

10.3 O Campo \vec{H}

Na seção 4.5, separamos uma parte da densidade macroscópica de carga ρ que pode ser deslocada livremente e uma parte presa dentro das moléculas. Expressamos esta parte presa como o negativo da divergência da polarização; $\rho_p = -\text{div}(\vec{P})$. Isto motivou a introdução do campo de deslocamento $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Agora é bastante natural fazer algo análogo com a densidade macroscópica de corrente \vec{j} separando uma parte de condução, \vec{j}_c , e uma que é a média de correntes microscópicas presas dentro das moléculas ou dentro de átomos:

$$\vec{j} = \vec{j}_c + \vec{j}_{\text{presa}} \quad (10.3.1).$$

Veremos agora o que contribui para a parte presa nas moléculas. Primeiramente temos uma contribuição da polarização quando esta tiver uma dependência temporal. Imaginem que haja uma densidade numérica $\rho_{\#}$ de dipolos elétricos, e cada um destes dipolos consiste em duas cargas $-q$ e $+q$ separadas por um minúsculo vetor \vec{d} . A polarização neste caso vale

$$\vec{P} = \rho_{\#} q \vec{d} \quad (10.3.2)$$

Agora vamos imaginar que \vec{d} seja uma função do tempo; por exemplo, $\vec{d} = \vec{d}_0 + \vec{v}t$. Podemos imaginar que os centros carregados $-q$ e $+q$ dentro das moléculas se desloquem com velocidades $-\vec{v}/2$ e $+\vec{v}/2$ respectivamente. Isto cria uma densidade de corrente

$$\vec{j}_p = \rho_{\#}(-q) \left(-\frac{\vec{v}}{2} \right) + \rho_{\#}(+q) \left(+\frac{\vec{v}}{2} \right) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (10.3.3)$$

A polarização poderia mudar temporalmente com outro mecanismo, por exemplo, com um aumento da densidade numérica dos dipolos. O leitor pode convencer-se de que em todo caso há uma densidade de corrente associada a tal mudança, e esta vale sempre $\partial \vec{P} / \partial t$.

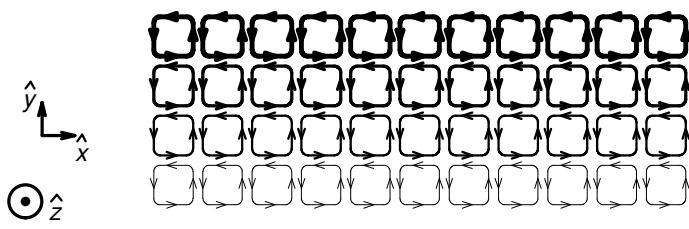


Fig. 10.3.1: Magnetização
 $\vec{M}(y) = \hat{z} M_z(y)$ com $\partial M_z / \partial y > 0$.

Há uma outra contribuição para a densidade de corrente \vec{j}_{presa} que é mais relacionada

com o nosso assunto atual da magnetização. Imaginem um pedaço de matéria cujas moléculas tenham um momento magnético orientado na direção do eixo z de um sistema de coordenadas cartesianas. Vamos imaginar que a magnitude destes momentos magnéticos aumente na direção y . Na figura 10.3.1 representei esta situação. Eu desenhei as espiras microscópicas de corrente que formam os dipolos magnéticos como pequenos retângulos, todos com a mesma área, mas com intensidades diferentes da corrente. Indiquei esta intensidade pela espessura das linhas. Obviamente esta distribuição de correntes microscópicas não resulta em nenhuma componente z da densidade de corrente. Também não há uma componente y , pois as correntes nos lados dos retângulos vizinhos nesta direção se cancelam. Mas percebemos que, no encontro dos lados dos retângulos na direção x , uma corrente que flui no sentido $+\hat{x}$ tem sempre

como vizinha uma corrente mais fraca no sentido oposto. Então uma componente z da magnetização que possui uma derivada positiva na direção y resulta numa componente positiva da densidade de corrente na direção x . Isto lembra o rotacional. Temos

$$\text{rot } \vec{M} = \hat{x} \left\{ \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right\} + \hat{y} \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right\} + \hat{z} \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right\} \quad (10.3.4).$$

Então podemos desconfiar que a magnetização forneça ($\text{rot } \vec{M}$) como contribuição para a densidade macroscópica de corrente. Este argumento é apenas qualitativo como aquele que usamos na seção 4.5 para convencer com a ajuda de um desenho que a densidade de carga de polarização é $-\text{div } \vec{P}$. Naquela seção, transferimos os argumentos mais formais para um apêndice. Faremos o mesmo aqui e no momento vamos simplesmente confiar no “chute” intuitivo.

Juntando as duas contribuições para a densidade de corrente presa nas moléculas, temos

$$\vec{j}_{\text{presa}} = \text{rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (10.3.5),$$

e podemos escrever a versão macroscópica da lei de Ampére-Maxwell:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \text{rot } \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.3.6).$$

É natural querer juntar os dois termos que envolvem um rotacional. Além disso, percebemos que os termos de derivada temporal combinem perfeitamente dando um $\partial \vec{D} / \partial t$:

$$\text{rot} \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right] = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10.3.7).$$

Esta fórmula é naturalmente um convite para definir um novo campo:

$$\vec{H} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

(10.3.8).

Antigamente este campo era chamado de *campo magnético* enquanto nosso bom e velho campo \vec{B} era chamado de *densidade de fluxo magnético*. Mas autores modernos, como David J. Griffiths (Reed College)¹, destacaram que o campo \vec{B} é a grandeza fundamental e não o campo \vec{H} . Portanto faz mais sentido reservar o nome *campo magnético* para o campo \vec{B} . Podemos chamar \vec{H} de *campo magnético auxiliar*.

As equações de Maxwell na forma macroscópica ficam bem simples com os campos auxiliares \vec{H} e \vec{D} :

$$\text{div } \vec{D} = \rho_L \quad (10.3.9)$$

¹ David J. Griffiths *Introduction to Electrodynamics* (2nd edition) Prentice Hall (1989) ISBN 0-13-481367-7 veja especialmente página 260.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10.3.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (10.3.11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (10.3.12),$$

ou em forma integral:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_L dV \quad (10.3.13)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left\{ \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{S} \quad (10.3.14)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (10.3.15)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (10.3.16).$$

Mas a mesma coisa que tinha acontecido com o campo \vec{D} ocorre com a introdução do campo auxiliar \vec{H} ; há mais incógnitas do que equações. Então o sistema de equações (10.3.9), (10.3.10), (10.3.11), (10.3.12) precisa de fórmulas adicionais que relacionem \vec{D} com \vec{E} e \vec{H} com \vec{B} . No caso que haja substâncias ferromagnéticas envolvidas, a relação entre \vec{H} e \vec{B} pode ser bem complicada. No caso de materiais paramagnéticos e diamagnéticos e para campos não excessivamente fortes, podemos usar uma função linear para descrever a relação entre \vec{H} e \vec{B} :

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (10.3.17).$$

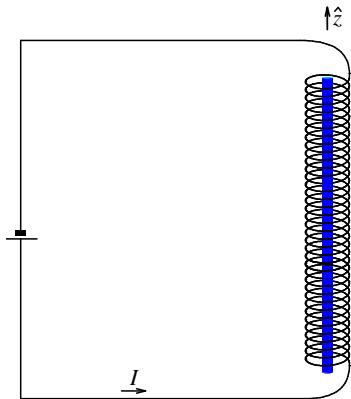
A constante μ_r é uma característica do material e é chamada de *permeabilidade magnética relativa do material*. Este tipo de relação pode ser ainda usado como aproximação no caso de materiais ferromagnéticos com histerese muito estreita.

