espaçamento planar em um cristal de cloreto de potássio é  $d = 3,14\text{Å}$ . Compare o ângulo de reflexão de Bragg de primeira ordem, por esses planos, de elétrons com energia cinética  $40keV$  com o de fótons com energia  $40keV$ .

7- Considere a interferência de duas ondas  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , emitidas de duas fendas estreitas e paralelas de distância  $d$ , como mostra a figura ao lado. As ondas têm a mesma amplitude  $A$ , mesma frequência  $\omega$  e diferença de fase  $\delta$ . Construa a superposição  $\psi_1 + \psi_2$  usando a notação complexa para a função de onda e mostre que a dependência do padrão de interferência resultante com o ângulo  $\theta$  é,  $I = 4|A|^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2} \text{sen}\theta\right)$ . (Sugestão: mostre primeiramente que,

$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A[e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2}]e^{i(\omega t + \delta/2)}$ , em seguida escreva as exponenciais complexas entre colchetes na forma trigonométrica. Escreva a distribuição de intensidades do padrão de interferência  $I = |\psi|^2$ , e observe que

a diferença de fase entre as duas ondas pode ser escrita na forma  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{sen}\theta = kd \text{sen}\theta$ .



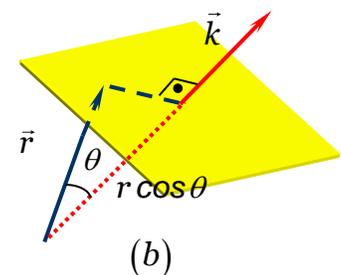
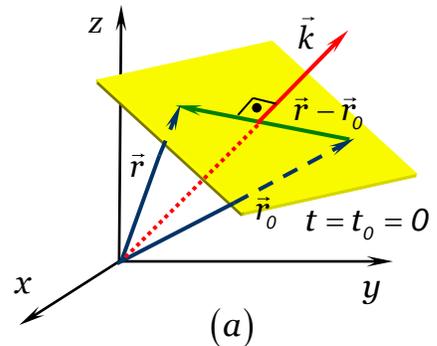
8- Na representação complexa da onda plana no espaço  $\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ , o vetor de propagação, ou número de ondas,  $\vec{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{k}$  é definido para ter mesma direção e sentido da propagação da onda, como mostra a Fig. (a). Para evitar complicações desnecessárias, nessa Figura foi escolhido um plano particular em  $t = t_0 = 0$ , no qual está contido um vetor  $\vec{r} - \vec{r}_0$ , onde  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  e  $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ . (a) Mostre que a condição de que o vetor  $\vec{k}$  seja perpendicular ao vetor  $\vec{r} - \vec{r}_0$  resulta em:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante}$$

que é a equação do plano, uma vez que este é o lugar geométrico de pontos do espaço com mesma projeção do vetor  $\vec{r}$  sobre o vetor  $\vec{k}$ , como mostrado na Figura (b). (b) Usando a propriedade de periodicidade da onda plana oscilante

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \lambda\hat{k})$$

para cada comprimento de onda  $\lambda$ , onde  $\hat{k} = \vec{k}/k$  é o vetor unitário na direção do vetor  $\vec{k}$ , mostre que o módulo do vetor de propagação é  $k = 2\pi/\lambda$ . (Sugestão: Escreva a identidade  $\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \lambda\hat{k})$  para  $\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}, 0) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  e lembre-se que  $1 = e^{i2\pi}$ ).



9- Qual seria a voltagem aceleradora necessária dos elétrons em um microscópio eletrônico para que se tenha a mesma resolução máxima que pode ser obtida em um "microscópio de raios  $\gamma$ " usando raios  $\gamma$  de  $0,2 \text{ MeV}$ ?

10- A resolução máxima atingida por um microscópio é limitada apenas pelo comprimento de onda  $\lambda$  utilizado, isto é, o menor detalhe que se pode distinguir é aproximadamente igual ao comprimento de onda. Suponhamos que se queira ver o interior de um átomo, com detalhes da ordem de  $0,1 \text{ \AA}$ . (a) Se usarmos um microscópio eletrônico, qual seria a energia mínima necessária para os elétrons? (b) Se usarmos um microscópio óptico, qual seria a energia mínima para os fótons? Em que região do espectro eletromagnético esses fótons são encontrados? (c) Qual dos microscópios seria mais prático para esse objetivo? Explique.

11- Mostre que para uma partícula livre pode-se escrever a relação de incerteza também na forma  $\Delta\lambda\Delta x \geq \lambda^2/4\pi$ , onde  $\Delta x$  é a incerteza na posição da onda e  $\Delta\lambda$  é a incerteza simultânea no comprimento de onda. (Sugestão: assuma que a incerteza no comprimento de onda  $\Delta\lambda$  é da ordem de grandeza do próprio comprimento de onda  $\lambda$ ).

12- Mostre que se a incerteza na posição de uma partícula for aproximadamente igual a seu comprimento de onda de de Broglie, então a incerteza em sua velocidade é aproximadamente igual a sua velocidade.

13- Um microscópio óptico é utilizado para localizar um elétron em um átomo em uma região de dimensão linear de  $0,2A^{\circ}$ . Qual é a incerteza na velocidade de um elétron localizado dessa forma?

14- Uma partícula de massa  $m$  está confinada em uma região unidimensional de comprimento  $a$ . Use o princípio da incerteza para obter uma expressão para a energia mínima da partícula. Calcule o valor dessa energia para uma gota de massa  $m = 1g$  mantida sobre um fio de comprimento  $a = 10cm$ , e para um elétron em uma região de comprimento  $a = 0,1nm$ .

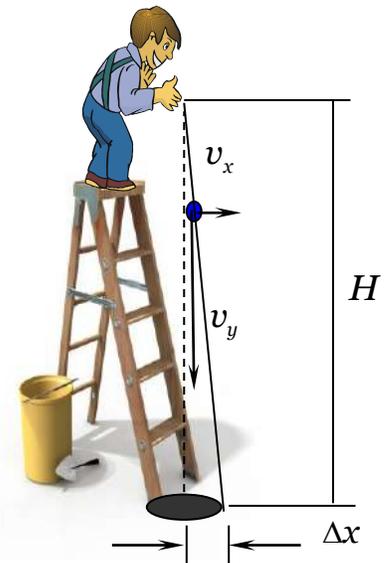
15- (a) Considere um elétron em algum ponto dentro de um átomo de diâmetro  $1A^{\circ}$ . Qual é a incerteza no momento do elétron? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de elétrons em átomos? Pense em termos de energias das transições atômicas pertencente a região visível do espectro eletromagnético. (b) Imagine que um elétron esteja em algum ponto no interior de um núcleo de  $10^{-12}cm$ . Qual é a incerteza no momento do elétron? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de partículas constituintes do núcleo? Pense em termos de energias das transições nucleares pertencente à região dos raios  $X$  e  $\gamma$  do espectro eletromagnético. (c) Considere um nêutron, ou um próton, no interior desse núcleo atômico. Qual é a incerteza no momento do nêutron, ou do próton? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de partículas constituintes do núcleo?

16- A vida média de um estado excitado de um núcleo é normalmente de cerca de  $10^{-12}s$ . Qual é a incerteza na energia do fóton de raio  $\gamma$  emitido?

17- um garoto no alto de uma escada de altura  $H$  está jogando bolas de gude de massa  $m$  em uma abertura existente no solo, como mostra a Figura ao lado. Para atingi-la, ele utiliza a maior precisão possível. (a) Use a cinemática de lançamento de projéteis e o princípio da incerteza para mostrar que as bolas de gude deixarão de atingir a abertura por uma distância horizontal da ordem de

$$\Delta x \approx \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{H}{g}\right)^{1/4}, \text{ onde } g \text{ é a aceleração da gravidade. (b)}$$

Utilizando valores razoáveis de  $H$  e  $m$ , calcule esta distância.



# CAPÍTULO 5 – MECÂNICA QUÂNTICA DE SCHRÖDINGER

## ÍNDICE

- 5.1- Introdução
- 5.2- Equação de Schrödinger
- 5.3- Interpretação Probabilística da Função de Onda
- 5.4- Equação de Schrödinger Independente do Tempo
- 5.5- Valor Esperado
- 5.6- Movimento da Partícula Quântica e Limite da Teoria Clássica
- 5.7- Comportamento Geral das Autofunções

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Estrutura da Matéria. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **3 aulas de quatro créditos**.

## CAPÍTULO 05

### MECÂNICA QUÂNTICA DE SCHRÖDINGER.

#### 5.1 - Introdução

Em 1925, Erwin Schrödinger propôs um novo formalismo para a teoria quântica. A inspiração principal de Schrödinger se baseava nas evidências experimentais de que o movimento das partículas dos sistemas microscópicos devem obedecer as leis do movimento ondulatório, e não as leis do movimento de Newton, como ocorre com as partículas macroscópicas. Assim, o movimento das partículas microscópicas deveria ser controlado por funções de ondas representadas por ondas de de Broglie. A teoria de Schrödinger é uma generalização, que inclui a teoria de Newton como um caso particular no limite macroscópico, assim como a teoria da relatividade de Einstein é uma generalização, que inclui a teoria de Newton como um caso particular no limite de baixas velocidades.

O objetivo desse capítulo é discutir os aspectos fundamentais da teoria quântica de Schrödinger. A aplicação dessa nova teoria quântica na solução de vários sistemas físicos microscópicos importantes é deixada para o próximo capítulo.

#### 5.2 - A equação de Schrödinger.

A mecânica quântica de Schrödinger é uma teoria quântica

não-relativística, isto é, o movimento da partícula microscópica deve ocorrer com uma velocidade  $u \ll c$ . Correções relativísticas podem ser adotadas em muitos casos onde essa aproximação não se aplica. Se a partícula microscópica move-se ao longo do eixo  $x$ , na presença de um potencial  $V(x)$ , então, a força que atua sobre ela, é

$$F(x) = -dV(x)/dx \quad (5.1)$$

Na mecânica clássica procura-se determinar a equação do movimento da partícula, isto é, a posição  $x(t)$  da partícula em função do tempo  $t$ . Na mecânica quântica esse não é o objetivo principal. Ao invés disso, o que se faz é calcular a função de onda  $\Psi(x,t)$  e, a partir dela, obter os aspectos probabilísticos das grandezas cinemáticas e dinâmicas do movimento da partícula.

Viu-se no capítulo anterior que, a menos da constante  $1/\sqrt{2\pi}$ , a onda de matéria é descrita genericamente pelo pacote de ondas

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (5.2)$$

Por recorrência é possível obter uma equação de onda cuja solução é a função de onda, dada na eq. (5.2), para os casos não relativísticos. No caso de uma partícula livre o potencial  $V(x) = V$  deve ser uma constante independente da posição  $x$  da partícula pois, nesse caso, da eq. (5.1),  $F = 0$ . Ainda nesse caso, deve-se esperar que a descrição quântica do movimento da partícula seja compatível com a 1.ª lei de Newton na aproximação clássica. Particularmente, o potencial constante pode ser nulo e, nesse caso, a lei clássica da conservação da energia, resulta

$$\frac{p^2}{2m} = E, \quad (5.3)$$

onde  $E$  e  $p$  são, respectivamente, a energia e o momento não-relativísticos da partícula de massa  $m$ .

Combinando esta equação com as relações de de Broglie e Einstein, dadas nas eqs. (4.29) e (4.30), como

$$p = \hbar k \quad \text{e} \quad E = \hbar \omega, \quad (5.4)$$

obtem-se

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad (5.5)$$

que substituída na eq. (5.2), resulta

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[kx - (\hbar/2m)k^2t]} dk. \quad (5.6)$$

Derivando  $\Psi(x,t)$  duas vezes em relação a variável  $x$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) (ik)^2 e^{i[kx - (\hbar/2m)k^2t]} dk,$$

ou, multiplicando ambos os lados por  $i\hbar/2m$ ,

$$\left(\frac{i\hbar}{2m}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \left(-\frac{i\hbar}{2m} k^2\right) e^{i[kx - (\hbar/2m)k^2t]} dk. \quad (5.7)$$

Por outro lado, derivando a eq. (5.6), agora em relação à variável  $t$ , obtém-se

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \left( -\frac{i\hbar k^2}{2m} \right) e^{i[kx - (\hbar/2m)k^2 t]} dk. \quad (5.8)$$

Como os membros direitos das eqs. (5.7) e (5.8) são idênticos, então, pode-se concluir que

$$\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

ou, multiplicando ambos os lados por  $i\hbar$ ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Nesta forma, esta equação diferencial parcial (EDP) é conhecida como equação de Schrödinger para a partícula livre com  $V(x)=0$ . Diferentemente da equação de onda do eletromagnetismo, além de possuir o fator imaginário  $i\hbar$ , a equação de Schrödinger possui ordens distintas nas derivadas parciais no espaço e no tempo.

É importante observar também que a eq. (5.9) pode ser obtida diretamente da equação da conservação da energia, dada na eq. (5.3), quando  $p^2$  e  $E$  forem identificados pelos operadores diferenciais

$$p^2 \rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.10)$$

e aplica-las à função de onda  $\Psi(x,t)$ .

Esses operadores diferenciais introduzem um par de regras de transformação que fornecem uma interpretação quântica das grandezas clássicas  $p$  e  $E$ . São elas que possibilitam a construção da teoria quântica a partir da teoria clássica. A primeira eq. (5.10) refere-se a  $p^2$  e não a  $p$ . Para encontrar a regra de transformação para a grandeza não quadrática  $p$ , é suficiente usar o caso particular da eq. (5.2) na forma de uma simples onda plana monocromática, isto é,

$$\Psi(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad (5.11)$$

Como se verá no próximo capítulo, essa é a solução para a partícula livre que se move para a direita. Para o caso de uma partícula livre que se move para a esquerda, deve-se trocar  $k$  por  $-k$  na eq. (5.11), pois  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ . Derivando a eq. (5.11) parcialmente em relação a  $x$  e usando o fato que  $\vec{p} = +\hbar k$  para a partícula que se move para a direita, obtêm-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,t) = ikA e^{i(kx - \omega t)} = ik \Psi(x,t) = i \frac{p}{\hbar} \Psi(x,t), \quad (5.12)$$

ou

$$p \Psi(x,t) = \hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,t).$$

A partir dessa equação pode-se concluir que

$$p \rightarrow \hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ou} \quad p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.13)$$

Obviamente, obtêm-se o mesmo resultado para a partícula que se move para a esquerda uma vez que, para esse caso,  $\Psi(x,t) = A e^{i(-kx - \omega t)}$  e  $p = -\hbar k$ .

Deve-se observar que o "quadrado", ou dupla aplicação desse operador, resulta na primeira eq. (5.10).

Analogamente, a segunda eq. (5.10) pode ser obtida derivando a eq. (5.11) parcialmente em relação ao tempo  $t$  e usando a relação  $E = \hbar\omega$ .

Uma extensão óbvia da equação de Schrödinger para a partícula livre, sujeita a um potencial  $V$  constante e diferente de zero, pode ser obtida a partir da equação da energia total

$$\frac{p^2}{2m} + V = E. \quad (5.14)$$

Assumindo  $p \rightarrow -i\hbar \partial/\partial x$  e  $E \rightarrow i\hbar \partial/\partial t$  na eq. (5.14) e, em seguida, aplicando o resultado na função de onda  $\Psi(x,t)$ , obtém-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t). \quad (5.15)$$

Para o caso geral, onde o potencial  $V(x)$  é variável, a partícula fica sujeita a uma força  $F = -dV(x)/dx \neq 0$ . Nesse caso, a descrição quântica esperada do movimento da partícula deverá ser compatível com a 2ª lei de Newton na aproximação clássica.

A Fig. 5.1(a) mostra o gráfico de uma energia potencial variável típica. Neste caso, assim como o momento  $p$ , o número de onda  $k$  é variável e não pode ser utilizado mais como parâmetro constante na função de onda  $\Psi(x,t)$  na eq. (5.2). Uma possibilidade seria considerar a energia total como invariante, como de fato é, e admitir a frequência  $\omega = E/\hbar$  como o novo parâmetro constante no pacote de ondas.

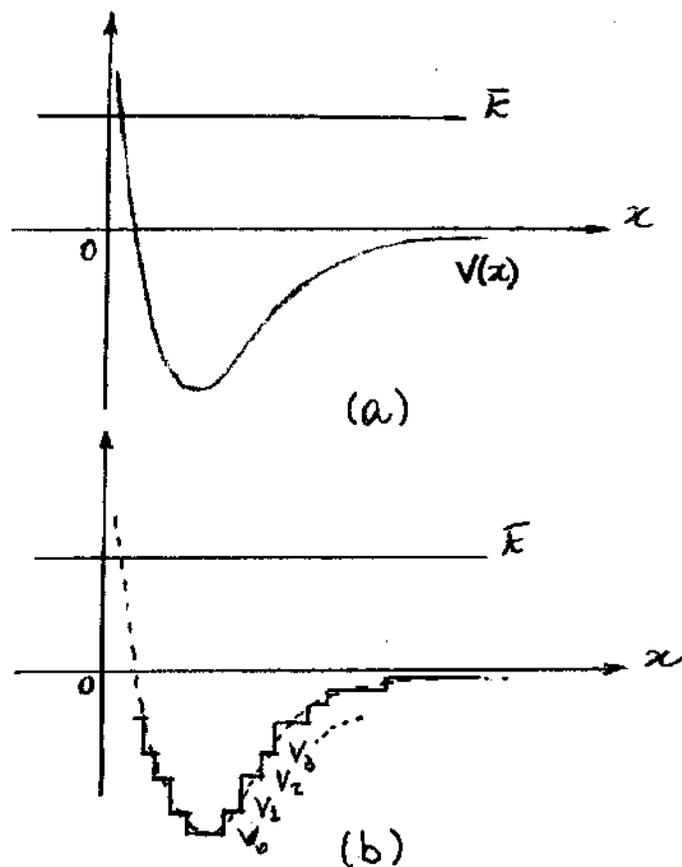


Fig. 5.1. Energia potencial variável típica.

Entretanto, é possível ainda resolver o problema sem abrir mão de  $k$  como parâmetro constante, usando uma aproximação onde a energia potencial  $V(x)$  seja construída por intervalos curtos de potenciais constantes  $V_0, V_1, V_2, \dots$ , como mostra a Fig. 5.1(b).

Em cada um desses intervalos, a partícula age como uma partícula livre e cada função de onda  $\Psi_i(x,t)$  correspondente satisfaz a eq. (5.15).

Como a equação de Schrödinger é uma equação diferencial parcial (EDP) linear de 2ª ordem e o potencial  $V(x)$  pode ser aproximado por um conjunto de potenciais  $V_i$  constantes, a solução  $\Psi(x,t)$  para  $V(x)$  pode ser obtida por uma combinação linear de soluções  $\Psi_i(x,t)$  para cada potencial  $V_i$ .

São várias as evidências que confirmam que a função de onda  $\Psi(x,t)$ , obtida por uma combinação linear, é equivalente a solução da eq. (5.15) substituindo diretamente nela o potencial variável  $V(x)$ . Assim, deve-se concluir que a eq. (5.15) é a forma geral da equação de Schrödinger, válida para qualquer potencial  $V(x)$ .

Exemplo 5.1 - Exemplo do Müllin.

Se as funções  $e^{i(kx - \omega t)}$  e  $e^{i(-kx - \omega t)}$  são soluções da equação de Schrödinger, mostrar que a combinação linear,

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \frac{A}{2} \left[ e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(-kx - \omega t)} \right] = A \left( \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) e^{-i\omega t} \\ &= A \cos kx e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

também é uma solução.

Derivando  $\Psi(x,t)$  duas vezes em relação a posição  $x$  e uma vez em relação ao tempo  $t$ , obtêm-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) = -k^2 A \cos kx e^{-i\omega t} = -k^2 \Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = -i\omega A \cos kx e^{-i\omega t} = -i\omega \Psi(x,t)$$

Substituindo estes resultados na equação de Schrödinger (5.15), obtêm-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2) \Psi(x,t) + V \Psi(x,t) = i\hbar (-i\omega) \Psi(x,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V = \hbar\omega \Rightarrow \frac{p^2}{2m} + V = E,$$

pois  $p = \hbar k$  e  $E = \hbar\omega$ . A obtenção da lei clássica da Conservação da energia, mostra que a função de onda  $\Psi(x,t) = A \cos kx e^{-i\omega t}$  também é solução da equação de Schrödinger.

### 5.3 - Interpretação Probabilística da Função de Onda.

Um dos aspectos mais importante da nova teoria quântica é o significado da solução  $\Psi(x,t)$  da equação de Schrödinger. No capítulo 4 mostrou-se que, assim como a radiação, a onda de matéria tem uma interpretação probabilística. A partir desta interpretação, observou-se que é possível encontrar as posições aleatória da partícula microscópica.

É conveniente manter o caso unidimensional para evitar complicações desnecessárias.

Originalmente, Schrödinger esperava que a função de onda  $\Psi(x,t)$ , por si só, tivesse algum significado físico. A simples presença do fator imaginário  $i\hbar$  na equação de Schrödinger mostra que  $\Psi(x,t)$  pode ter uma representação complexa. Esse fato é suficiente para descartar qualquer possibilidade de se atribuir algum significado físico para a função de onda  $\Psi(x,t)$ .

Por outro lado, o módulo quadrado da função de onda

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t), \quad (5.16)$$

é uma quantidade real e, portanto, como já observado por Max Born, deve possuir significado físico.

O asterisco em  $\Psi^*(x,t)$  refere-se ao conjugado complexo da função  $\Psi(x,t)$ . Na verdade,  $|\Psi(x,t)|^2$  não é uma grandeza física mensurável, ou observável físico na linguagem da teoria quântica, mas tem um significado físico marcante na teoria quântica de Schrödinger. Nessa e nas próximas seções, ficará evidente que  $|\Psi(x,t)|^2$  expressa uma distribuição de probabilidade com a qual é possível determinar, não somente a localização aleatória, mas também todas as outras grandezas físicas associadas ao movimento da partícula microscópica tais como momento, força, energia, etc...

Seja uma função de onda  $\Psi$ , associada a um feixe de partículas microscópicas, passando através de uma dupla fenda numa experiência de Young. A onda  $\Psi$  é dividida em duas ondas  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , associadas a cada uma das fendas. As duas ondas interferem-se, resultando nas regiões de interferências construtivas e destrutivas, como mostra a Fig. 5.2.

