

## 2.3 A dedução da lei de Gauss

A lei de Gauss descreve uma propriedade de integrais de fluxo do campo elétrico através de superfícies fechadas. Então o objeto de interesse do nosso estudo são grandezas do tipo

$$\Phi_E = \iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.3.1)$$

Gastamos a aula passada inteira para perder o medo deste tipo de objeto. Se  $\vec{E}$  fosse uma densidade de fluxo de um escoamento, teríamos uma interpretação bem concreta. Infelizmente  $\vec{E}$  não descreve nenhum escoamento, e um ou outro de vocês pode reagir com um bloqueio de compreensão porque não consegue enxergar o que esta grandeza representa. Mas o que importa é que ela é bem definida e pode ser calculada. Por exemplo, se o campo elétrico fosse

$$\vec{E}(x, y, z) = \hat{x} 5 \frac{N}{Cm^2} xy + \hat{y} \frac{5 N}{2 Cm^2} x^2 + \hat{z} 3 \frac{N}{C} \quad (2.3.2)$$

o fluxo de campo elétrico através da superfície B do paralelepípedo da figura 2.3.1 seria

$$\begin{aligned} \text{fluxo em B} &= \int_{z=1m}^{2m} \int_{y=1m}^{2m} \left\{ \hat{x} 5 \frac{N}{Cm^2} 4 \cancel{y} + \hat{y} \frac{5 N}{2 Cm^2} x^2 + \hat{z} 3 \frac{N}{C} \right\} \cdot \hat{x} dy dz = \\ &= 20 \frac{N}{Cm} \times (2m - 1m) \times \frac{1}{2} (4m^2 - 1m^2) = 30 \frac{Nm^2}{C} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

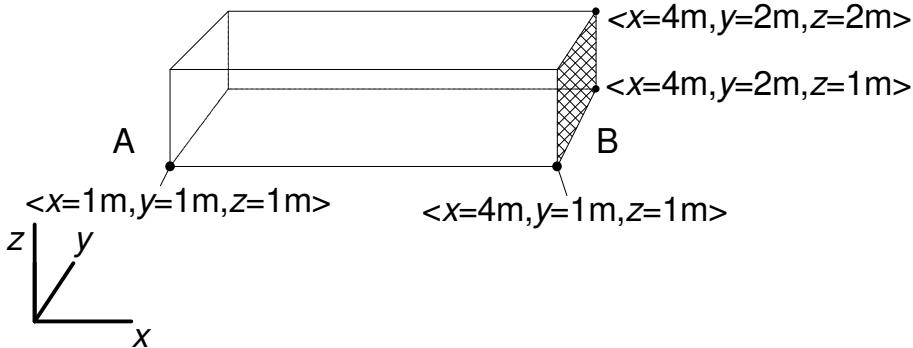


Fig. 2.3.1 Exemplo de fluxo de campo elétrico.

Igualmente podemos calcular os fluxos das outras faces para obter uma integral sobre a superfície fechada. O resultado é um valor bem definido que descreve alguma propriedade do campo. Se você, leitor, ainda não ficou contente com estas grandezas, é bom se lembrar dos tempos da Física I. Lá você formou uma grandeza que era um aglomerado muito esquisito de grandezas: massa vezes o quadrado da velocidade, dividido por 2, e ainda por cima somamos um  $mgh$ . Não é assustadoramente estranho este aglomerado de grandezas? Mas não importa. O interessante era que o valor de  $mv^2/2 + mgh$  não muda no tempo, e este fato permitia calcular coisas com muita facilidade. Com as grandezas  $\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$  temos a mesma situação: não importa que elas

sejam estranhas; se elas têm propriedades úteis, justifica-se sua definição. Vamos então averiguar quais propriedades têm o fluxo de campo elétrico através de superfícies fechadas.