\vec{E} e \vec{B} são os campos macroscópicos fundamentais e \vec{D} e \vec{H} são respectivamente os campos auxiliares. Então \vec{B} é o análogo magnético de \vec{E} , e \vec{H} é o análogo magnético de \vec{D} . Mas curiosamente aparece às vezes uma analogia entre fórmulas de campos elétricos e magnéticos que favorece associar \vec{D} com \vec{B} e \vec{E} com \vec{H} . Neste sentido a fórmula (10.3.17) é análoga à fórmula

$$\vec{D} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} \quad (10.3.18).$$

Quando tratarmos fenômenos muito rápidos, na faixa de pico ou até de femtosegundo, as relações lineares (10.3.17) e (10.3.18) precisam ser formuladas ainda de maneira um pouco mais sofisticada. A polarização e a magnetização envolvem partículas materiais com inércia. Consequentemente $\vec{D}(t)$ dependerá também de valores anteriores

$\vec{E}(t')$, $t' \leq t$ e igualmente $\vec{H}(t)$ dependem de valores anteriores $\vec{B}(t')$, $t' \leq t$.² A forma mais adequada de tratar esta situação é escrever todos os campos como integrais de Fourier e relacionar as componentes de Fourier. Neste caso, a constante dielétrica κ e a permeabilidade relativa μ_r resultam ser funções da frequência. Há fenômenos bem conhecidos da vida cotidiana que resultam desta dependência da frequência. Por exemplo, as cores do arco íris têm a sua origem na dependência de κ da frequência das ondas eletromagnéticas da luz. Numa outra disciplina, estes efeitos da inércia dos materiais serão tratados mais detalhadamente.



Agora veremos como a permeabilidade relativa de um material pode ser medida no caso mais simples com fenômenos lentos. Imaginem um palito muito comprido feito de algum material posto simetricamente num solenoide de raio R também muito comprido, como mostra a figura 10.3.2. Vamos colocar o eixo z de um sistema de coordenadas cilíndricas no eixo de simetria do palito.

Fig.10.3.2 Palito comprido (azul) de algum material posto simetricamente dentro de uma solenoide comprido.

Vamos tratar este arranjo como infinitamente comprido e vamos supor espiras tão densamente enroladas que o avanço da corrente na direção z possa ser desprezado. Com estas condições, podemos usar os mesmos argumentos de simetria que usamos na seção 7.5. \vec{H} é pseudovetor com \vec{B} , e obtemos para a forma geral do campo \vec{H} :

$$\vec{H}(\mathbf{z}) = \hat{z} H_z(\mathbf{z}) \quad (10.3.19)$$

Sabemos que a magnetização do palito comprido equivale a uma corrente circulando na superfície do palito. Então temos uma corrente circulando nesta superfície e outra circulando nas espiras do solenoide. Para este arranjo de correntes, sabemos perfeitamente que $\vec{B}(\mathbf{z}) = 0$ para pontos fora do solenoide, ou seja, para $\mathbf{z} > R$. Mas nesta região temos

$\vec{H}(\mathbf{z}) = \vec{B}(\mathbf{z})/\mu_0$. Então podemos concluir que $\vec{H}(\mathbf{z}) = 0$ para $\mathbf{z} > R$. Para descobrir os valores de campo auxiliar \vec{H} dentro do solenoide, usaremos a lei (10.3.14) com um caminho de integração indicado na figura 10.3.3. Queremos saber o valor do campo \vec{H} em algum ponto genérico P dentro do solenoide. Na figura 10.3.3, este ponto está fora do palito, mas o resultado não dependerá disso. Como vemos na fórmula (10.3.14), a presença do material do palito não entra no cálculo da integral.

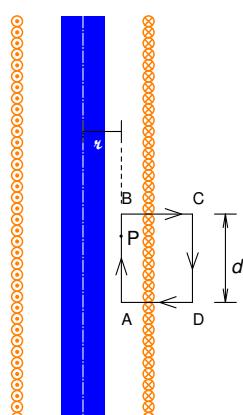


Fig. 10.3.3 Caminho de integração usado para calcular \vec{H} dentro do solenoide.

Os caminhos $B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$ contribuem zero para a integral de linha $\oint_{ABCD} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ por serem perpendiculares ao campo. O caminho $C \rightarrow D$ também não contribui nada, porque

² De fato podem até aparecer dependências cruzadas; $\vec{D}(t)$ pode também depender de $\vec{B}(t')$, $t' \leq t$ e $\vec{H}(t)$ pode também depender de $\vec{E}(t')$, $t' \leq t$.

ao longo deste o campo é zero. O caminho A→B fornece a contribuição $H_z(\mathbf{z})d$. Com uma corrente I injetada nas espiras do solenoide e com um número de espiras por comprimento n , temos $\iint_{ABCD} \vec{j}_c \cdot d\vec{S} = nI d$. Segue com a lei (10.3.14) e com $\partial\vec{D}/\partial t = 0$ que

$$H_z(\mathbf{z})d = \oint_{ABCD} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{ABCD} \vec{j}_c \cdot d\vec{S} = nI d \quad (10.3.20).$$

Então o campo \vec{H} vale

$$\vec{H}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \hat{z}nI & \text{para } \mathbf{z} < R \\ 0 & \text{para } \mathbf{z} > R \end{cases} \quad (10.3.21).$$

nI era a grandeza que usamos nos eixos horizontais das figuras 10.2.3 e 10.2.4 e na definição da susceptibilidade magnética. No lugar da definição da susceptibilidade magnética dada pela fórmula 10.2.4, a qual era especificamente formulada para palitos em bobinas compridas, podemos agora generalizar esta definição escrevendo

$$\vec{M}(\vec{r}) \underset{\text{def.}}{=} \chi_m(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}) \quad (10.3.22).$$

Esta fórmula define a susceptibilidade do material diamagnético ou paramagnético que existe na posição \vec{r} e esta definição não é mais limitada a amostras em forma de palito comprido. No caso de materiais ferromagnéticos, temos que usar uma definição diferencial

$$\chi_m(\vec{r}) \underset{\text{def.}}{=} \frac{\partial \vec{M}(\vec{r})}{\partial \vec{H}(\vec{r})} \quad (10.3.23)$$

que dependerá do valor de \vec{H} e da história da amostra³.

Agora podemos responder à nossa pergunta de como se pode medir a permeabilidade magnética relativa de um material: o resultado (10.3.21) permite reduzir a tarefa de medir μ_r à tarefa de medir a susceptibilidade do material. Pois se combinamos a (10.3.22) com a (10.3.8) e com a (10.3.17) temos

$$\mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H} \quad (10.3.24).$$

Então vale

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (10.3.25).$$

Vale lembrar que esta fórmula pode ser usada para materiais ferro e ferrimagnéticos somente de forma aproximada e somente quando estes materiais tiverem uma histerese muito estreita.

Na seção 4.5, vimos que é importante conhecer as condições de fronteira dos campos \vec{E} e \vec{D} numa interface de dois meios. Condições de fronteira em interfaces são igualmente importantes para os campos \vec{H} e \vec{B} . Das leis em forma integral (10.3.14) e (10.3.15) segue imediatamente que

³ Num caso mais geral, ambas as definições, a (10.3.22) e a (10.3.23), resultam numa susceptibilidade tensorial. Pois para materiais anisotrópicos, \vec{M} e \vec{H} não precisam ser paralelos.

A parcela tangencial do campo \vec{H} é contínua numa interface. (10.3.26)

A parcela normal do campo \vec{B} é contínua numa interface. (10.3.27)

Para deduzir a afirmação (10.3.26), precisa-se supor que não haja correntes superficiais na interface. As deduções das afirmações (10.3.26) e (10.3.27) é um dos exercícios desta seção.