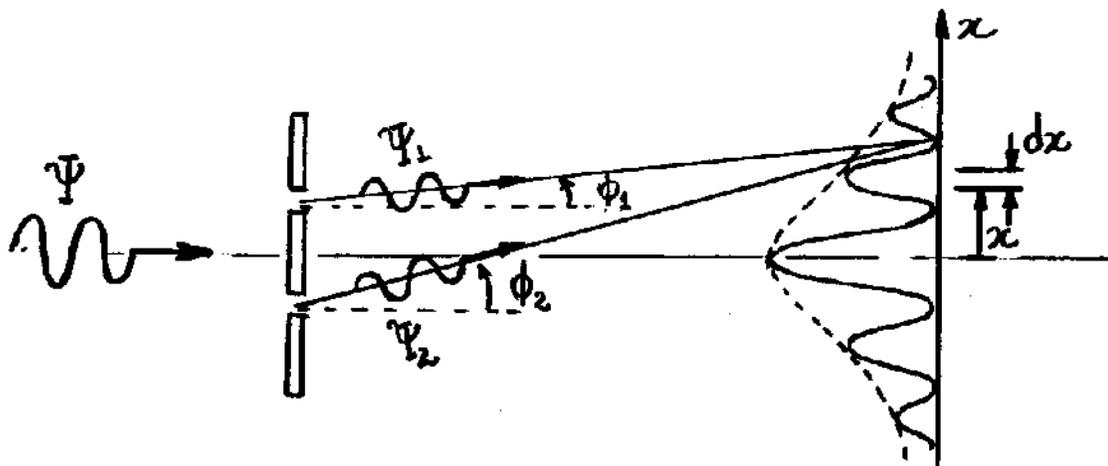


Fig. 5.2 - Onda  $\Psi$  associada a uma partícula atravessando uma dupla fenda de Young.

Após atravessar as fendas, ocorre a superposição de ondas  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , isto é,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (5.17)$$

com

$$\Psi_1 = |\Psi_1| e^{i\phi_1}, \quad \Psi_2 = |\Psi_2| e^{i\phi_2}, \quad (5.18)$$

onde  $\phi_1 = k_1 x - \omega_1 t$  e  $\phi_2 = k_2 x - \omega_2 t$ , são as fases associadas a cada uma das ondas. A localização das partículas, além das fendas, depende da função quadrática

$$\begin{aligned}
 |\Psi|^2 &= (\Psi_1^* + \Psi_2^*)(\Psi_1 + \Psi_2) = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_2^* \Psi_1 + \Psi_1^* \Psi_2 \\
 &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_1| |\Psi_2| \left[ e^{-i(\phi_2 - \phi_1)} + e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \right] \\
 &= |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1| |\Psi_2| \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

onde usou-se as eqs. (5.18) e a identidade trigonométrica  $e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} = 2 \cos \alpha$ .

Observa-se que a eq. (5.19) contém duas quantidades fixas  $|\Psi_1|^2$  e  $|\Psi_2|^2$ , associadas às intensidades de cada feixe de partículas que passam por cada uma das fendas individualmente e um termo adicional de interferência,

$$2|\Psi_1| |\Psi_2| \cos(\phi_2 - \phi_1).$$

As fases  $\phi_1$  e  $\phi_2$  variam para diferentes pontos de observação, gerando o padrão de interferência construtivo e destrutivo observado na Fig. 5.2. De acordo com a eq. (5.19), as partículas têm diferentes probabilidades  $|\Psi|^2$  de serem encontradas em diferentes posições do eixo  $x$  como mostrado na Fig. 5.2. De acordo com a proposta de Born, a probabilidade infinitesimal  $dP$  de uma partícula estar localizada entre  $x$  e  $x+dx$ , num instante de tempo  $t$ , é

$$dP = \rho(x,t) dx = |\Psi(x,t)|^2 dx = \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx \quad (5.20)$$

onde  $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = dP/dx$  se refere a uma densidade de probabilidade.

A probabilidade de uma partícula ocupar uma região finita do espaço unidimensional entre  $x_1$  e  $x_2$ , num instante de tempo  $t$ , será

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx. \quad (5.21)$$

Obviamente, a partícula deve estar localizada em algum ponto do espaço unidimensional e, portanto, a função de onda  $\Psi(x,t)$  deve satisfazer a seguinte condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx = 1. \quad (5.22)$$

Observa-se que  $\Psi(x,t)$  deve ser uma função de onda localizada, como de fato é, para garantir a convergência da integral na eq. (5.22).

A função densidade de probabilidade  $|\Psi(x,t)|^2$  faz menção a uma dependência temporal do comportamento local da probabilidade. Como consequência, definições apropriadas devem surgir da consideração de que as funções  $\Psi(x,t)$  e  $\Psi^*(x,t)$  devam satisfazer as equações de onda para a partícula livre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{e} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} = -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}. \quad (5.23)$$

A dependência temporal da densidade de probabilidade para o exemplo da partícula livre, pode ser analisada derivando a função  $|\Psi|^2$  no tempo e combinando o resultado com as eqs. (5.23), isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi = \Psi^* \left( -\frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \right) \Psi \\ &= -\frac{\hbar}{2im} \left( \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\hbar}{2im} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} j(x,t) = 0, \quad (5.24)$$

onde

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right), \quad (5.25)$$

é uma quantidade denominada de densidade de corrente de probabilidade, ou fluxo de probabilidade, que tem dimensão de probabilidade por unidade de tempo. A eq. (5.24) constitui uma equação de continuidade, ou lei de conservação. Ela expressa o fato que um aumento da densidade (por exemplo, de pontos), numa pequena região do espaço é compensada por uma redução do fluxo (dos pontos), que atravessa a superfície que envolve essa região, como ilustrado na Fig. 5.3. Em outras palavras, se existem muitos pontos nessa região, saem dela mais pontos do que entram e se existem poucos pontos, saem dela menos pontos do que entram.

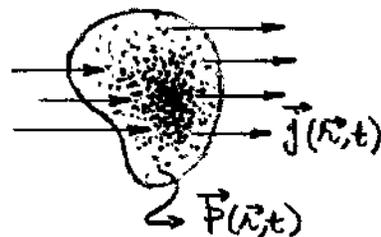


Fig. 5.3 - Comportamento da densidade e fluxo de probabilidade de acordo com a eq. (5.24).

No caso tridimensional, as eqs. (5.24) e (5.25), tornam-se

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*). \quad (5.26)$$

### Exemplo 5.1 - FACULTATIVO

Utilizar a equação da continuidade para justificar a condição de normalização  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$ , como uma condição independente do tempo  $t$ .

De acordo com a equação da continuidade, a variação temporal da probabilidade entre  $x_1$  e  $x_2$  será

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} j(x, t) dx = - j(x, t) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

ou, da eq. (5.25),

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx = - \frac{\hbar}{2im} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Sendo  $\Psi$  uma função de onda localizada, como mostra a Fig. 5.4, nos limites  $x_1 \rightarrow -\infty$  e  $x_2 \rightarrow +\infty$ ,  $\Psi \rightarrow 0$  e então

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = 0,$$

Como se desejava mostrar.

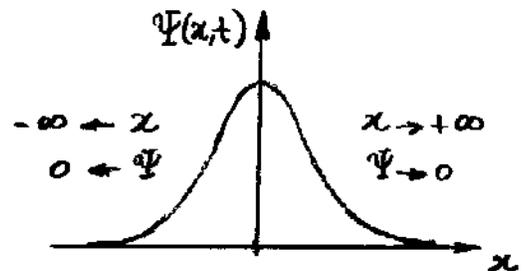


Fig. 5.4 - Comportamento geral da função de onda localizada.

## 5.4. Equação de Schrödinger independente do tempo.

A teoria quântica de Schrödinger é baseada numa equação diferencial, cuja solução determina a dependência espacial e temporal da função de onda que controla o movimento da partícula microscópica. Na versão unidimensional, a função de onda tem  $x$  e  $t$  como variáveis independentes.

Sabe-se que o potencial  $V$  que atua num sistema microscópico é uma função tanto de  $x$  como de  $t$ . Entretanto, na maioria das vezes, o potencial pode ser considerado como uma função que depende somente da variável  $x$  e, sem perda de generalidade, pode-se escrever a equação de Schrödinger como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V(x) \Psi(x,t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t). \quad (5.27)$$

Como  $x$  e  $t$  são variáveis independentes, pode-se usar o método de separação de variáveis onde a dependência em  $x$  é separada da dependência em  $t$  na função de onda  $\Psi(x,t)$ , escrevendo-a como um produto de duas funções de cada uma dessas variáveis, isto é,

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \psi(t). \quad (5.28)$$

Se esta solução satisfaz a eq. (5.27), então

$$-\psi(t) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) \psi(t) = i\hbar \psi(x) \frac{d\psi(t)}{dt} .$$

Dividindo ambos os lados desta equação por  $\psi(x)\psi(t)$ , obtêm-se

$$\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x)}{\psi(x)} = \frac{i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt}}{\psi(t)} . \quad (5.29)$$

Observa-se que o lado esquerdo desta equação depende somente da variável  $x$ ; enquanto que o lado direito depende somente de  $t$ . Só é possível a igualdade de duas funções com variáveis diferentes, se estas forem uma constante independente de ambas as variáveis.

Se  $\alpha$  for esta constante, a eq. (5.29) se transforma em duas equações diferenciais para as funções  $\psi(x)$  e  $\psi(t)$  dadas por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = \alpha \psi(x) \quad (5.30)$$

e

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = \alpha \psi(t) . \quad (5.31)$$

A solução da equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, na eq. (5.31), a menos de uma constante multiplicativa, é

$$\psi(t) = e^{-i\alpha t/\hbar} . \quad (5.32)$$

Como a função de onda deve ter uma componente temporal oscilante do tipo  $e^{-i\omega t}$ , então a solução na eq. (5.32) é parametrizada pela frequência angular  $\omega$  tal que

$$\omega = \alpha/\hbar$$

ou

$$\alpha = \hbar\omega = E, \quad (5.33)$$

onde  $E = \hbar\omega$  é a energia total do sistema quântico. Assim, as eqs. (5.32) e (5.30), tornam-se

$$\psi(t) = e^{-iEt/\hbar} \quad (5.34)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (5.35)$$

A eq. (5.35) para  $\psi(x)$ , parametrizada pela energia total  $E$ , é denominado de equação de Schrödinger independente do tempo.

Como se verá mais adiante, o produto dado na eq. (5.28) será de fato uma solução da equação de Schrödinger sempre que um valor particular de energia  $E = E_n$ , onde  $n$  é um índice inteiro qualquer, for capaz de gerar uma solução particular  $\psi = \psi_n$  fisicamente aceitável da equação de Schrödinger independente do tempo.

Assim, o método de separação de variáveis deve resultar em soluções da equação de Schrödinger que assumem a seguinte forma especial:

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (5.36)$$

As soluções  $\Psi_n(x,t)$ , correspondentes às energias  $E_n$  com diferentes valores do número inteiro  $n$ , são na verdade soluções particulares da equação de Schrödinger. A combinação linear dessas soluções deve fornecer a solução geral do problema.

Quando se calcula a densidade de probabilidade a partir da eq. (5.36), obtêm-se

$$|\Psi_n(x,t)|^2 = |\psi_n(x)|^2 e^{-iE_n t/\hbar} e^{+iE_n t/\hbar} = |\psi_n(x)|^2, \quad (5.37)$$

ou seja, para um mesmo valor de energia  $E_n$ , os aspectos probabilísticos do sistema quântico são invariantes no tempo. Por causa disso, as soluções  $\Psi_n(x,t)$  são referidas como sendo os diferentes estados estacionários, ou configurações espaciais, do sistema quântico. Por exemplo, no caso atômico,  $\Psi_n(x,t)$  descreve uma determinada configuração espacial para os elétrons e  $E_n$  é a energia correspondente a essa situação particular de equilíbrio. Conclui-se que as soluções da equação de Schrödinger, para um sistema microscópico submetido a um potencial  $V(x)$ , fornecem um conjunto de valores de energia  $E_n$  e funções de onda  $\Psi_n(x,t)$ , que descrevem respectivamente as energias da partícula microscópica e as configurações espaciais do sistema quântico em particular.

### Exemplo 5.2.

Sejam  $\Psi_n$  e  $\Psi_{n'}$  diferentes funções de onda para diferentes valores de energia  $E_n$  e  $E_{n'}$ , respectivamente. Mostrar que essas funções satisfazem a seguinte condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{n'}^* \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{n'}^* \Psi_n dx = 0. \quad (5.38)$$

Sabe-se que as funções  $\Psi_n(x)$  e  $\Psi_{n'}(x)$  satisfazem a equação de Schrödinger independente do tempo, isto é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} + V(x) \Psi_n = E_n \Psi_n \quad \text{e} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_{n'}^*}{dx^2} + V(x) \Psi_{n'}^* = E_{n'} \Psi_{n'}^*,$$

Multiplicando a primeira equação por  $\Psi_{n'}^*$ , a segunda por  $\Psi_n$  e, em seguida, subtraindo a primeira pela segunda, obtém-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \Psi_{n'}^* \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - \frac{d^2 \Psi_{n'}^*}{dx^2} \Psi_n \right) = (E_n - E_{n'}) \Psi_{n'}^* \Psi_n$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( \Psi_{n'}^* \frac{d \Psi_n}{dx} - \frac{d \Psi_{n'}^*}{dx} \Psi_n \right) dx = (E_n - E_{n'}) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{n'}^* \Psi_n dx$$

ou ainda

$$(E_n - E_{n'}) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{n'}^* \Psi_n dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \Psi_{n'}^* \frac{d \Psi_n}{dx} - \frac{d \Psi_{n'}^*}{dx} \Psi_n \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

pois, como mostrado na Fig. 5.4, do mesmo modo que as funções de onda  $\Psi_{n'}$  e  $\Psi_n$ , as funções espaciais  $\Psi_{n'}$  e  $\Psi_n \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

### Exemplo 5.3 -

Seja um sistema quântico de dois níveis com valores de energia  $E_1$  e  $E_2$ , correspondentes aos estados estacionários de funções de onda

$$\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} \text{ e } \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar},$$

respectivamente. Mostrar que uma solução  $\Psi(x,t)$ , dada pela combinação linear desses estados, não se refere a um estado estacionário.

Se  $\Psi(x,t)$  é uma combinação linear dos dois estados, então

$$\Psi(x,t) = a_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + a_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}.$$

Calculando o módulo quadrático da função  $\Psi(x,t)$ , obtém-se

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*\Psi$$

$$= (a_1^*\psi_1^*e^{iE_1t/\hbar} + a_2^*\psi_2^*e^{iE_2t/\hbar})(a_1\psi_1e^{-iE_1t/\hbar} + a_2\psi_2e^{-iE_2t/\hbar})$$

$$= |a_1|^2|\psi_1|^2 + |a_2|^2|\psi_2|^2 + a_1^*a_2\psi_1^*\psi_2e^{i(E_2-E_1)t/\hbar} + a_2^*a_1\psi_2^*\psi_1e^{+i(E_2-E_1)t/\hbar}$$

$$= A + B e^{-i\omega t} + C e^{+i\omega t},$$

onde

$$A = |a_1|^2|\psi_1|^2 + |a_2|^2|\psi_2|^2, \quad B = a_1^*a_2\psi_1^*\psi_2, \quad C = a_2^*a_1\psi_2^*\psi_1$$

e

$$\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$$

Assim, aspectos probabilísticos de  $\Psi(x,t)$  não são estacionários e as modificações devem ocorrer com uma frequência  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ . Um exemplo dessa situação fora do equilíbrio, ocorre numa lâmpada de gás monoatômico, onde os átomos são constantemente bombardeados por elétrons.

### 5.5. Valor Esperado

Sabe-se que  $\Psi(x,t)$  é a função de onda da partícula microscópica e a densidade de probabilidade  $|\Psi(x,t)|^2$  define os aspectos probabilísticos associados ao sistema microscópico. É através da função  $|\Psi(x,t)|^2$  que é possível determinar todas as quantidades físicas mensuráveis, ou observáveis, tais como posição, força, momento e energia, associado ao movimento mecânico da partícula microscópica.

Do ponto de vista da teoria clássica, a posição  $x(t)$  de uma partícula, num instante de tempo  $t$ , é uma grandeza física primitiva a partir da qual é possível determinar as grandezas físicas derivadas momento, força e energia.

O momento linear  $p(t)$  pode ser determinado a partir da posição  $x(t)$  como

$$p(t) = m \frac{d}{dt} x(t).$$

Se a partícula é submetida a um potencial  $V(x,t)$ , a força  $F(t)$  pode ser determinada a partir da 2ª lei de Newton como

$$F(t) = \frac{d}{dt} p(t) = - \frac{\partial}{\partial x} V(x,t). \quad (5.39)$$

Como na teoria quântica a posição  $x(t)$  de uma partícula está vinculada a uma densidade de probabilidade  $|\Psi(x,t)|^2$ , então o mesmo deve ocorrer com todas as grandezas físicas a ela associada. Em outras palavras, grandezas físicas tais como momento  $p(t)$ , força  $F(t)$  e energia  $E$ , devem ter também aspectos probabilísticos.

É importante mencionar que os aspectos probabilísticos da posição  $x$  e momento  $p$ , bem como, energia  $E$  e tempo  $t$  da partícula, já tinham sido previstos pelo princípio da incerteza de Heisenberg.

A medida da posição  $x$  de uma partícula macroscópica, realizada em um certo número de vezes, deve resultar em um conjunto de valores possíveis dessa grandeza física. A média e as flutuações em torno da média dessas medidas é uma operação lógica para representar respectivamente o valor esperado e a incerteza da posição  $x$  da partícula.

Do mesmo modo, para uma partícula microscópica, um observável físico pode ser determinado em termo de um valor esperado e uma incerteza associada. Nesse caso, tais componentes estatísticos devem depender da função de onda  $\Psi(x,t)$  do sistema quântico em particular.

A definição do valor esperado, ou valor médio, pode ser obtida do método estatístico comumente utilizado no procedimento experimental. Se uma grandeza  $G$  é medida  $N$  vezes, onde um valor  $G_i$  ocorre  $n_i$  vezes, o valor esperado dessa grandeza é

$$\langle G \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N n_i G_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N G_i n_i}{\sum_{i=1}^N n_i} \quad (5.40)$$

Do ponto de vista da teoria quântica, supõe-se que a grandeza  $G$  seja função da posição  $x$  da partícula microscópica. Nesse caso, o valor  $G(x)$  ocorre com a mesma probabilidade  $dP = |\Psi(x,t)|^2 dx$  de se encontrar a partícula entre  $x$  e  $x+dx$ . Assim, o valor esperado de  $G(x)$  será calculado como na eq. (5.40) trocando simplesmente  $n_i$  por  $dP$  e somatórios por integrais, isto é,

$$\langle G(x) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dP}{\int_{-\infty}^{+\infty} dP} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} G(x) |\Psi(x,t)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx}$$

ou

$$\langle G(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) |\Psi(x,t)|^2 dx, \quad (5.41)$$

pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1. \quad (5.42) -$$

Uma forma apropriada de escrever a eq. (5.41) é

$$\langle G \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) G(x) \Psi(x,t) dx \quad (5.43)$$

Os termos no integrando são escritos com a inserção de  $G(x)$  entre  $\Psi^*(x,t)$  e  $\Psi(x,t)$  para preservar o cálculo do valor esperado das grandezas físicas com notação restrita da mecânica quântica. Isso ficará mais evidente na sequência com exemplos dos casos dos operadores momento  $p$  e energia total  $E$ .

Ainda da analogia com a teoria clássica, é possível fazer várias medições da grandeza  $G$  e observar as flutuações em relação ao valor esperado  $\langle G \rangle$  por meio do conceito de desvio padrão, ou incerteza  $\Delta G$ , definido por

$$\Delta G = \sqrt{\langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle}, \quad (5.44)$$

que também pode ser escrita numa forma apropriada observando que

$$\Delta G^2 = \langle (G - \langle G \rangle)^2 \rangle = \langle G^2 - 2G\langle G \rangle + \langle G \rangle^2 \rangle = \langle G^2 \rangle - 2\langle G \rangle \langle G \rangle + \langle G \rangle^2$$

ou

$$\Delta G^2 = \langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2 \quad (5.45)$$

onde o valor esperado de  $G^2$  é calculado como

$$\langle G^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) G^2 \Psi(x,t) dx \quad (5.46)$$

Neste formalismo, o valor esperado da posição  $x$  da partícula microscópica

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) x \Psi(x,t) dx, \quad (5.47)$$

tem um significado especial para a teoria quântica de Schrödinger. Assim como  $x(t)$  é a grandeza fundamental na mecânica clássica,  $\langle x(t) \rangle$  desempenha o mesmo papel na mecânica quântica. Do mesmo modo, pode-se calcular o valor esperado do momento  $p$  da partícula microscópica como

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) p \Psi(x,t) dx.$$

Como, no formalismo da teoria quântica de Schrödinger, a grandeza física  $p$  é representada pelo operador diferencial  $\hbar/i \partial/\partial x$ , então

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,t) dx. \quad (5.48)$$

Analogamente, para o caso da energia  $E$ , tem-se

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) dx, \quad (5.49)$$

pois essa grandeza física é representada pelo operador diferencial  $i\hbar \partial/\partial t$ .

No caso de uma partícula livre, de acordo com a eq. (5.9),  $i\hbar \partial/\partial t \Psi = -\hbar^2/2m \partial^2/\partial x^2 \Psi$ , a eq. (5.49) torna-se

$$\langle E \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} \right] dx. \quad (5.50)$$

As eqs. (5.48) e (5.50), mostram o motivo pelo qual adotou-se a ordem dos termos que aparecem no integrando da eq. (5.43). De fato, essa deve ser a única ordem possível para o operador momento  $\hat{p}$ , pois

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} [\Psi^*(x,t) \Psi(x,t)] dx \\ &= \frac{\hbar}{i} [\Psi^*(x,t) \Psi(x,t)]_{-\infty}^{+\infty} \equiv 0 \end{aligned}$$

e

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} dx,$$

não tem nenhum sentido.

Obtém-se, naturalmente, a mesma conclusão para o valor esperado da energia a partir da eq. (5.50).

