

## 5.2 A lei de Ohm e a lei das malhas.



A lei de Ohm afirma que a corrente que se estabelece num corpo condutor é proporcional à voltagem aplicada neste corpo. Esta lei não é uma lei fundamental como, por exemplo, a lei de Gauss. Ela descreve apenas o comportamento de uma classe grande de condutores, mas ela não vale para todos os condutores. Esta lei foi encontrada por Georg Simon Ohm<sup>1</sup> entre 1825 e 1826.

Fig. 5.2.1 Georg Simon Ohm (16/03/1789-06/07/1854) (Imagen da Wikipedia).

Fora o fato de a lei de Ohm não ser uma lei fundamental, ela tem a particularidade de falar de uma grandeza que, em princípio, não pode ser medida diretamente, a saber, a voltagem aplicada no corpo condutor. A voltagem aplicada no condutor<sup>2</sup> é a integral de linha

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (5.2.1),$$

onde a integral é tomada sobre um caminho que passa pelo condutor. Note que numa situação fora do equilíbrio o campo elétrico macroscópico, que aparece na integral (5.2.1), pode ser diferente de zero dentro de um condutor! A figura 5.2.2 mostra um condutor em forma de fio. O fio está desenhado em cor abóbora e dentro dele mostro um caminho de integração como uma linha preta que vai do ponto  $a$  até o ponto  $b$ .

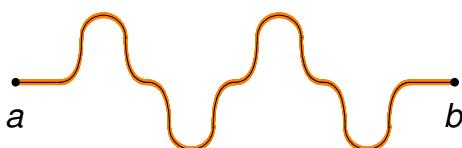


Fig. 5.2.2 Condutor mostrado em cor de abóbora com caminho de integração mostrado como linha preta.

Agora, no caso de um condutor metálico, não temos meios de medir o campo elétrico dentro do condutor. Então como faremos a integral (5.2.1)? A situação ficaria mais confortável se pudéssemos contar com a validade da lei da existência do potencial. Se esta lei valesse, poderíamos substituir a integral (5.2.1) por uma integral do campo elétrico calculada com qualquer outro caminho que leva do ponto  $a$  até o ponto  $b$ . O valor da integral seria simplesmente a diferença de potencial  $V(a) - V(b)$ . Neste caso poderíamos medir o campo elétrico fora do condutor e efetuar a determinação da integral com estes dados. Será que a lei da existência do potencial que valia na eletrostática continua válida mesmo na presença de correntes?

Em princípio poder-se-ia medir o campo elétrico em inúmeros pontos fora dos condutores e com estes dados poder-se-ia comprovar que continua válida a afirmação

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (5.2.2)$$

mesmo na presença de correntes estacionárias. Mas esta comprovação diria somente algo sobre caminhos fechados fora dos condutores. E, para podermos trabalhar com a lei de Ohm, precisamos justamente de integrais dentro dos condutores. Além do mais,

<sup>1</sup> Ohm, Georg Simon: Die galvanische Kette. Berlin, 1827.

<sup>2</sup> De forma um tanto imprecisa costuma-se falar “condutor” no lugar de “corpo condutor”.

medidas precisas de campo elétrico não são fáceis de fazer e na prática ninguém faria este trabalho árduo.

Fig. 5.2.3 Experiência para testar a lei de Ohm e a lei da existência do potencial.

Veremos quais são os fatos realmente observados que nos motivam a acreditar na lei de Ohm e na existência do potencial. A figura 5.2.3 mostra um circuito que permite fazer estas observações. Uma fonte, que pode ser uma pilha voltaica ou uma fonte regulável, está ligada num condutor com uma bifurcação num ponto

*a*. Num outro ponto *b* os dois caminhos *A* e *B* se juntam de novo e depois retornam para a fonte. O símbolo que representa a fonte no esquema elétrico lembra as placas metálicas da pilha voltaica. O traço comprido simboliza o polo positivo da fonte e o traço curto e gordo o polo negativo. Vamos supor que os dois condutores que se estendem entre os pontos *a* e *b* sejam simplesmente arames de algum metal. No esquema indiquei duas correntes  $I_A$  e  $I_B$  que fluem nos dois trajetos entre os pontos de bifurcação e junção. Estas correntes podem ser medidas inserindo medidores de

corrente. Chamaremos medidores de corrente de *amperímetros*. Os galvanômetros que mencionamos na seção anterior são amperímetros, mas existem ainda outros medidores de corrente. A figura 5.2.4 mostra como seria o circuito com os amperímetros.

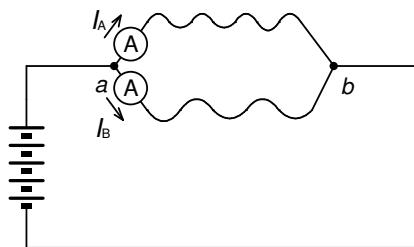


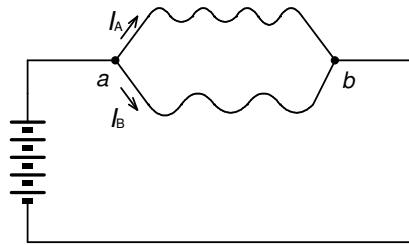
Fig. 5.2.4 Circuito da Fig. 5.2.3 com amperímetros para medição das correntes  $I_A$  e  $I_B$ .

Com este tipo de circuito podemos fazer a seguinte experiência: podemos medir as correntes  $I_A$  e  $I_B$  para diversas alturas da pilha voltaica, ou, no caso da fonte regulável, para diversas posições do botão que corresponde à altura da pilha equivalente. Um detalhe importante precisa ser mencionado: ao variarmos a altura da pilha voltaica, precisamos manter sempre a mesma temperatura dos condutores, e também não deve haver diferenças de temperaturas entre diferentes partes do circuito. Observa-se o seguinte: a variação da altura da pilha provoca variações das correntes  $I_A$  e  $I_B$ , mas o quociente  $I_A / I_B$  terá sempre o mesmo valor. Se repetirmos esta experiência com outros condutores metálicos, encontraremos o mesmo comportamento, mas possivelmente com um valor do quociente  $I_A / I_B$  diferente. Este quociente depende dos condutores, mas não depende da altura da pilha voltaica.

Veremos como estas observações podem ser explicadas se supusermos a validade da lei de Ohm e da lei a existência do potencial. A lei de Ohm afirma que

$$I_A = \frac{1}{R_A} \int_{\mathcal{C}_A} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad e \quad I_B = \frac{1}{R_B} \int_{\mathcal{C}_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (5.2.3)$$

onde  $R_A$  e  $R_B$  são constantes que dependem dos condutores nos trechos *A* e *B* respectivamente, mas que não dependem das voltagens aplicadas.  $\mathcal{C}_A$  e  $\mathcal{C}_B$  são os caminhos dentro dos condutores *A* e *B* respectivamente, ambos começando no ponto *a*



e terminando no ponto  $b$ . Com estas expressões obtemos para o quociente das correntes:

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{R_B}{R_A} \frac{\int_{\ell_A} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\int_{\ell_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}} \quad (5.2.4)$$

Se acreditarmos na lei da existência do potencial, podemos supor que as tensões aplicadas nos dois condutores  $A$  e  $B$  têm o mesmo valor, pois ambos são apenas a diferença de potencial  $V(a) - V(b)$ . Então da (5.2.4) segue  $I_A / I_B = R_B / R_A$ . Como  $R_A$  e  $R_B$  dependiam apenas dos condutores e não da voltagem aplicada, segue o resultado que é de fato observado no laboratório.