Veremos três exemplos de aplicação destas condições. Imagine um anel feito de um material ferromagnético com histerese muito estreita que permita aplicar as fórmulas (10.3.17) e (10.3.25) de maneira aproximada. A permeabilidade relativa costuma ser muito grande para estes materiais, por exemplo, podemos ter $\mu_r \approx 10^4$. Vamos imaginar que este anel tenha uma fenda estreita de largura d e que enrolemos N espiras de um

arame neste anel como indicado na figura 10.3.4. Vamos injetar nesta bobina uma corrente I moderada para não levar o material do anel em saturação. Queremos calcular o campo magnético na fenda, mais precisamente no centro dela.

Fig.10.3.4 Anel ferromagnético com fenda e bobina.

Esperamos um campo magnético na fenda cujas linhas de campo se parecem com as linhas de campo elétrico num capacitor de placas paralelas. Na beirada da fenda, o campo pode até ser complicado, mas na região central esperamos linhas de força retas e paralelas, como esboçado na figura 10.3.5

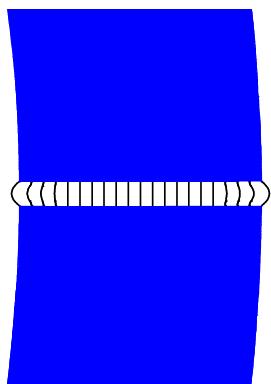


Fig.10.3.5 Esboço das linhas de campo na fenda do anel da figura 10.3.4.

Com linhas de força paralelas e equidistantes, a lei $\text{div } \vec{B} = 0$ implica que \vec{B} é uniforme na região central da fenda. Seja \vec{B}_{centro} o valor do campo nesta região central. Com a condição de fronteira (10.3.27), sabemos que a componente normal do campo \vec{B} , que, aliás, deve ser a única componente, dentro do ferro na região central perto da fenda, tem o mesmo valor \vec{B}_{centro} . Na fenda vale $\vec{H}(\text{na fenda}) = \vec{B}_{\text{centro}} / \mu_0$ e do outro lado da

interface, isto é, dentro do ferro perto da fenda vale $\vec{H}(\text{no ferro perto da fenda}) = \vec{B}_{\text{centro}} / \mu_0 \mu_r$. Então podemos concluir que

$$\frac{|\vec{H}(\text{no ferro perto da fenda})|}{|\vec{H}(\text{na fenda})|} = \frac{1}{\mu_r} \quad (10.3.28)$$

As linhas de campo dentro do anel devem aproximadamente seguir a forma do anel e podemos supor que vale em todo anel aproximadamente

$$\frac{|\vec{H}(\text{no ferro})|}{|\vec{H}(\text{na fenda})|} \approx \frac{1}{\mu_r} \quad (10.3.29).$$

Agora vamos aplicar a lei de Ampère (10.3.14) com um caminho de integração que segue o centro do material ferroso como indicado com uma linha verde na figura 10.3.6.

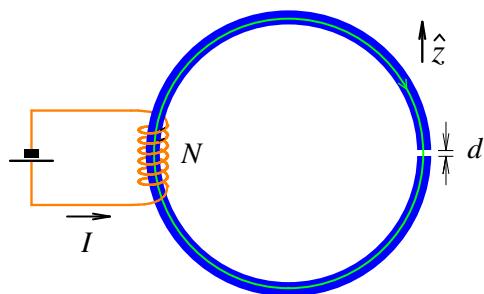


Fig. 10.3.6 Linha de integração mostrada em verde para a aplicação da lei de Ampère.

aproximação, obtemos

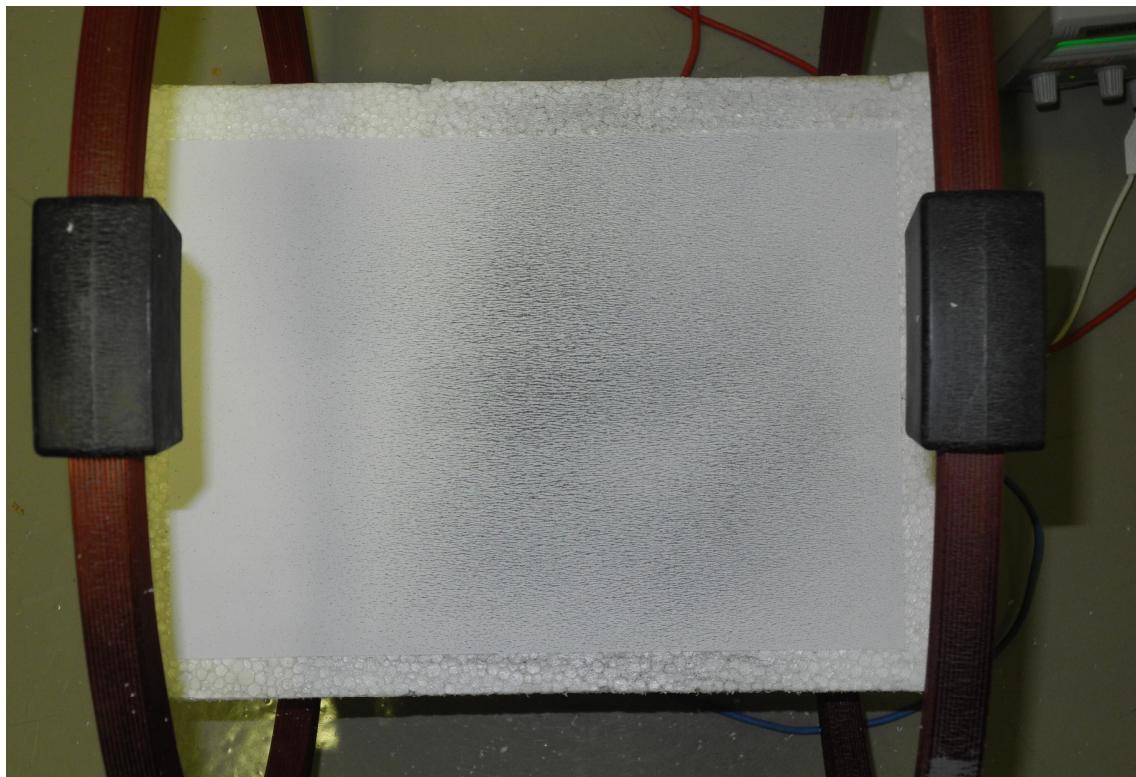
$$d(-\hat{z}) \cdot \vec{H}(\text{na fenda}) \approx \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI \quad (10.3.30).$$

Sabendo que \vec{H} e \vec{B} no centro da fenda apontam na direção normal da interface, obtemos finalmente:

$$\vec{B}(\text{no centro da fenda}) \approx -\hat{z} \mu_0 \frac{N}{d} I \quad (10.3.31)$$

Isto iguala o campo magnético de uma bobina comprida sem ferro com uma densidade de espiras $n = N/d$. Então com uma fenda estreita pode-se criar uma densidade efetiva de espiras muito elevada.

Fig. 10.3.8 Campo uniforme no espaço entre bobinas de Helmholtz indicado com limalha de ferro.



Agora vamos discutir o campo magnético ao redor de uma barra de ferro que foi introduzida numa região onde existia antes um campo magnético uniforme. Montei bobinas de Helmholtz e coloquei uma mesa feita de um bloco de poliestireno entre as bobinas. Cobri esta mesa com uma folha de papel branco e, depois de ligar a corrente que gera campo, despejei limalha de ferro na folha. A figura 10.3.7 mostra que se geram finas linhas paralelas e equidistantes da limalha de ferro. Isto indica a presença de um campo magnético uniforme.

Agora cobri a mesa de poliestireno que possui um entalhe retangular com uma folha de papel com um furo retangular e encaixei uma barra de ferro no entalhe através do furo. De novo despejei limalha de ferro para mostrar as linhas do campo magnético. A fotografia na figura 10.3.9 mostra que as linhas de campo são sugadas para dentro da barra de ferro.