Na sequência propõe-se avaliar o comportamento do valor esperado das energias para o caso particular dos estados estacionários

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (5.51)$$

cuja derivada parcial no tempo fornece

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n &= i\hbar \psi_n(x) \left(-i \frac{E_n}{\hbar}\right) e^{-iE_n t/\hbar} \\ &= \psi_n(x) E_n e^{-iE_n t/\hbar} = E_n \Psi_n. \end{aligned} \quad (5.52)$$

O valor esperado da energia  $\langle E \rangle$ , definido na eq. (5.49), torna-se então

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^* i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n dx = E_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^* \Psi_n dx = E_n, \quad (5.53)$$

pois  $\Psi_n$  é uma função de onda normalizável. Similaneamente, aplicando a operação quadrática  $(i\hbar \partial/\partial t)^2$  na eq. (5.51), obtêm-se

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 \Psi_n = E_n^2 \Psi_n$$

e então

$$\langle E^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^* (i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 \Psi_n dx = E_n^2. \quad (5.54)$$

As eqs. (5.53) e (5.54) mostram que, para estados estacionários, a incerteza  $\Delta E$  na determinação da energia  $E$  é

$$\Delta E = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = 0.$$

De acordo com a eq. (5.37),  $|\Psi_n(x,t)|^2 = |\psi_n(x)|^2$ , as diferentes localizações da partícula quântica com o estado estacionário  $\Psi_n(x,t)$ , independe do tempo. Assim, espera-se que as modificações do sistema, ou da distribuição de probabilidades, ocorra somente num intervalo de tempo  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Atribui-se a este fato e ao princípio da incerteza de Heisenberg ( $\Delta E \Delta t \sim \hbar/2$ ), a anulação da incerteza ( $\Delta E \rightarrow 0$ ) na determinação da energia para estados estacionários.

Deve-se mencionar aqui a importante propriedade expressa na eq. (5.52), como uma equação de autovalor. Uma equação de autovalor é uma equação da forma

$$\Lambda \Psi_n = \lambda_n \Psi_n,$$

onde um operador  $\Lambda$  determina um conjunto de autofunções  $\Psi_n$ , ou autovetores, fisicamente aceitáveis e autovalores  $\lambda_n$  correspondentes. Os autovetores  $\Psi_n$  formam um conjunto de soluções linearmente independentes da equação de Schrödinger e representam as configurações espaciais do sistema quântico. Por outro lado, os autovalores  $\lambda_n$  representam os valores possíveis de um observável físico associado ao movimento mecânico da partícula microscópica.

### Exemplo 5.3 - FACULTATIVO

Assumindo uma solução de onda plana para a partícula que se move para a direita  $\psi_n(x) = e^{+ik_n x}$ , a eq. (5.51), torna-se

$$\Psi_n(x,t) = e^{i(k_n x - E_n t/\hbar)}$$

Mostrar que esta função é uma autofunção do operador momento linear  $p$  com autovalor  $+\hbar k_n$ .

Aplicando o operador  $p \rightarrow \hbar i \partial/\partial x$  na função de onda acima, obtém-se

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_n = +\frac{\hbar}{i} (ik_n) e^{i(k_n x - E_n t/\hbar)} = +\hbar k_n \Psi_n,$$

que, obviamente, é uma equação de autovalor para a grandeza momento linear. Similarmente ao caso da energia, é possível mostrar que o momento também é determinado com incerteza nula  $\Delta p = 0$ .

### Exemplo 5.4.

Seja novamente o sistema quântico de dois níveis onde  $E_n$  e  $E_{n'}$  são os autovalores de energia associados as autofunções  $\Psi_n$  e  $\Psi_{n'}$ , respectivamente. Escrever as condições de normalização e calcular o valor esperado da energia  $\langle E \rangle$  para uma função de onda do tipo

$$\Psi = c \Psi_n + c' \Psi_{n'}$$

A condição de normalização será

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (c^* \Psi_n^* + c'^* \Psi_{n'}^*) (c \Psi_n + c' \Psi_{n'}) dx = |c|^2 + |c'|^2, \quad (5.55)$$

pois, de acordo com as eqs. (5.22) e (5.38),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^* \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{n'}^* \Psi_{n'} dx = 1, \quad (5.56)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n^* \Psi_{n'} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* e^{+iE_n t/\hbar} \psi_{n'} e^{-iE_{n'} t/\hbar} dx = e^{i(E_n - E_{n'})t/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_{n'} dx = 0$$

e similarmemente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{n'}^* \Psi_n dx = 0, \quad (5.57)$$

isto é, os termos cruzados não contribuem para a normalização dos estados estacionários. Aplicando o operador  $i\hbar \partial/\partial t$  na função de onda  $\Psi$ , de acordo com a eq. (5.52), obtém-se

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = c i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n + c' i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{n'} = c E_n \Psi_n + c' E_{n'} \Psi_{n'}$$

e então

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (c^* \Psi_n^* + c'^* \Psi_{n'}^*) (c E_n \Psi_n + c' E_{n'} \Psi_{n'}) dx$$

ou, das eqs. (6.56) e (6.57),

$$\langle E \rangle = |c|^2 E_n + |c'|^2 E_{n'}. \quad (5.58)$$

As quantidades  $|c|^2$  e  $|c'|^2$  fornecem as probabilidades do sistema estar nos estados estacionários  $\Psi_n$  e  $\Psi_{n'}$  com energias  $E_n$  e  $E_{n'}$ , respectivamente. O sistema atômico é um exemplo clássico em que esse fenômeno pode ocorrer. Nesse caso, o átomo tem diferentes probabilidades de ocupar um ou outro nível do sistema quântico de dois níveis.

## 5.6 - Movimento da partícula Quântica e o limite da Teoria Clássica - FACULTATIVO

Do ponto de vista da teoria quântica, a localização de uma partícula está associada a um pacote de ondas cujo comportamento espacial é descrito pela função de onda  $\Psi(x,t)$  ou, mais apropriadamente, pela função densidade de probabilidade  $|\Psi(x,t)|^2$ . A posição mais provável, ou valor esperado  $\langle x \rangle$  da posição da partícula, é representado pelo ponto de máximo da função densidade de probabilidade  $|\Psi(x,t)|^2$ . Como se pode ver na Fig. 5.5, a avaliação do movimento da partícula quântica é obtida da evolução temporal do ponto de máximo da função  $|\Psi(x,t)|^2$ .

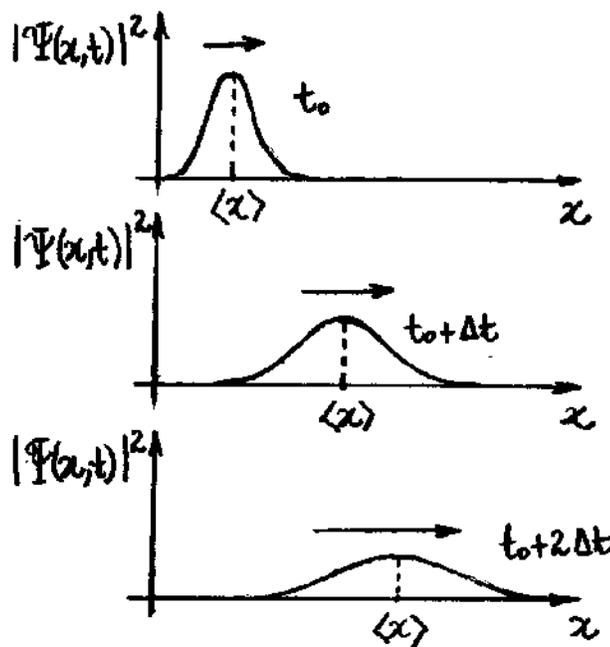


Fig. 5.5 - Evolução temporal do pacote de ondas associado a uma partícula quântica em movimento.

O alargamento do pacote, mostrado na Fig. 5.5, é uma consequência do princípio da incerteza.

Como  $\Delta E \Delta t \sim \hbar/2$ , a energia  $E$  fica cada vez mais determinada ( $\Delta E$  diminui) a medida que  $\Delta t$  aumenta. Como  $\Delta E = \Delta p^2/2m$ , o mesmo deve ocorrer com o momento  $p$  e, conseqüentemente,  $\Delta x$  aumenta uma vez que  $\Delta p \Delta x \sim \hbar/2$ .

O movimento da partícula microscópica pode ser avaliado a partir da derivada temporal de  $\langle x \rangle$ , isto é,

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* x \Psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} x \Psi \right) dx, \leftarrow$$

uma vez que, para a derivada parcial  $\partial/\partial t$ ,  $x$  é uma constante. De acordo com a equação de Schrödinger

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{V}{i\hbar} \Psi \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \frac{V}{i\hbar} \Psi^*. \quad (5.59) \leftarrow$$

Desde que  $V(x)$  seja real. Assim, a equação anterior torna-se

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \frac{V}{i\hbar} \Psi^* \right) x \Psi + \Psi^* x \left( \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{V}{i\hbar} \Psi \right) \right] dx$$

ou

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \Psi^* x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} x \Psi \right) dx. \quad (5.60)$$

Observa-se que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \Psi + \Psi^* \Psi \right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \Psi \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\Psi^* \Psi) \\
& = \cancel{\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \frac{\partial \Psi}{\partial x}} + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^* x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} x \Psi + \cancel{\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi} + \cancel{\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \frac{\partial \Psi}{\partial x}} \right) \\
& + \cancel{\frac{\partial \Psi^* \Psi}{\partial x}} + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi^* x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} x \Psi + 2 \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} .
\end{aligned}$$

Assim, a eq. (5.60) pode ser escrita, como

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \Psi + \Psi^* \Psi \right) - 2 \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] dx \\
&= \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \Psi + \Psi^* \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx .
\end{aligned}$$

Como  $\Psi$  ou  $\Psi^*$  são funções de onda localizadas, de modo que se anulam para  $x \rightarrow \pm\infty$ , então,

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = - \frac{i\hbar}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \leftarrow$$

ou, da representação do valor esperado do momento  $\langle p \rangle$  da partícula dada na eq. (5.48),

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} . \quad (5.61) \leftarrow$$

Logo a representação do momento de uma partícula microscópica é obtida da representação clássica, dada na eq. (5.38), trocando as grandezas clássicas  $x(t)$  e  $p(t)$  por seus respectivos valores esperados.

Os aspectos dinâmicos do movimento da partícula microscópica podem ser avaliados a partir da derivada temporal da eq. (5.48), isto é,

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \bar{\Psi}^*}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \bar{\Psi}^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dx \leftarrow$$

Substituindo  $\frac{\partial \bar{\Psi}^*}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  por suas expressões, dada pela equação de Schrödinger (5.59), obtêm-se

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}^*}{\partial x^2} - \frac{V}{i\hbar} \bar{\Psi}^* \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \bar{\Psi}^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{V}{i\hbar} \Psi \right) \right] dx$$

ou

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^3 \bar{\Psi}^*}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \bar{\Psi}^* \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ V \bar{\Psi}^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \bar{\Psi}^* \frac{\partial}{\partial x} (V\Psi) \right] dx.$$

Observa-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{\Psi}^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \bar{\Psi}^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) &= \left( \frac{\partial^2 \bar{\Psi}^*}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Psi}^*}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{\Psi}^*}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \bar{\Psi}^* \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \bar{\Psi}^*}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \bar{\Psi}^* \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \end{aligned}$$

e

$$V \bar{\Psi}^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \bar{\Psi}^* \frac{\partial}{\partial x} (V\Psi) = V \bar{\Psi}^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \bar{\Psi}^* \left( V \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \Psi \right) = -\bar{\Psi}^* \frac{\partial V}{\partial x} \Psi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \Psi dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \Psi dx. \end{aligned}$$

Como a função de onda  $\Psi$  deve ser localizada isto é,  $\Psi(x,t) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , então

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Psi dx = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = \langle F \rangle. \quad (5.62) \leftarrow$$

Logo, expressão quântica associada a 2ª lei de Newton que se aplica a uma partícula microscópica é obtida da representação clássica, dada na eq. (5.39), trocando as grandezas clássicas  $p(t)$  e  $F$  por seus respectivos valores esperados.

No limite clássico, em que  $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \approx 0$  e  $\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \approx 0$ , será desnecessário distinguir  $x$  de  $\langle x \rangle$  e  $p$  de  $\langle p \rangle$ . A teoria quântica de fato conduz à teoria clássica no limite em que o princípio da incerteza deixa de ser importante. Entretanto, quando se está fora desse limite, a teoria quântica prevê resultados que não tem nenhuma correspondência com a teoria clássica.

## 5.7 - Comportamento Geral das Autofunções.

Nesta seção inicia-se a discussão das soluções aceitáveis da equação de Schrödinger a partir de argumentos qualitativos. Para isso, é conveniente escrever a equação de Schrödinger independente do tempo,  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$ , como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi. \quad (5.63)$$

O comportamento da função de onda  $\psi(x)$  dependem da forma da energia potencial  $V(x)$ , uma vez que ela determina a força que atua na partícula.

Uma forma típica da energia potencial  $V(x)$  é mostrada na Fig. 5.6.

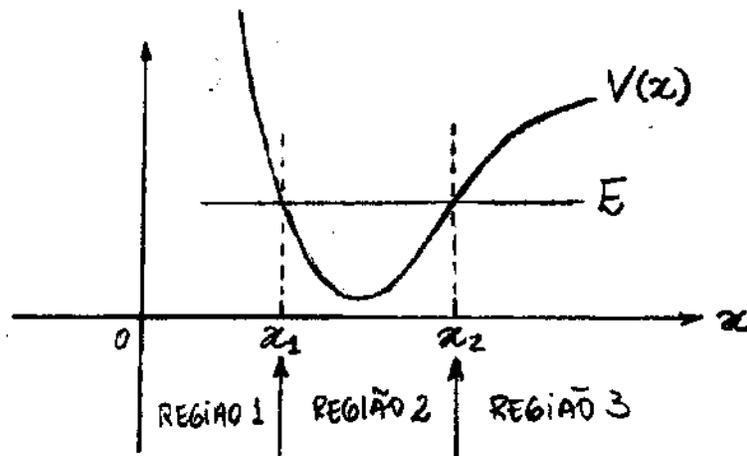


Fig. 5.6 - Energia potencial  $V(x)$  e energia total  $E$  frequentemente presentes no movimento de uma partícula microscópica em um sistema quântico.

O gráfico inclui também um valor escolhido para a energia total  $E$ , que possa ser assumida como um autovalor de energia na equação de Schrödinger e que satisfaça a seguinte condição:

$$E = V(x) \quad \text{para } x = x_1 \text{ e } x = x_2. \quad (5.64)$$

Como a energia cinética da partícula pode ser expressa como  $K = E - V(x) = p^2/2m$ , então o momento  $p$  correspondente é

$$p = \sqrt{2m[E - V(x)]} \quad (5.65)$$

Valor real do momento  $p$  só será possível para valores de  $x$  que satisfazem a condição  $E \geq V(x)$ . As regiões  $x < x_1$  e  $x > x_2$ , onde  $E < V(x)$ , são conhecidas como regiões classicamente proibidas. Esta limitação não se estende a uma partícula microscópica. Entretanto, os pontos  $x_1$  e  $x_2$ , denominados de pontos de transição clássica, ajudam a determinar o comportamento geral das autofunções.

A eq. (5.63) pode ser expressa como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\alpha^2\psi, \quad (5.66)$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]. \quad (5.67)$$

Esta equação mostra que o comportamento da função de onda  $\psi(x)$  depende do sinal de  $\alpha^2$ .

Sabe-se que a condição  $d\psi(x)/dx = 0$  define  $x_0$  como um ponto de máximo, ou ponto de mínimo, para a função  $\psi(x)$  quando  $x = x_0$ , tal que

- se  $d^2\psi(x_0)/dx^2 > 0$ ,  $x_0$  define um ponto de mínimo
- e
- se  $d^2\psi(x_0)/dx^2 < 0$ ,  $x_0$  define um ponto de máximo.

A Fig. 5.6 mostra que na 1ª e 3ª regiões  $\alpha^2 < 0$ , pois  $E < V(x)$ . Por outro lado, na 2ª região  $\alpha^2 > 0$ , pois  $E > V(x)$ . Vê-se então, da eq. (5.66), que os sinais de  $\psi$  e  $d^2\psi/dx^2$  são os mesmos na 1ª e 3ª regiões, e são contrários na 2ª região. Isso significa que na 1ª e 3ª regiões a curva  $\psi$  contra  $x$  terá ponto de mínimo se  $\psi > 0$  e ponto de máximo se  $\psi < 0$ . Ao contrário, na 2ª região, a curva terá ponto de máximo se  $\psi > 0$  e ponto de mínimo se  $\psi < 0$ . Todas as possibilidades estão mostradas na Fig. 5.7.

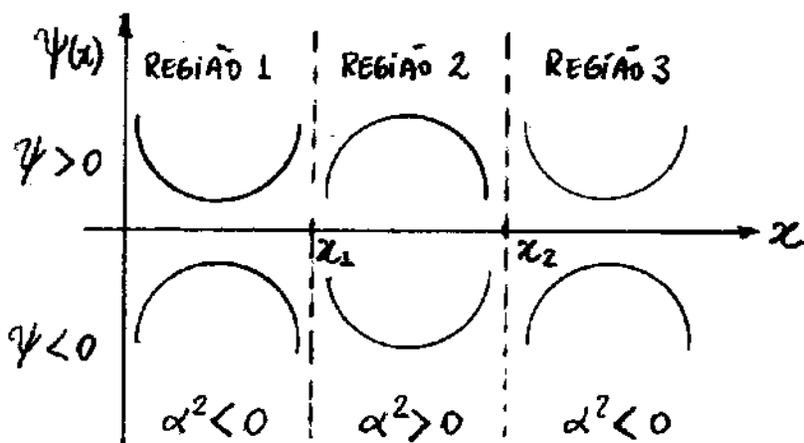


Fig. 5.7 - Comportamento da função de onda  $\psi(x)$  para uma partícula sujeita a um potencial da Fig. 5.6.

Essa discussão mostra que seria possível utilizar a equação de Schrödinger independente do tempo, com valores escolhidos de  $V(x)$  e  $E$ , para determinar o comportamento de  $\psi(x)$  como função da posição  $x$  da partícula. Resultados quantitativos específicos serão discutidos no próximo capítulo.

Busca-se aqui somente soluções qualitativas a partir de argumentos baseados nas características da equação diferencial e do potencial  $V(x)$ .

A curva 1 na Fig. 5.8 mostra o comportamento qualitativo de uma função de onda, inicialmente positiva ( $\psi > 0$ ), a partir de um ponto  $x = x_0$ , de acordo com os resultados indicados na Fig. 5.7.

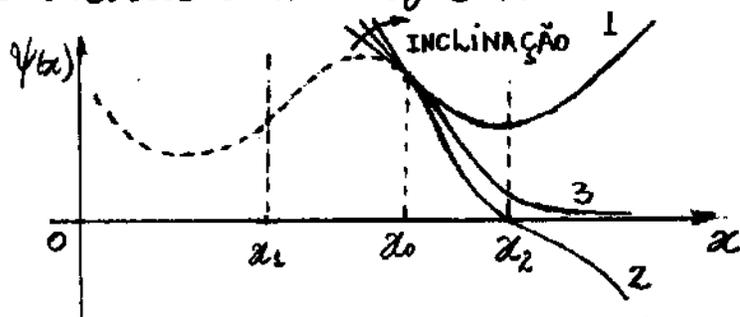


Fig. 5.8 - Três tentativas de obtenção de uma solução aceitável da equação de Schrödinger independente do tempo, para um dado valor da energia total  $E$ .

Como tomou-se inicialmente  $\psi > 0$  na região entre  $x_1$  e  $x_2$ , então  $\psi$  tem inicialmente um ponto de máximo. Ela permanece dessa forma até atingir a 3ª região,  $x > x_2$ , onde  $\psi$  muda de sinal. Deve-se observar que, por ser derivável em todos os pontos do eixo  $x$ , a curva deve ser contínua no ponto  $x_2$  de transição clássica. Na região  $x > x_2$ ,  $\psi$  começa a crescer em valor até que  $\psi \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Assim, esta não é uma solução aceitável.

A curva 2 da Fig. 5.8 mostra outra tentativa feita no sentido de se encontrar uma solução aceitável. Nesta tentativa mudou-se o valor inicial da inclinação de  $\psi$ , tal que,  $\psi$  torna-se negativa ( $\psi < 0$ ) na região  $x > x_2$ . Neste caso, a solução também não será aceitável pois  $\psi \rightarrow -\infty$  a medida que  $x$  cresce. Fica então evidente que, fazendo uma escolha apropriada da inclinação  $d\psi(x_0)/dx$  da curva no ponto  $x_0$  entre  $x_1$  e  $x_2$  ou, de acordo com as eqs. (5.66) e (5.67), da energia  $E$ , é possível obter uma solução aceitável para a equação diferencial na qual  $\psi \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$  tal como mostra na curva 3.

Da discussão acima, deve-se concluir que a solução da equação de Schrödinger independente do tempo é instável por ter uma forte tendência em divergir ( $\psi \rightarrow \pm\infty$ ) nas regiões classicamente proibidas ( $E < V$ ). No entanto, é sempre possível encontrar uma energia  $E_1$  para a qual a equação de Schrödinger tem uma solução aceitável. Na verdade, pode existir uma série de possíveis valores de energias  $E_1, E_2, E_3, \dots$  para os quais a equação de Schrödinger tem soluções aceitáveis  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ . Como se pode vê na Fig. 5.9.

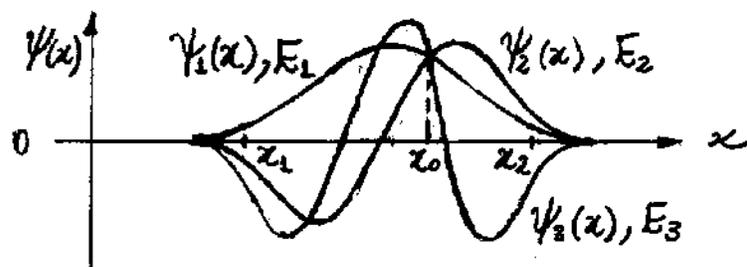


Fig. 5.9 - Três soluções aceitáveis para a equação de Schrödinger independente do tempo.

O comportamento de  $\psi_2$ , para qualquer valor de  $x$ , é semelhante ao da função mostrada na curva 3 da Fig. 5.8. Para  $x < x_0$ , o comportamento de  $\psi_2$  é, em princípio, similar ao comportamento de  $\psi_1$ , mas como sua inclinação é ligeiramente maior em módulo,  $\psi_2$  cruza o eixo  $x$  em algum valor entre  $x_1$  e  $x_0$ . Quando isso ocorre, o sinal de  $d^2\psi/dx^2$  muda, e a função passa a ter um ponto de mínimo. Em  $x = x_1$ , o sinal de  $d^2\psi/dx^2$  muda novamente e, para  $x < x_1$ , a função se aproxima gradativamente do eixo  $x$ .

