

### 3.4 Energia e potencial elétrico – o tubo de Braun

Com a relação entre potencial elétrico e energia potencial de uma partícula carregada num campo eletrostático, isto é, com a fórmula (3.1.11), podemos resolver simples problemas de dinâmica de partículas usando os mesmos métodos que usamos na Física I quando calculamos a velocidade de uma pedra que cai no campo gravitacional.

A situação experimental à qual se aplica este tipo de cálculo é tipicamente aquela de tubos de raios catódicos. Estes são dispositivos para formar feixes de elétrons. Os antigos osciloscópios e as antigas válvulas de imagem das televisões, antes da invenção de telas LED<sup>1</sup>, LCD<sup>2</sup> e PDP<sup>3</sup>, usavam raios catódicos. Mesmo depois do desaparecimento destas antigas televisões e dos antigos osciloscópios, as aplicações dos tubos de raios catódicos são ainda diversas. Por exemplo, os microscópios eletrônicos usam feixes de elétrons. Também na fabricação de componentes eletrônicos, feixes de elétrons são frequentemente usados para gravação de estruturas de minúsculo tamanho.

Ainda não introduzimos o elétron como partícula. Descreveremos sua descoberta numa seção futura quando tratarmos das forças magnéticas. Mas todo mundo já ouviu falar de elétrons e aprendeu na escola que são os elétrons que transportam carga elétrica dentro de um metal. Para poder formar feixes de elétrons no espaço vazio, é preciso tirar elétrons de dentro de um metal. Isto pode ser feito aplicando campos elétricos muito intensos ou elevando a temperatura do metal de tal forma que a agitação térmica forneça tanta energia a alguns dos elétrons que eles consigam escapar do metal. Nos tubos de raios catódicos usa-se uma combinação destes dois métodos e a elevação da temperatura de um metal é feita deixando passar corrente elétrica através do metal. Usa-se um filamento de tungstênio<sup>4</sup> parecido com aqueles nas lâmpadas incandescentes. Mas nas lâmpadas este filamento costuma ter a forma de uma fina espiral. Nos tubos de raios catódicos o filamento tem a forma da letra V com uma ponta onde aparecerá um campo elétrico intenso. Será preferencialmente nesta região onde os elétrons conseguem escapar do metal. Isto garante que a fonte dos elétrons ocupe uma região espacial bem pequena.

A partir deste ponto, os elétrons são acelerados por um campo elétrico estático. Este campo é gerado aplicando alta tensão entre o filamento, chamado *cátodo*, e um cilindro metálico chamado de *ânodo*.

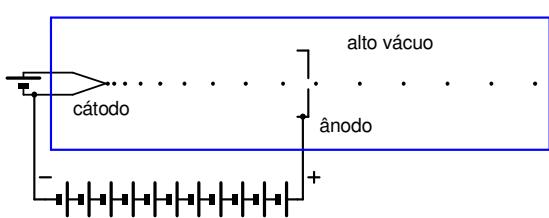


Fig. 3.4.1 Esquema de tubo de raios catódicos. A combinação de uma barra grossa e um traço paralelo mais fino e mais comprido simboliza uma bateria ou fonte elétrica. Há um destes símbolos no filamento (cátodo); esta bateria fornece a energia que aquece o filamento. Há vários destes símbolos em série indicando uma fonte de alta tensão.

As palavras “cátodo” e “ânodo” foram inventadas por William Whewell em 1834. Elas são derivadas das palavras gregas κάθοδος, que significa “descida”, “caminho para baixo” ou “jusante” e ἄνοδος, que significa “subida”. Michael Faraday pediu a Whewell para criar palavras para os eletrodos nas suas experiências de eletrólise.

<sup>1</sup> LED = Light Emitting Diode.

<sup>2</sup> LCD = Liquid Crystal Display.

<sup>3</sup> PDP = Plasma Display Panel.

<sup>4</sup> Geralmente não é tungstênio puro, mas tungstênio dopado com tório ou com dióxido de zircônio ou outros materiais que facilitem a emissão dos elétrons.

Entre cátodo e ânodo os elétrons são acelerados. No centro do ânodo há um furo. Os elétrons que “caem” na direção do furo passam para o outro lado do ânodo, onde o campo elétrico é nulo, e seguem em movimento retilíneo uniforme, enquanto não se aplicam outros campos para desviar estas partículas.