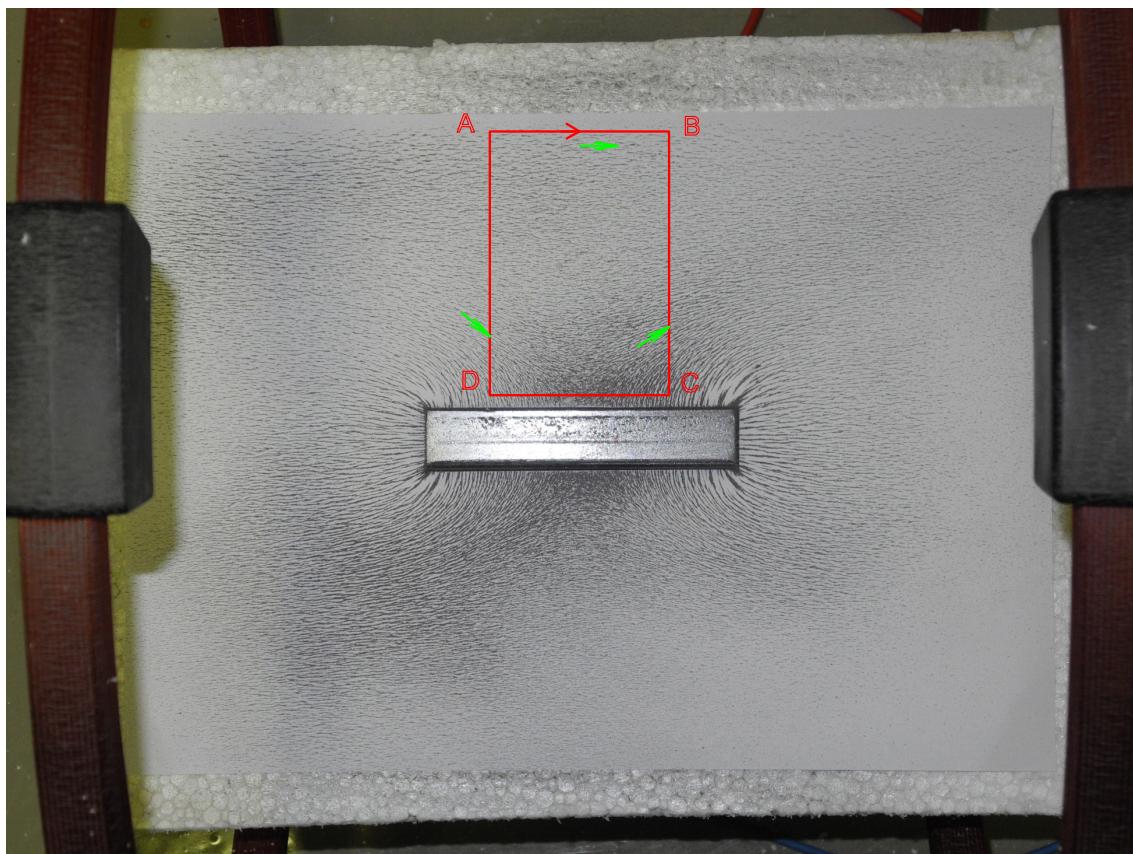


Fig. 10.3.9 Campo em volta de uma barra de ferro que foi introduzida num campo originalmente uniforme. As linhas de campo marcadas por limalha de ferro parecem ser sugadas para dentro da barra. Um desenho de um caminho fechado $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ e de valores do campo \vec{H} em três pontos foi sobreposto à fotografia.

Tentaremos entender por que isto acontece. A figura 10.3.9 mostra também o desenho de um caminho de integração superposto à fotografia. Não passa corrente de condução através da área retangular circunscrita por este caminho. Portanto a integral de caminho do campo \vec{H} deve ser zero. No lado que fica mais longe da barra de ferro, isto é, no trecho $A \rightarrow B$, temos praticamente o antigo campo que tinha antes de colocar a barra de ferro. Este lado do retângulo dará uma contribuição positiva para a integral $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$. Indiquei o valor do campo nesta região com uma seta verde. Antes de introduzir a barra de ferro, o trecho $C \rightarrow D$ teria cancelado esta contribuição positiva. Mas, com a presença da barra, a situação é outra. Como no exemplo anterior, podemos supor que o campo \vec{H}

dentro do ferro é desprezível. Com a condição (10.3.26), podemos concluir que agora o campo \vec{H} do trecho $C \rightarrow D$ que passa ao longo da barra é praticamente perpendicular ao vetor \overline{CD} . Então, na presença da barra, o cancelamento da contribuição positiva tem que vir dos lados $B \rightarrow C$ e $D \rightarrow A$ do retângulo. Consequentemente o campo \vec{H} tem que ter agora componentes na direção destes lados, como indicado com as setas verdes inclinadas. Isto significa que as linhas de campo apontam para a barra. Repare na imagem que as linhas de campo entram na superfície do ferro praticamente perpendicularmente. Isto está de acordo com a hipótese de que dentro do ferro vale $\vec{H} \approx 0$ e com a continuidade da componente tangencial de \vec{H} na interface.

Como terceiro exemplo de aplicação das condições de contorno dos campos \vec{H} e \vec{B} , discutiremos um corpo de um material de alta permeabilidade relativa, $\mu_r \approx 10^4$, que possui uma cavidade na qual vale $\mu_r = 1$. Vamos imaginar que este corpo foi introduzido numa região com um campo magnético fraco. O campo deve ser suficientemente fraco para não levar o material do corpo à saturação. De novo vamos desprezar o campo \vec{H} dentro do material de alta permeabilidade. Com a condição da continuidade da componente tangencial de \vec{H} , sabemos que o campo \vec{H} pode ter somente componente normal na superfície da cavidade. Se não houver correntes dentro da cavidade, temos dentro dela

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad \text{dentro da cavidade} \quad (10.3.32).$$

Então, dentro da cavidade, o campo \vec{H} é conservativo e pode ser escrito como gradiente de um potencial, e a superfície da cavidade seria uma superfície equipotencial. Com $\mu_r = 1$ dentro da cavidade e com $\text{div } \vec{B} = 0$, temos também

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad \text{dentro da cavidade} \quad (10.3.33).$$

Então, dentro da cavidade, \vec{H} obedece às mesmas equações diferenciais e à mesma condição de contorno que o campo \vec{E} numa gaiola de Faraday. Com o teorema de unicidade, que formulamos na seção 3.2, podemos concluir que $\vec{H} = 0$ dentro da cavidade e consequentemente também

$$\vec{B} = 0 \quad \text{dentro da cavidade} \quad (10.3.34).$$

Esta igualdade não é exata, pois fizemos a aproximação $\vec{H} \approx 0$ dentro do material, mas para muitas aplicações o campo magnético neste tipo de cavidade é suficientemente pequeno.

O resultado (10.3.34) significa que materiais de alta permeabilidade magnética podem ser usados para blindar campo magnético. Isto é usado em equipamentos sensíveis a campo magnético, por exemplo, nos tubos de multiplicação de elétrons que mencionamos na seção 6.5, ou nos tubos de Braun que descrevemos da seção 3.4. Nestes equipamentos campo magnético, mesmo o campo fraco da Terra, pode perturbar as trajetórias dos elétrons.

Acrescentamos dois apêndices nesta seção. No primeiro apêndice, olhamos a contribuição ($\text{rot } \vec{M}$) para a densidade de corrente de maneira mais formal. No segundo apêndice, discutimos a densidade de fluxo de energia eletromagnética incluindo

materiais magnéticos. Estes apêndices ultrapassam o nível do ciclo básico consideravelmente.

Exercícios:

E 10.3.1: Deduza as condições de continuidade (10.3.26) e (10.3.27) para interfaces de materiais a partir das equações de Maxwell (10.3.15) e (10.3.14) supondo a ausência de correntes superficiais na interface.