A experiência descrita comprova a lei de Ohm e a lei da existência do potencial? Não! Repare na estrutura lógica da argumentação! Mostramos que

$$(\text{lei de Ohm}) \wedge (\text{lei da existência do potencial}) \Rightarrow I_A / I_B = \text{const.} \quad (5.2.5)$$

A observação experimental de que  $I_A / I_B$  é constante não implica na validade da lei de Ohm e da lei da existência do potencial! A implicação é no sentido contrário! Mas todas as “comprovações” experimentais de leis têm esta forma fajuta! Quando queremos verificar uma lei, estamos apenas tentando falsificá-la e o que chamamos de “comprovação experimental” consiste na verdade em tentativas frustradas de falsificação.

O que podemos afirmar é que todas as observações feitas até a presente data são compatíveis com a hipótese da existência do potencial elétrico enquanto as correntes não variam com o tempo e enquanto não movemos ímãs perto das experiências. Então, na análise de experiências que envolvem apenas correntes elétricas temporalmente constantes, vamos supor que vale

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (5.2.6)$$

para todos os caminhos fechados. Mas, como veremos nas próximas seções, na prática da análise de circuitos interessam apenas os caminhos fechados que percorrem algum trajeto dentro do circuito. Um caminho fechado que percorre os elementos de um circuito chamaremos de *malha*. Correspondentemente a lei (5.2.6) recebe neste caso o nome de *lei das malhas*.

Em relação à lei de Ohm encontramos resultados experimentais compatíveis com esta hipótese para condutores metálicos, para grafite e para eletrólitos<sup>3</sup> enquanto se consegue manter a composição do eletrólito inalterada.

Tentaremos agora entender um pouco mais detalhadamente como funciona a condução elétrica. A corrente elétrica é uma integral de superfície da densidade de corrente:

$$I_s = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (5.2.7)$$

onde coloquei um índice  $S$  no símbolo da corrente para expressar que esta grandeza se refere a uma determinada superfície. No caso dos fios elétricos, a superfície  $S$  seria

---

<sup>3</sup> No caso dos eletrólitos a “comprovação” experimental da lei de Ohm é dificultada porque nos circuitos há sempre interfaces entre eletrólito e condutor sólido e estas interfaces introduzem complicados efeitos adicionais.

alguma secção transversal do fio. No capítulo sobre a lei de Gauss aprendemos (um pouco fora do lugar) que a densidade de corrente elétrica pode ser relacionada com as densidades de carga  $\rho_e$  e velocidades  $\vec{v}_e$  dos portadores de carga:

$$\vec{j} = \sum_e \rho_e \vec{v}_e \quad (5.2.8)^4.$$

O somatório se estende sobre todas as espécies  $e$  de partículas eletricamente carregadas que contribuem para a condução.

O que surpreende é que o campo elétrico resulta numa corrente estacionária. Esperar-se-ia que a força elétrica resultasse numa aceleração das partículas. Então as velocidades que aparecem na fórmula (5.2.8) deveriam mudar com o passar do tempo e isto não parece ser compatível com correntes estacionárias. Como podemos entender a existência de correntes estacionárias? A resposta é simples: devemos supor a presença de algum tipo de atrito. Pensem na queda de uma bola dentro de um fluido viscoso! Realmente a força gravitacional  $\vec{F}_g = m\vec{g}$  provoca um movimento acelerado da bola. Mas logo que a bola adquire certa velocidade aparece uma outra força proporcional à velocidade e com sentido contrário  $\vec{F}_a = -\alpha\vec{v}$  com  $\alpha > 0$ . A força resultante  $\vec{F}_g + \vec{F}_a$  tem módulo menor que a força gravitacional e, na medida em que a velocidade aumenta, a força resultante tende a zero. Exponencialmente a velocidade tende a um valor constante que é caracterizado pela condição  $\vec{F}_g + \vec{F}_a = 0$ . Nesta situação limite, temos

$$\vec{v}_{\text{limite}} = \frac{m\vec{g}}{\alpha} \quad (5.2.9).$$

Então no limite temos uma velocidade constante e proporcional à força gravitacional. Agora que entendemos isto, basta substituir a força gravitacional pela força elétrica.

Esta explicação se adapta perfeitamente ao caso da condução elétrica em eletrólitos. Geralmente os íons levam uma boa camada de moléculas de água firmemente ligadas no íon de tal forma que aquilo que anda no eletrólito são realmente pequenas bolas que têm que atravessar um fluido viscoso. Cada espécie de íon tem sua carga  $q_{(e)}$  e também seu coeficiente de atrito  $\alpha_e$ . Na presença de um campo elétrico  $\vec{E}$  a espécie  $e$  se moveria com a velocidade limite

$$\vec{v}_e = \frac{q_{(e)}}{\alpha_e} \vec{E} \quad (5.2.10)$$

Então a velocidade de migração é proporcional ao campo. A constante de proporcionalidade  $q_{(e)} / \alpha_e$  é chamada de *mobilidade do íon*. A densidade de carga da espécie  $e$  pode ser escrita como produto da densidade numérica da espécie  $\rho_e^*$  (=número de partículas por volume) e a carga  $q_{(e)}$ ;  $\rho_e = q_{(e)} \rho_e^*$ . Então a densidade de corrente toma a forma

<sup>4</sup> Naquela ocasião (na seção 2.2) usei o símbolo  $\vec{j}_{El}$  para a densidade de corrente elétrica para poder diferenciar de outras densidades de correntes. Aqui falaremos sempre de corrente elétrica e não há necessidade de indicar isto especificamente com um incide “El”.

$$\vec{j} = \left( \sum_e \frac{q_{(e)}^2 \rho_e^\#}{\alpha_e} \right) \vec{E} \quad (5.2.11)$$

Então a densidade de corrente é proporcional ao campo elétrico. A constante de proporcionalidade

$$\sigma = \sum_e \frac{q_{(e)}^2 \rho_e^\#}{\alpha_e} \quad (5.2.12)$$

é uma propriedade do material do condutor e ela se chama *condutividade do material*. Para esta grandeza usamos aqui a mesma letra grega *sigma* que foi usada na eletrostática para escrever densidades superficiais de carga. Isto não é bom, mas o uso desta letra para estas duas grandezas é costume em muitos livros. Não há muito perigo de confusão, já que na discussão das correntes é raro ter que calcular também com densidades superficiais de carga. Caso isto aconteça, pode-se usar um índice para distinguir as grandezas, por exemplo, usar  $\sigma_q$  para a densidade superficial de carga. Com a condutividade  $\sigma$  podemos escrever o resultado (5.2.11) na forma

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad (5.2.13)$$

Esta é a forma local da lei de Ohm. Logo mais veremos como esta formulação se relaciona com aquela dada no início da seção. Mas antes discutiremos a condução em metais.

No caso da condução em metais, o mecanismo que leva a uma velocidade efetivamente constante dos portadores de carga é um pouco diferente. Os metais na forma sólida consistem em cristais nos quais os átomos estão arrumados densamente de tal forma que cada átomo ocupa um espaço não muito maior do que o próprio volume do átomo. É praticamente impossível mover os átomos por grandes distâncias sem mover todo o cristal. O transporte de carga seguramente não é por conta dos átomos; estes ficam nos seus lugares. Então devem ser partículas muito pequenas existentes dentro do átomo que transportam carga através do cristal. De fato são os elétrons os responsáveis pela condução elétrica nos metais. Mesmo sendo partículas muito pequenas, é um tanto inacreditável como os elétrons conseguem atravessar um espaço densamente preenchido por átomos. Para entender este milagre, precisamos de uma teoria muito complicada, a *mecânica quântica*, que no momento está totalmente fora do nosso alcance aqui na Física III. Resulta que os elétrons se comportam como ondas, e estas ondas conseguem passar sem problemas através de uma rede cristalina, desde que esta rede esteja perfeitamente arrumada. Os elétrons conseguem atravessar o espaço da rede cristalina essencialmente como se eles voassem num espaço vazio. A rede apenas provoca uma pequena alteração da massa dos elétrons. Nem todos os elétrons têm esta liberdade. Aqueles que estão ligados nas camadas mais internas do átomo não conseguem escapar do seu átomo hospedeiro.