Começaremos com um caso muito simples. Seja o campo elétrico o campo de uma única carga puntiforme. Usaremos como superfície de integração a superfície de um pedaço de cone muito fino que tem seu vértice exatamente no local da carga como mostra a figura 2.3.2. O pedaço de cone é limitado por dois discos circulares nos pontos **a** e **b** indicados na figura.

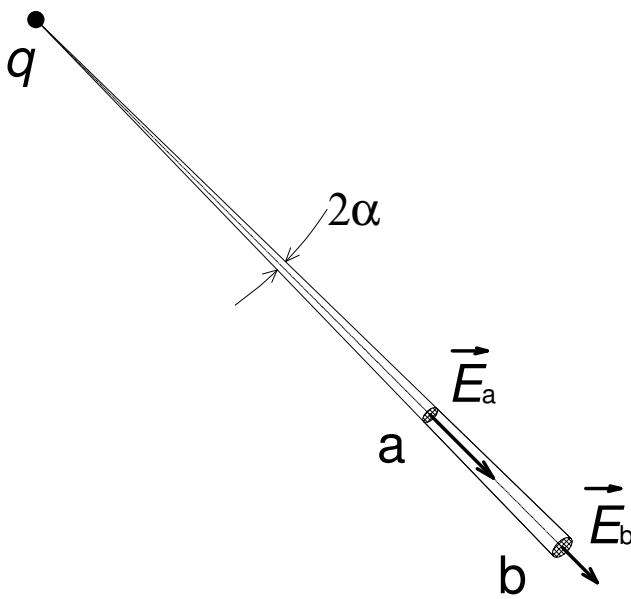


Fig. 2.3.2 Superfície de integração formada por um pedaço de cone com vértice numa carga elétrica. O pedaço é limitado por dois discos circulares nos pontos **a** e **b**. Os vetores do campo elétrico desenhados correspondem a algum valor da carga  $q > 0$ .

Obviamente as partes laterais do pedaço cônico não contribuem para a integral de fluxo, já que o campo é tangencial a esta superfície. As únicas contribuições são das tampas circulares. Se o cone for suficientemente fino, isto é, com um ângulo de abertura pequeno, podemos substituir a integração sobre as áreas circulares por simples multiplicações. Se usamos a posição da carga como origem de coordenadas, podemos escrever os vetores superfície dos dois discos com o vetor unitário que aponta na direção do vetor posição:  $\vec{S}_a = -\hat{r} A_a$  e  $\vec{S}_b = +\hat{r} A_b$ , onde  $A_a$  e  $A_b$  são as respectivas áreas dos discos. A integral de fluxo através da superfície fechada da nossa escolha é

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -A_a \hat{r} \cdot \left[ \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r_a^2} \right] + A_b \hat{r} \cdot \left[ \frac{q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r_b^2} \right] \quad (2.3.4)$$

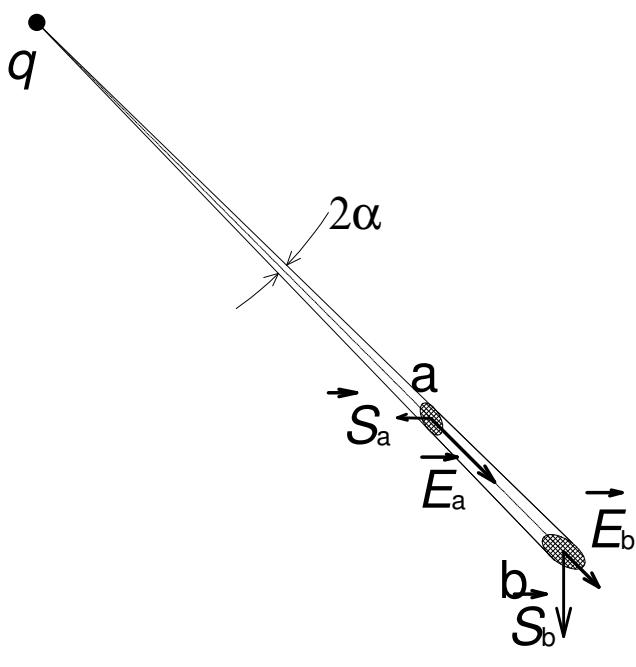
Os raios dos discos são proporcionais à distância da carga  $r_{disco} = r \times \tan\alpha$  e consequentemente as áreas são proporcionais ao quadrado da distância:

$$A_a = \pi r_a^2 (\tan\alpha)^2 \quad e \quad A_b = \pi r_b^2 (\tan\alpha)^2 \quad (2.3.5)$$

