2.2 Partículas compostas, forças efetivas, forças externas e forças de vínculo.

As leis 13 -16 estabelecem o que é uma partícula elementar clássica e eles afirmam que tais partículas existem. Mas nem toda partícula pontual é uma partícula elementar. Para poder tratar de partículas não elementares, acrescentamos aqui uma hipótese, que pode ser chamada de *hipótese do mundo mecanicista*:

> **Hipótese:** Todo sistema de N partículas consiste de um sistema de n partículas elementares, com $n \geq N$. Cada partícula do sistema original é composta de partículas elementares.

Imaginamos que um objeto que, na escala relevante de um problema, parece desprezivelmente pequeno a tal ponto que estejamos dispostos a tratá-lo como partícula pontual, consista na verdade de partículas ainda menores com as suas posições e velocidades. Para facilitar a comunicação chamaremos as partículas não elementares de *partículas compostas*. Imaginamos então a descrição dinâmica de um sistema de N partículas escrita em termos das n equações

$$m_k\,\vec{a}_k \;=\; \sum_{l\neq k}\vec{F}_{kl} \tag{2.2.1}$$

das partículas elementares. Como, na escala do problema, não conseguiremos ter acesso às posições e velocidades das partículas elementares dentro de cada partícula composta gostaríamos de formular a dinâmica exclusivamente em termos dos dados das partículas compostas. Cada partícula composta A consiste de um certo conjunto, que denominaremos com a mesma letra A, de partículas elementares. Vamos escrever a fórmula (2.2.1) para uma partícula elementar k que pertence a uma partícula composta A. Neste caso será vantajoso separar o somatório do lado direito em um que percorre o subconjunto A e outro sobre as partículas elementares contidas em outras partículas compostas.

$$\text{para } k\in A:\qquad m_k\,\vec{a}_k \;=\; \sum_{\substack{l\neq k\\ l\in A}}\vec{F}_{kl} \;+\; \sum_{l\notin A}\vec{F}_{kl} \tag{2.2.2}$$

Agora vamos somar estas equações sobre todas as partículas elementares contidas na partícula composta A:

$$\sum_{k\in A} m_k\,\vec{a}_k \;=\; \sum_{\substack{l,k\in A\\ l\neq k}}\vec{F}_{kl} \;+\; \sum_{k\in A}\sum_{l\notin A}\vec{F}_{kl} \tag{2.2.3}$$

O primeiro somatório do lado direito é um somatório duplo. Com a terceira lei de Newton este somatório duplo é zero. Pois para cada par de partículas distintas $a, b \in A$ temos um termo com $k = a$ e $l = b$ e outro termo com $k = b$ e $l = a$ e estes termos cancelam. Então podemos retirar o primeiro somatório duplo da fórmula (2.2.3). Este somatório diz respeito às forças internas da partícula composta A. Eles são importantes para manter a partícula junta, mas na fórmula (2.2.3) eles cancelam.

Vamos desenvolver o lado esquerdo, usando que a derivada é uma operação linear:

$$\frac{d^2\left(\sum_{k\in A} m_k\,\vec{r}_k\right)}{dt^2} \quad = \quad \sum_{k\in A}\sum_{l\notin A}\vec{F}_{kl} \qquad (2.2.4)$$

Podemos dar um aspecto de segunda lei de Newton a esta fórmula se introduzirmos as noções de massa e vetor posição da partícula composta A :

$$m_A \underset{def.}{=} \sum_{k\in A} m_k\,, \qquad \vec{r}_A \underset{def.}{=} \frac{1}{m_A}\sum_{k\in A} m_k\,\vec{r}_k \qquad (2.2.5).$$

O vetor $\vec{r}_A$ é também conhecido como vetor posição do *centro de massa* das partículas que compõem a partícula composta A. Repare que $\vec{r}_A$ é uma média ponderada dos vetores posição das partículas contidas em A.

