4.2 Aplicações da conservação de energia para problemas unidimensionais.

A lei da conservação da energia pode ser uma ferramenta para resolver a dinâmica de um sistema. Isto se aplica especialmente em sistemas de um único grau de liberdade. Considere um sistema cuja configuração é descrita por uma coordenada x. Tipicamente temos então uma dinâmica da forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \tag{4.2.1}$$

Isto é uma equação diferencial de segunda ordem. Dependendo da expressão da força, pode ser difícil resolve-la. Se escrevemos a força com a ajuda de um potencial

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \tag{4.2.2}$$

podemos deduzir a equação de conservação de energia a partir da (4.2.1):

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E = const. \tag{4.2.3}$$

Podemos encarar esta fórmula também como equação diferencial, mas esta é apenas de primeira ordem e portanto um tanto mais simples do que a original (4.2.1). Repare que com o valor de E uma parte da informação das condições iniciais já está contida na equação (4.2.3). Em princípio a equação (4.2.3) pode ser resolvida com um método padrão, embora que isto as vezes pode envolver operações matemáticas complicadas. O caminho padrão para resolver a equação (4.2.3) funciona da seguinte forma:

Primeiramente isolamos a velocidade:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\left(E-U(x)\right)}{m}} \tag{4.2.4}$$

Depois separamos as variáveis:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2\left(E-U(x)\right)}{m}}} = dt \tag{4.2.5}$$

Agora podemos integra. Apesar de não conhecermos a função $x(t)$, podemos integrar porque a integral do lado esquerdo não integra sobre t mas sobre o próprio x. Então obtemos:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2\left(E-U(x')\right)}{m}}} = t \tag{4.2.6}$$

A integral fornece alguma função $G(x)$. Na prática, o cálculo desta integral pode ser difícil, mas de alguma maneira este cálculo pode ser feito, nem que seja de forma numérica. Então pode-se calcular esta função $G(x)$. A solução desejada $x(t)$ obtemos resolvendo da equação

$$G(x) = t \tag{4.2.7}$$

para x. Esta tarefa pode ser outro problema complicado, mas de novo em último caso pode-se resolver este problema numericamente.

Onde estão os dois parâmetros que contêm a informação das condições iniciais? Um deste parâmetros é o valor da energia E e o outro é a posição inicial x_0 que aparece como limite inferior da integral na fórmula (4.2.6) e que vai aparecer na função G como parâmetro.

Um bom exemplo para este método de resolver a dinâmica de um problema unidimensional é o pêndulo. Vamos analisar o pêndulo simples, embora a mesma técnica serve também para o pêndulo físico (constituído por um corpo rígido extenso).

Imagine uma massa pontual m pendurado num suporte fixo através de um fio inextensível de massa desprezível de comprimento ℓ. Este pêndulo é supostamente excitado de tal maneira que o movimento fica dentro de um plano. Aqui desprezamos os efeitos da forças de Coriolis. A figura 4.2.1 define a incógnita θ como ângulo entre a direção vertical e fio do pêndulo.

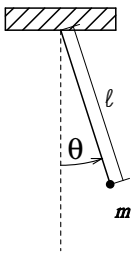

Fig. 4.2.1 Pêndulo simples de massa m e comprimento de fio ℓ com definição da coordenada θ que descreve a configuração do sistema. A linha pontilhada indica a direção vertical, ou seja a direção de equilíbrio.

Como energia potencial podemos usar a função

$$U(\theta) \;=\; mg\ell(1-\cos\theta) \tag{4.2.8}$$

onde g é a aceleração da gravidade. Então a lei de conservação de energia tem a forma:

$$\frac{m}{2}\left(\ell\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \;+\; mg\ell(1-\cos\theta) \;=\; E \tag{4.2.9}$$

É conveniente escrever a energia em termos da amplitude de oscilação. No ponto de retorno, cujo ângulo vamos chamar de θ_A com $\theta_A > 0$ (com índice A e amplitude), a energia cinética vale zero. Então temos

$$E \;=\; mg\ell(1-\cos\theta_A) \tag{4.2.10}$$

Substituindo esta expressão na (4.2.9) obtemos:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \;=\; 2\frac{g}{\ell}(\cos\theta-\cos\theta_A) \tag{4.2.11}$$

O procedimento padrão descrito no início resulta então em

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{2\frac{g}{\ell}(\cos\theta'-\cos\theta_A)}} \;=\; t \tag{4.2.12}$$

Infelizmente esta integral é uma integral elíptica e ela não tem uma solução em forma fechada. Então teria que resolve-la numericamente ou de forma aproximada expandido o co-seno numa série de Taylor. Aqui vamos optar pela segunda possibilidade. Temos

$$\cos\theta' \;=\; 1 \;-\; \frac{1}{2!}\theta'^2 \;+\; \frac{1}{4!}\theta'^4 \;-\; \ldots\ldots \tag{4.2.13}$$

Se usarmos apenas o termo de segunda ordem obtemos

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\frac{g}{\ell}\left(\theta_A{}^2 - \theta'^2\right)}} \;=\; t \qquad (4.2.14)$$