A ordem, em magnitude, das energias mostradas na Fig. 5.9, pode ser determinada analisando as inclinações das curvas correspondentes. No ponto  $x_0$ , onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  tem o mesmo valor, a taxa de variação da inclinação de  $\psi_2$  é maior do que a de  $\psi_1$ , isto é,

$$\left| \frac{d^2\psi_2}{dx^2} \right| > \left| \frac{d^2\psi_1}{dx^2} \right| \text{ em } x = x_0. \quad (5.68)$$

Aplicando essa inequação na equação de Schrödinger, dada na eq. (5.63), e usando o fato que  $\psi_1 = \psi_2$  em  $x = x_0$ , obtém-se

$$|E_2 - V(x)| > |E_1 - V(x)| \text{ em } x = x_0.$$

Como  $E_1 > V(x)$  e  $E_2 > V(x)$  em  $x = x_0$ , então esta inequação pode ser expressa em as módulos, isto é,

$$E_2 - V(x) > E_1 - V(x)$$

ou

$$E_2 > E_1. \quad (5.69)$$

Com argumentos similares, mostra-se que  $E_3 > E_2$  e assim por diante. É evidente que as energias  $E_1, E_2, E_3, \dots$  são discretas, uma vez que as funções de onda aceitáveis correspondentes  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  assumem somente formas bem definidas.

Assim, para uma partícula que se move sob influência de um potencial  $V(x)$  independente do tempo, existem soluções aceitáveis, para a equação de Schrödinger independente do tempo, somente se a energia total da partícula for quantizada. Esse argumento será sempre verdadeiro desde que existam dois pontos  $x_1$  e  $x_2$  tal que  $E < V(x)$  para  $x < x_1$  e  $x > x_2$ . Entretanto, se a energia  $E$  for maior do que um certo valor limite  $V_e$  do potencial  $V(x)$ , como mostrado na Fig. 5.10, a situação se modifica. Nesse caso, existe somente as duas regiões  $x < x_1$  e  $x > x_2$ . Na 2ª região,  $\alpha^2 > 0$  para todos os valores de  $x$ , mesmo quando  $x \rightarrow \infty$ . Assim, a curva  $\psi$  contra  $x$  terá ponto de máximo se  $\psi > 0$  e ponto de mínimo se  $\psi < 0$ . Ela sempre retorna ao eixo horizontal comportando-se, portanto, como uma função oscilatória.

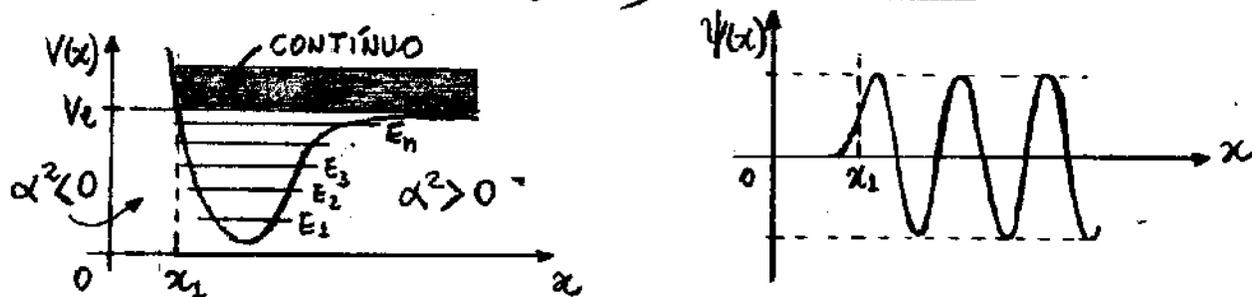


Fig. 5.10 - Contínuo de energia para um potencial caracterizado por apenas duas regiões.

Nesse caso, não haverá o problema de  $\psi(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Assim, qualquer função oscilatória  $\psi(x)$ , com energia correspondente  $E$ , será permitida na região  $x > x_2$ , formando uma distribuição contínua de energia, como mostrado na Fig. 5.10.

Deve-se concluir que, se a relação entre a energia  $E$  e o potencial  $V(x)$  é tal que a partícula fica confinada numa certa região do espaço, a teoria de Schrödinger prevê uma quantização para a energia total. Por outro lado, se a relação é tal que a partícula não fica confinada, a teoria prevê que qualquer valor para a energia total será possível.

### Exemplo 5.5

Usar os argumentos discutidos acima para esboçar a forma da função de onda  $\psi(x)$  para o 9º estado de um oscilador harmônico simples, cujo potencial é mostrado na Fig. 5.11.

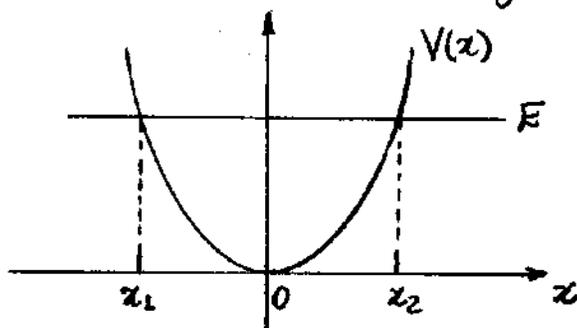


Fig. 5.11 - Comportamento da função energia potencial do oscilador harmônico simples.

Esboçar também a função densidade de probabilidade,  $P(x) = |\psi(x)|^2$ , para o sistema quântico e compará-lo com que se espera para o oscilador harmônico clássico de mesma energia.

De acordo com a equação de Schrödinger independente do tempo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi = -\alpha^2\psi.$$

Na região entre  $x_1$  e  $x_2$ , onde  $\alpha^2 > 0$ , a autofunção  $\psi$  será uma função oscilatória, já que,  $d^2\psi/dx^2 < 0$  (ponto de máximo) se  $\psi > 0$ , e  $d^2\psi/dx^2 > 0$  (ponto de mínimo) se  $\psi < 0$ .

Observa-se na Fig. 5.12 que existem exatamente 9 picos (máximos e mínimos) para a função de onda correspondente ao 9º estado fisicamente aceitável.

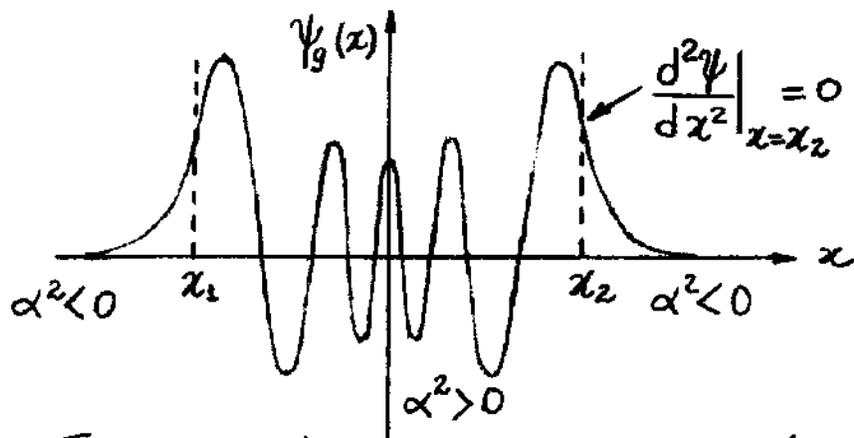


Fig. 5.12 - Função de onda  $\psi_9(x)$  para o 9º estado do oscilador harmônico simples.

Como a taxa de variação das oscilações de  $\psi(x)$ , determinadas por  $d^2\psi/dx^2$ , proporcional a  $\alpha^2$ , fica menor nas proximidades de  $x_1$  e  $x_2$ , então as oscilações aí devem ser menores do que em  $x=0$ , onde  $\alpha^2$  é grande, conforme mostrado na Fig. 5.12. A Figura mostra ainda que as amplitudes das oscilações em  $\psi$  aumentam nas proximidades de  $x_1$  e  $x_2$ . Isso deve ocorrer para que a taxa de variação da oscilação  $d^2\psi/dx^2$ , não caia abruptamente a zero, quando  $\alpha^2 \rightarrow 0$  na equação de Schrödinger.

Observa-se que  $\psi$  se aproxima suavemente do eixo fora da região entre  $x_1$  e  $x_2$ , onde  $\alpha^2 < 0$ , como é necessário que aconteça para uma autofunção acitável para um estado ligado, onde não deve ocorrer divergência para  $x = \pm\infty$ . Observa-se finalmente que  $\psi$  lança os pontos  $x_1$  e  $x_2$  onde  $\alpha^2$  muda de sinal e  $d^2\psi/dx^2 = 0$ .

A função densidade de probabilidade  $P(x) = |\psi(x)|^2$  é basicamente o quadrado de  $\psi$ , como mostra a Fig. 5.13.

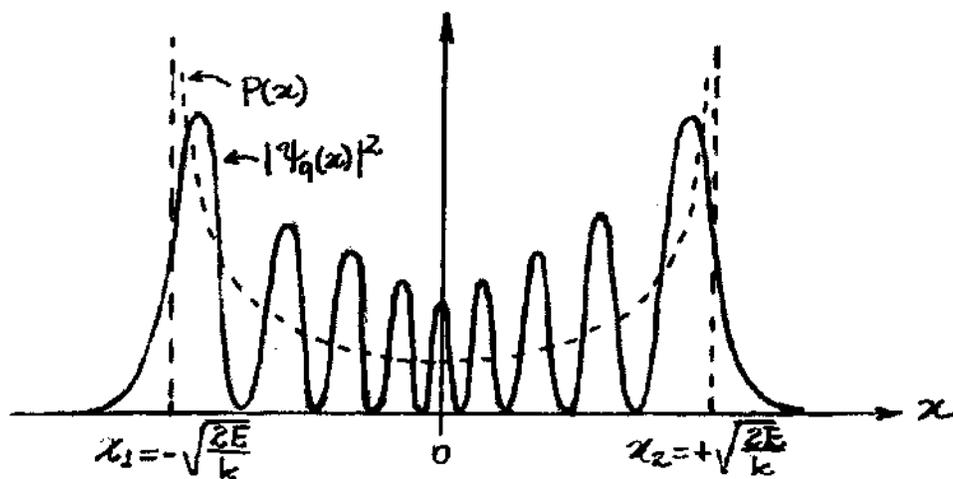


Fig. 5.13 - Densidade de probabilidade  $|\psi_9(x)|^2$  para o 9º estado do oscilador harmônico simples.

Na mecânica clássica a densidade de probabilidade  $P$  da partícula, ser encontrada em um elemento de comprimento do eixo  $x$  é proporcional ao tempo que ela permanece no elemento, ou inversamente proporcional a velocidade  $v$  com que ela passa por esse elemento, isto é,

$$P = B^2/v \quad (5.70)$$

onde  $B^2$  é uma constante. Por outro lado, para o oscilador harmônico

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2,$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \frac{1}{2} k x^2},$$

onde  $k$  é a constante elástica. Logo,

$$P = A / \sqrt{E - \frac{1}{2} k x^2}, \quad (5.71)$$

onde  $A = B^2 \sqrt{m/2}$ . A eq. (5.71) descreve então a densidade de probabilidade clássica para o oscilador harmônico e o seu comportamento é mostrado na curva tracejada da Fig. 5.13. Deve-se observar que a partícula macroscópica tem maior probabilidade de estar nos pontos  $x_1 = -\sqrt{2E/k}$  e  $x_2 = +\sqrt{2E/k}$ , obtidos assumindo  $P \rightarrow \infty$  na eq. (5.71) pois, nesses pontos, ela para e retorna. No ponto  $x=0$  ela tem menor probabilidade de ser encontrada pois, ai, ela passa com maior velocidade.

## Lista de Exercícios

### Questões conceituais

- 1- Como o postulado de de Broglie entra na teoria quântica de Schrödinger?
- 2- Uma vez que a equação de Schrödinger não é válida para partículas relativísticas, qual seria o efeito sobre a teoria quântica de Schrödinger a definição da energia total, na relação  $E = \hbar\omega = \hbar\nu$ , se fosse considerado a energia de repouso da partícula.
- 3- A massa  $m$  de uma partícula aparece explicitamente na equação de Schrödinger, entretanto a carga elétrica não, embora esta também possam afetar seu movimento. Alguma grandeza que aparecem na equação de Schrödinger embute implicitamente esse parâmetro? Justifique.
- 4- A equação de onda da teoria clássica contém uma segunda derivada espacial e uma segunda derivada temporal. A equação de Schrödinger por outro lado, contém uma segunda derivada espacial e uma primeira derivada temporal. Use esses fatos para explicar por que as soluções de onda clássica podem ser funções reais, enquanto as soluções da equação de Schrödinger devem ser funções complexas.
- 5- No eletromagnetismo, calculamos a intensidade de uma onda tomando o quadrado de sua amplitude. Por que não fazemos exatamente o mesmo com as ondas da mecânica quântica?
- 6- O que é um observável físico? Por que a função de onda  $\psi$  não pode assumir um significado físico? Por que o módulo quadrado da função de onda, função densidade de probabilidade,  $|\psi|^2$ , por outro lado, pode assumir um significado físico e qual é esse significado? A função densidade de probabilidade  $|\psi|^2$  pode ser considerado um observável físico? Justifique sua resposta! Por que a função densidade de probabilidade tem que ser real, positiva, finita e definida em todos os pontos? Explique o significado da normalização de uma função de onda!
- 7- Por que a mecânica quântica de Schrödinger fornece apenas informações estatísticas? Em sua opinião, isso se reflete como um fracasso da teoria ou uma propriedade da natureza?
- 8- O que significa o valor esperado de uma grandeza?
- 9- Por que uma autofunção deve ser bem comportada para ser aceitável na teoria quântica de Schrödinger? Por que  $\psi$  é necessariamente uma função oscilatória quando  $V(x) < E$ ?

### Problemas

- 1- Se as funções de onda  $\psi_1(x,t)$ ,  $\psi_2(x,t)$  e  $\psi_3(x,t)$  são três soluções da equação de Schrödinger para um potencial particular  $V(x,t)$ , mostre que a combinação linear arbitrária  $\psi(x,t) = c_1\psi_1(x,t) + c_2\psi_2(x,t) + c_3\psi_3(x,t)$  também é uma solução desta equação.
- 2- Considere a função de onda para o **primeiro estado excitado** de uma partícula de massa  $m$  que pode se mover livremente sobre o eixo  $x$  entre os pontos  $x = -a/2$  e  $x = +a/2$ , mas que está estritamente proibida de ser encontrada fora dessa região:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} & \text{para } -a/2 < x < +a/2 \\ 0 & \text{para } x \leq -a/2 \text{ ou } x \geq +a/2 \end{cases}$$

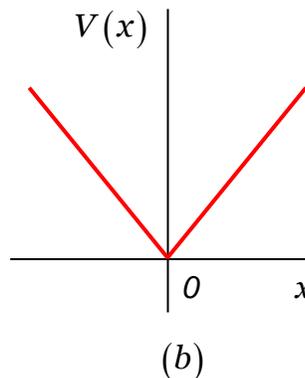
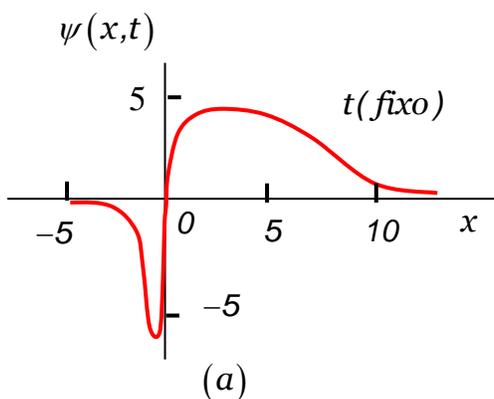
onde  $A$  é uma constante real arbitrária e  $E$  é a energia total da partícula. (a) Mostre que essa função é uma solução da equação de Schrödinger. (b) Calcule o valor de  $E$  para esse primeiro estado excitado, (c) Trace um gráfico da dependência espacial dessa função de onda. (d) Calcule os valores esperados de  $x$ ,  $p$ ,  $x^2$  e  $p^2$  da partícula associada a função de onda, (e) Use a condição de normalização para determinar o valor da constante  $A$  em termos de  $a$ . (f) Use as grandezas calculadas no item (d) para calcular o produto das incertezas  $\Delta x \Delta p$  na posição e no momento dessa partícula.

3- A função de onda  $\Psi(x,t)$  para o **estado fundamental** de um oscilador harmônico simples constituído de uma partícula de massa  $m$  sob ação de uma força restauradora linear de constante elástica  $k$ , pode ser escrita como:

$$\Psi(x,t) = \left( \frac{mk}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/8} e^{-(\sqrt{km}/2\hbar)x^2} e^{-(i/2)(\sqrt{k/m})t}$$

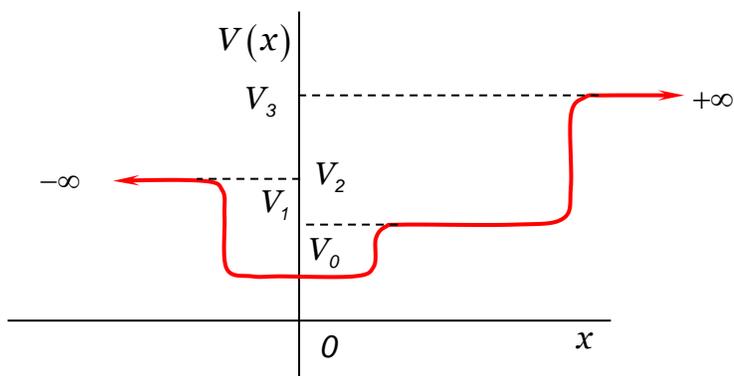
Calcule os valores esperados da energia cinética  $K = \frac{p^2}{2m}$  e da energia potencial  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ .

4- Em um certo instante de tempo, uma função de onda depende da posição conforme está mostrado na figura (a) abaixo. (a) Se fosse feita uma medida que possa localizar a partícula associada em um elemento  $dx$  do eixo  $x$  nesse instante, onde seria maior a probabilidade de encontrá-la? (b) Onde seria menor essa probabilidade? (c) As chances de que ela seja encontrada em qualquer valor positivo do eixo  $x$  seriam melhores do que as chances de que seja encontrada em qualquer valor negativo?

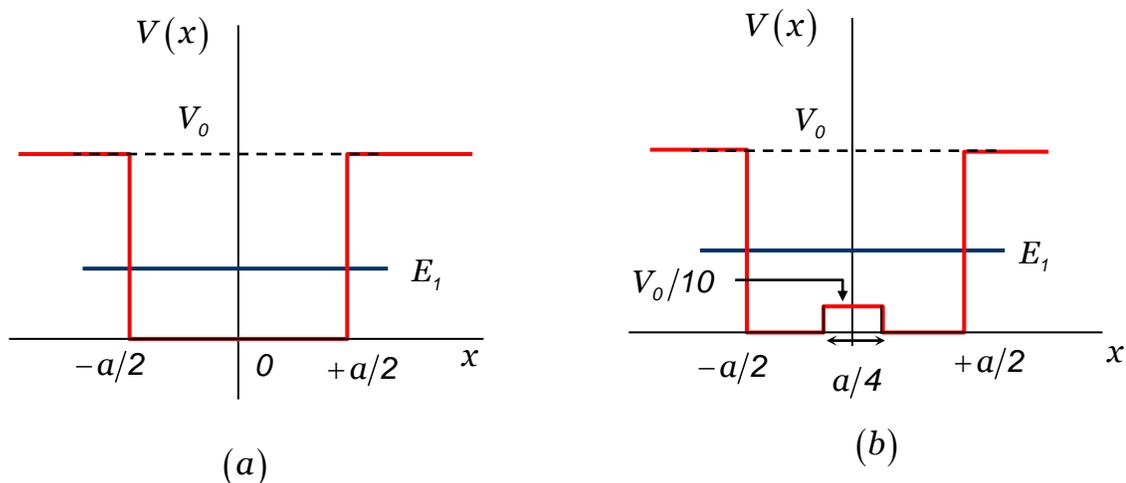


5- Considere uma partícula se movendo sob influência do potencial  $V(x) = C|x|$ , onde  $C$  é uma constante, ilustrado na figura (b) acima. (a) Use argumentos qualitativos para fazer um esboço da primeira autofunção de da décima autofunção para o sistema. (b) Faça um esboço das duas funções densidade de probabilidades correspondentes. (c) Use então a mecânica clássica para calcular as funções densidade de probabilidade prevista por esta teoria. (d) Trace um gráfico das funções densidade de probabilidades clássicas juntamente com as funções densidade de probabilidade quântica, e discuta sua comparação.

6- Considere uma partícula se movendo no potencial  $V(x)$  ilustrado na figura abaixo. Para os seguintes intervalos de valores da energia total  $E$ , diga quando há algum valor possível de  $E$ , e, se isso ocorrer, se eles são separados discretamente ou distribuídos continuamente. (a)  $E < V_0$ , (b)  $V_0 < E < V_1$ , (c)  $V_1 < E < V_2$ , (d)  $V_2 < E < V_3$ , (e)  $E > V_3$ .



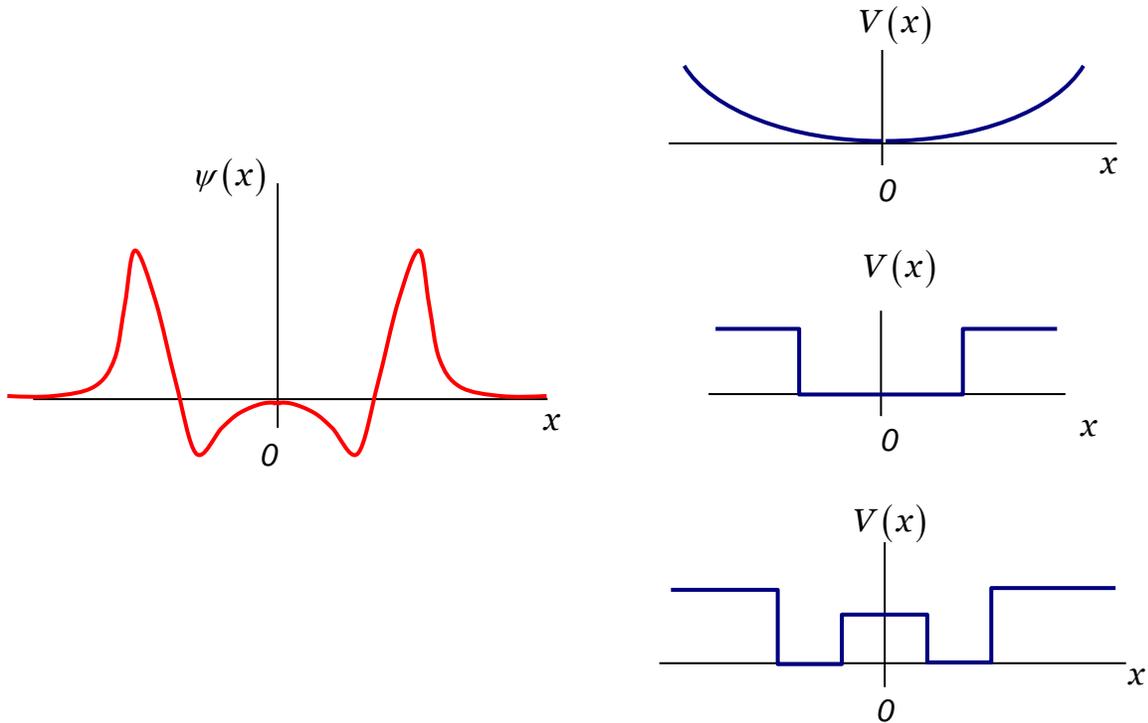
7- Considere uma partícula se movendo no potencial  $V(x)$  ilustrado na figura (a) abaixo, que tem uma região retangular de profundidade  $V_0$  e largura  $a$ , no qual a partícula pode estar ligada. Estes parâmetros estão relacionados com a massa  $m$  da partícula de uma forma tal que o estado de menor energia possível  $E_1$  se encontra a uma energia de aproximadamente  $V_0/4$  acima do fundo. (a) Use argumentos qualitativos para fazer um esboço da forma aproximada da autofunção correspondente  $\psi_1(x)$ . (b) Substitua o potencial da região  $x > +a/2$  diretamente na equação de Schrödinger independente do tempo para mostrar que nessa região a autofunção tem a forma matemática  $\psi(x) = Ae^{-[\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar]x}$ . (c) Use a densidade de probabilidade correspondente a esta autofunção para estimar a distância  $D$  fora da região de ligação do potencial na qual haverá uma probabilidade apreciável de encontrar a partícula na região classicamente proibida. (Sugestão: Considere  $x = D$  como sendo a distância até o ponto no qual  $\Psi^*\Psi$  é  $1/e$  vezes o seu valor na borda da região de ligação  $x = +a/2$ ). (d) O potencial dessa figura dá uma boa descrição das forças que atuam sobre um elétron se movendo através de um metal. A diferença de energia  $V_0 - E$ , para o elétron mais fracamente ligado ao metal, é a função trabalho do metal. Tipicamente,  $V_0 - E \approx 5eV$ . Use esse dado para estimar o valor da distância  $D$  estima no item (c).