Com estas grandezas obtemos:

$$m_A\,\frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} \quad = \quad \sum_{k\in A}\sum_{l\notin A}\vec{F}_{kl} \qquad (2.2.6)$$

Para tornar esta fórmula ainda mais parecida com a segunda lei de Newton vamos trocar a ordem no somatório duplo e somar primeiramente sobre as partículas elementares dentro de A. Vamos definir a força que a partícula composta B exerce sobre a partícula composta A:

$$\text{para } A\neq B: \qquad \vec{F}_{AB} \underset{def.}{=} \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}}\vec{F}_{ab} \qquad (2.2.7)$$

Com esta grandeza podemos escrever a fórmula (2.2.6) como

$$m_A\,\vec{a}_A \quad = \quad \sum_{B\neq A}\vec{F}_{AB} \qquad (2.2.8),$$

onde $\vec{a}_A = d^2\vec{r}_A / dt^2$. Além disso, segue com a (2.1.21) e a (2.2.7) :

$$\vec{F}_{AB} \quad = \quad -\vec{F}_{BA} \qquad (2.2.9)$$

As fórmulas (2.2.8) e (2.2.9) parecem uma cópia fiel das fórmulas (2.1.20) e (2.1.21) da segunda e terceira lei de Newton. Parece que mudaram somente os índices minúsculos, que identificaram as partículas elementares, para índices maiúsculos, que identificam partículas compostas. No entanto, esta aparência engana! Existe uma diferença fundamental entre as antigas fórmulas (2.1.20), (2.1.21) e a versão para partículas compostas. Nas antigas fórmulas, as $\vec{F}_{ab}$ eram funções apenas das variáveis $\vec{r}_a$, $\vec{r}_b$, $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$. Mas nada garante que $\vec{F}_{AB}$ seja apenas uma função de $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$! Em princípio podemos afirmar somente que $\vec{F}_{AB}$ é alguma função das posições e velocidades de todas as partículas elementares contidas nas partículas compostas A e B. Então a fórmula (2.2.8) não representa um sistema de equações diferenciais para as incógnitas $\vec{r}_{A=1},\vec{r}_{A=2},......,\vec{r}_{A=N}$ e esta fórmula não é uma descrição completa da dinâmica do sistema!

Apesar desta dificuldade, existem muitos casos de aplicação onde as forças $\vec{F}_{AB}$ podem ser escritas aproximadamente como funções das variáveis $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$.

Então nestes casos as partículas compostas se comportam aproximadamente como partículas elementares e a fórmula (2.2.8) constitui uma descrição da dinâmica. Mas, se trata de uma aproximação.
Existe ainda outra possibilidade de construir uma dinâmica do sistema a partir da fórmula (2.2.8). Tipicamente as partículas compostas contém números muito elevados de partículas elementares, por exemplo 10^{10} partículas elementares por cada partícula composta. Por um lado este número grande aumenta ainda mais as dificuldades, pois é grande o número de dados que faltam para fechar uma descrição dinâmica completa. Mas por outro lado este número grande abre outros caminhos. É de se esperar que a maior parte desta massa enorme de dados inacessíveis comece a não ter importância. Podemos entender isto com um simples exemplo da vida cotidiana: Um avião não pode ser carregado com valores arbitrariamente altos de massa. Mesmo assim, as empresas de aviação não se preocupam em botar todos os passageiros numa balança para saber a massa exata que entra no avião. Eles se contentam em multiplicar a massa média de uma pessoa adulta numa sociedade conhecida com o número de passageiros que embarcam no avião e, quando o número de passageiros for grande, o valor deste produto costuma desviar muito pouco do valor verdadeiro da massa que entra no avião. Este fenômeno é causado justamente pelo fato de envolver um número muito grande de passageiros. Outro exemplo é fornecido pelas companhias de seguros, que aproveitam que somas de grade número de parcelas começam a ter um comportamento muito bem determinado apesar de serem compostas de parcelas não bem conhecidas.