Podemos calcular a velocidade dos elétrons na região atrás do ânodo usando conservação de energia. O elétron sai do metal com quase nenhuma energia cinética. Sua energia potencial neste ponto vale  $q_{\text{elétron}} V_{\text{cátodo}}$ , onde  $q_{\text{elétron}}$  é a carga do elétron e  $V_{\text{cátodo}}$  é o potencial elétrico do cátodo. A carga do elétron vale  $q_{\text{elétron}} \approx -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . No lugar do furo no ânodo e depois do mesmo, a energia potencial vale  $q_{\text{elétron}} V_{\text{ânodo}}$ , onde  $V_{\text{ânodo}}$  é o potencial elétrico do ânodo. Então a conservação de energia permite determinar o módulo da velocidade  $\vec{v}$  do elétron quando ele chega no lugar do furo:

$$0 + q_{\text{elétron}} V_{\text{cátodo}} = \frac{m_{\text{elétron}} |\vec{v}|^2}{2} + q_{\text{elétron}} V_{\text{ânodo}} \quad (3.4.1)$$

Resolvendo para o módulo da velocidade obtemos

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2 q_{\text{elétron}} (V_{\text{cátodo}} - V_{\text{ânodo}})}{m_{\text{elétron}}}} \quad (3.4.2)$$

O valor da massa do elétron vale  $m_{\text{elétron}} \approx 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

O aluno atento deveria reclamar neste momento. Em todas as seções anteriores enfatizamos frequentemente que as leis que discutimos até agora, com a exceção da lei de Gauss, valem apenas para situações estáticas. Com a fórmula (3.4.1) aplicamos estas leis para uma partícula eletricamente carregada em movimento acelerado. De fato isto está errado e a fórmula (3.4.1) é apenas uma aproximação. Mas, para os tubos de raios catódicos, esta aproximação é excelente. Numa disciplina mais avançada de eletromagnetismo se aprende que uma partícula eletricamente carregada com carga  $q$  que executa um movimento acelerado emite ondas eletromagnéticas e perde energia numa taxa dada por

$$P_{\text{radiação}} = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (3.4.3),$$

onde  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$  é a velocidade da luz e  $\vec{a}$  é a aceleração da partícula. Numa primeira aproximação podemos supor  $\vec{a} \approx q \vec{E} / m$ , onde  $m$  é a massa da partícula. A energia perdida através da radiação durante um tempo  $T$  é

$$\delta E = \int_0^T P_{\text{radiação}} dt \quad (3.4.4)$$

Para estimar a ordem de grandeza desta perda, vamos supor uma aceleração aproximadamente constante de tal forma que  $\delta E$  é simplesmente  $T P_{\text{radiação}}$ . Para uma partícula acelerada numa diferença de potencial elétrico  $\Delta V$  num caminho de comprimento  $L$ , a perda relativa de energia é

$$\frac{\delta E}{|q \Delta V|} = \frac{1}{6\pi L \epsilon_0 c^3} \sqrt{\frac{2 |q^5 \Delta V|}{m^3}} \quad (3.4.5)$$

Para um elétron com uma diferença de potencial de 1 quilo-Volt e uma distância de aceleração de 10 cm, obtemos algo na ordem de  $\delta E / |q \Delta V| \approx 10^{-15}$ . Isto significa que o uso ingênuo da conservação de energia que foi feito na (3.4.1) é uma excelente aproximação.

Falaremos um pouco sobre as aplicações dos raios catódicos. Começamos com o osciloscópio, com o tubo de raios catódicos e com a tela de televisão. Incluímos estes equipamentos ultrapassados na discussão não apenas para dar uma aula de história da tecnologia, mas porque os princípios básicos destes equipamentos servem também para entender o *microscópio eletrônico de varredura*, que é um instrumento importante em laboratórios de pesquisa em diversas áreas.

O osciloscópio é um voltímetro que permite medir voltagens variáveis no tempo  $V(t)$  e mostrar estas medidas em forma de gráfico. Poder-se-ia construir um osciloscópio amarrando uma caneta no ponteiro de um voltímetro e passar uma fita de papel com velocidade constante por baixo da caneta de tal forma que as posições do ponteiro fiquem registradas no papel como mostra a figura 3.4.2. Nesta figura algum circuito eletrônico gera uma voltagem oscilatória que será registrada pelo osciloscópio. O registro aparece na fita de papel. Este tipo de instrumento realmente existe, embora ele

esteja desaparecendo dando espaço para novas técnicas.