8- Suponha que o fundo da função potencial da questão anterior seja modificado pela adição de uma saliência no centro, de altura aproximadamente  $V_0/10$  e largura  $a/4$ , como mostra a figura (b) acima. Considere qualitativamente o que ocorre com a curvatura da autofunção na região da saliência, e como isso afetará o problema de obter um comportamento aceitável para a autofunção na região externa ao poço. A partir dessas

considerações, faça uma previsão, de forma qualitativa, do efeito da saliência sobre o valor da menor energia possível  $E_1$ .

9- Considere a autofunção ilustrada na figura abaixo. (a) Qual dos três potenciais ilustrados na mesma figura poderia levar a tal autofunção? Dê argumentos qualitativos que justifiquem sua resposta. (b) Essa autofunção não é associada ao estado de menor energia possível para o potencial. Esboce a autofunção que corresponde ao estado de menor energia. (c) Indique em outro esboço o intervalo de energias no qual você esperaria estados de energia possíveis discretos e o intervalo de energias no qual você esperaria que os estados de energia possíveis fossem distribuídos continuamente.



10- Usando as duas primeiras funções de onda normalizadas  $\Psi_1(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iE_1 t/\hbar}$  e  $\Psi_2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-iE_2 t/\hbar}$ , para uma partícula se movendo livremente e confinada em uma região de comprimento  $a$ , construa a combinação linear  $\Psi(x,t) = c_1 \Psi_1(x,t) + c_2 \Psi_2(x,t)$ . Obtenha então uma relação em função das constantes ajustáveis  $c_1$  e  $c_2$  que, quando satisfeitas, garanta que  $\Psi(x,t)$  seja normalizada.

# CAPÍTULO 06 – SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE SCRÖDINGER INDEPENDENTE DO TEMPO

## ÍNDICE

- 6.1- Partícula Livre
- 6.2- Potencial Degrau
- 6.3- Barreira de Potencial
- 6.4- Poços de Potenciais Finito e Infinito
- 6.5- Oscilador Harmônico

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **4 aulas de quatro créditos**.

## CAPÍTULO 6

### SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER INDEPENDENTE DO TEMPO.

Neste capítulo, propõe-se analisar o comportamento dos sistemas quânticos mais importantes, por meio da solução da equação de Schroedinger independente do tempo. Os sistemas estudados aqui ficarão restritos a uma dimensão somente, uma vez que isso leva a uma razoável simplificação no tratamento matemático, sem perda dos detalhes daquilo que se deseja investigar. As exceções a essa regra, são os fenômenos que envolvem o conceito de momento angular, uma vez que essa grandeza não tem significado unidimensional. Exemplos de sistemas como esses serão abordados nos próximos capítulos.

#### 6.1. Partícula Livre.

O sistema quântico mais simples é aquele no qual o potencial  $V(x)$  é uma constante. Esse é o caso de uma partícula livre, onde a força atuante é  $F = -dV(x)/dx = 0$ . Sem perda de generalidade, pode-se assumir que

$$V(x) = 0 \quad (6.1)$$

Nesse caso, a equação de Schrodinger independente do tempo (5.35), torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (6.2)$$

A solução mais geral dessa equação é uma combinação linear de duas ondas planas se deslocando, uma para a direita e outra para a esquerda, isto é,

$$\psi(x) = A e^{+ikx} + B e^{-ikx} \quad (6.3)$$

Substituindo esta solução na eq. (6.2), obtém-se o número de onda

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (6.4)$$

O valor esperado do momento linear  $\langle p \rangle$ , para a parcela da função de onda que se move para a direita  $\psi_d(x) = A e^{+ikx}$ , será

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_d^* p \psi_d dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_d^* \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) A e^{ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_d^* \left( \frac{\hbar}{i} ik A e^{ikx} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_d^* (\hbar k) \psi_d dx = \hbar k \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_d^* \psi_d dx, \end{aligned}$$

ou, da condição de normalização  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_d^* \psi_d dx = 1$  e da eq. (6.4),

$$\langle p \rangle = +\hbar k = +\sqrt{2mE} \quad (6.5)$$

Similarmente, para a parcela da função de onda que se move para a esquerda,  $\psi_L(x) = Ae^{-ikx}$ , tem-se

$$\langle p \rangle = -\hbar k = -\sqrt{2mE} \quad (6.6)$$

Assim, o movimento da partícula livre tem o mesmo sentido da propagação da sua onda de de Broglie.

A densidade de probabilidade,  $|\psi(x)|^2$ , para a partícula livre que se move, por exemplo, para a direita e-

$$|\psi_d(x)|^2 = \psi_d^*(x)\psi_d(x) = A^*e^{-ikx}Ae^{+ikx} = A^*A, \quad (6.7)$$

independente, portanto, da posição  $x$  da partícula. Assim, a partícula livre deve ter igual probabilidade de ser encontrada em qualquer ponto do espaço e, conseqüentemente, uma incerteza na sua localização  $\Delta x \rightarrow \infty$ . Isso significa que o pacote de ondas tem largura infinita e o princípio da incerteza,  $\Delta p \Delta x \sim \hbar/2$ , mostra que o momento  $p$  da partícula pode ser determinado com precisão total, pois  $\Delta p \rightarrow 0$ .

Do mesmo modo, das eqs. (6.5) ou (6.6), a energia  $E$  também pode ser determinada com precisão total, tal que  $\Delta E \rightarrow 0$ . Do princípio da incerteza  $\Delta E \Delta t \sim \hbar/2$  dispõe-se, portanto, de um intervalo

de tempo  $\Delta t \rightarrow \infty$  para a medida da energia total da partícula. Além dessas características, tanto a energia  $E$  como o momento  $p$  da partícula livre, podem assumir qualquer valor, inclusive zero.

Partículas livres são, evidentemente, casos idealizados que dificilmente são encontrados na natureza. A presença de algum potencial variável é mais frequente e os casos mais importantes são abordados nas próximas seções.

## 6.2. Potencial Degrau.

Nessa e nas próximas seções, deve-se adotar potenciais com descontinuidades abruptas em determinados pontos do eixo  $x$ . Potenciais como esse não existem de fato na natureza, no entanto, são frequentemente utilizados na física quântica por serem de fácil tratamento matemático e reproduzirem situações reais com boa aproximação.

Inicia-se a discussão com o potencial degrau, mostrado na Fig. 6.1.

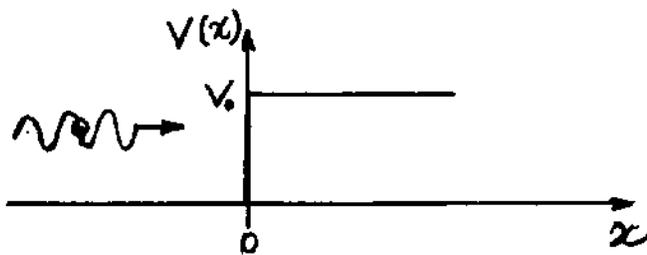


Fig. 6.1. Representação gráfica de um potencial degrau.

O potencial degrau é descrito matematicamente por

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V_0 & \text{para } x \geq 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

em que  $V_0$  é uma constante.

Seja uma partícula de massa  $m$  e energia total  $E$  na região  $x < 0$  dirigindo-se para o ponto  $x = 0$ , onde o potencial  $V(x)$  varia abruptamente. De acordo com a mecânica clássica, a partícula moverá livremente até alcançar  $x = 0$ , onde estará sujeita a uma força impulsiva,  $F = -dV(x)/dx$ , atuando no sentido negativo do eixo  $x$ . A idealização do potencial, dado na Fig. 6.1, implica numa força impulsiva de módulo infinito em  $x = 0$ , pois, nesse ponto,  $dx \rightarrow 0$ . No entanto, como sua ação é durante um tempo infinitesimal pequeno, não exatamente zero, o impulso  $I = \int F dt$ , que dá a variação do momento linear  $\Delta p$  da partícula, é finito. Conclui-se que a idealização do potencial não afeta a variação do momento linear  $\Delta p$  da partícula.

Na mecânica clássica, o comportamento da partícula, após receber a ação do potencial em  $x = 0$ , depende da relação entre  $E$  e  $V_0$ . Isso também deve ocorrer do ponto de vista da mecânica quântica. O caso onde  $E < V_0$ , o qual se propõe estudar em primeiro lugar, está ilustrado na Fig. 6.2. O caso  $E > V_0$  será analisado no final dessa seção.

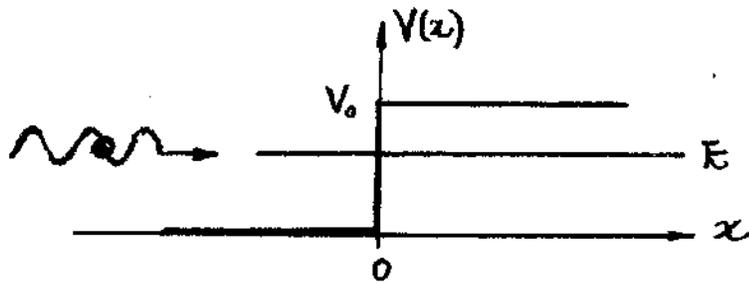


Fig. 6.2 - Incidência de uma partícula de energia total  $E$  sobre um potencial degrau  $E < V_0$ .

Como a região  $x > 0$  é uma região classicamente proibida, de acordo com a mecânica clássica a força impulsiva sempre inverterá o momento linear da partícula. Da lei da conservação do momento linear, o módulo do momento  $p$  permanece o mesmo após inversão.

Para determinar o movimento da partícula, de acordo com a mecânica quântica, deve-se encontrar uma função de onda que é solução da equação de Schrödinger independente do tempo para o caso  $E < V_0$ . Para o potencial degrau, o eixo  $x$  se divide em duas regiões: A região  $x < 0$  onde  $V(x) = 0$  e a região  $x \geq 0$  onde  $V(x) = V_0$ . As equações de Schrödinger independente do tempo correspondentes a essas regiões são:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad \text{para } x < 0 \quad (6.9)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V_0\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{para } x \geq 0. \quad (6.10)$$

A eq. (6.9) é, essencialmente, a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula livre,

discutida na seção anterior. Cujas soluções, dadas na eq. (6.3), e

$$\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{para } x < 0. \quad (6.11)$$

Por outro lado, como se refere a uma região classicamente proibida, não se deve esperar uma função  $\psi(x)$  oscilatória como solução da eq. (6.10) e sim uma função que se aproxima gradativamente do eixo  $x$ . A função com essa propriedade é uma exponencial real decrescente, isto é,

$$\psi(x) = e^{-k_2x} \quad \text{para } x \geq 0. \quad (6.12)$$

Derivando duas vezes em relação a  $x$ , obtém-se

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = (-k_2)^2 e^{-k_2x} = k_2^2 \psi(x). \quad (6.13)$$

Substituindo esta equação na eq. (6.10), deve-se concluir que a eq. (6.12) será solução se

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad E < V_0. \quad (6.14)$$

Como na eq. (6.13) aparece o quadrado de  $k_2$ , então não há nenhum impedimento formal para que o sinal na exponencial na eq. (6.12), também seja positivo, tal que se possa assumir a solução geral:

$$\psi(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}, \quad k_2 = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \quad \text{para } x \geq 0. \quad (6.15)$$

As constantes  $A, B, C$  e  $D$  nas eqs. (6.11) e (6.15) podem ser determinadas utilizando as condições de localidade e continuidade das funções  $\psi(x)$  e  $d\psi(x)/dx$ .

Seja inicialmente o comportamento de  $\psi(x)$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Nessa região do eixo  $x$ , a solução é dada pela eq. (6.15) e constata-se que,  $\psi(x) \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow +\infty$ , por causa do termo  $Ce^{k_2x}$ . Logo, para evitar que isso ocorra, é necessário assumir  $C=0$ .

Por outro lado, para garantir a continuidade em  $x=0$ , as duas formas de  $\psi(x)$  em (6.11) e (6.15), e suas derivadas, devem ser iguais em  $x=0$ . No primeiro caso, obtêm-se

$$D(e^{-k_2x})_{x=0} = A(e^{ik_1x})_{x=0} + B(e^{-ik_1x})_{x=0} \Rightarrow D = A + B \quad (6.16)$$

e, no segundo caso, encontra-se

$$-k_2 D(e^{-k_2x})_{x=0} = ik_1 A(e^{ik_1x})_{x=0} - ik_1 B(e^{-ik_1x})_{x=0}$$

ou

$$\frac{ik_2}{k_1} D = A - B \quad (6.17)$$

Somando as eqs. (6.16) e (6.17), obtêm-se

$$A = \frac{D}{2} \left( 1 + \frac{ik_2}{k_1} \right) \quad (6.18) \leftarrow$$

e, subtraindo-as, encontra-se

$$B = \frac{D}{2} \left( 1 - \frac{ik_2}{k_1} \right) \quad (6.19) \leftarrow$$

Assim, a solução para o potencial degrau, com  $E < V_0$ , será:

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{D}{2} (1 + ik_2/k_1) e^{ik_1 x} + \frac{D}{2} (1 - ik_2/k_1) e^{-ik_1 x} & \text{para } x \leq 0 \\ D e^{-k_2 x} & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

A função de onda completa  $\Psi(x, t)$  será obtida substituindo as eqs. (6.20) na seguinte equação geral:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (6.21)$$

A constante  $D$  na eq. (6.20) define a amplitude da função de onda e é conveniente mantê-la arbitrária.

Para  $x \leq 0$ , o primeiro termo na eq. (6.20), é uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo  $x$  e o segundo uma onda que se propaga no sentido negativo. Esse fato, somada às previsões clássicas, sugere que se deve associar ao primeiro termo a incidência da partícula sobre o potencial degrau e ao segundo à reflexão da partícula no degrau.

A partir dessa concepção, pode-se calcular a probabilidade da partícula incidente ser refletida, denominada de reflectância  $R$ . Como a intensidade de uma onda é proporcional ao quadrado do módulo de sua amplitude, a reflectância  $R$ , será a razão entre módulos quadráticos da amplitude da onda refletida  $|B|^2$  e da amplitude da onda incidente  $|A|^2$ , isto é,

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{B^* B}{A^* A}, \quad (6.22)$$

ou, de acordo com a eq. (6.20),

$$R = \frac{(1 + ik_2/k_1)(1 - ik_2/k_1)}{(1 - ik_2/k_1)(1 + ik_2/k_1)} = 1.$$

Esse resultado mostra que, similarmente à previsão clássica, a partícula microscópica será sempre refletida ao incidir sobre o degrau. Entretanto, diferentemente da partícula clássica, a segunda eq. (6.20) mostra que a partícula microscópica pode ser encontrada na região  $x > 0$ . De acordo com essa equação e também da eq. (6.21), a densidade de probabilidade da partícula ocupar a região  $x > 0$  é

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \psi^*(x)\psi(x) = D^* D e^{-2k_2 x} \text{ para } x > 0. \quad (6.23)$$

A Fig. 6.3 mostra o comportamento das funções  $\psi(x)$  e  $|\Psi(x,t)|^2$ , de acordo com as eqs. (6.20), (6.21) e (6.23). É importante perceber que o pacote de ondas é infinito para  $x < 0$  e finito para  $x > 0$ .

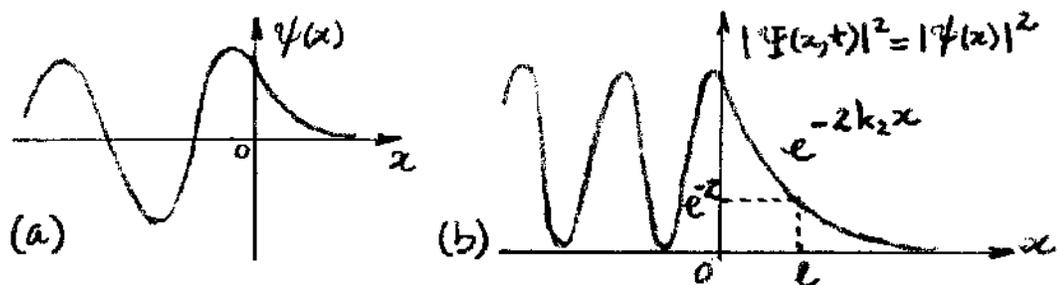


Fig. 6.3 - Comportamento, (a) da função de onda e (b) da densidade de probabilidade, para um potencial de degrau com  $E < V_0$ .

A presença de uma partícula microscópica numa região onde  $E < V_0$ , é um fenômeno denominado de penetração em região classicamente proibida e é uma das previsões mais notáveis da mecânica quântica.

Deve-se enfatizar que tal penetração não significa que a partícula seja mantida na região classicamente proibida, pois mostrou-se que ela é certamente refletida no decaimento.

A Fig. 6.3(b) mostra a definição de uma distância de penetração como sendo a distância  $x=l$  para a qual  $e^{-2k_2 l} = e^{-2}$ , isto é,

$$l = \frac{1}{k_2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (6.24)$$

No limite clássico, o produto de  $m$  por  $(V_0 - E)$  é tao grande, comparado a  $\hbar$ , que  $l$  é praticamente nulo.

O princípio da incerteza permite calcular a incerteza  $\Delta E$  na energia  $E$  da partícula, quando está na região classicamente proibida. A incerteza  $\Delta x$  na posição  $x$ , nessa região, pode ser extrapolada para ser a metade da distância de penetração  $l/2$ , tal que

$$\Delta p \Delta x \approx \hbar/2 \Rightarrow \Delta p \, l/2 \approx \hbar/2 \Rightarrow \Delta p \approx \frac{\hbar}{l} = \sqrt{2m(V_0 - E)}.$$

Como a incerteza do potencial  $V$  é nula na região  $x > 0$ , pois seu valor é certamente  $V_0$ , então a incerteza na energia total  $E = V_0 + K$  será

$$\Delta E = \Delta V + \Delta K = 0 + \frac{\Delta p^2}{2m} \approx V_0 - E, \quad (6.25)$$

O que mostra que, do ponto de vista ondulatório, não é possível afirmar que a energia total  $E$  da partícula é de fato menor do que a energia potencial  $V_0$  na região  $x > 0$ . Isso significa que as características ondulatória e corpuscular da partícula não se conflitam na região classicamente proibida.

Seja agora o caso  $E > V_0$ , como mostra a Fig. 6.4.

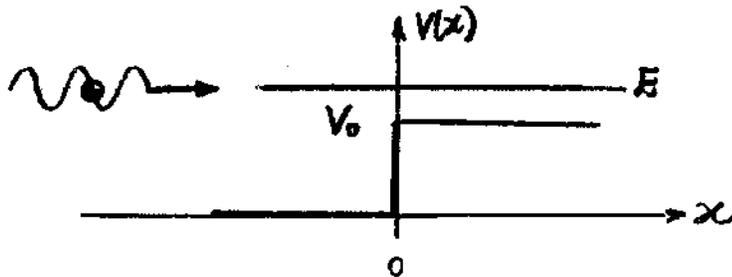


Fig. 6.4 - Incidência de uma partícula de energia total  $E$  sobre um potencial degrau, em que  $E > V_0$ .

De acordo com a mecânica clássica, a força impulsiva  $F = -dV(x)/dx$  sobre a partícula de energia total  $E$ , no ponto  $x = 0$ , fará apenas com que a partícula fique mais lenta e continue seu movimento em  $x > 0$ . Então, de acordo com a teoria clássica, a partícula sempre atingirá a região  $x > 0$ . Deve-se concluir, na sequência, que as previsões quânticas não são tão simples assim.

Como não existem regiões classicamente proibidas, isto é,  $E > V_0$  para todos os pontos do eixo  $x$ , então as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo devem ser funções oscilatórias para ambas as regiões  $x < 0$  e  $x > 0$ , isto é,

$$\psi(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad \text{para } x < 0, \quad (6.26)$$

e

$$\psi(x) = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x} \quad \text{para } x > 0, \quad (6.27)$$

onde

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} = \frac{p_2}{\hbar}. \quad (6.28)$$

Observa-se que, como  $k_2 < k_1$ , as funções de onda se referem às ondas de de Broglie de comprimentos de onda  $\lambda_2 > \lambda_1$ , pois  $\lambda_2 = 2\pi/k_2$  e  $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ .

Após passar para a região  $x > 0$ , a partícula não deve retornar para a região de incidência e, conseqüentemente,  $D = 0$  na eq. (6.27). As outras constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , podem ser encontradas assumindo as condições de continuidade de  $\psi(x)$  e  $d\psi(x)/dx$  em  $x = 0$ . No primeiro caso,

$$A(e^{ik_1 x})_{x=0} + B(e^{-ik_1 x})_{x=0} = C(e^{ik_2 x})_{x=0}$$

ou

$$A + B = C \quad (6.29)$$

e, no segundo caso,

$$ik_1 A(e^{ik_1 x})_{x=0} - ik_1 B(e^{-ik_1 x})_{x=0} = ik_2 C(e^{ik_2 x})_{x=0}$$

ou

$$k_1(A-B) = k_2 C \quad (6.30)$$

Combinando as eqs. (6.30) com a eq. (6.29), obtêm-se

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \quad \text{e} \quad C = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} A \quad (6.31)$$

Assim, as soluções (6.26) e (6.27), tornam-se

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ik_1 x} + A \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-ik_1 x} & \text{para } x \leq 0, \\ A \frac{2k_2}{k_1 + k_2} e^{ik_2 x} & \text{para } x \geq 0, \end{cases} \quad (6.32)$$

com,  $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$  e  $k_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$ .