Baseado nestas considerações de grandes números, pode-se esperar que seja possível escrever as forças resultantes $\vec{F}_{AB}$ como funções das variáveis $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ e alguns poucos parâmetros associados às partículas A e B . A titulo de exemplo, vamos chamar estes parâmetros de T_A, T_B, U_A, U_B. A construção ou definição destes parâmetros sai de estudos experimentais das forças $\vec{F}_{AB}$ de forma empírica e a parte da física que se dedica a esta tarefa é a *termodinâmica*. Ela define parâmetros que descrevem propriedades internas de partículas compostas, mas ela faz isto sem entrar nos detalhes mecânicas das partículas. Com a introdução das novas variáveis $T_{A=1}$, $T_{A=2}$, ..., $U_{A=N}$ as N equações (2.2.8) têm não apenas as incógnitas $\vec{r}_{A=1},\vec{r}_{A=2},......,\vec{r}_{A=N}$ mas também os parâmetros novos. Consequentemente o sistema (2.2.8) sozinho não é suficiente para descrever a dinâmica do sistema. É uma das tarefas da termodinâmica de fornecer as equações que faltam. Estes são as equações de estado. Na mecânica dos fluidos e em geral dos meios contínuos este tipo de dinâmica composta de leis da mecânica (2.2.8) e equações da termodinâmica é largamente estudado.

Um outro ramo da mecânica, a *mecânica estatística,* se ocupa com a explicação dos parâmetros termodinâmicos em termos dos movimentos das partículas elementares que compõem as partículas compostas. Como estes movimentos não são conhecidos, tem que usar argumentos probabilísticas neste ramo da mecânica.

Nesta nossa disciplina introdutória estudaremos apenas o caso de partículas compostas que podem aproximadamente ser tratadas como se fossem partículas elementares.

Veremos um exemplo. Imagine uma barra de aço coma aquela da figura 2.2.1. Tal tipo de barra é composta de um número de partículas elementares da ordem de 10^{25}. Mas numa descrição mecânica macroscópica desta barra podemos imaginar ela composta de minúsculos cubos de aço, cada cubo contendo tal vez umas 10^{10} partículas elementares. Para facilitar a discussão ainda mais, vamos usar discos no lugar de cubinhos e tratar a barre como um objeto unidimensional. A posição do disco número A pode ser descrita com um valor x_A da coordenada Cartesiana x cujo eixo de coordenada aponta ao longo da barra como mostra a figura. Estudos empíricos com esta barra mostram que a força que um disco B exerce sobre seu vizinho A é dada pela seguinte expressão:

$$\vec{F}_{AB} \quad = \quad \hat{x}\left(x_B - x_A - c\right)\kappa \tag{2.2.10}$$

onde c e κ são constantes. A constante empírica κ descreve as propriedades elásticas da barra e a fórmula (2.2.10) é um caso da lei de Hooke. Então parece que temos aqui um daqueles casos que permite descrever as partículas compostas como se fossem partículas elementares, já que $\vec{F}_{AB}$ é uma função das posições das partículas. Mas, medindo com muita precisão e muita paciência, descobriríamos que em dias quentes o valor de κ sai ligeiramente diferente do que em dias frios. Então na verdade κ depende de um parâmetro novo, da *temperatura*, que descreve algum aspecto dos movimentos das partículas elementares contidas nos discos. Este novo parâmetro entra numa descrição da dinâmica da barra de forma não trivial. Por exemplo, se consideramos deformações rápidas da barra, que praticamente não permitem troca de calor, as temperaturas dos discos sofrerão modificações durante a deformação. Por outro lado, com deformações lentas que proporcionam tempo suficiente para uma troca de calor com o ambiente, as temperaturas ficariam aproximadamente inalteradas.

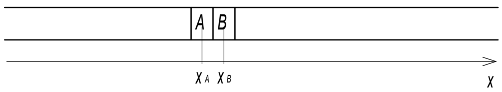

Fig. 2.2.1 Duas partículas compostas A e B numa barra de aço.