Daqueles elétrons que podem voar livremente pelo cristal, esperamos que eles se comportem como um gás. Sabemos que as partículas que compõem um gás estão em constante movimento caótico devido à agitação térmica. Na Física II aprendemos que o módulo típico da velocidade é da ordem de  $\sqrt{3k_B T / m}$  onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura absoluta e  $m$  a massa das partículas do gás. Para os elétrons com uma temperatura por volta de 300 K, isto daria uma velocidade típica na

ordem de  $10^5$  m/s. Bem rápido! Não é? Mas isto não é tudo. Lembremos das aulas de química da escola que os elétrons obedecem ao *princípio de exclusão* de Pauli, o que significa que dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado. Há tantos elétrons no cristal que os estados de mais baixa energia já estão ocupados e forçosamente alguns elétrons têm que ocupar estados com energia muito mais alta do que aquela que corresponde a uma velocidade de  $10^5$  m/s. A velocidade típica de movimento dos elétrons que realmente contribuem para a condução é algo na ordem de  $1,6 \times 10^6$  m/s. Isto é aproximadamente 0,5% da velocidade da luz! Mas estes movimentos dos elétrons não resultam em nenhuma corrente elétrica porque estes são aleatórios e na média isto não corresponde a nenhum deslocamento líquido de carga elétrica.

Agora veremos de que ordem de grandeza são os módulos de velocidades envolvidos no transporte de carga. Na dedução da fórmula (2.2.10) partimos da hipótese de que cada espécie se move uniformemente com uma velocidade  $\vec{v}_e$ . Mas, no caso dos elétrons no metal, as velocidades são caóticas apontando em todas as direções, portanto não são uniformes. No entanto, pode-se usar ainda uma fórmula do tipo (2.2.10) ou (5.2.8) com uma velocidade média  $\vec{v}_d$ , que é geralmente chamada *velocidade de deriva*. Para a condução num metal temos somente uma espécie de portador, e a fórmula (5.2.8) se reduz a

$$\vec{j} = -e \rho_{ec}^{\#} \vec{v}_d \quad (5.2.14).$$

Nesta fórmula  $e \approx +1,6 \times 10^{-19}$  C é a carga elementar,  $\rho_{ec}^{\#}$  é a densidade numérica dos elétrons que participam na condução e  $\vec{v}_d$  é a velocidade que nos interessa, justamente aquela responsável pelo transporte efetivo de carga.

Para podermos aprender algo sobre os valores do módulo desta velocidade, precisamos de algum dado sobre a densidade de portadores. Neste momento não nos resta outra alternativa que dar um chute. Para o cobre vamos supor que cada átomo contribui com 1 elétron para a condução. Num capítulo futuro conheceremos um efeito físico que permite medir a densidade numérica dos portadores de um condutor. Experiências feitas com este efeito mostram que nosso chute está bem perto da situação real. Um mol de cobre tem a massa de 63,5 g e a densidade de cobre vale  $\rho_{m,Cu} = 8,92$  g cm<sup>-3</sup>. Um mol contém  $6,02 \times 10^{23}$  partículas. Isto dá  $8,46 \times 10^{22}$  átomos em cada centímetro cúbico. Com nossa hipótese segundo a qual cada átomo contribui com um elétron para a condução temos então

$$\rho_{ec}^{\#} \approx 8,46 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} \quad (5.2.15)$$

Então temos

$$\vec{j} \approx -1,35 \times 10^4 \frac{\text{C}}{\text{cm}^3} \vec{v}_d \quad (5.2.16)$$

Agora vamos considerar um exemplo típico de uma instalação doméstica. Vamos supor um fio de cobre de raio de 1 mm que transporta uma corrente de 1 A. Neste caso temos

$$|\vec{j}| = \frac{1\text{A}}{\pi(0,1\text{cm})^2} \approx 31,8 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \quad (5.2.17).$$

Inserindo isto na fórmula (5.2.16) obtemos

$$|\vec{v}_d| \approx \frac{\text{cm}^3}{1,35 \times 10^4 \text{ C}} \times 31,8 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \approx 2,36 \times 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 23,6 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}} \quad (5.2.18)$$

Olhem só este resultado, 23,6 micrômetros por segundo! Qualquer lesma anda mais rápido!

Como podemos explicar que a luz elétrica da sala acende imediatamente quando aciono o interruptor? A explicação não é difícil. Imagine uma mangueira de jardim estendida no gramado com um borrifador ou sprinkler na sua ponta. A mangueira está conectada num bico de água, mas a torneira está fechada. Vamos supor que este equipamento foi usado recentemente e a mangueira está ainda cheia de água. Agora alguém abre a torneira e isto estabelece um movimento da água na mangueira com digamos 0,2 m/s. Então com uma mangueira de 10 m de comprimento a água que estava no local da torneira levaria 50 s para chegar até o borrifador. Mas todo mundo sabe que o borrifador começa a espirrar água muito antes. O que acontece é que a abertura da torneira expõe a água logo após da torneira a uma pressão maior e bota esta parcela de água em movimento. Isto cria uma pressão mais elevada no próximo centímetro o que ocasiona um movimento desta parcela de água, o que por sua vez cria um aumento de pressão etc. Em outras palavras dentro da mangueira se estabelece uma onda mecânica, ou seja, uma onda sonora. A velocidade do som na água vale aproximadamente 1,5 km/s. Então a água sai quase que instantaneamente do borrifador. A situação com os elétrons no fio de cobre é inteiramente análoga. Os elétrons logo depois do interruptor recebem um empurrão que faz com que eles empurrem outros elétrons mais adiante etc. Neste caso temos uma onda que envolve campo elétrico e movimentos de elétrons. Este tipo de onda se propaga quase com a velocidade da luz. Os elétrons na lâmpada são postos em movimento pela onda muito antes de uma eventual chegada do elétron que estava no local do interruptor no local da lâmpada.

Então vimos que há três velocidades envolvidas quando falamos dos movimentos dos elétrons de condução num metal: a velocidade de movimentos aleatórios com módulo na ordem de 0,5% da velocidade da luz, a velocidade de deriva que realmente transporta carga e uma velocidade de propagação de uma onda que bota os elétrons em movimento. O que queremos entender no contexto da lei de Ohm é a velocidade de deriva. Usaremos uma descrição em termos da mecânica clássica combinada com argumentos probabilísticos. Esta descrição da condutividade foi elaborada pela primeira vez por Paul Karl Ludwig Drude (12/07/1863 – 05/07/1906) e é conhecido como modelo de Drude<sup>5</sup>.

Sem campo elétrico no condutor, um elétron iria andar com a velocidade enorme de 0,5%  $c$  em linha reta em alguma direção aleatória. Nenhum cristal é absolutamente perfeito, especialmente na temperatura ambiente; a própria agitação térmica tira os átomos fora dos lugares idealmente previstos. Em consequência disso, em algum momento, o elétron que consideramos iria colidir com um obstáculo e depois começar outra corrida com aquela velocidade enorme  $\vec{v}_0$  em alguma outra direção aleatória. Na média a carga do elétron não sairia do lugar. Se aplicarmos agora um campo elétrico, o movimento do elétron seria (numa descrição da mecânica clássica)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} \frac{e \vec{E}}{m} t^2 \quad (5.2.19)$$

---

<sup>5</sup> Drude, Paul (1900). "Zur Elektronentheorie der metalle". *Annalen der Physik* **306** (3): 566. Bibcode:1900AnP...306..566D. doi:10.1002/andp.19003060312.