E 10.3.2: Um engenheiro precisou de um motor linear e montou a seguinte construção: ele fabricou um pote cilíndrico com um eixo central coaxial como está mostrado na figura 10.3.10. Este pote é feito de um material ferromagnético com altíssima permeabilidade magnética. No fundo do pote, ele colocou uma bobina com N_1 espiras e pendurou uma segunda bobina com N_2 espiras numa altura z em cima da primeira. Ao

injetar correntes I_1 e I_2 nas bobinas, ele verificou que aparece uma força sobre a bobina 2. Experimentalmente ele verificou que a força, em boa aproximação, é independente da altura z , enquanto a bobina 2 não estiver perto da boca do pote. O engenheiro gostaria de saber de que parâmetros a força depende. Por exemplo, ele gostaria de saber se a força depende dos raios das bobinas e, se for possível, ele gostaria de ter uma maneira de calcular a força. Você poderia ajudar?

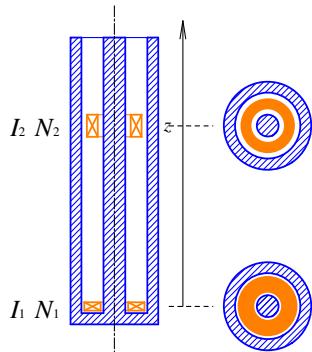


Fig. 10.3.10 Motor linear. Duas bobinas (cor abóbora) se encontram num pote de material ferromagnético (cor azul) com coluna central. A bobina no fundo do pote é fixa e a bobina na altura z é móvel.

E 10.3.3: Esboce as linhas de campo dos campos \vec{H} e \vec{B} dentro e fora de um ímã indicando com setas os sentidos dos campos. **Atenção!** Dentro de um imã permanente **não** vale $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$ e \vec{H} **não** é desprezível!

E 10.3.4: Escreva os pontos essenciais desta seção.

10.3.3 Apêndice A

Vamos definir a magnetização \vec{M} de forma análoga à definição da polarização dada no apêndice 4.5:

$$\vec{M}(\vec{r}) \underset{\text{def.}}{=} \sum_k \vec{m}_k f(\vec{r}_k - \vec{r}) \quad (10.3.35).$$

Nesta fórmula, o somatório se estende sobre todas as moléculas ou todos os átomos da amostra. \vec{m}_k é o pseudovetor que caracteriza o dipolo magnético da k -ésima molécula. $f(\vec{r})$ é uma função diferenciável com

$$\iiint f(\vec{r}) d^3r = 1 \quad (10.3.36).$$

Esta função é essencialmente constante com o valor $\approx 3/(4\pi R^3)$ para $|\vec{r}| < R - \varepsilon$ e essencialmente zero para $|\vec{r}| > R + \varepsilon$, com $0 < \varepsilon \ll R$. O raio R deve ser tão pequeno que a esfera com este raio possa ser considerada um ponto na escala macroscópica, mas R deve ser grande o suficiente para que esta esfera contenha um número grande de moléculas. Vamos ainda supor que f seja uma função par:

$$f(\vec{r}) = f(-\vec{r}) \quad (10.3.37).$$

O que precisamos definir aqui mais cuidadosamente é o vetor dipolo \vec{m}_k que aparece na fórmula. No apêndice 6.6, associamos o pseudovetor

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_0^1 \left(\vec{r}_{\partial S} \times \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (10.3.38)$$

com uma espira de corrente. Caso se observe esta espira de corrente num ponto muito distante da espira, esta representa um dipolo magnético caracterizado por \vec{m} . Além disso, mencionamos na seção 7.2 que tal dipolo gera um campo que tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\vec{B}(\vec{r}) \underset{R \ll |\vec{r} - \vec{r}_m|}{\sim} \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{((\vec{r} - \vec{r}_m) \cdot \vec{m})}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^5} (\vec{r} - \vec{r}_m) - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right\} \quad (10.3.39).$$

Agora, o movimento de um elétron na órbita num átomo não corresponde a uma corrente I que flui numa linha matemática descrita por uma função $\vec{r}_{\partial S}$. Poder-se-ia generalizar a fórmula (10.3.38) substituindo a linha de corrente por uma distribuição de densidade de corrente e usar a seguinte fórmula para \vec{m} :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d^3 \vec{r} \quad (10.3.40).$$

Talvez isto chegaria mais perto da estrutura de um átomo. Mas há ainda um caso que não se pode descrever através deste tipo de distribuição de densidade de corrente. É justamente o caso mais importante, o caso do spin do elétron. Originalmente Uhlenbeck e Goudschmidt tinham até imaginado que o elétron fosse uma pequena esfera carregada que gira. Mas hoje sabemos que esta imagem é insustentável. Em primeiro lugar, com este modelo, não se pode explicar o fator 2 da proporcionalidade entre momento angular e momento magnético, que mencionamos na seção 10.2, isto é, o fator que diferencia as fórmulas 10.2.3 e 10.2.2. E, em segundo lugar, pode-se mostrar que a superfície desta esfera tem que mover-se com velocidade acima da velocidade da luz para ser compatível com as propriedades do elétron. Então um elétron não é uma bola que gira!

O spin do elétron é um conceito que pode ser compreendido somente com elevado conhecimento da mecânica quântica. Felizmente podemos evitar toda esta problemática. O que nos interessa aqui é apenas o campo gerado pelo dipolo magnético, e para este campo não faz diferença se o dipolo é realizado por uma pequena espira de corrente, por uma distribuição de densidade de corrente, ou por um spin. Aqui podemos adotar a seguinte definição de dipolo magnético:

Um dipolo magnético é um objeto pontual, caracterizado por um pseudovetor \vec{m} , que gera o mesmo campo magnético gerado por uma espira circular de corrente com raio a , no limite $a \rightarrow 0$, com plano perpendicular ao pseudovetor \vec{m} , com corrente I tal que $|I|\pi a^2 = |\vec{m}|$ e com orientação tal que o sentido positivo da corrente forme com \vec{m} um parafuso direito.

No caso do movimento orbital de um elétron, uma descrição através de um objeto pontual é apenas uma idealização que simplifica os cálculos, mesmo que isto faça necessário o uso de objetos matemáticos estranhos.

Mostra-se num curso mais avançado de eletromagnetismos que este campo gerado por um dipolo \vec{m} que se encontra da posição \vec{r}_m é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_m)}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right) \quad (10.3.41).$$

Podemos calcular este rotacional de um produto vetorial com a regra do *bacmenoscab*:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\vec{r}} \times \left(\frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_m)}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{m} \left(\nabla_{\vec{r}} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right) - (\vec{m} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\vec{m} \text{div}_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right)}_T + \underbrace{3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_m)(\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_m))}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^5}}_H - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right\} \end{aligned} \quad (10.3.42).$$

Anotei nos operadores diferenciais “ ∇ ” e “ div ” que eles se referem à variável \vec{r} . O segundo termo é justamente a expressão assintótica (10.3.39). Em muitos livros de eletromagnetismo, o primeiro termo é até esquecido, pois para todo $\vec{r} \neq \vec{r}_m$ ele é zero. Mas aqui ele não pode ser esquecido; ele dará uma contribuição essencial. Este termo é interessante; ele é um dos objetos matemáticos estranhos que mencionamos acima.

Vejam o campo vetorial $(\vec{r} - \vec{r}_m)/|\vec{r} - \vec{r}_m|^3$! Esta função vetorial difere do campo eletrostático de uma carga pontual q na posição \vec{r}_m apenas pela falta do fator $q/4\pi\epsilon_0$. A divergência de um campo elétrico é a densidade de carga dividida por ϵ_0 . Obviamente a densidade de carga de uma carga pontual na posição \vec{r}_m é zero para toda posição diferente desta, ou seja, para todo \vec{r} diferente de \vec{r}_m . Mas para $\vec{r} = \vec{r}_m$ a densidade de carga é infinita. Este infinito não é um infinito qualquer, pois sabemos que a carga total vale q . Integrando esta densidade de carga, deve ter resultado o valor q . Então a divergência do campo $(\vec{r} - \vec{r}_m)/|\vec{r} - \vec{r}_m|^3$ é uma “função” tal que

$$\operatorname{div}_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right) = 0 \quad \text{para } \vec{r} \neq \vec{r}_m$$

e

$$\iiint \operatorname{div}_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right) d^3 \vec{r} = 4\pi$$
(10.3.43).