Chamaremos a força resultante $\vec{F}_{AB}$, se ela for escrita como função das posições e outras características espaço-temporais das partículas compostas A e B e de parâmetros empíricos, de *força efetiva*.

A introdução das partículas compostas e das forças efetivas corresponde a um descarte de variáveis. Este descarte pode ser motivado pela impossibilidade de acessar dados a respeito destas variáveis ou pelo fato que estes valores não interessam. O caso de termos inúmeras partículas elementares aglomerados em pouco volume numa partícula composta não é o único que motiva descarte de variáveis. A seguinte situação é também muito freqüente: temos um sistema imenso de partículas e nosso interesse se concentra apenas num determinado subconjunto de partículas. Para facilitar a comunicação chamaremos o conjunto de partículas elementares do sistema completo de ω, o conjunto de partículas compostas do sistema completo de Ω, o conjunto da partículas elementares do sub-sistema do nosso interesse de σ e o conjunto de partículas compostas do sub-sistema do nosso interesse de Σ. Na segunda lei de Newton das partículas elementares do conjunto σ é conveniente separar o somatório de forças em um que contem apenas forças internas do sistema e forças que envolvem partículas fora do sistema de interesse:

$$\text{para } k \in \sigma: \qquad m_k \vec{a}_k \quad = \quad \sum_{s \in \sigma \setminus \{k\}} \vec{F}_{k\,s} \quad + \quad \sum_{l \in \omega \setminus \sigma} \vec{F}_{k\,l} \tag{2.2.11}$$

Chamaremos a soma $\vec{F}_k^{\,ext.} \underset{def.}{=} \sum_{l \in \omega \setminus \sigma} \vec{F}_{k\,l}$ de *força externa* que atua sobre a partícula k. A fórmula (2.2.11) fica na forma simples:

$$\text{para } k \in \sigma: \qquad m_k \vec{a}_k \quad = \quad \sum_{s \in \sigma \setminus \{k\}} \vec{F}_{k\,s} \quad + \quad \vec{F}_k^{\,ext.} \qquad (2.2.12).$$

Encontramos com esta fórmula as mesmas dificuldades que encontramos com a "segunda lei de Newton" para partículas compostas. Se as forças externas $\vec{F}_k^{\,ext.}$ fossem funções conhecidas de $\vec{r}_k$ e $\vec{v}_k$ então as equações (2.2.12) formariam um sistema completo de equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema do nosso interesse. Mas, em geral $\vec{F}_k^{ext.}$ depende das posições e velocidades das partículas externas e estes de sua vez sofrem a influência das partículas em σ. Como as posições das partículas de σ são incógnitas, não saberemos como as partículas fora de σ reagem e as forças externas $\vec{F}_k^{ext.}$ ficam indeterminadas. Em outras palavras, a fórmula (2.2.12) não é uma descrição completa da dinâmica do sistema do nosso interesse.

De novo, em certos casos, podemos apelar para descrições aproximadas e fenomenológicas. Um caso muito freqüente, que permite descrições aproximadas de altíssima precisão ocorre quando a parte externa $\omega \backslash \sigma$ envolve massas muito grandes. Este caso ocorre com a grande maioria das experiências feitas em laboratório Terrestre. Todos os objetos no laboratório interagem direta ou indiretamente com todo globo Terrestre. Imagine um pêndulo suspenso do teto do laboratório. As partículas elementares contidas no pêndulo sofrem atração gravitacional de todas as partículas elementares contidas no globo Terrestre. Alem disso há uma interação indireta, mediada por inúmeras partículas contidas no fio de suspensão, no gancho no teto, nas paredes do prédio etc. . É evidente que o centro de massa da Terra não sofrerá praticamente nenhuma alteração perceptível no seu comportamento pelas oscilações do nosso pêndulo. Nestes casos é fácil estabelecer expressões bem determinadas para as forças externas. De novo chamaremos estas expressões de forças efetivas. Em geral estas forças externas efetivas podem ser também funções do tempo.