Após algum tempo  $t_*$ , cujo valor é também aleatório, o elétron sofreria uma colisão. Nesta colisão toda a velocidade adquirida pela ação do campo, ou seja  $-\mathbf{e}\vec{E}t_*/m$ , é apagada e começaria uma nova viagem com nova velocidade inicial aleatória. Na média (tomada sobre muitos elétrons), o deslocamento do elétron entre duas colisões aleatórias é

$$\langle \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \rangle_e = \langle \vec{v}_0 \rangle_e \langle t_* \rangle_e - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}\vec{E}}{m} \langle t_*^2 \rangle_e \quad (5.2.20)$$

onde indiquei a média sobre muitos elétrons com o símbolo “ $\langle \rangle_e$ ”. Como as velocidades iniciais  $\vec{v}_0$  eram aleatórias, o primeiro termo é zero. O valor médio do quadrado do tempo  $\langle t_*^2 \rangle_e$  não coincide com o quadrado de  $\langle t_* \rangle_e$ . No exercício E.5.2.6 você pode mostrar que  $\langle t_*^2 \rangle_e = 2\langle t_* \rangle_e^2$ . Dividindo tudo por  $\langle t_* \rangle_e$ , obtemos a velocidade média, a qual podemos identificar com a velocidade de deriva:

$$\vec{v}_d = \frac{\langle \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \rangle_e}{\langle t_* \rangle_e} = - \frac{\mathbf{e}\vec{E}}{m} \langle t_* \rangle_e \quad (5.2.21)$$

Esta dedução do resultado (5.2.21) não é rigorosa, pois se poderia tomar como velocidade média também  $\langle (\vec{r}(t) - \vec{r}_0)/t_* \rangle_e$ , e isto levaria a um resultado diferente<sup>6</sup>. O aluno interessado encontra a dedução correta no Apêndice A desta seção. Este apêndice ultrapassa o nível da Física III, mas recomendo sua leitura para os alunos de Física e Química.

A velocidade  $\vec{v}_d$  da fórmula (5.2.21) é proporcional ao campo elétrico? Cuidado! Proporcional significa que aquilo que multiplica o  $\vec{E}$  não depende do  $\vec{E}$ . Bem, a carga elementar e a massa do elétron não dependem do campo elétrico. O que podemos afirmar sobre o tempo médio entre colisões? O fato de que o módulo da velocidade inicial  $\vec{v}_0$  é muitas ordens de grandeza maior que o módulo da velocidade de deriva significa que o desvio do trajeto criado pelo campo,  $-\frac{1}{2} \frac{\mathbf{e}\vec{E}}{m} t^2$ , é minúsculo em comparação com o deslocamento  $\vec{v}_0 t$ . O choque acontece num local aproximadamente 200 distâncias atômicas afastadas do último choque com algum átomo que está aleatoriamente fora do seu lugar. O minúsculo desvio na trajetória do elétron certamente não altera as probabilidades deste choque em nada. Então o tempo médio entre colisões não deve sofrer nenhuma mudança por causa do campo. Concluímos então que  $\vec{v}_d$  e  $\vec{E}$  são realmente proporcionais. Em metais a densidade dos portadores também não sofre praticamente nenhuma modificação enquanto os campos elétricos não forem absurdamente fortes a tal ponto de destruir a estrutura do condutor. Então segue com a (5.2.14) que a densidade de corrente e o campo elétrico são proporcionais. Ou seja, para os metais vale também a lei de Ohm local (5.2.13).

Em metais a densidade de portadores é alta e constante. Há condutores muito especiais, chamados semicondutores, que estudaremos mais detalhadamente na Física IV. Nestes a

---

<sup>6</sup> De fato Drude tropeçou neste ponto no seu trabalho original prevendo uma condutividade menor por um fator  $\frac{1}{2}$ .

densidade de portadores de carga pode ser modificada de diversas formas. No Apêndice B discutiremos um exemplo importante disso. Este apêndice é especialmente interessante para alunos de engenharia elétrica.

Agora veremos como a lei de Ohm na sua forma global, conforme a afirmação na primeira frase desta seção, é consequência da lei de Ohm na sua forma local (5.2.13). Vamos considerar um corpo condutor de um material uniforme com geometria qualquer como exemplificado da figura 5.2.5 e vamos supor que exista uma corrente estacionária  $I$  dentro deste condutor. A corrente sempre vem de algum lugar e vai para algum lugar. As regiões por volta destes lugares também são preenchidas por material condutor. Então quando queremos falar da lei de Ohm para um determinado corpo condutor,

devemos delimitar este corpo de alguma forma. Para poder falar de voltagem aplicada no corpo, necessariamente devemos delimitar o corpo em duas superfícies equipotenciais. Na figura 5.2.5 eu esbocei três superfícies equipotenciais, uma contendo o ponto  $a$ , outra contendo o ponto  $b$  e uma terceira num ponto genérico entre estes extremos. O corpo condutor que estudaremos seria aquele mostrado de forma hachurada.

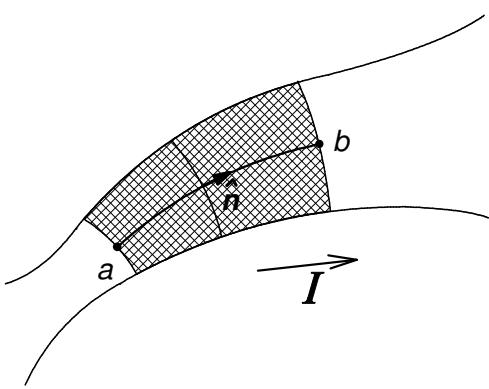


Fig. 5.2.5 Corpo condutor com corrente estacionária. O corpo está delimitado por duas superfícies equipotenciais que contêm os pontos  $a$  e  $b$ . O desenho mostra ainda um caminho de integração que leva de  $a$  até  $b$ , um vetor unitário  $\hat{n}$  tangente ao caminho de integração, assim como uma definição do sentido positivo de uma corrente  $I$ .

Falei que eu esbocei equipotenciais; não garanto que nesta geometria as equipotenciais teriam exatamente esta forma. Mas podemos afirmar uma coisa: como as cargas não podem escapar da superfície lateral do condutor, a densidade de corrente  $\vec{j}$  deve ficar tangencial à superfície externa. Com a lei de Ohm local, o campo elétrico deve ficar tangencial também. Consequentemente as superfícies equipotenciais devem encontrar a superfície externa do condutor em ângulo reto<sup>7</sup>. Tentei acertar os ângulos retos no esboço.

A voltagem aplicada no corpo condutor é

$$V(a) - V(b) = \int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (5.2.22),$$

onde o caminho de integração leva do ponto  $a$  até  $b$  como mostra a figura. Usaremos agora a lei de Ohm na forma local (5.2.13) para eliminar o campo elétrico desta expressão. Temos  $\vec{E} = \sigma^{-1} \vec{j}$ :

$$V(a) - V(b) = \int_{\mathcal{C}} \sigma^{-1} \vec{j} \cdot d\vec{\ell} \quad (5.2.23)$$

<sup>7</sup> A relação entre campo e equipotenciais deve ter sido um dos pontos de destaque da seção 3.2.

Podemos escrever o elemento de linha  $d\vec{\ell}$  como um produto de um elemento de linha escalar  $d\ell$  e um vetor unitário  $\hat{n}$  que está tangencial ao caminho de integração:  $d\vec{\ell} = \hat{n} d\ell$ :

$$V(a) - V(b) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\vec{j} \cdot \hat{n}}{\sigma} d\ell \quad (5.2.24)$$

Agora usaremos o mesmo argumento que levou à definição de capacitância. A determinação do campo elétrico ou da densidade de corrente dentro do condutor é geralmente uma tarefa muito difícil, a não ser que o condutor possua uma geometria simples. Mas sabemos algumas coisas mesmo com geometrias complicadas.