O primeiro termo para  $x < 0$  especifica uma onda incidente, o segundo termo, numa mesma região, especifica uma onda refletida e o único termo para  $x > 0$  especifica a onda transmitida.

A Fig. 6.5 mostra o comportamento da densidade de probabilidade,  $|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$ , de acordo com a eq. (6.32), para  $k_2 = \frac{1}{2} k_1$ .

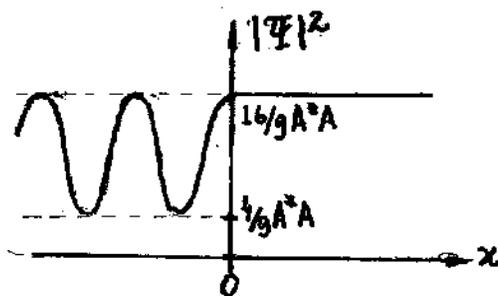


Fig. 6.5 - Densidade de probabilidade para um potencial degrau para  $E > V_0$  e  $k_2 = \frac{1}{2} k_1$ .

De acordo com a primeira eq. (6.32), a refletância  $R$  é

$$R = \frac{B^*B}{A^*A} = \left( \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \right)^2 \text{ para } E > V_0. \quad (6.33)$$

O fato de existir uma probabilidade da partícula ser refletida em um degrau de potencial para o qual  $E > V_0$  é surpreendente pois, do ponto de vista clássico, ela deveria sempre ser transmitida através do degrau. Mas, por outro lado, é natural que uma onda clássica possa ser refletida em qualquer descontinuidade. Um exemplo disso é a incidência de uma onda eletromagnética numa interface entre dois meios de diferentes índices de refração.

É possível determinar também, a probabilidade da partícula ser transmitida através do degrau, denominada de transmitância  $T$ . A transmitância não é tão simples de determinar, porque a velocidade da partícula é diferente nas duas regiões. Nesse caso, adota-se o conceito de fluxo de probabilidade, ou probabilidade por unidade de tempo, tal que

$$T = \frac{v_2 C^* C}{v_1 A^* A} = \frac{v_2}{v_1} \left( \frac{2k_1}{k_2 + k_1} \right)^2,$$

Como

$$v_1 = \frac{p_1}{m} = \frac{\hbar k_1}{m} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{p_2}{m} = \frac{\hbar k_2}{m},$$

então:

$$T = \frac{k_2}{k_1} \frac{(2k_1)^2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} \quad \text{para } E > V_0. \quad (6.34)$$

Não é difícil mostrar que a soma das eqs. (6.33) e (6.34) resulta em

$$R + T = 1. \quad (6.35)$$

Este resultado óbvio é, na verdade, a motivação para definir a transmitância  $T$ , e também a reflectância  $R$ , em termos de fluxo de probabilidade.

### 6.3. Barreira de Potencial.

A barreira de potencial é especificada pela presença de um potencial diferente de zero, somente numa região finita do espaço, como ilustrado na Fig. 6.6.

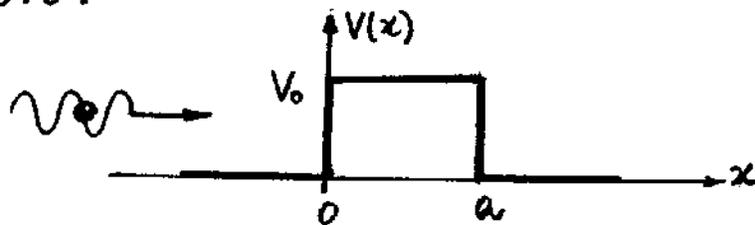


Fig. 6.6 - Representação gráfica de uma barreira de potencial.

A barreira de potencial é descrita matematicamente por

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > a \end{cases} \quad (6.36)$$

De acordo com a mecânica clássica, uma partícula de energia  $E$ , vindo da região  $x < 0$ , tem probabilidade 01 de ser refletida se  $E < V_0$  e probabilidade 01 de ser transmitida para a região  $x > a$  se  $E > V_0$ . Aqui também deve-se verificar que as previsões da teoria quântica não são tão simples assim.

Nas regiões à esquerda e à direita da barreira, as equações diferenciais são as mesmas que de uma partícula livre para  $V=0$  e energia total  $E$ , cujas soluções são

$$\psi(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad \text{para } x < 0, \quad (6.37)$$

$$\psi(x) = C e^{ik_1 x} + D e^{-ik_1 x} \quad \text{para } x > a, \quad (6.38)$$

em que,

$$k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$$

No interior da barreira, deve-se ter diferentes soluções para  $E < V_0$  e  $E > V_0$ . Os dois casos já foram discutidos na seção 6.2. No caso  $E < V_0$ , a solução é

$$\psi(x) = F e^{-k_2 x} + G e^{k_2 x} \quad \text{para } 0 \leq x \leq a, \quad (6.39)$$

em que,

$$k_2 = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$

e, no caso  $E > V_0$ , a solução é

$$\psi(x) = F e^{ik_3 x} + G e^{-ik_3 x} \text{ para } 0 < x < a, \quad (6.40)$$

em que

$$k_3 = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar.$$

Como a partícula se desloca para a direita, na região à direita da barreira  $x > a$ , só pode existir uma onda transmitida tal que  $D = 0$ . Entretanto, não se pode assumir  $G = 0$  nos eqs. (6.39) e (6.40) pois, nestes casos, nada impede que se tenha uma componente de reflexão em  $x = a$ .

### 6.3.1 - Caso $E < V_0$ .

Usando a condição de continuidade de  $\psi(x)$  e  $d\psi(x)/dx$  nos pontos  $x = 0$  e  $x = a$ , obtêm-se quatro equações independentes, que permitem determinar  $B, C, F$  e  $G$  em termos de  $A$ . O comportamento de  $\psi(x)$  e da densidade de probabilidade  $|\psi(x,t)|^2$ , correspondente é mostrado na Fig. 6.7.

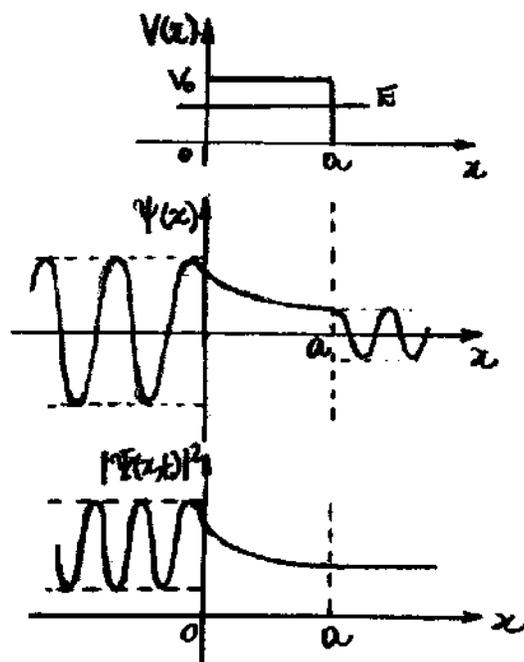


Fig. 6.7 - Comportamento de  $\psi(x)$  e  $|\psi(x,t)|^2$  para uma barreira de potencial para  $E < V_0$ .

O resultado mais importante aqui se refere a transmitância  $T$ , cujo valor é dado pela razão entre os fluxos de probabilidade na transmissão  $v_3 C^* C$  e na incidência  $v_1 A^* A$ .

Sem se preocupar com os detalhes dos cálculos, pode-se mostrar que a transmitância é

$$T = \frac{v_1 C^* C}{v_1 A^* A} = \left[ 1 + \frac{(e^{k_2 a} - e^{-k_2 a})^2}{16E/V_0 (1-E/V_0)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{\sinh^2 k_2 a}{4E/V_0 (1-E/V_0)} \right]^{-1}, \quad (6.41)$$

em que

$$k_2 a = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} a = \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)} \text{ para } E < V_0. \quad (6.42)$$

Se o expoente  $k_2 a \gg 1$  ou  $a \gg \lambda_2$ , então  $e^{k_2 a} \gg e^{-k_2 a}$ . Logo, a primeira eq. (6.41) torna-se

$$T \approx \left[ 1 + \frac{e^{2k_2 a}}{16E/V_0 (1-E/V_0)} \right]^{-1} \approx \left[ \frac{e^{2k_2 a}}{16E/V_0 (1-E/V_0)} \right]^{-1},$$

ou

$$T \approx 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2k_2 a} \text{ para } E < V_0 \text{ e } a \gg \lambda_2. \quad (6.43)$$

Esta equação mostra que uma partícula, de massa  $m$  e energia total  $E$ , incidente sobre uma barreira de potencial com  $E < V_0$  e largura finita  $a$ , tem uma probabilidade  $T \neq 0$  de atravessar a barreira. Este fenômeno é denominado de penetração de barreira, ou tunelamento. Evidentemente,  $T$  é praticamente nulo no limite clássico, pois o termo

$2mV_0 a^2/\hbar^2$  na eq. (6.42), que é uma medida da opacidade da barreira, é extremamente grande e  $e^{-2k_2 a} \rightarrow 0$ .

A Fig. 6.8 mostra um método experimental para observação da penetração de barreira no caso da luz. Trata-se da incidência de luz através de dois prismas de reflexão total.

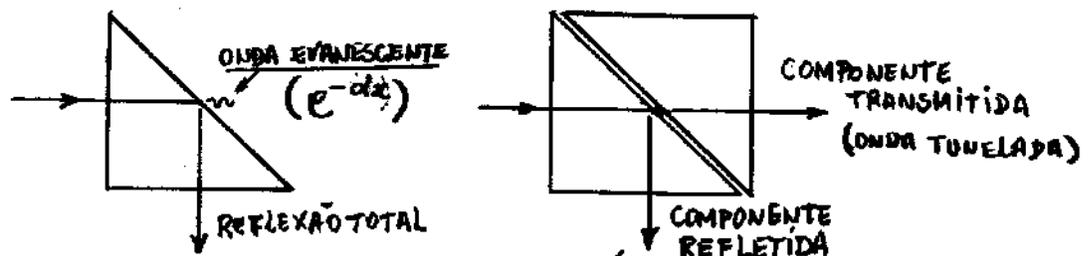


Fig. 6.8 - Experimento para demonstração da penetração de barreira para o caso da luz.

Quando se utiliza somente um prisma, a luz é refletida totalmente em uma das faces interna do prisma. A teoria ondulatória da luz prevê a existência de uma onda evanescente, cuja intensidade cai rapidamente com a distância  $z$  à superfície externa do prisma. Quando um segundo prisma se aproxima do primeiro, uma parcela da luz incidente será transmitida através de uma barreira de ar de comprimento suficientemente pequeno.

### 6.3.2 - Caso $E > V_0$ .

Nesse caso, a autojunção é oscilatória nas três regiões, mas, com um comprimento de onda  $\lambda_3$  maior no interior da barreira entre  $0 < x < a$ , pois é menor aí a diferença em energia  $E - V_0$ .

Os cálculos das constantes B, C, F e G em termos de A pela aplicação das condições de Continuidade em  $x=0$  e  $x=a$ , resulta na seguinte transmitância:

$$T = \frac{v_2 C^* C}{v_1 A^* A} = \left[ 1 + \frac{(e^{ik_3 a} - e^{-ik_3 a})^2}{16 \frac{E}{V_0} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{4m^2 k_3 a}{4 \frac{E}{V_0} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right)} \right]^{-1},$$

onde (6.44)

$$k_3 a = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} a = \sqrt{\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right)} \text{ para } E > V_0. \quad (6.45)$$

Um exemplo prático de barreira de potencial ocorre numa lâmpada de gás monoatômico, onde elétrons interagem com átomos negativamente ionizados.

Este sistema pode ser idealizado por uma barreira retangular de altura  $V_0 = 10 \text{ eV}$  e largura  $a = 1,8 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Nesse exemplo, o termo comum  $2mV_0 a^2 / \hbar^2$  nas eqs. (6.42) e (6.45) será

$$2mV_0 a^2 / \hbar^2 \approx 9$$

A partir disso pode-se traçar gráficos de T e  $R = 1 - T$ , em função de  $E/V_0$ , para os casos  $E < V_0$  e  $E > V_0$ . Esses gráficos são mostrados na Fig. 6.9.

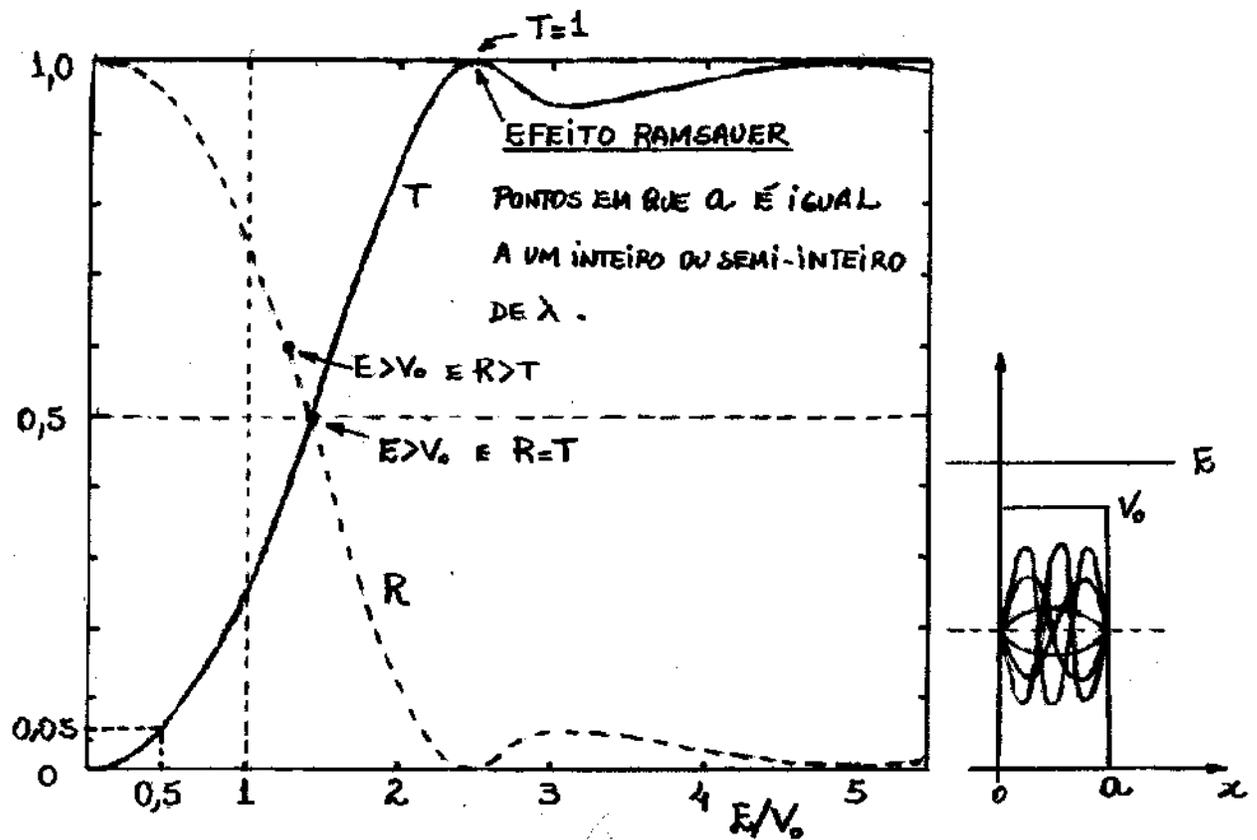


Fig. 6.7 - Comportamento de  $R$  e  $T$  para um elétron espalhado por um átomo num gás negativamente ionizado.

No gráfico vê-se que  $T \approx 0$ , quando  $E/V_0 \ll 1$ . Mas quando  $E/V_0$  é um pouco maior do que zero, observa-se que  $T$  começa a crescer. Por exemplo, quando  $E/V_0 = 0,5$ , ou  $E = V_0/2$ , tem-se  $T \approx 0,05 = 5\%$ . É evidente que os elétrons penetram nessa barreira com facilidade relativa. Por outro lado, quando  $E > V_0$ , é possível ainda que  $R > T$ , isto é, mesmo que  $E > V_0$ , o elétron tem ainda boas chances de ser refletido na barreira de potencial. Finalmente, como se pode concluir da eq. (6.44),  $T = 1$  sempre que  $k_3 a = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  ou  $2\pi/\lambda_3 a = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  ou ainda  $a = \frac{1}{2}\lambda_3, \lambda_3, \frac{3}{2}\lambda_3, \dots$ .

Essa é a condição em que a largura  $a$

da barreira é exatamente um número inteiro ou semi-inteiro de comprimentos de onda de de Broglie, como mostrado na Fig. 6.7. Nessas condições os elétrons tem energias  $E = 21 \text{ eV}$ ,  $53 \text{ eV}$ , etc... e passam para a região  $x > a$  como se os íons simplesmente não existissem. Esse efeito ocorre por causa de interferências construtivas entre reflexões em  $x=0$  e  $x=a$  e é denominado de efeito Ramsauer.

#### 6.4. Poços de Potenciais finito e infinito.

Até agora, considerou-se somente potenciais que não são capazes de confinar partículas em movimento em determinadas regiões do espaço. É nesses casos que a quantização da energia tem um papel importante. Os poços de potenciais finito e infinito são os potenciais mais comuns que apresentam essa propriedade. A Fig. 6.8 mostra o poço de potencial infinito.

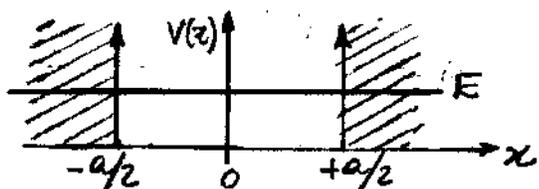


Fig. 6.8 - Representação gráfica de um poço de potencial infinito.

O poço de potencial infinito é descrito matematicamente por

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \leq -a/2 \text{ ou } x \geq +a/2 \\ 0 & \text{se } -a/2 < x < +a/2 \end{cases} \quad (6.46)$$

No interior do poço de potencial, o potencial é nulo e a partícula em movimento comporta-se como uma partícula livre. Classicamente, a partícula fica confinada no interior do poço de potencial, uma vez que sua energia total  $E$  é sempre menor do que o potencial fora do poço.

As previsões da teoria quântica podem ser obtidas a partir da solução da equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (6.47)$$

No interior do poço de potencial,  $V(x)=0$  e a solução geral é oscilatória, isto é,

$$\psi(x) = A'e^{ikx} + B'e^{-ikx} \text{ para } -a/2 < x < +a/2, \quad (6.48)$$

onde

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar.$$

A descrição ondulatória da partícula oscilante no interior do poço, sugere que a autofunção, nesta região, seja uma superposição de duas ondas, de mesma amplitude, que se movem em sentidos opostos.

Por exemplo, assumindo  $A'=B'$  na eq. (6.48), obtém-se

$$\psi(x) = B'(e^{ikx} + e^{-ikx}) = 2B'\cos kx = B\cos kx, \quad (6.49)$$

onde adotou-se  $B = 2B'$ . Esta solução está associada a uma função de onda  $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} = Be^{-iEt/\hbar}\cos kx$ , que tem a forma de onda estacionária, já que é uma função espacialmente localizada de amplitude  $Be^{-iEt/\hbar}$  modulada no tempo.

Por outro lado, assumindo  $B' = -A'$  na mesma equação, obtém-se

$$\psi(x) = A'(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA'\sin kx = A\sin kx, \quad (6.50)$$

onde adotou-se  $A = 2iA'$ . Como as eqs. (6.49) e (6.50), são ambas soluções da equação de Schrödinger independente do tempo para o mesmo valor de  $E$ , então é também solução a soma das duas, isto é,

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx. \quad (6.51)$$

Na verdade, as duas soluções gerais nas eqs. (6.48) e (6.51) são equivalentes, entretanto, a segunda é apropriada para o tratamento do movimento de partículas confinadas, ou ligadas, no interior dos poços de potenciais.

Como o potencial é infinito para  $x \leq -a/2$  e  $x \geq +a/2$ , a equação de Schrödinger na eq. (6.47) só terá sentido nessas regiões se  $\psi(x) = 0$ . Logo, a condição de contorno  $\psi(x = \pm a/2) = 0$ , deve ser satisfeita para que a solução seja fisicamente aceitável. Aplicando essas condições na eq. (6.51), obtém-se

$$A\sin ka/2 + B\cos ka/2 = 0 \text{ para } x = +a/2, \quad (6.52)$$

e

$$-A \operatorname{sen} ka/2 + B \cos ka/2 = 0 \quad \text{para } \alpha = -a/2. \quad (6.53)$$

Somando essas duas últimas equações, obtêm-se

$$2B \cos ka/2 = 0 \quad (6.54)$$

e subtraindo-as, obtêm-se

$$2A \operatorname{sen} ka/2 = 0. \quad (6.55)$$

Quando ambas essas condições forem satisfeitas, tanto  $\psi(x)$  quanto  $d\psi(x)/dx$ , serão finitas e contínuas em todos os pontos do eixo  $x$ .

Não há nenhum valor de  $k$  que faça, simultaneamente,  $\cos(ka/2)$  e  $\operatorname{sen}(ka/2)$  nulos. Também, não é desejável que  $A$  e  $B$  sejam ambos nulos para satisfazer as eqs. (6.54) e (6.55), pois  $\psi(x)$  seria nula e a partícula não estaria no poço. No entanto, é possível que ambas as equações sejam satisfeitas, assumindo uma das seguintes condições:

$$\cos(ka/2) = 0 \quad \text{e} \quad A = 0 \quad (6.56)$$

ou

$$\operatorname{sen}(ka/2) = 0 \quad \text{e} \quad B = 0. \quad (6.57)$$

Assim, existem dois tipos de soluções possíveis:

para o primeiro tipo,

$$\psi(x) = B \cos kx, \text{ onde } \cos ka/2 = 0 \quad (6.58)$$

e para o segundo tipo,

$$\psi(x) = A \sin kx, \text{ onde } \sin ka/2 = 0 \quad (6.59)$$

Os valores possíveis de  $k$  para o primeiro tipo na eq. (58), são  $ka/2 = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$  ou

$$k_n = n\pi/a, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (6.60)$$

Os valores possíveis de  $k$  para o segundo tipo na eq. (6.59), são  $ka/2 = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ . A condição  $ka/2 = 0$  não é aceitável pois nem  $a$  e nem  $k$  podem ser nulos.