Em outros casos pode haver partes do mundo externo $\omega \backslash \sigma$ que sofrem uma influência apreciável do sistema de interesse. Imaginem o sistema do nosso interesse é uma bóia imersa num líquido. Cada movimento da bóia necessariamente deslocará parcelas do líquido. Neste caso as forças externas não são funções conhecidas das incógnitas do problema. Pode-se tentar alguma descrição fenomenológica aproximada das forças externas, e neste caso as forças efetivas terão dependências mais complicadas. Eles dependerão não apenas das posições e velocidades das partículas do sistema mas também das acelerações.

Há ainda outra forma de transformar a fórmula (2.2.12) em dinâmica do sistema. Esta envolve uma modificação do conceito de dinâmica e de previsão. Se as forças externas não são conhecidas, porque eles dependem de dados desconhecidas do mundo externo, então trabalharemos com forças desconhecidas! E como se trabalha com coisas desconhecidas? Fazendo afirmações probabilísticas. Então $\vec{F}_k^{ext.}$ é uma função sobre a qual podemos fazer somente afirmações probabilísticas. Um julgamento probabilístico de uma função é chamado de *processo estocástico*. Se tratarmos as forças externas como processos estocásticos as soluções da dinâmica serão consequentemente também processos estocásticos. Então as nossas previsões neste caso são previsões probabilísticas. Um caso típico deste tipo de mecânica é o estudo do movimento Browniano.

Nesta disciplina introdutória vamos limitar o estudo de sistemas com forças externas à casos que permitam uma descrição aproximada com forças externas efetivas bem conhecidas. Evidentemente as técnicas de tratar partículas compostas podem ser combinadas com as técnicas de forças externas. Correspondentemente teremos uma versão da fórmula (2.2.12) para partículas compostas:

$$\text{para } A \in \Sigma: \qquad m_A \vec{a}_A \quad = \sum_{S \in \Sigma \setminus \{A\}} \vec{F}_{AS} \quad + \quad \vec{F}_A^{\,ext.} \tag{2.2.13}$$

O estabelecimento das funções que descrevem as forças efetivas são uma parte essencial, e as vezes difícil, de uma análise de um sistema mecânico. Em certas situações temos a sorte que tal determinação se torna desnecessária. Isto acontece quando a problemática das equações da segunda lei de Newton pode ser parcialmente invertida. O que queremos dizer com inverter a problemática das equações da segunda lei de Newton? Bem, a problemática das equações da segunda lei de Newton é a tarefa de achar soluções para as incógnitas. As vezes já conhecemos as soluções ou parte delas. Então podemos inverter o jogo e podemos determinar as forças. Imagine que montamos um carrinho que pode deslizar num trilho. Pela construção do trilho sabemos que o carrinho não desvia nunca do trajeto predeterminado pelo trilho. Suponha que tratemos o carrinho como uma partícula pontual de massa m e que $\vec{r}(t)$ seja o vetor posição do carrinho no instante t. A função $\vec{r}(\cdot)$ é a incógnita do problema. Saber que o carrinho não sai do trilho significa conhecer algumas características desta incógnita. Então estas características deixaram de ser incógnitas. Na nossa descrição do problema trataremos o carrinho como sistema do nosso interesse Σ e o trilho como parte do mundo externo $\Omega \setminus \Sigma$. Certamente as forças que as inúmeras partículas do trilho exercem sobre o carrinho são complicadíssimas. Mas uma parte desta complicação pode ser eliminada da descrição dinâmica, por que parte da solução já é conhecida. A segunda lei de Newton para o carrinho é

$$m\,\vec{a} \quad = \quad \vec{F}^{trilho} + \vec{F}^{outros} \tag{2.2.14}$$

onde $\vec{F}^{trilho}$ é a complicada força externa que o trilho exerce sobre o carrinho e $\vec{F}^{outros}$ é uma outra força externa exercida por outros objetos. Vamos supor que esta outra força externa seja uma função conhecida da incógnita $\vec{r}(\cdot)$ e de suas derivadas.