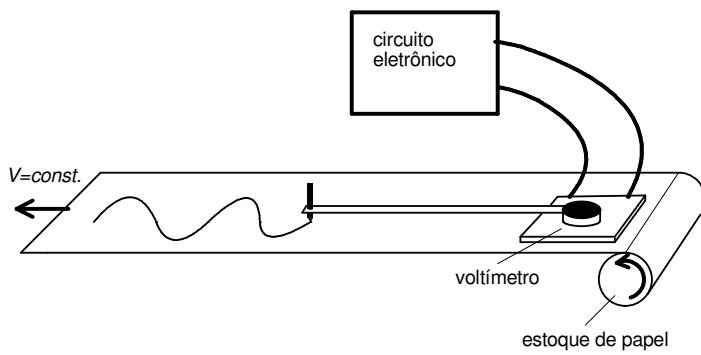


Fig. 3.4.2 Osciloscópio eletromecânico. Registro de  $V(t)$  numa fita de papel.

A principal limitação deste tipo de instrumento é a lentidão do ponteiro do voltímetro. Esta lentidão é provocada pela massa

grande do ponteiro e da caneta. Para poder mostrar oscilações rápidas, a caneta teria que mover-se com grandes acelerações. Com massa grande isto implicaria em forças enormes.

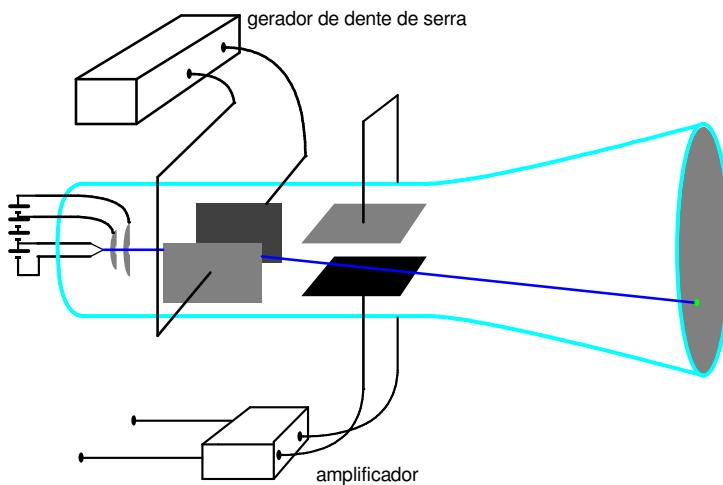


Fig. 3.4.3 Karl Ferdinand Braun. (Imagen da Wikipedia).

Para vencer esta limitação, pode-se substituir a caneta e o ponteiro por um objeto com menos massa. Um objeto que tem muitíssimo menos massa do que uma caneta é um elétron. Karl Ferdinand Braun<sup>5</sup> teve esta ideia e utilizou um tubo de raios catódicos para registrar oscilações elétricas. Ele usou um tubo de vidro bem evacuado que continha um filamento de tungstênio para emissão de elétrons, vários cilindros metálicos com furo central em diferentes potenciais elétricos para acelerar e focalizar um feixe de elétrons e dois pares de placas paralelas cujos vetores normais eram ortogonais entre si e ao eixo de simetria do tubo. A figura 3.4.4 mostra este tipo de tubo de raios catódicos esquematicamente.

<sup>5</sup> \* Karl Ferdinand Braun (1850 - †1918) deu contribuições importantes para as telecomunicações usando ondas de rádio. Estas invenções lhe renderam o prêmio Nobel de Física junto com Marconi. Braun descobriu o diodo semicondutor e o princípio de Le Châtelier-Braun (princípio que determina a dependência dos equilíbrios químicos com a temperatura e pressão).

Fig. 3.4.4 Osciloscópio com tubo de Braun.