No primeiro caso, não existiria o poço de potencial e no segundo caso, não existiria a onda de matéria.

Assim, para o segundo tipo,

$$k_n = n\pi/a, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (6.61)$$

Em resumo, as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo para o poço de potencial infinito, são

$$\psi(x) = \begin{cases} B_n \cos k_n x & ; n = 1, 3, 5, \dots \\ A_n \sin k_n x & ; n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (6.62)$$

onde  $k_n = n\pi/a$  para ambas as soluções. Como  $k_n = 2\pi/\lambda_n = n\pi/a$ , o comprimento de onda de de Broglie da partícula no interior do poço de potencial infinito é  $\lambda_n = 2a/n$ , ou

$$a = n \lambda_n / 2, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (6.63)$$

Observa-se que a eq. (6.63) é idêntica à equação usada para calcular os comprimentos de onda  $\lambda_n$  das ondas estacionárias para uma corda vibrante.

O número quântico  $n$  também pode ser utilizado para indexar os autovalores de energia. Utilizando a relação  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ , dada na eq. (6.48), e a expressão  $k_n = n\pi/a$ , dada nas eqs. (6.60) e (6.61) obtém-se

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n=1,2,3,4,\dots \quad (6.64)$$

A Fig. 6.9(a) mostra as primeiras autofunções do poço de potencial infinito, de acordo com as eqs. (6.62) e a Fig. 6.9(b) ilustra o poço de potencial, juntamente com alguns dos seus primeiros autovalores de energia, de acordo com a eq. (6.64). Na Fig. 6.9(a) o número de oscilações da autofunção  $\psi_n(x)$ , para cada valor de  $n$ , foi obtida a partir da eq. (6.63).

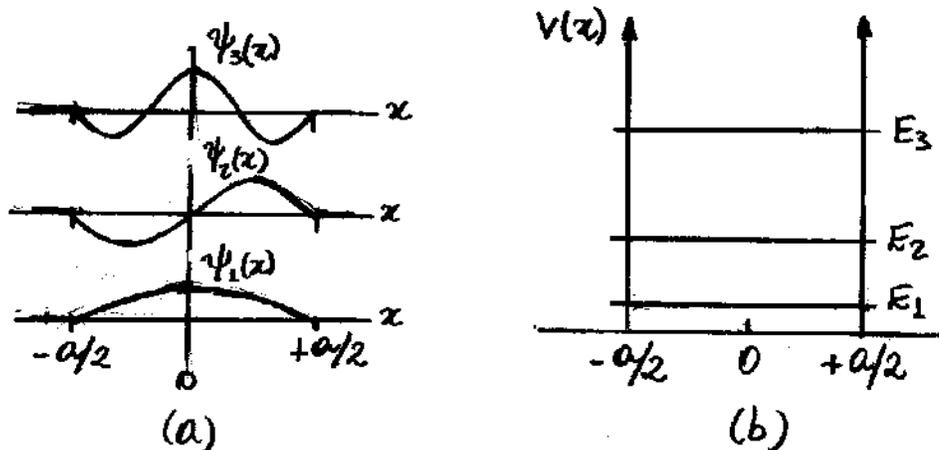


Fig. 6.9 - (a) primeiras autofunções do poço de potencial infinito e (b) primeiras autovalores para o mesmo poço de potencial.

É importante observar que a energia do estado fundamental ( $n=1$ ) para a partícula confinada no poço de potencial infinito é

$$E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2 \neq 0. \quad (6.65)$$

Essa energia mínima diferente de zero, ocorre por causa do princípio da incerteza  $\Delta x \Delta p \sim \hbar/2$ , uma vez que  $\Delta p$  é, conseqüentemente,  $\Delta E$  tem um limite inferior definido por  $\hbar$ . Evidentemente, isso contrasta fortemente com princípios básicos da mecânica clássica que garante que todo movimento cessa, isto é,  $E \equiv 0$ , quando o sistema encontra-se numa temperatura de zero absoluto.

Seja agora o caso do poço de potencial finito, como mostra a Fig. 6.10.

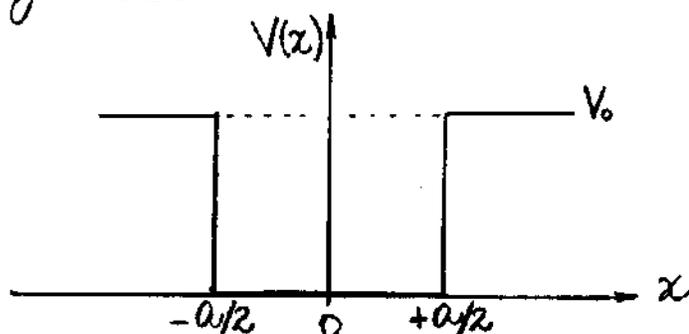


Fig. 6.10. Representação gráfica do poço de potencial finito.

Nesse caso, a descrição matemática do potencial é

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } x \leq -a/2 \text{ ou } x \geq +a/2 \\ 0 & \text{se } -a/2 < x < +a/2 \end{cases} \quad (6.66)$$

Para o caso  $E < V_0$ , a teoria clássica prevê que a partícula fica sempre confinada no interior do poço. Entretanto, similarmente ao poço de potencial infinito, na região entre  $x = -a/2$  e  $x = +a/2$ , a solução da equação de Schrödinger será equivalente a eq. (6.51), isto é,

$$\psi(x) = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x, \text{ onde } k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar. \quad (6.67)$$

Por outro lado, para as regiões  $x < -a/2$  e  $x > +a/2$ , as soluções da equação de Schrödinger são

$$\psi(x) = C e^{k_2 x} + D e^{-k_2 x} \text{ para } x \leq -a/2 \quad (6.68)$$

$$\text{e } \psi(x) = F e^{k_2 x} + G e^{-k_2 x} \text{ para } x \geq +a/2, \quad (6.69)$$

onde

$$k_2 = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar. \quad (6.70)$$

Pode-se obter autofunções aceitáveis para qualquer  $x$  juntando as soluções atribuídas a cada região. As três formas envolvem seis constantes arbitrárias  $A, B, C, D, F$  e  $G$ .

Para evitar que  $\psi(x) \rightarrow \infty$ , quando  $x \rightarrow -\infty$  na eq. (6.68) e  $x \rightarrow +\infty$  na eq. (6.69), deve-se assumir  $D=0$  e  $F=0$ .

Pode-se ainda, obter 4 equações independentes aplicando a condição de continuidade a  $\psi(x)$  e  $d\psi(x)/dx$ , nas duas fronteiras do poço de potencial.

Deve-se observar que essas 4 equações podem determinar as 4 constantes restantes. Entretanto, isso não deve representar problemas na arbitrariedade da amplitude da autofunção, pois aqui a energia total  $E$  da partícula fará o papel de uma constante adicional. Verifica-se na seqüência, que essa condição resulta na quantização da energia total  $E$  da partícula no interior do poço de potencial finito. Na Fig. 6.11 são mostrados os autofunções de energia e as autovalores correspondentes aos três primeiros estados num poço de potencial finito.

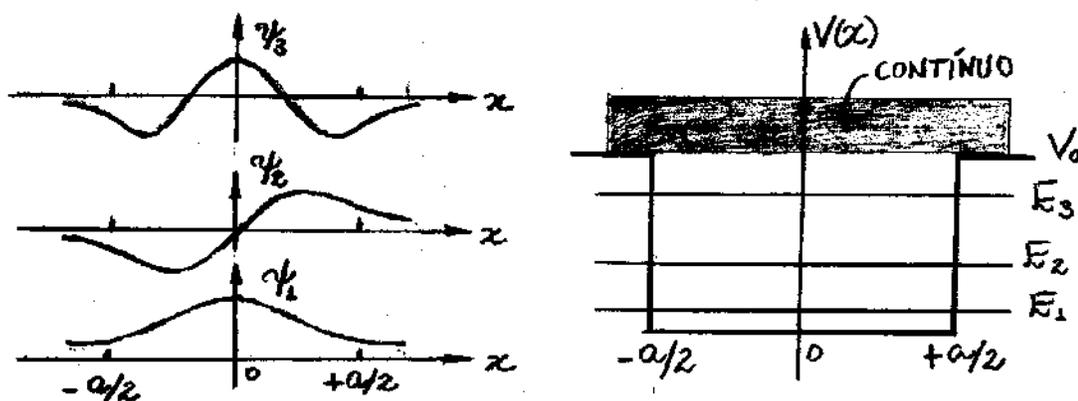


Fig. 6.11 - Autovalores e Autofunções para os três primeiros estados de uma partícula num poço de potencial finito.

Na Fig. 6.11, é mostrado ainda valores contínuos de energia para os casos em que  $E > V_0$ , onde as soluções são oscilatórias e não há restrições para elas.

Os cálculos de todos os autovalores de energia  $E$  permitidos para o poço de potencial finito, não é tão simples como no caso do poço de potencial infinito. Entretanto, o cálculo da energia do estado fundamental ( $n=1$ ), não é tão complicado e é conveniente discutir-lo aqui.

Similarmente ao poço de potencial infinito, na região  $-a/2 < x < +a/2$ , a solução para o estado fundamental ( $n=1$ ), de acordo com a eq. (6.62), deve ser a função de paridade positiva,

$$\psi(x) = B \cos k_1 x \quad \text{para } -a/2 < x < +a/2. \quad (6.71)$$

Como  $F=0$ , a solução para  $x > +a/2$ , na eq. (6.69), é

$$\psi(x) = G e^{-k_2 x} \quad \text{para } x \gg +a/2. \quad (6.72)$$

Aplicando a condição de continuidade para  $\psi(x)$  e  $d\psi(x)/dx$  em  $x = +a/2$ , obtém-se

$$B \cos k_1 a/2 = G e^{-k_2 a/2}$$

$$-k_1 B \sin k_1 a/2 = -k_2 G e^{-k_2 a/2}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtêm-se

$$k_1 \operatorname{tg} k_1 a/2 = k_2 \quad (6.73)$$

Como  $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$  e  $k_2 = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ , então

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \operatorname{tg} \frac{a\sqrt{2mE}}{2\hbar} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\sqrt{2mE} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{2ma^2 E}{4\hbar^2}} = \sqrt{2mE} \left( \frac{V_0}{E} - 1 \right)$$

$$\cancel{\sqrt{2mE}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{ma^2 E}{2\hbar^2}} = \cancel{\sqrt{2mE}} \sqrt{\left( \frac{V_0 - E}{E} \right)}$$

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{ma^2 E}{2\hbar^2}} = \sqrt{\left( \frac{V_0 - E}{E} \right)} \quad (6.74) \leftarrow$$

Sabe-se que quando  $V_0 \rightarrow \infty$ , ou o argumento da tangente, tende a  $\pi/2$ , encontra-se a energia  $E_1$  do estado fundamental do poço de potencial infinito, isto é,

$$\sqrt{\frac{ma^2 E_1}{2\hbar^2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{para } V_0 \rightarrow \infty$$

ou

$$E_L = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \text{ para } V_0 \rightarrow \infty, \quad (6.75)$$

que está de acordo com a eq. (6.65) obtida da solução da equação de Schrödinger independente do tempo para o poço de potencial infinito.

Substituindo  $m\alpha^2/2\hbar = \pi^2/4E_L$ , da eq. (6.75), na eq. (6.74), obtém-se

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{E_L}} = \sqrt{\left(\frac{V_0 - E}{E}\right)} \quad (6.76)$$

Essa é uma equação transcendental, isto é, uma identidade de duas funções cujos argumentos constituem a incógnita do problema. Nesse caso, a incógnita é a energia  $E$  do estado fundamental da partícula no poço de potencial finito, e sua determinação só é possível utilizando o método gráfico como mostra a Fig. 6.12.

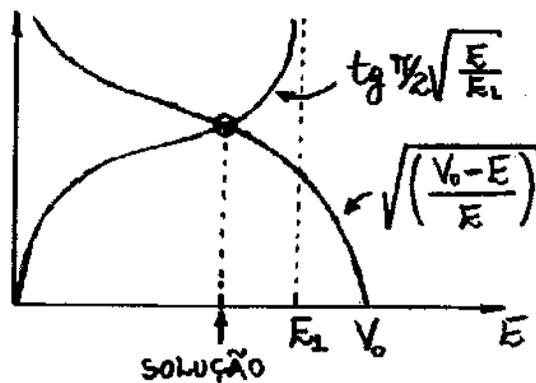


Fig. 6.12 - Solução gráfica para o autovalor de energia do estado fundamental de uma partícula no poço de potencial finito.

A solução é dada pela intersecção entre as duas curvas, mostrando que  $E \leq E_1$ . O limite  $V_0 \rightarrow \infty$ , resulta na solução  $E = E_1$ , correspondente ao estado fundamental de uma partícula no poço de potencial infinito.

## 6.5 - Oscilador Harmônico

O oscilador harmônico clássico é um dos sistemas mecânicos mais importantes da física. Sua descrição quântica serve de modelo para explicar fenômenos observados em diversos sistemas microscópicos. Um exemplo disso é a interação de dois átomos numa molécula diatômica. A Fig. 6.13 mostra o comportamento da energia potencial  $V(r)$ , que varia com a separação  $r$  entre os dois átomos, simulando propriedades dinâmicas da molécula.

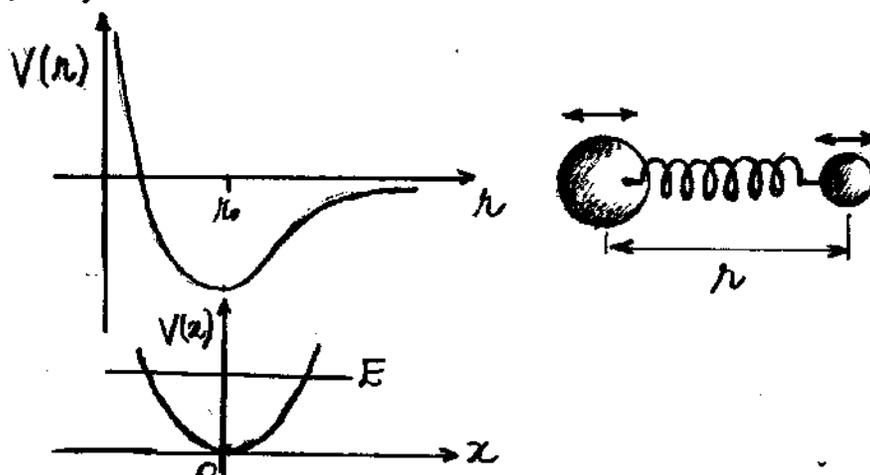


Fig. 6.13 - Modelo de energia potencial para uma molécula diatômica. O potencial de um oscilador harmônico  $V(x)$  como uma aproximação para o real.

A função  $V(r)$  tem uma posição de equilíbrio em  $r=r_0$ . Expandindo a função  $V(r)$  em uma série de potências em torno do ponto de equilíbrio  $r=r_0$ , obtém-se

$$V(r) = V(r_0) + \left[ \frac{d}{dr} V(r) \right]_{r=r_0} (r-r_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dr^2} V(r) \right]_{r=r_0} (r-r_0)^2 + \dots$$

Como o ponto de equilíbrio  $r=r_0$  é um ponto de mínimo, então nesse ponto  $dV(r)/dr=0$ . Além disso, admitindo oscilações ocorrendo somente nas vizinhanças de  $r=r_0$ , tal que a diferença  $r-r_0$  seja pequena o suficiente para que se possa desprezar termos de altas ordens em  $r-r_0$ , então

$$V(r) \approx V(r_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dr^2} V(r) \right]_{r=r_0} (r-r_0)^2 \quad (6.77)$$

Quando se adota a mudança de variável  $x=r-r_0$ , a origem  $x=0$  do eixo  $x$ , deve ocorrer no ponto de mínimo  $r=r_0$  do potencial  $V(r)$ . Assim, a função  $V(r)$  é trocada por uma função  $V(x)$  que tem um ponto de mínimo em  $V(x=0) = V(r=r_0) = 0$  como mostra a Fig. 6.13. Com esse procedimento a eq. (6.77), torna-se

$$V(x) \approx \frac{1}{2} kx^2, \quad (6.78)$$

em que

$$k = \left[ \frac{d^2}{dx^2} V(x) \right]_{x=0},$$

Deve-se observar que a eq. (6.78) possui exatamente a forma da energia potencial de um oscilador harmônico simples. Assim, a solução da equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E\psi \quad (6.79)$$

deve fornecer a descrição quântica para o oscilador harmônico. Rearranjando os termos da eq. (6.79), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{k}{2} x^2 - E \right) \psi = \frac{mk}{\hbar^2} \left( x^2 - \frac{2E}{k} \right) \psi \\ &= \frac{\sqrt{mk} \sqrt{mk}}{\hbar \hbar} \left( x^2 - \frac{2E}{k} \right) \psi \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \left( \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} x^2 - \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} \frac{2E}{k} \right) \psi = \left( \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} x^2 - \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{2E}{\hbar} \right) \psi$$

ou ainda

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \left( \alpha x^2 - \frac{2E}{\hbar\omega_0} \right) \psi, \quad (6.80)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{mk} / \hbar \quad (6.81)$$

e

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (6.82)$$

É conveniente introduzir aqui a mudança de variável

$$\xi = \sqrt{\alpha} x \quad (6.83)$$

e o parâmetro adimensional

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0} \quad (6.84)$$

Derivando a variável  $\xi$  e a função  $\psi$ , ambas em relação a  $x$ , obtém-se

$$\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha} \quad , \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha} \frac{d\psi}{d\xi}$$

ou, por essas duas equações,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \left( \sqrt{\alpha} \frac{d\psi}{d\xi} \right) \sqrt{\alpha} = \alpha \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \quad (6.85)$$

Substituindo as eqs. (6.85), (6.84) e (6.83) na eq. (6.80), obtém-se

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - \lambda) \psi \quad (6.86) \leftarrow$$

A autofunção  $\psi$  é agora uma função da nova variável  $\xi$  e o parâmetro  $\lambda$  assume o papel do autovalor de energia no lugar de  $E$  da equação original.

Para um oscilador harmônico clássico, a energia  $E$  será toda potencial  $V(x)$ , quando a posição  $x$  da partícula for igual a amplitude  $A$ , isto é,

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

ou

$$A^2 = \frac{2E}{k} \quad (6.87)$$

Por outro lado, adotando  $x=A$  na eq. (6.83), obtem-se a seguinte condição de máximo para a variável  $\xi$ :

$$\xi_{\max} = \sqrt{\alpha} A$$

ou, da eq. (6.81),

$$\xi_{\max}^2 = \alpha A^2 = \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} A^2, \quad (6.88)$$

ou ainda, do ponto de vista clássico e de acordo com as eqs. (6.87) e (6.84),

$$\xi_{\max}^2 = \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} \frac{2E}{k} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{2E}{\hbar} = \frac{2E}{\hbar \omega_0} = \lambda. \quad (6.89)$$

Essa equação tem um significado especial no problema quântico, por causa da presença do fator  $(\xi^2 - \lambda)$  na eq. (6.86). Observa-se nessa equação que as funções  $d^2\psi/d\xi^2$  e  $\psi$  tem zeros para  $\xi^2 < \lambda = \xi_{\max}^2$  e mesmos zeros para  $\xi^2 > \lambda = \xi_{\max}^2$ . Essas duas condições delimitam, respectivamente, as regiões classicamente permitida e proibida, como mostra a Fig. 6.14.

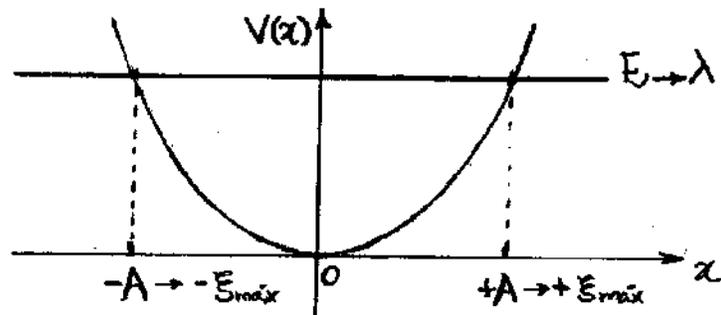


Fig. 6.14 - Regiões classicamente permitida e proibida para a energia  $E$  do oscilador harmônico.

Obviamente, espera-se uma probabilidade pequena de se encontrar a partícula na região classicamente proibida  $\xi^2 > \xi_{\text{máx}}^2$ . Nessas condições, a autofunção  $\psi$  deve se amillar para valores grandes de  $\xi^2$  e a solução gaussiana

$$\psi_0(\xi) = B e^{-\xi^2/2}, \quad (6.90)$$

é apropriada para a descrição da função de onda do oscilador harmônico. Como  $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$  ou  $V(\xi) \propto \xi^2$ , a função decrescente deve de fato ser do tipo gaussiana e não simplesmente exponencial decrescente, como ocorrido com potenciais lineares. Derivando a eq. (6.90) uma e duas vezes, obtém-se

$$\frac{d\psi_0}{d\xi} = -B\xi e^{-\xi^2/2},$$

$$\frac{d^2\psi_0}{d\xi^2} = B(\xi^2 e^{-\xi^2/2} - e^{-\xi^2/2}) = (\xi^2 - 1) B e^{-\xi^2/2} = (\xi^2 - 1) \psi_0. \quad \leftarrow$$

Assim, observa-se que a solução na eq. (6.90) satisfaz a eq. (6.86), quando  $\lambda$  assume o valor particular

$$\lambda = \lambda_0 = 1. \quad (6.91)$$

Como  $\lambda = 2E/\hbar\omega_0$ , de acordo com a eq. (6.84), o autovalor de energia associado a essa solução é

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \lambda_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0. \quad (6.92)$$

De acordo com as eqs. (6.83) e (6.84), a eq. (6.90) é escrita em termos da variável  $x$ , como

$$\psi_0(x) = B e^{-\alpha x^2/2} = B e^{-\sqrt{mk} x^2/2\hbar} \quad (6.93)$$

e a função de onda associada é

$$\psi_0(x,t) = \psi_0(x) e^{-iE_0 t/\hbar} = B e^{-\sqrt{mk} x^2/2\hbar} e^{-iE_0 t/\hbar}$$

ou, de acordo com a condição de normalização,

$$\psi_0(x,t) = \left(\frac{mk}{\pi^2 \hbar^2}\right)^{1/4} e^{-\sqrt{mk} x^2/2\hbar} e^{-iE_0 t/\hbar} \quad (6.94)$$

Na sequência, verifica-se que essa solução simples da eq. (6.86), é uma função de onda associada ao menor valor do parâmetro  $\lambda$  ou a menor energia  $E$ , isto é, a função de onda  $\psi_0(x,t)$  e a energia  $E_0$  se referem ao estado fundamental do oscilador harmônico.