Vamos supor que o trilho descreva uma certa curva $\boldsymbol{\gamma}$ no espaço. Neste caso, a incógnita que caracteriza o movimento é a função temporal do comprimento de arco $s(\cdot): \quad \to V_d$. Então com a fórmula (1.9.31) sabemos que

$$\vec{a}(t) \quad = \quad \frac{d^2 s}{dt^2}\,\hat{t} \quad + \quad \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \dfrac{d\hat{t}}{ds} = 0 \\ |\vec{v}|^2 \, \dfrac{1}{R}\,\hat{n} & \text{se} \quad \dfrac{d\hat{t}}{ds} \neq 0 \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Vamos analisar os dois casos indicados na fórmula (2.2.15) separadamente:

Caso (a) $d\hat{t}/ds = 0$: então sabemos que a projeção ortogonal da força resultante no plano perpendicular ao trilho é zero:

$$\vec{F}^{trilho} + \vec{F}^{outros} \quad - \quad \hat{t}\left(\hat{t} \cdot \left(\vec{F}^{trilho} + \vec{F}^{outros}\right)\right) \quad = \quad 0 \tag{2.2.16}$$

Então a componente perpendicular ao trilho da força exercida pelo trilho é determinada de forma única pelas outras forças externas.

Caso (b) $d\hat{t}/ds \neq 0$: Neste caso a força resultante pode ter somente componentes $\hat{t}$ e $\hat{n}$. Para a componente normal obtemos:

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{F}^{trilho}+\vec{F}^{outros}\right) = m\left|\vec{v}\right|^2\frac{1}{R} \tag{2.2.17}$$

Então a componente normal da força desconhecida exercida pelo trilho é

$$\hat{n}\cdot\vec{F}^{trilho} = m\left|\vec{v}\right|^2\frac{1}{R} - \hat{n}\cdot\vec{F}^{outros} \tag{2.2.18}$$

Agora vamos olhar a componente tangencial da segunda lei de Newton:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \hat{t}\cdot\left(\vec{F}^{trilho}+\vec{F}^{outros}\right) \tag{2.2.19}$$

Nesta fórmula não temos como escapar do problema de arrumar uma descrição fenomenológica das forças. Algo temos que supor ou elaborar com medidas empíricas sobre as forças. Vamos supor que estudos experimentais forneceram uma expressão para $\hat{t}\cdot\vec{F}^{trilho}$ em termos da incógnita $s(\cdot)$ e/ou das suas derivadas. Uma expressão que aparece com freqüência para este termo tangencial é zero; $\hat{t}\cdot\vec{F}^{trilho}=0$. Neste caso o trilho seria chamado de *trilho sem atrito.* Naturalmente este caso é uma aproximação. Para as outras forças já temos, supostamente, tais expressões. Então a (2.2.19) seria uma equação diferencial que determina a dinâmica do sistema completamente. Para cada solução $s(\cdot)$ podemos calcular ds/dt. Então $\left|\vec{v}\right|$ passa a ser conhecido e tudo no lado direto da fórmula (2.2.18) pode ser calculado. A componente normal da força exercida pelo trilho é calculável e não é necessária para a análise da dinâmica. Quem estiver apenas interessado na dinâmica pode descartar a componente normal da força do trilho completamente. Mas, para o engenheiro que quer construir o trilho esta componente normal pode ser interessante. Pois ele terá que construir um artefato que agüente esta força.

A situação descrita é freqüente em aplicações técnicas da mecânica. De forma aproximada conhecemos alguns detalhes dos possíveis movimentos de um sistema e estes detalhes podem ser retirados da questão da dinâmica. Eles tomam o papel de condições adicionais ou *vínculos* impostos sobre os possíveis movimentos. As forças ou componentes de forças associadas a estas imposições não precisam ser conhecidas para formar da descrição dinâmica do sistema. Este tipo de força chamaremos de *força de vínculo*.