Inserindo este resultado na equação (2.3.4), percebemos que o fluxo que entra no volume no disco **a** é exatamente cancelado pelo fluxo que sai no disco **b**. Então a integral de fluxo através da superfície do pedaço de cone é simplesmente zero:

$$\text{para o pedaço de cone da figura 2.3.2:} \quad \iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.3.6)$$

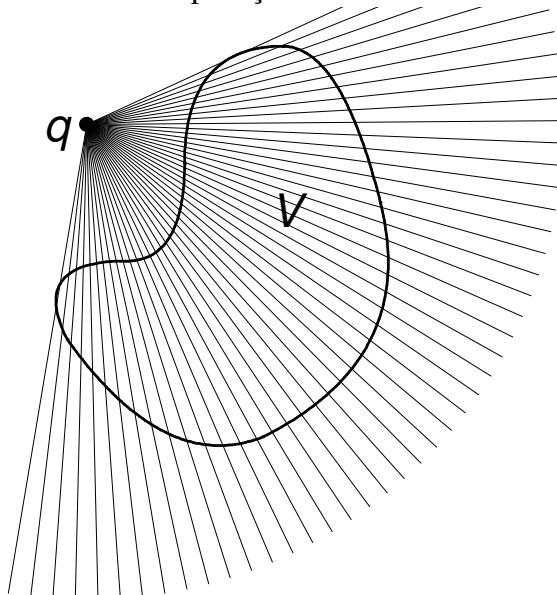
Fig. 2.3.3 Superfície de integração formada por um pedaço de cone com vértice numa carga elétrica. O pedaço é limitado por dois discos inclinados em relação ao vetor  $\hat{r}$ .



O que mudaria neste resultado se permitíssemos que o pedaço de cone não fosse circular? Obviamente não mudaria nada. A diminuição quadrática do módulo do campo seria outra vez compensada por um crescimento quadrático das áreas. E se permitíssemos tampas do pedaço inclinadas como na figura 2.3.3? Também não mudaria nada. A área da tampa cresce por um fator  $1/\cos\beta$  onde  $\beta$  é o ângulo de inclinação da tampa, e este fator seria exatamente compensado pelo fator  $\cos\beta$  do produto escalar entre vetor superfície e campo elétrico que aponta na antiga direção normal.

O próximo passo é permitir um volume qualquer que não contém a carga  $q$ . Com a propriedade aditiva dos integrais de fluxo, podemos escrever a integral de fluxo através da superfície deste tipo de volume como uma soma de pedaços de cones como indicado na figura 2.3.4.

Fig. 2.3.4 Decomposição de um volume que não contém  $q$  em pedaços de cones com vértices em  $q$ .

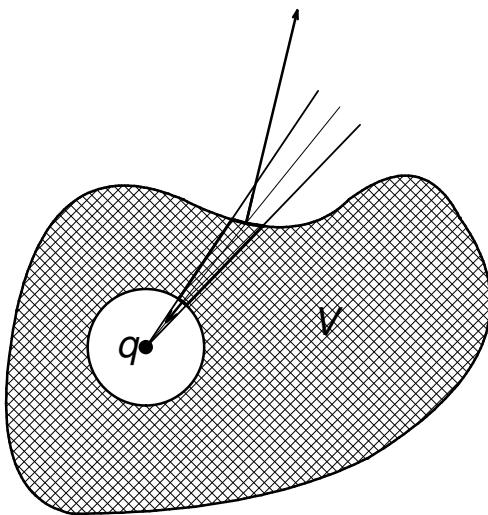


Repare que este último resultado vale também para volumes com cavidades, inclusive no caso em que a carga puntiforme esteja localizada na cavidade. A figura 2.3.5 ilustra esta situação

Vamos resumir o que descobrimos até agora:

Para o campo elétrico gerado por uma carga puntiforme vale  $\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ , desde que a carga não esteja dentro do volume.