Um feixe de elétrons é gerado num canhão de elétrons parecido com aquele da figura 3.4.1. Depois de sair deste canhão, o feixe de elétrons passa por dois pares de placas metálicas que servem para aplicar campos elétricos que desviam o feixe de elétrons. As placas que criam um campo elétrico na direção vertical são ligadas à saída de um amplificador que eleva a tensão a ser medida a um nível adequado para

poder defletir o feixe de elétrons para cima e para baixo. O feixe de elétrons cai num anteparo com uma substância fluorescente que emite luz quando atingida pelos elétrons. No ponto de incidência do feixe de elétrons aparece para o observador um ponto luminoso. A altura deste ponto luminoso é proporcional à voltagem aplicada na entrada do amplificador. Este ponto luminoso é o análogo da ponta da caneta do instrumento da figura 3.4.2. No lugar da fita de papel que anda com velocidade constante move-se o próprio feixe de elétrons para o lado com velocidade constante. Para isto servem as placas que criam um campo na direção horizontal. Aplica-se nestas placas uma tensão que cresce linearmente com o tempo. Desta forma o ponto luminoso vai executar um movimento uniforme na direção horizontal enquanto a posição vertical segue o comportamento da voltagem a ser medida. Resulta um movimento do ponto luminoso que percorre uma trajetória que é o gráfico da função  $V : t \mapsto V(t)$ . Há muito mais detalhes que precisam ser explicados. Mas vamos pospor estas explicações para uma seção futura totalmente dedicada aos osciloscópios. Este tipo de instrumento é uma ferramenta tão importante que merece uma seção inteira dedicada a ela.

O aluno que entendeu o cálculo da velocidade dos elétrons que emergem de um canhão de elétrons deve ser capaz de calcular como os campos aplicados através das placas deflectoras no tubo de Braun desviam o feixe. O exercício E 3.4.2 contém esta tarefa.

O tubo das televisões não é muito diferente (embora o desvio do feixe no caso da televisão seja obtido com campos magnéticos e não elétricos). A principal diferença reside no desenho feito na tela. No caso da televisão não se quer escrever uma curva que representa um gráfico de uma função, mas uma imagem. Para obter uma imagem, o feixe é defletido de tal forma que ele percorra toda a tela em forma de zig-zag. Dentro do canhão de elétrons dos tubos de televisão há um eletrodo que permite regular a intensidade do feixe. Sempre que o feixe passa por uma região da tela onde deve aparecer uma área clara da imagem, a intensidade do feixe é rapidamente regulada para um valor alto. E quando o feixe passa por uma região que deve ficar escura, a intensidade do feixe é regulada para um valor baixo. A varredura da tela se repete com tão alta frequência que nossa visão tem a impressão de uma imagem. Na verdade o que aparece na tela é um único ponto luminoso andando num zig-zag pela tela.

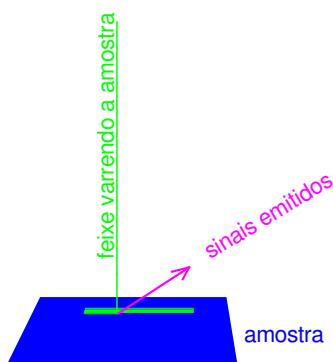


Fig. 3.4.5 Feixe de elétrons varrendo uma amostra e provocando a emissão de sinais.

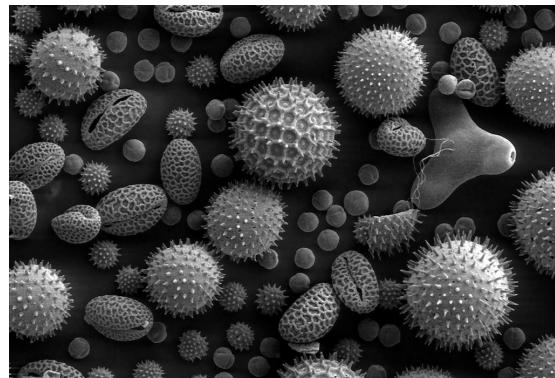
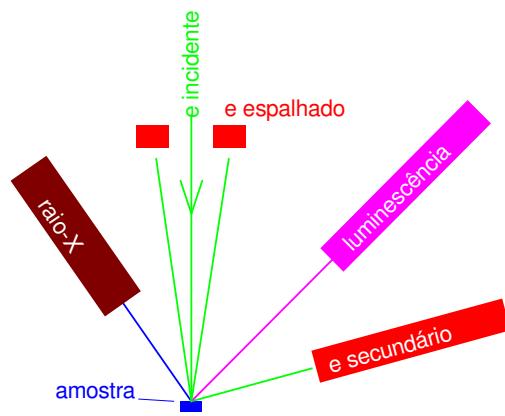
No tubo de televisão a varredura em forma de zig-zag cobre uma área grande com dimensões lineares de dezenas de polegadas. O mesmo tipo de varredura em forma de zig-zag pode também varrer uma área de uma amostra com dimensões de micrômetros. Isto é feito nos microscópios eletrônicos de varredura. No jargão dos cientistas este instrumento recebe a sigla MEV (Microscópio Eletrônico de Varredura) ou SEM (Scanning Electron Microscope).