No sentido das definições que se aprendem nos cursos de Cálculo I, não existe uma função que satisfaça estas duas exigências. Em 1930, num livro de mecânica quântica, o físico Dirac criou a ideia de uma função, $\delta(x)$, que é zero para todo $x \neq 0$, mas que satisfaz $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$ para funções contínuas g . Depois Sergei Lvovich Sobolev e Laurent-Moïse Schwartz elaboraram uma teoria rigorosa deste tipo de *função generalizada*. Estes objetos estranhos são também chamados de *distribuições*. Há duas maneiras de defini-las: elas podem ser definidas como sequências de funções ordinárias, ou elas podem ser definidas como funcionais lineares⁴ em espaços de funções diferenciáveis⁵. Resulta que em muitos aspectos estas funções generalizadas podem ser manipuladas como se fossem funções comuns; podemos derivá-las, podemos calcular transformadas de Fourier delas e em integrais podemos aplicar integração por partes. Pode-se definir uma versão tridimensional da função δ de Dirac: $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ com $\delta^{(3)}(\vec{r}) = 0$ para $\vec{r} \neq 0$ e $\iiint \delta^{(3)}(\vec{r}) d^3 \vec{r} = 1$. Com esta função generalizada $\delta^{(3)}$, podemos escrever

$$\operatorname{div}_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right) = 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_m) \quad (10.3.44).$$

Com a fórmula (10.3.42) podemos formular nossa definição de dipolo magnético de maneira mais sucinta:

Um dipolo magnético é um objeto pontual, caracterizado por um pseudovetor \vec{m} que, posto na posição \vec{r}_m , gera o campo magnético

$$\vec{B}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \vec{m} 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_m) + 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_m)(\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_m))}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right\} \quad (10.3.45).$$

Agora vamos supor que haja um número grande de dipolos magnéticos \vec{m}_k em respectivas posições \vec{r}_k dentro de um pedaço de matéria. Estes dipolos geram o campo magnético

⁴ Mapeamentos lineares e contínuos que mapeiam elementos de um espaço linear em números.

⁵ L. Schwartz: Some applications of the theory of distributions *Lectures on Modern Mathematics*, vol. I, New York: Wiley, 1963, p. 23-58.

L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

H. Triebel: *Höhere Analysis* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1972

$$\bar{B}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \left\{ \vec{m}_k 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k) + 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_k)(\vec{m}_k \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k))}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^5} - \frac{\vec{m}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \right\} \quad (10.3.46).$$

Na nossa descrição macroscópica, interessa o campo médio associado a este campo. Vimos no apêndice 4.5 como se calcula a média macroscópica de um campo. Devemos integrar o campo com a função f , a mesma da fórmula (10.3.35), formando uma integral de convolução:

$$\begin{aligned} \vec{B}_M(\vec{r}) &= \iiint \vec{B}_M(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r}' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \sum_k \left\{ \vec{m}_k 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_k) + 3 \frac{(\vec{r}' - \vec{r}_k)(\vec{m}_k \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_k))}{|\vec{r}' - \vec{r}_k|^5} - \frac{\vec{m}_k}{|\vec{r}' - \vec{r}_k|^3} \right\} f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r}' \end{aligned} \quad (10.3.47)$$

Repare que o “ B ” do lado esquerdo é uma letra em negrito, indicando campo macroscópico, enquanto o “ B ” na integral não é letra em negrito.

O que vamos mostrar agora é que a densidade de corrente $\vec{j}_M = \text{rot}_{\vec{M}} \vec{M}$ gera exatamente este mesmo campo macroscópico. Faremos isto inserindo este campo vetorial no lugar da densidade de corrente na lei de Boit-Savart na forma da fórmula (7.1.10):

$$\vec{B}_{\text{Biot-Savart, rot} \vec{M}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{(\text{rot}_{\vec{r}_I} \vec{M}(\vec{r}_I)) \times (\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} d^3 \vec{r}_I \quad (10.3.48).$$

Anotei nesta fórmula que o operador diferencial “rot” se refere à variável \vec{r}_I . Na verdade, isto é desnecessário, já que $\vec{M}(\vec{r}_I)$ depende somente desta variável. Mas logo vamos mover estas derivadas parciais para outros lugares usando integração por partes e então será necessário indicar a variável à qual as derivadas se referem.

Vamos inserir a expressão (10.3.35) na (10.3.48) e vamos usar a regra *bacmenoscab*:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{Biot-Savart, rot} \vec{M}}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\left(\text{rot}_{\vec{r}_I} \sum_k \vec{m}_k f(\vec{r}_k - \vec{r}_{\vec{r}_I}) \right) \times (\vec{r} - \vec{r}_I)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} d^3 \vec{r}_I = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \iiint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I) \times ((\text{grad}_{\vec{r}_I} f(\vec{r}_k - \vec{r}_{\vec{r}_I})) \times \vec{m}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} d^3 \vec{r}_I \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \iiint \left[(\text{grad}_{\vec{r}_I} f(\vec{r}_k - \vec{r}_{\vec{r}_I})) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I) \cdot \vec{m}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} - \frac{\vec{m}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} ((\vec{r} - \vec{r}_I) \cdot \text{grad}_{\vec{r}_I} f(\vec{r}_k - \vec{r}_{\vec{r}_I})) \right] d^3 \vec{r}_{\vec{r}_I} \end{aligned} \quad (10.3.49)$$

Agora vamos aplicar integração por partes considerando que os termos de superfície⁶ são zero:

⁶ Estamos integrando sobre o espaço inteiro, e os campos e a função f são supostamente zero no infinito.

$$\begin{aligned}
& \vec{B}_{\text{Biot-Savart, rot } \vec{M}}(\vec{r}) = \\
& = +\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \iiint f(\vec{r}_k - \vec{r}_I) \left[\text{grad}_{\vec{r}_I} \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}_I) \cdot \vec{m}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} \right) - \vec{m}_k \text{div}_{\vec{r}_I} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_I}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} \right) \right] d^3 \vec{r}_I \\
& = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \iiint f(\vec{r}_k - \vec{r}_I) \left[3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_I) \cdot \vec{m}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} (\vec{r} - \vec{r}_I) - \frac{\vec{m}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} + \vec{m}_k 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_I) \right] d^3 \vec{r}_I
\end{aligned} \tag{10.3.50}$$

Consideramos que

$$\text{div}_{\vec{r}_I} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_I}{|\vec{r} - \vec{r}_I|^3} \right) = -\text{div}_{\vec{r}} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right) \tag{10.3.51}.$$

Finalmente fazemos a substituição de variável de integração $\vec{r}' = -\vec{r}_I + \vec{r}_k + \vec{r}$ e obtemos:

$$\vec{B}_{\text{Biot-Savart, rot } \vec{M}}(\vec{r}) = \vec{B}_M(\vec{r}) \tag{10.3.52}.$$

Então, mesmo que o momento de dipolo magnético de um spin de elétron não seja uma corrente circular, o campo médio gerado pelos spins é o mesmo que um campo gerado pela densidade de corrente $\vec{j}_M = \text{rot } \vec{M}$.