Fig. 2.3.5 Volume  $V$  com cavidade. O fluxo através de  $\partial V$  do campo elétrico de uma carga puntiforme na cavidade é nulo. Repare que os vetores superfície na superfície interna do volume apontam para dentro da cavidade.



Poderíamos ter chegado a este resultado mais rapidamente calculando a divergência do campo de uma carga puntiforme e aplicando o teorema de Gauss. Para todos os pontos do espaço fora do lugar da carga, encontra-se com um cálculo simples que  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ . Se o volume  $V$  não contém a carga, podemos supor  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  em todos os pontos do volume. O teorema de Gauss afirma

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} d^3r$$

Então segue o resultado (2.3.7). O aluno interessado pode fazer o cálculo da divergência, mas aqui preferimos deduzir o resultado (2.3.7) geometricamente com as figuras 2.3.2 – 2.3.5. Esta dedução permite visualizar melhor que a razão por trás do resultado (2.3.7) é a queda quadrática da intensidade do campo junto com o direcionamento radial dos vetores  $\vec{E}$ .

Agora vamos considerar um volume  $V$  que contém a carga. Neste caso o cálculo da divergência não ajuda, pois no próprio ponto da carga o campo não é definido e consequentemente não podemos calcular a divergência. Neste caso o método geométrico é o único caminho. Seja um volume  $V$  dado e a carga puntiforme esteja em algum lugar  $\vec{r}_q$  no interior do volume. Estar no interior do volume significa não apenas  $\vec{r}_q \in V$ , mas significa que existe uma bola  $B_r$  inteira de algum raio  $r > 0$  e centro no lugar da carga que fica dentro do volume  $V$ . A figura 2.3.6 mostra um exemplo.

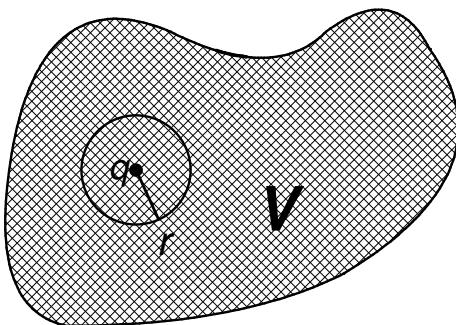


Fig. 2.3.6 Volume contendo uma carga puntiforme no seu interior. Uma bola de raio  $r > 0$  pode ser escolhida em torno da carga que fica inteiramente dentro do volume.

Podemos escrever o volume  $V$  como junção da bola  $B_r$  e um outro volume  $\tilde{V} = V \setminus B_r$ :

$$V = \tilde{V} \cup B_r \quad (2.3.8)$$

Com a aditividade da grandeza quantidade de fonte, com (2.3.8) e com  $\tilde{V} \cap B_r = \emptyset$  segue

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\partial \tilde{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.3.9)$$

Mas o volume  $\tilde{V}$  não contém a carga. Portanto, com o resultado (2.3.7), sabemos que a segunda integral do lado direito é zero. Temos então

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.3.10)$$

Isto é um resultado importante. Ele significa que temos o direito de substituir a superfície original por uma simples esfera. Nesta esfera tudo pode ser calculado exatamente. Para fazer este cálculo é conveniente colocar a origem de coordenadas na própria posição da carga e usar coordenadas esféricas. Juntando a expressão do campo de uma carga puntiforme