Fig. 3.4.6

Detectores de sinais num microscópio eletrônico de varredura. Na imagem abreviamos “elétron” com “e”.

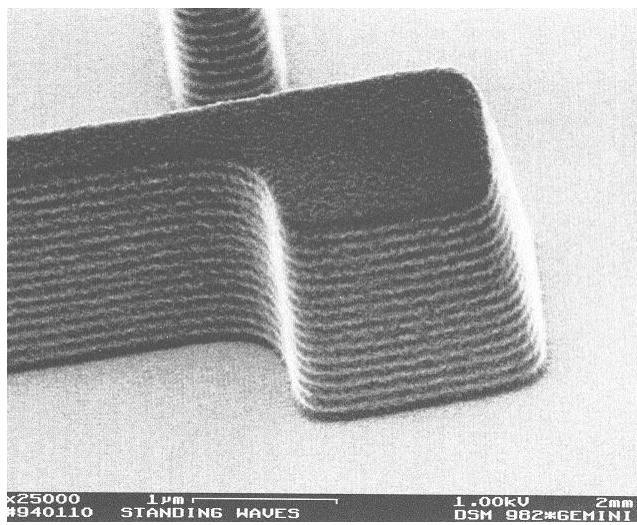
Nestes microscópios o feixe incide nos diversos pontos de uma amostra e provoca vários tipos de sinal que podem ser usados para a formação de imagem do objeto: (1) elétrons espalhados pela amostra, (2) elétrons secundários que são arrancados da amostra e (3) raios-X emitidos pelos átomos da amostra que foram energizados pelo impacto dos elétrons, (4) luminescência, isto é, luz emitida pela amostra. Detectores captam estes sinais. Uma eletrônica que correlaciona os instantes de captação destes sinais com as posições percorridas na varredura permite formar imagens da amostra. A figura 3.4.5 mostra a varredura e a 3.4.6 os detectores de sinais. Especialmente os sinais de raios-X são interessantes, pois eles permitem identificar os elementos químicos presentes na amostra. Então se pode fazer “imagens químicas” de uma amostra. As aplicações deste tipo de equipamento são as mais variadas: na biologia, nas pesquisas de poluição do meio ambiente para identificar poluentes sólidos, na fabricação de componentes na microeletrônica, em pesquisas de novos materiais, na metalurgia, na arqueologia ..... Esta lista praticamente não tem fim. As figuras 3.4.7 e 3.4.8 dão exemplos de imagens feitas com um MEV.

Fig. 3.4.7 Imagem de grãos de pólen feito com um MEV. (Imagen da Wikipedia)



O microscópio eletrônico de varredura foi inventado por Manfred von Ardenne<sup>6</sup> em 1937. Pouco antes da invenção do microscópio eletrônico de varredura uma equipe de pesquisadores na Universidade Técnica de Berlim desenvolveu um microscópio eletrônico de transmissão. Este também usa raios catódicos. Os princípios deste microscópio são mais parecidos com os dos microscópios ópticos e deixamos sua discussão para uma aula da Física IV. Também vamos entender somente na Física IV por que razão os microscópios eletrônicos conseguem enxergar objetos menores do que os microscópios ópticos.

Fig. 3.4.8 Imagem de uma máscara de verniz (photoresist) usada na fabricação de um componente da microeletrônica. Repare na marca que corresponde a 1 micrômetro na borda inferior da imagem. (Imagen da Wikipedia).



Depois deste passeio pelas aplicações envolvendo feixes de elétrons, voltaremos à questão da energia. No caso dos raios catódicos tratamos da energia potencial de uma partícula num campo elétrico dado externamente. Agora vamos discutir a energia de um sistema de partículas eletricamente carregadas em posições fixas sujeitas apenas ao campo elétrico que eles mesmos criam. Imaginamos  $N$  cargas  $q_1, q_2, \dots, q_N$  em posições  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  e queremos atribuir a este sistema um valor de energia. Devemos nos lembrar que na mecânica de Newton a energia tem sempre uma constante aditiva livre, que corresponde a uma escolha arbitrária de um ponto de referência da energia potencial. Aqui vamos escolher a energia como zero quando as cargas estiverem infinitamente afastadasumas das outras todas “escondidas” no infinito. A partir desta configuração de energia zero, vamos trazer as cargas, uma após a outra, para as suas posições. Como energia da configuração, tomaremos o trabalho necessário para estabelecer a configuração “ $q_1, q_2, \dots, q_N$  nas posições  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ ”.