Esta integral tem solução e leva exatamente à solução aproximada de oscilador harmônico (exercício: mostre isto!). Poderíamos ter chegado nesta solução conhecida usando diretamente a segunda lei de Newton com a aproximação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \;=\; -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} \;\approx\; -\frac{g}{\ell}\,\theta \qquad (4.2.15).$$

Agora vamos usar a (4.2.12) com uma aproximação um pouco melhor. Vamos usar a expansão do co-seno até os termos de ordem θ'^4. Neste caso, a (4.2.12) fornece a aproximação

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\left(\theta_A{}^2 - \theta'^2 + \frac{1}{12}\left(\theta'^4 - \theta_A{}^4\right)\right)}} \;\approx\; t\,\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (4.2.16)$$

Vamos escrever a raiz quadrada de forma mais adequada:

$$\sqrt{\left(\theta_A{}^2 - \theta'^2 + \frac{1}{12}\left(\theta'^4 - \theta_A{}^4\right)\right)} \;=\; \sqrt{\left(\theta_A{}^2 - \theta'^2\right)}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{12}\left(\theta'^2 + \theta_A{}^2\right)\right)} \qquad (4.2.17)$$

Neste ponto vamos usar a aproximação $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon \quad \text{para} \quad |\varepsilon| << 1$. Vamos usar esta aproximação com

$$\varepsilon \;=\; -\frac{1}{12}\left(\theta'^2 + \theta_A{}^2\right) \qquad (4.2.18)$$

e $n = -1/2$:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\left(1 + \frac{\theta_A{}^2}{24}\right)d\theta'}{\sqrt{\left(\theta_A{}^2 - \theta'^2\right)}} \;+\; \frac{1}{24}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\theta'^2 d\theta'}{\sqrt{\left(\theta_A{}^2 - \theta'^2\right)}} \approx\; t\,\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (4.2.19)$$

ou

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\left(1 + \frac{\theta_A{}^2}{24}\right)d\theta'}{\theta_A\sqrt{1 - \left(\theta'/\theta_A\right)^2}} \;+\; \frac{\theta_A{}^2}{24}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\theta'^2 d\theta'}{\theta_A{}^3\sqrt{1 - \left(\theta'/\theta_A\right)^2}} \approx\; t\,\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (4.2.20)$$

Aqui não vamos fazer questão de calcular a função solução $\theta(t)$. Vamos nos limitar apenas para o cálculo do período da oscilação. Geralmente é esta grandeza que se mede na experiência. Podemos obter o período observando que o tempo que o pêndulo leva para percorrer o intervalo $[-\theta_A, +\theta_A]$ é meio período. Então vamos escolher como ângulo inicial $\theta_0 = -\theta_A$ e como limite superior da integral θ_A.

$$\int_{-\theta_A}^{\theta_A} \frac{\left(1 + \frac{\theta_A{}^2}{24}\right)d\theta'}{\theta_A\sqrt{1 - \left(\theta'/\theta_A\right)^2}} \;+\; \frac{\theta_A{}^2}{24}\int_{-\theta_A}^{\theta_A} \frac{\theta'^2 d\theta'}{\theta_A{}^3\sqrt{1 - \left(\theta'/\theta_A\right)^2}} \approx\; \frac{T}{2}\,\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (4.2.21)$$

ou

$$\left(1+\frac{\theta_A{}^2}{24}\right)\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad + \quad \frac{\theta_A{}^2}{24}\int_{-\theta_A}^{\theta_A}\frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx \quad \frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{4.2.22}$$

Com a substituição $\operatorname{sen}\alpha = \xi$ obtemos

$$\left(1+\frac{\theta_A{}^2}{24}\right)\pi \quad + \quad \frac{\theta_A{}^2}{24}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\operatorname{sen}\alpha\right)^2 d\alpha \quad \approx \quad \frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{4.2.23}$$

$$\left(1+\frac{\theta_A{}^2}{24}\right)\pi \quad + \quad \frac{\theta_A{}^2}{24}\frac{\pi}{2} \quad = \quad \pi\left(\theta_A{}^2\frac{3}{48}+1\right) \quad \approx \quad \frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{4.2.24}$$

Então obtemos o resultado final

$$T \quad \approx \quad 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{1+\frac{\theta_A{}^2}{16}\right\} \tag{4.2.25}$$

Vamos ver que tipo de erro se comete quando usamos a aproximação do oscilador harmônico simples. Tipicamente em aulas de laboratório os alunos usam uma amplitude de 10^o . Isto significa

$$\theta_A \quad = \quad 10^o \times \frac{2\pi}{360^o} \quad \approx \quad 0{,}1745 \tag{4.2.26}$$

Então o erro relativo correspondente ao termo de ordem $\theta_A{}^2$ é de

$$\frac{\theta_A{}^2}{16} \quad \approx \quad 1.9\times 10^{-3} \quad = \quad 0{,}19\,\% \tag{4.2.27}$$

Claro que existe também uma contribuição de erro dos termos de mais alta ordem que desprezamos no nosso cálculo. Mas estes devem ser ainda bem menores.