Com esta análise formal, conhecemos a importante função generalizada δ . Naturalmente esta distribuição assusta, mas ela é uma das funções mais facilmente integráveis. Vale a pena calcular a integral que envolve a $\delta^{(3)}$ na fórmula (10.3.47):

$$\begin{aligned}
& \vec{B}_M(\vec{r}) = \\
& = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \sum_k \left\{ 3 \frac{(\vec{r}' - \vec{r}_k) (\vec{m}_k \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_k))}{|\vec{r}' - \vec{r}_k|^5} - \frac{\vec{m}_k}{|\vec{r}' - \vec{r}_k|^3} \right\} f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r}'
\end{aligned} \tag{10.3.53}$$

Então percebemos que o termo $\mu_0 \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_m)$ na expressão do campo de um dipolo magnético não pode ser esquecido. Ele dá a contribuição $\mu_0 \vec{M}$ para o campo magnético dentro de uma amostra. Esta contribuição é importantíssima.

10.3.3 Apêndice B

No apêndice 9.4, analisamos os fluxos de energia num circuito formado por uma fonte de voltagem radial, um cabo coaxial feito de dois cilindros perfeitamente condutores e um resistor radial. No espaço entre os condutores do cabo coaxial não havia matéria. Esta análise nos motivou a supor que a densidade de fluxo de energia eletromagnética numa região vazia é dada pelo vetor

$$\vec{j}_{En.EM} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{no vácuo}) \tag{10.3.54}.$$

Agora podemos imaginar que haja alguma substância não condutora entre os condutores deste cabo coaxial. Podemos investigar se a polarização elétrica \vec{P} e a magnetização

\vec{M} podem causar alguma alteração na expressão da densidade de fluxo de energia. A integral de superfície da densidade de fluxo de energia, integrada sobre uma superfície que separa fonte e resistor, deve ser igual ao produto $\mathcal{E}I$, sendo \mathcal{E} a eletromotância da fonte e I a corrente do circuito. Como a fonte é supostamente uma fonte ideal de voltagem, a eletromotância é igual à diferença de potencial elétrico entre os condutores do cabo. Esta diferença de potencial está diretamente relacionada com o campo elétrico macroscópico \vec{E} e não depende da polarização \vec{P} . Isto sugere que devemos usar \vec{E} no lugar de \vec{E} da fórmula (10.3.54) quando queremos descrever fluxos de energia elétrica dentro da matéria.

O que devemos usar no lugar de \vec{B}/μ_0 ? Deve ser um campo que se relacione com a corrente de condução no circuito. Com a equação de Maxwell (10.3.14) percebemos que o campo adequado é o campo auxiliar \vec{H} . Então nossa aposta é que a densidade macroscópica de fluxo de energia eletromagnética na presença de um meio material é

$$\vec{j}_{En.EM}^{\text{APOSTA}} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (\text{dentro da matéria}) \quad (10.3.55).$$

Coloquei um índice “APOSTA” nesta densidade de fluxo de energia indicando que se trata apenas de uma hipótese. Logo mais veremos que esta expressão não representa toda a verdade.

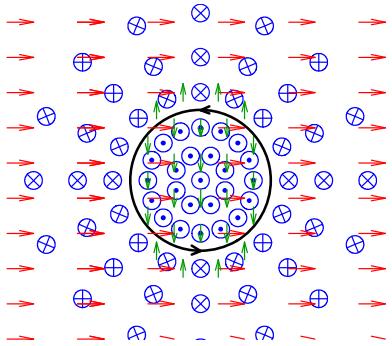
Agora vamos tentar entender esta fórmula e sua relação com a fórmula (10.3.54). Há duas questões notáveis envolvidas: em primeiro lugar, a substituição do campo \vec{B}/μ_0 pelo \vec{H} é essencialmente uma subtração de um $\vec{E} \times \vec{M}$. O que motiva esta subtração? E em segundo lugar, a questão da média macroscópica. Fazer médias com expressões lineares não causa problemas. Mas $\vec{j}_{En.EM}$ é um termo bilinear. A média de um produto não é igual ao produto das médias dos fatores.

Para entendermos estas questões, precisamos enfrentar a difícil interface entre descrição macroscópica e microscópica. Vamos estudar um dipolo magnético numa região com campo elétrico. A densidade de fluxo de energia eletromagnética que resulta das fórmulas (10.3.45) e (10.3.54) para esta configuração é

$$\vec{j}_{En.EM}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}(\vec{r}) \times \left\{ \vec{m} 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_m) + 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_m)(\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_m))}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right\} \quad (10.3.56)$$

O termo que cai com a terceira potência do módulo $|\vec{r} - \vec{r}_m|$ descreve uma densidade de fluxo que pode perfeitamente contribuir para uma densidade de fluxo macroscópica de energia. Já o termo da função delta de Dirac é uma densidade de fluxo sumamente estranha. Ela aponta numa única direção, a saber, na direção do vetor $\vec{E}(\vec{r}_m) \times \vec{m}$, e ela começa e termina no mesmo ponto. Uma densidade de fluxo que aponta numa única direção e que começa em algum lugar tem uma fonte. Para garantir conservação de energia numa situação estacionária, ela teria que ser compensada por um fluxo de energia contrário. Então deve haver um outro fluxo de energia não eletromagnético que compense este fluxo. Para entender esta situação melhor, vamos abrir mão da idealização de dipolo pontual e vamos investigar os fluxos de energia de uma pequena espira circular de corrente posto num campo elétrico.

Fig. 10.3.11 Campo magnético e elétrico de uma espira circular de corrente posto num campo elétrico uniforme. As flechas azuis representam o campo magnético, as setas vermelhas o campo elétrico e as setas verdes representam direção e sentido do campo $\vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$.



sentidos dos vetores $\vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$ com setas verdes. Percebemos que entra energia eletromagnética na parte inferior da espira e sai energia eletromagnética na parte superior da espira. Isto faz muito sentido, já que as partículas eletricamente carregadas que circulam na espira se movem contra a força elétrica na parte superior e a favor da força elétrica na parte inferior.

Consequentemente, as partículas que passam da parte inferior da espira para a parte superior terão uma energia cinética maior do que aquelas que passam da parte superior para a inferior. Então há um fluxo de energia mecânica da parte inferior para a parte superior. Este fluxo de energia mecânica compensa o fluxo de energia eletromagnética e a conservação de energia é garantida. Este fluxo de energia eletromagnética não transporta energia para longe. A energia circula no lugar da espira sendo levada de volta em forma de energia mecânica.

O mesmo acontece com o termo $\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_m)$. Ele representa uma energia que circula, mas não sai do lugar. Se toda esta circulação fosse de natureza eletromagnética, poderíamos contar estes fluxos no vetor $\vec{j}_{En.EM}$ sem problema. Mas como parte desta circulação é energia mecânica e não aparece na contabilidade eletromagnética, a contagem do termo $\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{m} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_m)$ seria indevida. Por esta razão, devemos subtrair o termo $\sum_k \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{m}_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k)$ da densidade de fluxo $\vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$.