Como o escoamento de carga é estacionário, por conservação de carga, deve valer  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ . Isto deve ser óbvio para o aluno que entendeu a história do “banho matemático” (seção 2.2). Se a condutividade do material for uniforme, segue também  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ . Então o campo elétrico obedece às mesmas equações diferenciais ( $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  e  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ) que valem dentro de um capacitor. Podemos usar os mesmos argumentos de unicidade das soluções: se  $\vec{E}_1$  é solução para uma voltagem  $V_1 = V_1(a) - V_1(b)$  então  $\lambda \vec{E}_1$  é solução para a voltagem  $V = V(a) - V(b) = \lambda V_1$  para qualquer número real  $\lambda$ . E estas soluções são as únicas. Com a lei de Ohm local podemos incluir as densidades de correntes neste argumento. Todas as possíveis densidades de corrente têm a forma  $\vec{j} = \lambda \vec{j}_1$  com  $\vec{j}_1 = \sigma \vec{E}_1$ .

Agora consideramos uma superfície equipotencial num ponto genérico entre os extremos  $a$  e  $b$ , como indicado na figura. A corrente que passa pelo condutor é a integral de superfície da densidade de corrente integrada sobre a superfície equipotencial:

$$I = \iint_{\text{equipot}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \lambda \iint_{\text{equipot}} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S} = \lambda I_1 \quad (5.2.25)$$

Por outro lado, para a expressão  $\vec{j} \cdot \hat{n}$ , que aparece na integral (5.2.24), vale também

$$\vec{j} \cdot \hat{n} = \lambda \vec{j}_1 \cdot \hat{n} \quad (5.2.26)$$

Combinando (5.2.25) com (5.2.26) obtemos

$$\vec{j} \cdot \hat{n} = \left[ \frac{\vec{j}_1 \cdot \hat{n}}{I_1} \right] \times I \quad (5.2.27)$$

Repare que o termo no colchete depende somente da geometria e não da voltagem aplicada  $V$ , pois todas as grandezas dentro dela são tomadas na voltagem  $V_1$  e não na voltagem  $V$ . Dimensionalmente esta expressão é um inverso de uma área e vamos escrevê-la como  $1/\mathcal{A}$ :

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \underset{\text{def.}}{=} \frac{\vec{j}_1 \cdot \hat{n}}{I_1} \quad (5.2.28)$$

Esta área  $\mathcal{A}$  pode ser diferente em diferentes pontos do caminho de integração. Para geometrias complicadas do corpo condutor, seria difícil calcular estas áreas, mas o que importa no momento é que elas não dependem da voltagem aplicada. Com tudo isto, obtemos para a voltagem aplicada:

$$V(a) - V(b) = \int_{\mathcal{C}} \frac{I}{\sigma A} d\ell \quad (5.2.29)$$

O último passo para chegar à lei de Ohm na forma global é tirar a corrente  $I$  para fora da integral. Isto pode ser feito porque a conservação da carga garante que  $I$  tem o mesmo valor em todos os pontos do caminho de integração:

$$V(a) - V(b) = I \int_{\mathcal{C}} \frac{d\ell}{\sigma A} \quad (5.2.30)$$

A integral que sobra depende apenas de propriedades do corpo condutor, e podemos escrever esta integral como  $R$ :

$$V(a) - V(b) = R I \quad (5.2.31)$$

$R$  é a resistência do corpo.

$$R = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\ell}{\sigma A} \quad (5.2.32).$$

O fato de que  $R$  na fórmula (5.2.31) depende somente do corpo condutor significa que esta fórmula expressa a lei de Ohm global.

Se a geometria do corpo condutor for simples, pode-se calcular a resistência a partir da condutividade do material e de dados geométricos com facilidade. Um caso muito comum é um condutor em forma cilíndrica de comprimento  $l$  e secção transversal  $A$ . Os fios elétricos costumam ter este formato. Neste caso as superfícies equipotenciais são simplesmente secções planas através do cilindro com a normal coincidindo com o eixo de simetria do cilindro. Neste caso a densidade de corrente é uniforme e tem o módulo  $I/A$ . Consequentemente a Área  $\mathcal{A}$  é simplesmente a área  $A$  da seção transversal. Com isto a resistência fica como

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} \quad (5.2.33)$$

Ohm tinha descoberto esta fórmula também empiricamente medindo as resistências de fios do mesmo material com variados comprimentos e diâmetros.

Outros casos que permitem uma solução simples são aqueles cuja simetria permite supor que o módulo da densidade de corrente é constante nas superfícies equipotenciais. Estas geometrias com simetria são exatamente as mesmas que conseguimos resolver na eletrostática com a lei de Gauss usando simetria. Nestes casos a área  $\mathcal{A}$  coincide com a área geométrica das superfícies equipotenciais. O exercício 5.2.2 fornece um exemplo.

No caso de um fio condutor quase cilíndrico cujo diâmetro varia muito lentamente ao longo do fio ou com um fio dobrado cujo raio de curvatura da dobra é grande em comparação com o diâmetro do fio, pode-se usar a área da seção transversal como uma aproximação da área  $\mathcal{A}$ :

$$R \approx \int_{\mathcal{C}} \frac{d\ell}{\sigma A} \quad \text{com } A = \text{área da seção transversal} \quad (5.2.34)$$

O inverso da condutividade do material é também chamado de *resistividade do material*. Muitos livros usam a letra grega  $\rho$  para este parâmetro;  $\rho = 1/\sigma$ . De novo, há uma infeliz coincidência com o uso de  $\rho$  para densidades.

A resistividade de um material é uma propriedade que depende da temperatura do material. Pela discussão do mecanismo de condução em metais, podemos concluir que a chance de o elétron sofrer uma colisão aumenta com a temperatura. Resulta que em metais a densidade de portadores não depende fortemente da temperatura. Então podemos esperar que a resistividade aumente com a temperatura. Isto é de fato o que se observa experimentalmente. Mas há materiais com baixa densidade de portadores e neles a densidade de portadores aumenta com a temperatura tanto que o efeito das colisões se torna menos importante. Nestes materiais a resistividade diminui com a temperatura. Em aplicações o intervalo de temperaturas de interesse é geralmente tão pequeno que a dependência da resistividade com a temperatura pode ser descrita razoavelmente com uma função afim:

$$\rho(T) = \rho_0 \times (1 + \alpha_{\rho} \times (T - T_0)) \quad (5.2.35).$$

A grandeza  $\alpha_{\rho}$  se chama coeficiente térmico da resistividade.  $T_0$  é uma temperatura de referência, geralmente 20°C, e  $\rho_0$  é a resistividade na temperatura  $T_0$ . A tabela mostra as resistividades e coeficientes térmicos de alguns materiais.

Tabela 5.2.1 Resistividade elétrica e coeficiente térmico da resistividade elétrica de materiais. A temperatura de referência vale 20°C.