Deve-se esperar que as soluções da eq. (6.86) para estados excitados do oscilador harmônico, também decaiam rapidamente nas regiões classicamente proibidas. Uma solução geral com este comportamento é

$$\psi(\xi) = H(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (6.95)$$

onde a função  $H(\xi)$  deve estar condicionada a aceitabilidade da autofunção  $\psi(\xi)$ .

A função  $H(\xi)$  pode ser determinada resolvendo a equação diferencial resultante da substituição da eq. (6.95) na eq. (6.86).

Derivando uma e duas vezes a eq. (6.95), obtêm-se

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{dH}{d\xi} e^{-\xi^2/2} - (H\xi)e^{-\xi^2/2}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{d^2H}{d\xi^2} e^{-\xi^2/2} - 2 \frac{dH}{d\xi} \xi e^{-\xi^2/2} - H e^{-\xi^2/2} + H \xi^2 e^{-\xi^2/2}$$

cuja substituição na eq. (6.86), resulta em

$$\left[ \frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + (\xi^2 - 1)H \right] e^{-\xi^2/2} = (\xi^2 - \lambda)H e^{-\xi^2/2}$$

ou

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + (\lambda - 1)H = 0 \quad (6.96) \leftarrow$$

Observa-se que esta equação é automaticamente satisfeita para o estado fundamental no qual  $H = \text{constante}$ , uma vez que isso resultaria em  $\lambda = 1$ .

As soluções fisicamente aceitáveis da eq. (6.96) estão restritas a formas polinomiais para  $H(\xi)$ , uma vez que, qualquer outro tipo de função não satisfaz a condição de decaimento de  $\psi(\xi)$  nas regiões classicamente proibidas.

Aceitando este fato sem provas, pode-se adotar um inteiro  $n$  para definir a ordem de tais polinômios.

Observa-se que a energia potencial  $V(x)$  do oscilador harmônico é uma função simétrica de  $x$  e assim espera-se encontrar autofunções de paridades definidas, como ocorreu nas soluções do poço de potencial na Eq. 6.4.

Como o fator  $e^{-\xi^2/2}$  na eq. (6.95), é uma função par de  $\xi$ , segue que cada polinômio  $H(\xi)$  deve ser uma função par ou ímpar dessa mesma variável, isto é,

$$H_n(\xi) = \begin{cases} \sum_{\text{par } k=0}^n a_k \xi^k, \\ \sum_{\text{ímpar } k=1}^n a_k \xi^k. \end{cases} \quad (6.97)$$

A solução será completada encontrando os coeficientes  $a_k$  dos polinômios  $H_n(\xi)$ , que satisfaçam a eq. (6.96).

Com a finalidade de calcular os valores permitidos do parâmetro  $\lambda = \lambda_n$  na eq. (6.96) e, conseqüentemente, os autovalores de energia  $E = E_n$ , é suficiente examinar os polinômios de paridade par nas eqs. (6.97), isto é,

$$H_n = a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots + a_n \xi^n, \text{ onde } a_n \neq 0. \quad (6.98) \leftarrow$$

As derivadas primeira e segunda desta equação, respectivamente, são

$$H'_n = 2a_2 \xi + 4a_4 \xi^3 + \dots + na_n \xi^{n-1}$$

e

$$H''_n = 2a_2 + 12a_4 \xi^2 + \dots + n(n-1)a_n \xi^{n-2},$$

cuja inserção na eq. (6.96), resulta

$$2a_2 + 12a_4 \xi^2 + \dots + n(n-1)a_n \xi^{n-2} - 2\xi[2a_2 \xi + \dots + na_n \xi^{n-1}]$$

$$+ (\lambda_n - 1)[a_0 + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n] = 0$$

ou

$$2a_2 + (\lambda_n - 1)a_0 + [12a_4 - 4a_2 + (\lambda_n - 1)]\xi^2 + \dots$$

$$+ n(n-1)a_n \xi^{n-2} + [-2na_n + (\lambda_n - 1)a_n]\xi^n = 0.$$

Para que a equação acima seja satisfeita, é necessário que todos os coeficientes de cada termo polinomial, sejam nulos. Particularmente, no caso do coeficiente do termo  $\xi^n$ , tem-se

$$-2na_n + (\lambda_n - 1)a_n = 0 \Rightarrow [-2n + (\lambda_n - 1)]a_n = 0. \leftarrow$$

Como  $a_n \neq 0$ , conclui-se que

$$\lambda_n = 2n + 1. \quad (6.99) \leftarrow$$

Esse resultado também pode ser obtido a partir do polinômio de paridade ímpar na eq. (6.97).

Substituindo a eq. (6.99) na eq. (6.96), obtém-se

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n}{d\xi} + 2nH_n = 0 \quad (6.100)$$

Esta é uma equação diferencial especial denominada de equação diferencial de Hermite, cuja soluções são polinômios de Hermite. Os primeiros polinômios de Hermite, que satisfazem a eq. (6.100), são

$$\begin{aligned} H_0(\xi) &= 1, & H_1(\xi) &= 2\xi, \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2, & H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi \dots \dots \end{aligned} \quad (6.101)$$

O número inteiro  $n$ , na eq. (6.99), introduz um número quântico para nivelar os estados estacionários do oscilador harmônico. Substituindo a eq. (6.99) na eq. (6.89),  $\lambda = 2E/\hbar\omega_0$ , obtém-se os autovalores de energia  $E_n$  permitidos para o oscilador harmônico:

$$E_n = \frac{1}{2} \hbar\omega_0, \quad \lambda_n = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 (2n+1) = (n+1/2)\hbar\omega_0. \quad (6.102)$$

Dessa equação, observa-se que as energias discretas  $\Delta E$  são igualmente espaçadas por

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega_0 = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = h\nu. \quad (6.103)$$

A semelhança com a energia do oscilador quântico, idealizado por Planck para a radiação de corpo negro é notável.

A Fig. 6.15 mostra as primeiras autofunções para o oscilador harmônico, bem como os respectivos autovalores permitidos, de acordo com as eqs. (6.95), (6.101) e (6.102).

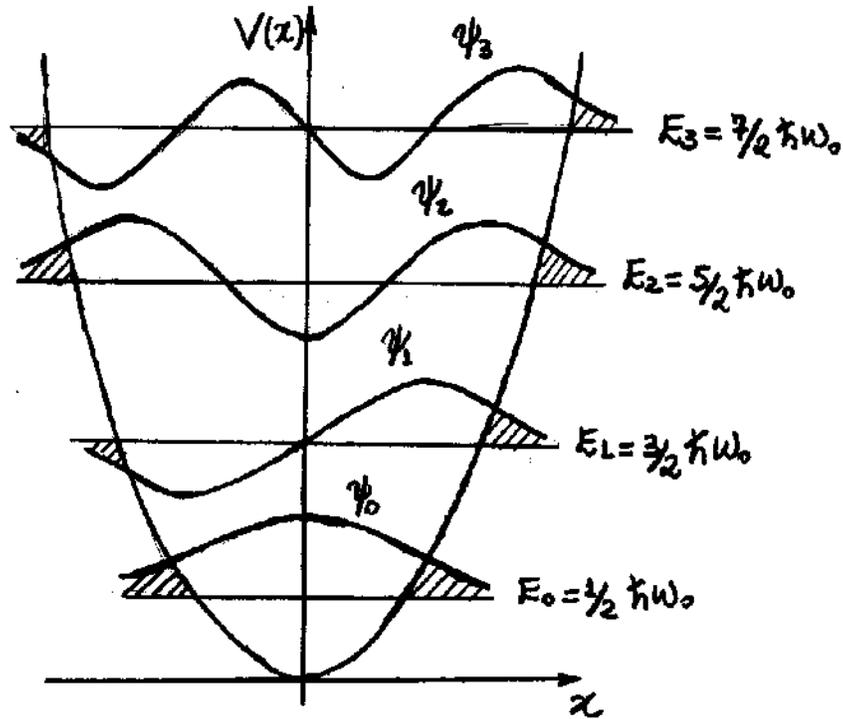


Fig. 6.15 - Alguns estados estacionários permitidos para o oscilador harmônico quântico.

A Figura mostra também como as autofunções "penetram" nas regiões classicamente proibidas e como os nós de  $\psi_n$  aumentam em número com a energia  $E_n$ . Esse comportamento é uma característica geral de todas as soluções da equação de Schrödinger, associadas a partículas confinadas.

## Lista de Exercícios

### Questões conceituais

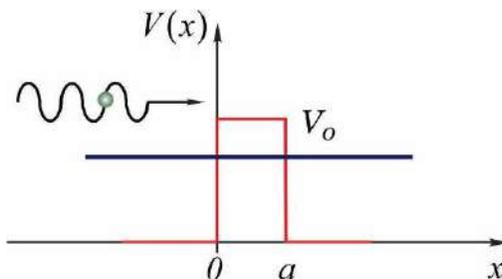
- 1- Por que na mecânica clássica não é possível ter-se  $E < V(x)$ ? Por que isto é possível na mecânica quântica, desde que haja alguma região na qual  $E > V(x)$ ?
- 2- Se duas ondas de mesmas amplitudes se propagam em sentidos contrários obtém-se uma onda estacionária. Que tipo de onda obtém-se se as amplitudes não forem iguais?
- 3- O que você entende exatamente sobre o fluxo de probabilidade?
- 4- O que significa exatamente afirmar que o coeficiente de reflexão é unitário para uma partícula incidindo sobre um potencial degrau com energia total menor do que a altura do degrau? O que significa exatamente afirmar que o coeficiente de reflexão é menor do que a unidade se a energia total for maior que a altura do degrau? O coeficiente de reflexão pode ser maior que a unidade?
- 5- Uma partícula incide sobre uma barreira de potencial, com energia total menor do que a altura da barreira, e é refletida. A reflexão envolve apenas a primeira descontinuidade do potencial? Se a outra descontinuidade fosse retirada, de forma que a barreira se transformasse em um degrau, o coeficiente de reflexão mudaria?
- 6- No sol, dois núcleos de Hidrogênio em movimento térmico violento podem colidir penetrando a barreira coulombiana que os separa. A massa do núcleo resultante é menor do que a soma das massas dos dois núcleos de iniciais, de forma que ocorre grande liberação de energia. Este processo de fusão nuclear é responsável pela emissão de calor pelo sol. Quais seriam as consequências para a vida na terra se isso não pudesse ocorrer?
- 7- Por que os poços quadrados finitos têm apenas um número finito de autovalores ligados? Quais são as características dos autovalores não ligados?
- 8- Como seria uma autofunção de onda estacionária para um autovalor não ligado de um poço de potencial quadrado finito?
- 9- Se as autofunções de um potencial têm paridades definidas, a de menor energia tem sempre paridade positiva. Explique por que.

### Problemas

- 1- Para o caso de um degrau de potencial com  $E > V_0$  em que os coeficientes de reflexão e transmissão são

$$R = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \text{ e } T = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}, \text{ mostre que } R + T = 1.$$

- 2- Considere uma partícula penetrando em uma **barreira de potencial retangular**, para o caso  $E < V_0$ , como mostrado na Figura abaixo.



(a) Escreva as soluções gerais, apresentadas na seção 6.3.1, que dão a forma de  $\psi$  nas diferentes regiões do potencial. Encontre então quatro relações entre as cinco constantes arbitrárias ajustando  $\psi$  e  $d\psi/dx$  nos limites entre essas regiões. (b) Use estas relações para mostrar que o coeficiente de transmissão  $T$  é dado por

$$T = \frac{v_1 C^* C}{v_1 A^* A} = \left[ 1 + \frac{(e^{k_2 a} - e^{-k_2 a})^2}{16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{\sinh^2 k_2 a}{4 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)} \right]^{-1},$$

onde

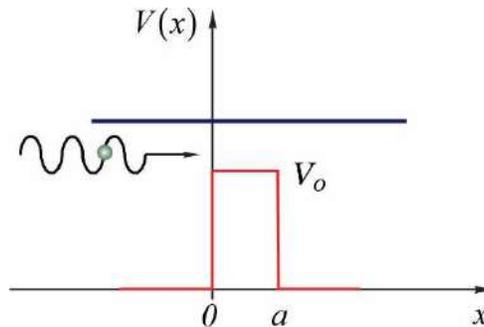
$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \text{ para } x \leq 0 \text{ e } x \geq a \text{ e } k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \text{ para } 0 < x < a,$$

verificando assim a Eq. 6.41 da apostila. (Sugestão: Escreva as soluções gerais como:  $\psi = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}$  para a região  $x \leq 0$ ;  $\psi = Ce^{ik_1 x} + De^{-ik_1 x}$  para a região  $x \geq a$  e  $\psi = Fe^{-k_2 x} + Ge^{k_2 x}$  para a região  $0 < x < a$ . Explique porque é necessário que a constante  $D$  tenha que ser nulo. Mostre que as condições de continuidade de  $\psi$  e  $d\psi/dx$ , nos limites entre as regiões, resultam nas seguintes relações:

$$G = \frac{1}{2k_2} [A(k_2 + ik_1) + B(k_2 - ik_1)] \text{ e } C = \frac{4i(k_1/k_2)e^{-ik_1 a}}{(1 + ik_1/k_2)^2 e^{-k_2 a} - (1 - ik_1/k_2)^2 e^{k_2 a}} A.$$

A partir da relação entre  $C$  e  $A$ , encontre o valor do coeficiente de transmissão  $T$ , conforme solicitado.)

3- Considere uma partícula penetrando em uma **barreira de potencial retangular**, para o caso  $E > V_0$ , como mostrado na Figura abaixo.



(a) Escreva as soluções gerais, apresentadas na seção 6.3.2, que dão a forma de  $\psi$  nas diferentes regiões do potencial. Encontre então quatro relações entre as cinco constantes arbitrárias ajustando  $\psi$  e  $d\psi/dx$  nos limites entre essas regiões. (b) Use estas relações para mostrar que o coeficiente de transmissão  $T$  é dado por

$$T = \frac{v_1 C^* C}{v_1 A^* A} = \left[ 1 - \frac{(e^{ik_3 a} - e^{-ik_3 a})^2}{16 \frac{E}{V_0} \left(\frac{E}{V_0} - 1\right)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{\sin^2 k_3 a}{4 \frac{E}{V_0} \left(\frac{E}{V_0} - 1\right)} \right]^{-1},$$

onde

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \text{ para } x \leq 0 \text{ e } x \geq a \text{ e } k_3 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}, \text{ para } 0 < x < a,$$

verificando assim a Eq. 6.44 da apostila. (Sugestão: Escreva as soluções gerais como:  $\psi = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$  para a região  $x \leq 0$ ;  $\psi = Ce^{ik_3x}$  para a região  $x \geq a$  e  $\psi = Fe^{ik_3x} + Ge^{-ik_3x}$  para a região  $0 < x < a$ . Repita o mesmo procedimento realizado na questão 2, notando que as quatro relações se tornam exatamente as mesmas que foram encontradas na questão 2 quando se substitui  $k_2$  por  $ik_3$ .)

4- Mostre que a expressão  $T = \left[ 1 + \frac{\sinh^2 k_2 a}{4 \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right)} \right]^{-1}$ , para o coeficiente de transmissão para a penetração

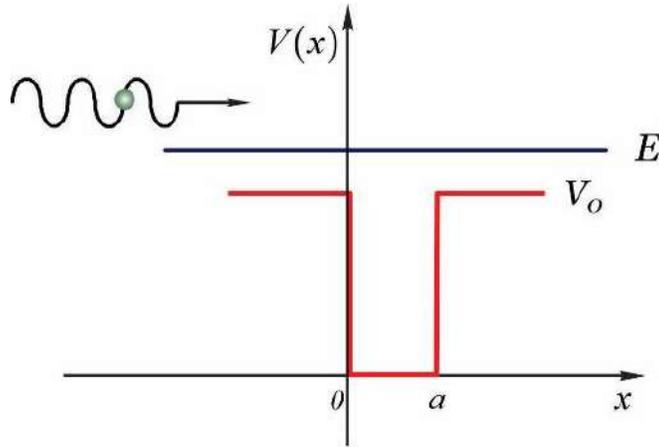
de uma barreira de potencial retangular, se reduz a  $T \approx 16 \frac{E}{V_0} \left( 1 - \frac{E}{V_0} \right) e^{-2k_2 a}$  se  $k_2 a \gg 1$ .

5- (a) Calcule o coeficiente de transmissão para um elétron de energia total  $E = 2eV$  incidente sobre uma barreira de potencial retangular de altura  $V_0 = 4eV$  e largura  $a = 10^{-10} m$  (dimensão atômica), usando a relação exata e aproximada citadas na questão anterior. (b) Repita os cálculos para uma barreira de largura  $a = 10^{-9} m$ .

6- Um próton e um dêuteron (partícula de mesma carga do próton, mas de massa duas vezes maior) tentam penetrar em uma barreira de potencial retangular de altura  $V_0 = 10 MeV$  e largura  $a = 10^{-14} m$  (dimensão nuclear). As duas partículas têm energias totais  $E = 3 MeV$ . Use argumentos qualitativos para prevê qual das partículas tem mais chance de consegui-lo.

7- A captura de um próton por um núcleo de carbono, que tem a carga seis vezes maior do que a carga do próton e um raio  $r' \approx 2 \times 10^{-15} m$ , é uma reação de fusão comum na produção de energia solar. (a) Faça uma estimativa do potencial coulombiano eletrostático  $V_0$  que atua sobre o próton se ele estiver na superfície nuclear. (b) O próton incide sobre o núcleo por causa da sua agitação térmica. Podemos supor que a sua energia total  $E \approx 10 k_B T_s$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T_s \approx 10^7 K$  é a temperatura interna do Sol. Faça uma estimativa do valor da energia  $E$  em termos do potencial coulombiano  $V_0$ . (c) Calcule o coeficiente de transmissão  $T$  de o próton penetrar em uma barreira de potencial retangular de altura  $V_0$  se estendendo a uma distância  $a = r'$ , ponto no qual a barreira de potencial cai a  $V_0/2$ . (d) A penetração da barreira de potencial coulombiana real é maior ou menor do que a da barreira de potencial retangular da parte (c)? Justifique! Resp.: (a)  $V_0 \approx 4,32 MeV$ ; (b)  $E \approx 0,002 V_0$ ; (c)  $T \approx 0,0073$ ; (d) maior.

8- Considere uma partícula não ligada se movendo em um **poço de potencial finito retangular**, para o caso  $E > V_0$ , como mostrado na Figura abaixo.



(a) Escreva as soluções gerais que dão a forma de  $\psi$  nas diferentes regiões do potencial,  $x \leq 0$ ,  $0 < x < a$  e  $x \geq a$ . Encontre então quatro relações entre as cinco constantes arbitrárias ajustando  $\psi$  e  $d\psi/dx$  nos limites entre essas regiões. (b) Use estas relações para mostrar que o coeficiente de transmissão  $T$  é dado por

$$T = \frac{v_1 C^* C}{v_1 A^* A} = \left[ 1 - \frac{(e^{ik_3 a} - e^{-ik_3 a})^2}{16 \frac{E}{V_0} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right)} \right]^{-1} = \left[ 1 + \frac{\text{sen}^2 k_3 a}{4 \frac{E}{V_0} \left( \frac{E}{V_0} - 1 \right)} \right]^{-1}$$

onde

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \text{ para } 0 < x < a \text{ e } k_3 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}, \text{ para } x \leq 0 \text{ e } x \geq a$$

Isto é, equivalente ao caso da **barreira de potencial retangular**, para o caso  $E > V_0$ . (c) Encontre a condição para a energia total  $E$  da partícula para que o coeficiente de transmissão seja igual a um. (Sugestão: Como na questão 4, escreva as soluções gerais como:  $\psi = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}$  para a região  $x \leq 0$ ;  $\psi = Fe^{-ik_3 x} + Ge^{ik_3 x}$  para a região  $0 < x < a$  e  $\psi = Ce^{ik_1 x}$  para a região  $x \geq a$ . Repita o mesmo procedimento utilizado na questão 2, notando que as quatro relações se tornam exatamente as mesmas que foram encontradas na questão 2 quando se substitui  $k_2$  por  $ik_3$ .)

9- Um átomo do gás nobre Kriptônio exerce um potencial atrativo sobre um elétron não ligado, que varia muito bruscamente. Devido a isto, é uma aproximação razoável descrever o potencial como um poço quadrado atrativo, de dimensão da ordem do raio atômico,  $4 \times 10^{-10} m$ . As experiências que um elétron com energia cinética  $E = 0,7 eV$ , nas regiões fora do átomo, pode atravessá-lo sem sofrer reflexão alguma. Esse é o fenômeno do **efeito Ramsauer** para um poço quadrado atrativo. Use essas informações para fazer uma estimativa da profundidade do poço de potencial quadrado. (Sugestão: Use o fato que cabe exatamente um comprimento de onda de de Broglie na largura do poço nas condições do **efeito Ramsauer**).

10- Sabendo-se que as massas do elétron e do nêutron são respectivamente,  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$  e  $m_n = 1,67 \times 10^{-27} kg$ , faça uma estimativa das energias de ponto zero de um elétron e de um nêutron em um poço quadrado infinito de largura igual ao diâmetro nuclear  $a = 10^{-14} m$ , e compare esses resultados.

11- Sabendo-se que as energias permitidas para uma partícula num poço de potencial infinito são  $E_n = n^2 E_0$ , onde  $E_0$  é a energia do estado fundamental, mostre que a diferença fracional em energia entre autovalores adjacentes é  $\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2}$ . Use esta relação para discutir o limite clássico do sistema.

12- Aplique a condição de normalização para mostrar que o valor da constante multiplicativa para a autofunção com  $n = 3$  do poço de potencial infinito é  $B_3 = \sqrt{2/a}$ .

13- Use as autofunções  $\psi_1$  e  $\psi_3$  para o poço de potencial infinito para mostra a propriedade de ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x)\psi_3(x)dx = 0$$

(Sugestão: Use a relação  $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$ ).

14- A constante da força restauradora  $K$  para as vibrações interatômicas de uma molécula diatômica típica é da ordem de  $10^3 J/m^2$ . (a) Use esse valor para fazer uma estimativa da energia de ponto zero das vibrações moleculares. (b) Faça uma estimativa da diferença em energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado da molécula vibrante. (c) A partir dessa estimativa, determine a energia do fóton emitido por vibrações da distribuição de carga quando o sistema faz uma transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental. (d) Determine o comprimento de onda desta transição e descubra em que região do espectro eletromagnético encontra-se a radiação emitida.