Podemos definir um campo auxiliar microscópico

$$\vec{H}(\vec{r}) \underset{def.}{=} \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} - \sum_k \vec{m}_k \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (10.3.57),$$

e com este campo, a densidade de fluxo de energia eletromagnética seria

$$\vec{j}_{En.EM}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \quad (10.3.58).$$

Resta a tarefa de entender a média macroscópica destas grandezas. Para qualquer campo C formamos a média macroscópica integrando com a função f da fórmula (10.3.35):

$$C(\vec{r}) = \iiint C(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 r' \quad (10.3.59)$$

C pode representar o campo $\vec{j}_{En.EM}$, o campo \vec{E} ou o campo \vec{H} . Para os campos \vec{E} e \vec{H} , vamos definir ainda as diferenças entre campo verdadeiro e campo médio: $\vec{e} = \vec{E} - \vec{E}'$, $\vec{h} = \vec{H} - \vec{H}'$. Temos

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{En.EM}(\vec{r}) &= [\vec{E}(\vec{r}) + \vec{e}(\vec{r})] \times [\vec{H}(\vec{r}) + \vec{h}(\vec{r})] = \\
&= \underbrace{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})}_{I} + \underbrace{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{h}(\vec{r})}_{II} + \underbrace{\vec{e}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})}_{III} + \underbrace{\vec{e}(\vec{r}) \times \vec{h}(\vec{r})}_{IV} \quad (10.3.60).
\end{aligned}$$

Agora vamos investigar a média macroscópica deste campo. \vec{E} , \vec{H} de $\vec{E} \times \vec{H}$ são funções lentamente variáveis na escala definida pelo raio R da esfera usada para o cálculo, médias. Por esta razão, valem as seguintes igualdades aproximadas:

$$\iiint \vec{E}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r} \approx \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \quad (10.3.61)$$

$$\begin{aligned}
\iiint \vec{E}(\vec{r}') \times \vec{h}(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r} &\approx \\
&\approx \vec{E}(\vec{r}) \times \iiint \vec{h}(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r} \approx 0 \quad (10.3.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint \vec{e}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r} &\approx \\
&\approx (\iiint \vec{e}(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \approx 0 \quad (10.3.63).
\end{aligned}$$

A média do quarto termo da fórmula (10.3.60) seria também zero, se os campos \vec{e} e \vec{h} fossem não correlacionados. Mas geralmente na região onde há campo magnético intenso, há também campo elétrico intenso. Então não é nada óbvio que a média do termo IV seja zero. Perto de um elétron, o campo $\vec{e} \times \vec{h}$ deve ser algo como

$$\begin{aligned}
\vec{e}(\vec{r}) \times \vec{h}(\vec{r}) &\approx \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{q(\vec{r} - \vec{r}_m)}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \times \left\{ 3 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_m)(\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_m))}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} \right\} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{q(\vec{r} - \vec{r}_m) \times \vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^6} \quad (10.3.64)
\end{aligned}$$

Isto é uma densidade de fluxo que dá voltas em torno do eixo \vec{m} e não leva energia para longe. Quando se faz a media macroscópica deste tipo de contribuição também sai algo perto de zero. Então podemos crer que a média do quarto termo da fórmula (10.3.60) seja também pequeno. Juntando estes argumentos podemos dizer que

$$\vec{j}_{En.EM}(\vec{r}) = \iiint \vec{j}_{En.EM}(\vec{r}') f(\vec{r}' - \vec{r}) d^3 \vec{r}'' \approx \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \quad (10.3.65).$$

Chegamos a um resultado nem um pouco satisfatório! Obtivemos uma aproximação com argumentos vagos sem nenhuma avaliação quantitativa da qualidade desta aproximação. O melhor que se faz é admitir que $\vec{j}_{En.EM}$ e $\vec{E} \times \vec{H}$ podem ser diferentes.

O que será esta diferença? É uma densidade de fluxo de energia eletromagnética que não é descrita em termos dos campos macroscópicos \vec{E} e \vec{H} . A energia transferida não descrita em termos de parâmetros macroscópicos chamamos de calor. Então $\vec{j}_{En.EM} - \vec{E} \times \vec{H}$ é uma densidade de fluxo de calor.

Mas isto não é tudo. Na prática, parte do próprio campo $\vec{E} \times \vec{H}$ será geralmente também considerada como densidade de fluxo de calor. Para entender isto, devemos olhar os campos macroscópicos \vec{E} e \vec{H} com mais atenção. Os comprimentos de onda típicos da radiação térmica de um corpo à temperatura ambiente são da ordem de $10\mu\text{m}$. Numa

esfera de raio $R = 0,05\mu\text{m}$ numa substância sólida temos aproximadamente 10^7 átomos. Isto é um número suficientemente grande para garantir uma boa formação de média macroscópica. Por outro lado, $R = 0,05\mu\text{m}$ é bem menor que os comprimentos de onda típicos da radiação térmica. Então os campos eletromagnéticos desta radiação podem perfeitamente ser descritos com os campos macroscópicos \vec{E} e \vec{H} . Mas as ondas da radiação térmica correspondem a campos imprevisíveis que permitem apenas tratamentos probabilísticos. Então geralmente vamos destacar nos campos macroscópicos ainda uma parte bem ordenada, que pode ser medida ou calculada, e uma parte estocástica, que admite somente tratamentos probabilísticos: $\vec{E} = \vec{E}_{ordenado} + \vec{E}_{estocástico}$ e $\vec{H} = \vec{H}_{ordenado} + \vec{H}_{estocástico}$. Somente o vetor de Poynting formado com os campos ordenados será interpretado como densidade de fluxo de trabalho:

$$\vec{j}_{TrabalhoEM} = \vec{E}_{ordenado} \times \vec{H}_{ordenado} \quad (10.3.66).$$

Consequentemente a diferença da densidade macroscópica de fluxo de energia eletromagnética e a de trabalho é a densidade de fluxo de calor eletromagnético:

$$\vec{j}_{calor EM} = \vec{j}_{En.EM} - \vec{E}_{ordenado} \times \vec{H}_{ordenado} \quad (10.3.67).$$

Trabalho é uma energia transferida para um sistema. A taxa desta transferência pode ser contabilizada no caminho ou no local do destino. A primeira opção corresponde à descrição por densidades de fluxo; a taxa de entrada de trabalho num sistema é a integral de superfície da densidade de fluxo. A integral é calculada na superfície do sistema. Na segunda alternativa, descreveremos a taxa de entrada de trabalho com uma integral de volume de uma densidade volumétrica de taxa de trabalho. Há um teorema, conhecido com o nome de teorema de Poynting, que permite relacionar estas duas maneiras de descrever o trabalho eletromagnético. É fácil mostrar este teorema. Vamos calcular a divergência de $\vec{j}_{TrabalhoEM}$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}_{ordenado} \times \vec{H}_{ordenado}) &= \vec{H}_{ordenado} \cdot \text{rot } \vec{E}_{ordenado} - \vec{E}_{ordenado} \cdot \text{rot } \vec{H}_{ordenado} = \\ &= -\vec{H}_{ordenado} \cdot \frac{\partial \vec{B}_{ordenado}}{\partial t} - \vec{E}_{ordenado} \cdot \vec{j}_{ordenado} - \vec{E}_{ordenado} \cdot \frac{\partial \vec{D}_{ordenado}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.3.68)$$

No segundo passo, consideramos que os campos ordenados obedecem também às equações de Maxwell. A grandeza

$$\rho_{taxa trabalho EM} = \vec{H}_{ordenado} \cdot \frac{\partial \vec{B}_{ordenado}}{\partial t} + \vec{E}_{ordenado} \cdot \vec{j}_{ordenado} + \vec{E}_{ordenado} \cdot \frac{\partial \vec{D}_{ordenado}}{\partial t} \quad (10.3.69)$$

é a densidade volumar da taxa de trabalho eletromagnético depositado.

Exercício adicional:

E 10.3.5: Imagine uma configuração de campos na qual as partes macroscópicas ordenadas são todas estacionárias: $\partial \vec{B}_{ordenado} / \partial t = 0$, $\partial \vec{E}_{ordenado} / \partial t = 0$, $\partial \vec{H}_{ordenado} / \partial t = 0$, $\partial \vec{D}_{ordenado} / \partial t = 0$ e $\partial \rho_{ordenado} / \partial t = 0$. Neste caso, podemos escrever o campo elétrico ordenado com a ajuda de um potencial: $\vec{E}_{ordenado} = -\text{grad } V_{ordenado}$. Mostre que a taxa de entrada de trabalho eletromagnético num volume \mathbb{V} nesta configuração é dada pela integral de superfície

$$P = - \iint_{\partial V} V_{ordenado} \vec{j}_{ordenado} \cdot d\vec{S} \quad (10.3.70).$$

Uma consequência deste resultado é que é impossível transmitir trabalho eletromagnético em situações estacionárias sem envolver correntes.