Material	Resistividade [Ω m]	Coeficiente térmico da resistividade [K <sup>-1</sup> ]
Prata	$1,59 \times 10^{-8}$	$+3,8 \times 10^{-3}$
Cobre	$(1,70 \pm 0,02) \times 10^{-8}$	$+3,9 \times 10^{-3}$
Ouro	$2,44 \times 10^{-8}$	$+3,4 \times 10^{-3}$
Alumínio	$2,82 \times 10^{-8}$	$+3,9 \times 10^{-3}$
Tungstênio	$5,6 \times 10^{-8}$	$+4,5 \times 10^{-3}$
Zinco	$5,90 \times 10^{-8}$	$+3,7 \times 10^{-3}$
Níquel	$6,99 \times 10^{-8}$	$+6 \times 10^{-3}$
Lítio	$9,28 \times 10^{-8}$	$+6 \times 10^{-3}$
Ferro	$10,0 \times 10^{-8}$	$+5 \times 10^{-3}$
Platino	$10,8 \times 10^{-8}$	$+3,92 \times 10^{-3}$
Latão	$10,9 \times 10^{-8}$	$+4,5 \times 10^{-3}$
Aço Carbono (1010)	$14,3 \times 10^{-8}$	Sem dados

Chumbo	$22,0 \times 10^{-8}$	$+3,9 \times 10^{-3}$
Liga de Níquel-Cromo <sup>8</sup>	$1,5 \times 10^{-6}$	$+0,4 \times 10^{-3}$
Constantan <sup>9</sup>	$49,0 \times 10^{-8}$	$+8 \times 10^{-6}$
Grafite	$3,5 \times 10^{-5}$	$-0,5 \times 10^{-3}$
Germânio (puro)	0,46	$-48 \times 10^{-3}$
Água do mar	0,2	Sem dados
Água de piscina	0,3 – 0,4	Sem dados
Água potável	$2 \times 10^1$ – $2 \times 10^3$	Sem dados
Silício (puro)	$6,4 \times 10^2$	$-75 \times 10^{-3}$
Madeira	$10^3$ – $10^4$	Sem dados
Enxofre	$1,00 \times 10^{15}$	Sem dados
Ar	$2 \times 10^{13}$ – $3,3 \times 10^{16}$	Sem dados
Quartzo fundido	$7,5 \times 10^{17}$	Sem dados
PET	$10^{21}$	Sem dados
Teflon	$10^{23}$ – $10^{25}$	Sem dados

O aluno que está cursando a disciplina fenômenos de transporte concomitantemente deve ter percebido que os fatos fenomenológicos nesta seção são análogos àqueles da condução de calor. Se na condução de calor a grandeza que descreve o quanto um sistema está localmente fora do equilíbrio é  $-\text{grad}T$ , aqui a grandeza com este papel é  $\vec{E} = -\text{grad}V$ . No lugar de densidade de fluxo de calor  $\vec{j}_q = -k \text{ grad}T$ , temos para a densidade de corrente elétrica  $\vec{j} = -\sigma \text{ grad}V$ . Ambas estas leis são simplesmente *leis de resposta linear*: a resposta em termos de densidade de fluxo é proporcional ao valor da grandeza que descreve o desequilíbrio. De fato Ohm foi influenciado pelos trabalhos de Fourier sobre condução de calor quando ele fez suas descobertas.

### Exercícios:

**E 5.2.1:** Um fio de cobre numa temperatura de 20°C tem um comprimento de 200 m e um diâmetro de 1,2 mm. Calcule a resistência deste fio. Sabe-se que o coeficiente linear de dilatação térmica do cobre vale  $17 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Calcule a resistência do fio quando este for aquecido até uma temperatura de 30°C. Compare a contribuição para a mudança de resistência devida ao coeficiente térmico da resistividade com a contribuição devida a mudanças geométricas.

<sup>8</sup> Material do fio das resistências em chuveiro elétrico.

<sup>9</sup> Uma liga de 53 – 57 % (massa) de Cu , 43 – 45 % Níquel e 0,5 - 1,2 % Manganês que tem um coeficiente térmico especialmente pequeno. O nome Constantan ou Konstantan é um nome comercial da Firma ThyssenKrupp VDM GmbH .

**E 5.2.2:** Um cabo coaxial de comprimento  $L$  com um bom condutor cilíndrico interno de raio  $a$  e uma casca cilíndrica boa condutora com raio interno  $b$  possui um material fracamente condutivo no espaço entre os cilindros. Ambos os bons condutores devem ser considerados condutores ideais ( $\sigma = \infty$ ). Entre estes condutores há um material que conduz fracamente, tendo uma condutividade  $0 < \sigma < \infty$ . Calcule a resistência entre condutor interno e casca externa.

**E 5.2.3:** Mostre que a expressão no colchete da fórmula (5.2.27) também não depende da voltagem  $V_1$ .

**E 5.2.4:** Suponha uma densidade de portadores de carga no cobre de  $p_{ec}^{\#} \approx 8,48 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  e uma resistividade de  $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ . A massa do elétron vale  $m \approx 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e a carga  $q \approx -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Calcule o tempo médio entre colisões dos elétrons  $\langle t_* \rangle_e$ . Supondo uma velocidade dos elétrons de  $1,6 \times 10^6 \text{ m/s}$ , qual é o caminho livre que os elétrons podem voar sem colidir? Por quantos átomos um elétron passa, na media, antes de colidir? (a densidade numérica dos átomos era  $8,46 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ).

**E 5.2.5:** Imagine que avistamos um elétron dentro de um metal voando com aquela velocidade assustadoramente grande de  $0,5\% c$ . Vamos escolher o instante desta primeira percepção do elétron como origem temporal;  $t=0$ . Em algum momento desconhecido  $t_* > 0$ , este elétron vai colidir com algum obstáculo. Como não temos meios de prever o exato instante de colisão, usaremos uma descrição probabilística. Para um intervalo infinitesimal de tempo  $\delta t$  seja  $p(t) \delta t$  a probabilidade de que esta colisão aconteça no intervalo de tempo  $[t, t + \delta t]$ .

$$p(t) \delta t \underset{\text{def.}}{=} P(t_* \in [t, t + \delta t]) \quad (5.2.36),$$

onde  $P(\text{evento})$  é a probabilidade de “evento”. Agora imagina que alguém observou este elétron durante o intervalo de tempo  $[0, t_1]$  sem ter visto uma colisão. Neste caso, a probabilidade de que a colisão aconteça no intervalo de tempo  $[t, t + \delta t]$ , com  $t > t_1$  é dada pela probabilidade condicional

$$P(t_* \in [t, t + \delta t] \mid t_* \notin [0, t_1]) = \frac{p(t) \delta t}{\int_{t_1}^{\infty} p(t') dt'} \quad (5.2.37).$$

Mas, poderíamos ter escolhido igualmente o instante  $t_1$  como a origem temporal. Tudo deveria sair igual com esta escolha. Consequentemente deve valer a seguinte condição:

$$p(t - t_1) \delta t = \frac{p(t) \delta t}{\int_{t_1}^{\infty} p(t') dt'} \quad (5.2.38)$$

Mostre que isto implica que a função  $p(t)$  necessariamente tenha a forma

$$p(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \quad (5.2.39)$$

onde  $\tau$  é alguma constante.

**E 5.2.6:** Calcule os valores esperados  $\langle t_* \rangle$  e  $\langle t_*^2 \rangle$  com a densidade de probabilidade (5.2.39) do exercício anterior. Como o número dos elétrons é grande e eles devem ser estatisticamente independentes e com distribuições iguais, estes valores esperados devem coincidir com alta probabilidade com as médias  $\langle t_* \rangle_e$  e  $\langle t_*^2 \rangle_e$ .