Fig. 3.4.9 Manfred von Ardenne inventor do microscópio eletrônico de varredura. (Imagen da Wikipedia).



Para trazer a primeira carga, não precisamos vencer nenhuma força já que todas as demais cargas estão infinitamente afastadas. Já na segunda carga aparece a força exercida pela primeira carga. Com os resultados (3.1.11) e (3.1.33) sabemos que a energia necessária para trazer a segunda carga para seu lugar é

<sup>6</sup> Manfred von Ardenne (20/01/1907 – 26/05/1997) recebeu sua primeira patente com a idade de 16 anos. Mesmo sem concluir a escola de segundo grau, ele conseguiu inscrever-se na universidade para estudar física, química e matemática. Mas o sistema rígido da universidade não era adequado para este gênio. Depois do quarto semestre ele abandonou a universidade e fundou seu próprio laboratório de pesquisa em Berlin-Lichterfelde, mantendo o mesmo com suas invenções. Ele inventou a televisão, o microscópio de varredura, contribuiu para sistemas de radar e separação de isótopos. No seu laboratório particular tinha até um acelerador de partículas de 60 toneladas!

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (3.4.6).$$

Para trazer a terceira carga, precisamos vencer as forças provocadas da carga 1 e da carga 2. De novo podemos aplicar os resultados (3.1.11) e (3.1.33) juntos com o princípio de superposição. Então a energia necessária para trazer a terceira carga é

$$\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \quad (3.4.7)$$

Juntando isto com a energia que já gastamos no transporte da carga 2, obtemos

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \quad (3.4.8)$$

É óbvio como este processo continua e o resultado final é

$$\text{Energia eletrostática} = \sum_{\substack{a,b=1 \\ a < b}}^N \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \quad (3.4.9)$$

Repare que no somatório há uma restrição que garante que cada par de cargas é contado apenas uma vez. Pode-se substituir esta restrição pela restrição  $a \neq b$  colocando um fator  $\frac{1}{2}$  na frente que compensa a contagem dupla de pares:

$$\text{Energia eletrostática} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^N \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|} \quad (3.4.10)$$

Os alunos de química encontrarão esta expressão no tal de “operador Hamiltoniano” numa disciplina de Química Quântica.

Na descrição do processo de montar a configuração de cargas, escrevemos “vencer as forças” e “gastar energia”. Repare, no entanto, que o valor que resulta pode também ser negativo. Uma energia negativa gasta equivale a uma energia ganha. Por exemplo, numa configuração de duas cargas de sinais opostos a energia eletrostática é negativa e na verdade ganharíamos energia no transporte da segunda carga.

## Exercícios

**E 3.4.1:** Um elétron foi emitido de um cátodo com velocidade zero. O cátodo está num potencial de  $-1000\text{ V}$ . Calcule a velocidade que o elétron adquire quando chega no ânodo que está num potencial zero.

**E 3.4.2:** O elétron da questão 3.4.1. atravessa o furo central do ânodo e segue em frente. Numa região de 5 cm de comprimento é aplicado um campo elétrico uniforme de módulo  $10000\text{ V/m}$ . Este campo tem uma direção perpendicular ao feixe de elétrons. Depois de passar pelo campo elétrico de  $10000\text{ V/m}$ , o elétron viaja ainda 20 cm até cair numa tela. Calcule quanto difere o ponto de incidência do elétron do ponto de incidência sem a aplicação do campo transversal.

**E 3.4.3:** Na discussão dos movimentos dos elétrons do tubo de Braun, desprezamos a força gravitacional. Discuta qual é a importância da força gravitacional nestas

experiências. Considere os casos de tubo feito de material isolante e tubo feito de material condutor.

**E 3.4.4:** Calcule a energia eletrostática de dois elétrons numa distância de 1 Å ( $= 10^{-10} \text{ m}$ ).

**E 3.4.5:** Escreva os pontos de destaque desta seção.