**E 5.2.7:** Escreva os pontos de destaque desta seção.

## 5.2 Apêndice A

Primeiramente devemos substituir a fórmula (5.2.14) por uma outra, pois esta fórmula foi deduzida na seção 2.2 assumindo que todas as partículas possuem a mesma velocidade e esta condição não é satisfeita no caso dos elétrons num metal. No entanto, podemos aproveitar a fórmula (5.2.8) se considerarmos os elétrons de uma dada velocidade como uma espécie de partícula, ou seja, cada valor de velocidade conta como um rótulo de uma espécie de partícula. Mas, como as velocidades podem variar continuamente, devemos substituir a soma da fórmula (5.2.8) por uma integral sobre todas as possíveis velocidades:

$$\vec{j} = -e \iiint f^*(\vec{v}) \vec{v} d^3 v \quad (5.2.40),$$

onde  $f^*$  é uma densidade numérica de elétrons de condução num sentido duplo. Isto significa: se  $V$  for um volume no espaço comum e  $\delta v_x \delta v_y \delta v_z$  um volume infinitesimal no espaço de velocidades, o número de elétrons de condução no volume  $V$  com velocidades no conjunto

$$C_{\vec{v}} \underset{\text{def.}}{=} \left\{ \vec{v}' = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \mid v'_x \in [v_x, v_x + \delta v_x] \wedge v'_y \in [v_y, v_y + \delta v_y] \wedge v'_z \in [v_z, v_z + \delta v_z] \right\} \quad (5.2.41)$$

seria  $\delta v_x \delta v_y \delta v_z V f^*(\vec{v})$ . A densidade numérica dos elétrons de condução é a integral desta densidade dupla integrada sobre todas as possíveis velocidades:

$$\rho^* = \iiint f^*(\vec{v}) d^3 v \quad (5.2.42).$$

Podemos ainda introduzir uma densidade de probabilidade  $\phi(\vec{v})$  de encontrar um elétron com velocidade por volta de  $\vec{v}$ . Como os elétrons devem ser estatisticamente independentes e igualmente distribuídos e os números de elétrons são muito grandes, encontraremos com alta probabilidade densidades  $f^*$  e  $\rho^*$  tais que

$$f^*(\vec{v}) = \rho^* \phi(\vec{v}) \quad (5.2.43)$$

Na ausência de um campo elétrico, a densidade de probabilidade deve ser isotrópica, ou seja, não deve distinguir uma direção da outra, de tal forma que, neste caso, a densidade de corrente seria nula. Vamos chamar esta densidade isotrópica de probabilidade  $\phi_0(\vec{v})$ . Então esta densidade isotrópica não resulta em corrente:

$$0 = -e \rho^* \iiint \phi_0(\vec{v}) \vec{v} d^3 v \quad (5.2.44)$$

Precisamos de alguma informação a respeito da densidade de probabilidade  $\phi(\vec{v})$  para o caso com campo elétrico não nulo. Imaginem que olhemos com um supermicroscópio acoplado a uma superfilmadora dentro do metal. No instante  $t = 0$  vemos

um elétron voando com alguma velocidade  $\vec{v}'$ . Algum tempo atrás, num instante  $t_* < 0$ , este elétron sofreu seu último espalhamento em algum obstáculo. O elétron partiu deste espalhamento com velocidade  $\vec{v}_0'$ . Com a presença do campo elétrico a velocidade no instante  $t = 0$  é

$$\vec{v}' = \vec{v}_0' + (-e)m^{-1}\vec{E}(0-t_*) = \vec{v}_0' + q_e m^{-1} \vec{E} t_* \quad (5.2.45)$$

Agora tanto  $\vec{v}_0'$  como  $t_*$  são variáveis aleatórias. O choque com um átomo que se agita termicamente deve gerar a distribuição de probabilidade isotrópica  $\phi_0$  para as velocidades iniciais  $\vec{v}_0'$ . Se soubéssemos que o último choque aconteceu num instante  $t_1$ , a probabilidade de encontrar  $\vec{v}'$  no conjunto  $C_{\vec{v}}$  seria a probabilidade condicional

$$P(\vec{v}' \in C_{\vec{v}} | t_* = t_1) = \phi_0(\vec{v} - e m^{-1} \vec{E} t_1) \delta v_x \delta v_y \delta v_z \quad (5.2.46)$$

A probabilidade de o último choque ter acontecido no intervalo de tempo  $[t, t + \delta t]$  é

$$P(t_* \in [t, t + \delta t]) = p(-t) \delta t \quad (5.2.47)$$

onde  $p(t) = \tau^{-1} \exp\{-t/\tau\}$  é a mesma densidade de probabilidade do exercício E.5.2.5. Pois quando estamos vendo um elétron voando no instante  $t = 0$ , a probabilidade de o último choque ter acontecido no intervalo  $[t, t + \delta t]$  (com  $t < 0$ ) é a mesma que a probabilidade de o próximo choque acontecer no intervalo  $[-t - \delta t, -t]$ . Então a probabilidade de encontrar uma velocidade  $\vec{v}'$  no conjunto  $C_{\vec{v}}$ , com um último choque acontecido no instante qualquer  $t_* \in (-\infty, 0]$  é

$$P(\vec{v}' \in C_{\vec{v}}) = \int_{-\infty}^0 p(-t_1) \phi_0(\vec{v} - e m^{-1} \vec{E} t_1) \delta v_x \delta v_y \delta v_z dt_1 \quad (5.2.48)$$

Mudando a variável de integração  $t = -t_1$  e trocando os limites de integração obtemos

$$P(\vec{v}' \in C_{\vec{v}}) = \int_0^\infty p(t) \phi_0(\vec{v} + e m^{-1} \vec{E} t) \delta v_x \delta v_y \delta v_z dt \quad (5.2.49)$$

Então a densidade de probabilidade que procuramos é

$$\phi(\vec{v}) = \int_0^\infty p(t) \phi_0(\vec{v} + e m^{-1} \vec{E} t) dt \quad (5.2.50)$$

Para tempos muito maiores que  $\tau$ , a função  $p$  tem valores tão pequenos que podemos fazer com os valores da função  $\phi_0$  quase qualquer coisa sem causar grande erro, pois estes erros são apagados pelos valores quase nulos da função  $p$ . A alteração de velocidade  $e \vec{E} \tau$  é muito pequena e mesmo a alteração  $e \vec{E} \tau \times 10$  seria ainda muito pequena na escala na qual variam os valores da função  $\phi_0$  apreciavelmente. Então na (5.2.50) podemos fazer uma aproximação com a função  $\phi_0$  válida para uma pequena vizinhança do ponto  $\vec{v}$  sem alterar o resultado da (5.2.50) apreciavelmente:

$$\phi_0(\vec{v} + e m^{-1} \vec{E} t) \approx \phi_0(\vec{v}) + e m^{-1} t \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial \phi_0}{\partial v_k} E_k \quad (5.2.51)$$

Inserindo isto na (5.2.50) obtemos

$$\begin{aligned}\phi(\vec{v}) &= \phi_0(\vec{v}) \int_0^\infty p(t) dt + e m^{-1} \int_0^\infty p(t) t \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial \phi_0}{\partial v_k} E_k dt = \\ &= \phi_0(\vec{v}) + e m^{-1} \tau \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial \phi_0}{\partial v_k} E_k\end{aligned}\quad (5.2.52)$$

Podemos usar este resultado para calcular a densidade de corrente (5.2.40), usando ainda a (5.2.43) e a (5.2.44):

$$\vec{j} = -\rho^* \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^2 m^{-1} \tau \sum_{k=x,y,z} \frac{\partial \phi_0}{\partial v_k} E_k \sum_{l=x,y,z} v_l \hat{l} dv_x dv_y dv_z \quad (5.2.53)$$

O vetor  $\vec{v}$  aparece nesta expressão de forma um tanto incomum; o símbolo no segundo somatório  $\hat{l}$  adquire sucessivamente os valores  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ . Então este somatório é nada mais do que  $v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$ , ou seja, o vetor  $\vec{v}$ . A integral pode ser resolvida com integração por partes:

$$\vec{j} = +\rho^* \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^2 m^{-1} \tau \sum_{k=x,y,z} \phi_0 E_k \sum_{l=x,y,z} \frac{\partial v_l}{\partial v_k} \hat{l} dv_x dv_y dv_z \quad (5.2.54)$$

Temos

$$\frac{\partial v_l}{\partial v_k} = \delta'_k = \begin{cases} 1 & \text{para } l=k \\ 0 & \text{para } l \neq k \end{cases} \quad (5.2.55)$$

e  $\iiint \phi_0 d^3 \vec{v} = 1$ . Então segue

$$\vec{j} = +\rho^* e^2 \tau m^{-1} \sum_{\substack{l=x,y,z \\ k=x,y,z}} E_k \delta_{lk} \hat{l} = +\rho^* e^2 \tau m^{-1} \tau \vec{E} \quad (5.2.56)$$

$$\boxed{\vec{j} = +\frac{\rho^* e^2}{m} \tau \vec{E}}$$

(5.2.57)

Quem quiser escrever este resultado na forma da fórmula (5.2.14) , ou seja,  $\vec{j} = -e \rho_{ec}^* \vec{v}_d$  , vai ter que identificar a velocidade de deriva com  $-\rho^* e \tau m^{-1} \vec{E}$  . Com o resultado do exercício 5.2.6 ( $\langle t_* \rangle_e = \tau$ ) obtivemos então a fórmula desejada (5.2.21).

## 5.2 Apêndice B

Na seção 4.1 mencionamos o elemento de memória de um bit de um Pen Drive (Fig. 4.1.10). Este artefato é uma versão um pouco mais complicada de um dispositivo eletrônico muito importante, a saber, um *transistor de efeito campo* ou FET (Field Effect Transistor). A diferença reside no fato de que o elemento de memória tem dois *gates*, o *floating gate* e o *control gate*, e o transistor de efeito campo tem apenas o *control gate*, que no caso é simplesmente chamado de *gate*. A figura 5.2.6 mostra a estrutura de um MOSFET (Metal Oxide Field Effect Transistor) esquematicamente. Agora, depois de ter visto alguns aspectos da condução em sólidos, podemos entender estes dispositivos parcialmente. Um entendimento mais profundo requer conhecimentos da mecânica quântica.

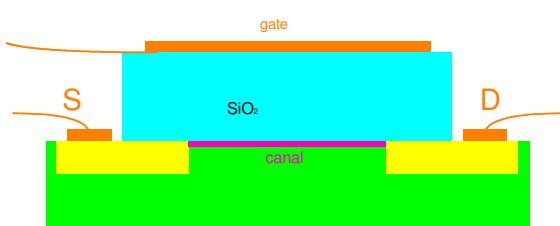


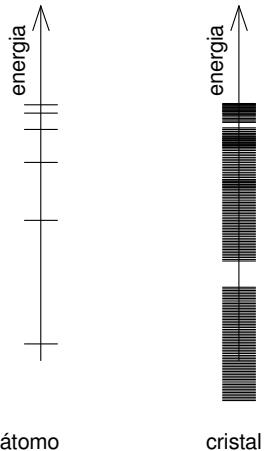
Fig. 5.2.6 Esquema de um MOSFET .

O *gate* é de metal o que corresponde à letra M da sigla; depois vem uma camada de dióxido de silício, que corresponde à letra O (de óxido). Os elementos embaixo do dióxido de silício são de material semicondutor. Um semicondutor é um isolante sólido no qual podem ser criados seletivamente portadores de carga através de diferentes mecanismos. Uma vez criados os portadores de carga, o semicondutor funciona como um condutor.

Na discussão da condutividade em metais, mencionamos o princípio de exclusão de Pauli (dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado). Uma consequência deste princípio é o fato de que dos muitos elétrons existentes num cristal somente uma fração pequena pode contribuir para a condução elétrica. Quando aplicamos um campo elétrico num elétron, este ao ser acelerado deve absorver energia e passar de um estado energético para um outro estado energético mais elevado. Na verdade poderia também ser um estado menos elevado se o elétron tiver uma velocidade inicial e o campo desacelerar o movimento. Mas se este outro estado já estiver ocupado por outro elétron, o princípio de Pauli impede este processo. Consequentemente somente os elétrons mais energéticos, aqueles que se movem com 0,5% da velocidade da luz, têm níveis desocupados na sua vizinhança energética e podem contribuir para a condução.

Fig. 5.2.7 Estados de energia dos elétrons num átomo e num cristal.

Lembrem-se das aulas de química da escola que os elétrons dentro de um átomo ocupam certos níveis de energia. De forma semelhante temos um sistema de níveis energéticos dos elétrons dentro de um cristal. Mas no cristal estes níveis enchem a escala de energia densamente em certos intervalos da escala e em outros intervalos não há estados. Os intervalos repletos de estados são chamados de *bandas de energia* e os intervalos vazios de *lacunas*. A figura 5.2.7 mostra esta situação simbolicamente. Se uma banda estiver completamente cheia de elétrons e as bandas mais energéticas totalmente vazias não há possibilidade de acelerar os elétrons sem uso de uma energia grande o suficiente para um elétron pular através da lacuna que separa a banda ocupada da próxima banda vazia. Este é o caso de um material isolante. Se, por outro lado, uma banda estiver somente



parcialmente ocupada com elétrons, temos um condutor já que os elétrons mais energéticos podem facilmente ganhar energia em passos pequenos ou perder energia, pois na superfície energética do “lago de elétrons” há sempre alguns buracos vazios por causa de excitações térmicas.

Agora imagine o material semicondutor do MOSFET da figura 5.2.6 com uma banda totalmente repleta de elétrons e a seguinte banda, não muito distante, quase totalmente vazia. Então este material seria praticamente um isolante. Agora carregamos o *gate* positivamente. Se o material por baixo do dióxido de silício fosse um metal, o campo elétrico gerado pelas cargas positivas do *gate* não conseguiria penetrar muito para dentro do metal. Mas no caso do semicondutor há pouquíssimos portadores de carga e o

campo elétrico consegue penetrar uma boa distância para dentro do semicondutor. Então a energia potencial dos elétrons sofre uma alteração e consequentemente os níveis energéticos, que formam as bandas, são deformados perto do *gate* positivo. Na figura 5.2.8 mostramos esta deformação das bandas perto do *gate*. A figura está girada em relação à figura 5.2.7 para poder mostrar o eixo de energia apontando para cima.

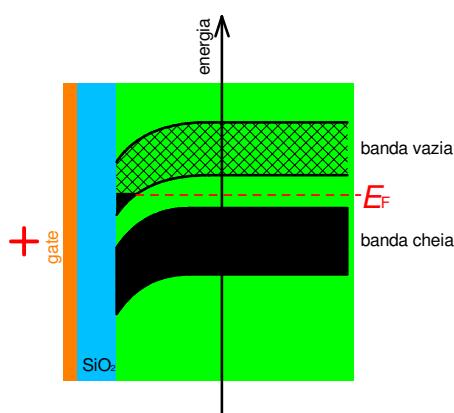


Fig. 5.2.8 Bandas deformadas pelo campo de carga positiva no *gate*.

No equilíbrio os elétrons ocupam estados até certa altura  $E_F$ . Quando a deformação da banda vazia perto do *gate* puxa esta tanto para baixo que ela ultrapassa a altura  $E_F$ , ou seja, ela “mergulha” no lago de superfície  $E_F$ , então aparecerão elétrons nesta região que possuem estados vazios logo em cima deles sem ter que pular uma lacuna. Então estes elétrons são elétrons de condução. A carga positiva no *gate* criou um canal condutivo que conecta os dois contatos que aparecem na esquerda e na direita na figura 5.2.6. Estes contatos tradicionalmente são chamados de *Source* e *Drain*. Dependendo da quantidade de carga posta no *gate*, este canal condutivo pode ser mais ou menos espesso e correspondentemente pode-se regular a resistência entre estes contatos com o valor da carga no *gate*. Então este dispositivo funciona como uma torneira que pode ser fechada, aberta, pouco aberta, muito aberta etc. Em amplificadores de sinais elétricos todos estes casos intermediários de pouco aberto, de um pouco mais aberto etc. são usados. Em eletrônica digital normalmente se usam somente os casos totalmente fechado e totalmente aberto. No caso da memória do Pen Drive a medida da resistência entre os contatos S e D pode informar sobre a carga armazenada no *floating gate* e esta medida é a leitura da memória.