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.3.11)$$

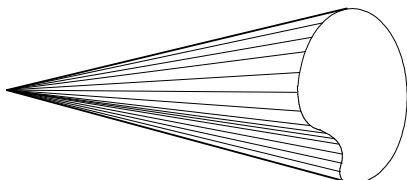
com a expressão da integral de superfície esférica (2.2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\partial B_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \\ &= r^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \vec{E} \cdot \hat{r} \sin\theta d\theta d\varphi = \\ &= r^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{r} \sin\theta d\theta d\varphi = \quad (2.3.12) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \cancel{\times 2} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Finalmente chegamos no ponto de poder entender por que os físicos decidiram escrever a constante de proporcionalidade da lei de Coulomb de forma complicada  $1/4\pi\epsilon_0$ . O cancelamento que ocorreu nesta última linha é a motivação. O  $4\pi$  é o *ângulo sólido* de uma esfera completa.

Neste ponto vale interromper a dedução da lei de Gauss e comentar a noção de ângulo sólido. A ideia de medir ângulos com a ajuda do comprimento de um arco permite uma generalização do conceito ângulo. Imagine um cone. Este cone não precisa ser circular, ele pode ter qualquer forma. A figura 2.3.7 ilustra isto.

Fig. 2.3.7 Cone de forma não circular.



Queremos uma grandeza para medir o quanto este tipo de cone está aberto ou fechado. Esta grandeza é chamada *ângulo sólido*. A forma de medir isto é análoga à medição de ângulos comuns em radianos. Escolhe-se uma esfera de

raio  $r$  com centro no vértice do cone. O cone separa um fragmento da superfície da esfera. A área deste fragmento dividido pelo quadrado do raio do círculo é a medida do ângulo sólido. Neste caso também existe o costume de escrever uma “unidade” que na verdade é somente um comentário. No caso esta “unidade” é chamada “steradiano”. Se abrirmos o cone totalmente, de tal forma que o fragmento de superfície separada seja a superfície completa da esfera, o ângulo sólido atinge o valor de  $4\pi$ :

$$\begin{aligned} \text{ângulo sólido de um cone totalmente aberto} &= 4\pi = \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi r^2}{r^2} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

O ângulo sólido de um cone totalmente aberto é uma constante importante na teoria de campos. Mas as pessoas se cansaram de escrever os  $4\pi$  e inventaram uma maneira de esconder esta constante na lei que é menos usada. A lei de Gauss é mais importante do que a lei de Coulomb; então se optou por colocar o  $4\pi$  na lei de Coulomb de tal forma que ele não apareça na lei de Gauss.

Depois desta digressão pela definição de ângulo sólido, podemos voltar à lei de Gauss. Falta muito pouco para completar tudo. A única restrição que temos ainda é de termos um campo gerado por uma única carga puntiforme. Podemos usar que a integração é uma operação linear para tratar agora o caso geral de uma distribuição arbitrária de cargas. Imagine muitas cargas puntiformes distribuídas no espaço. Vamos chamar os valores das cargas de  $q_k$  e as respectivas posições de  $\vec{r}_k$ . Imaginamos ainda algum volume  $V$  e queremos avaliar a integral de fluxo do campo elétrico através da superfície deste volume. O campo elétrico gerado pelas cargas é a soma de contribuições de cargas puntiformes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (2.3.14)$$

Como a integração é uma operação linear, podemos trocar a ordem de integração e somatório no cálculo do fluxo:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial V} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \right\} \cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^N \left[ \iint_{\partial V} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \cdot d\vec{S} \right] \quad (2.3.15)$$

Para cada um dos termos da última soma, podemos aplicar os resultados (2.3.7) e (2.3.12). Se a carga  $k$  está fora do volume  $V$ , a contribuição desta carga no somatório é zero e se a carga está dentro de  $V$ , a contribuição é  $q_k/\epsilon_0$ . No exemplo da figura 2.3.8 as cargas 1 e 2 não dariam nenhuma contribuição, e as cargas 3, 4 e 5 dão contribuições. Então o somatório resulta na carga elétrica total contida no volume  $V$  dividido pela constante  $\epsilon_0$ . Com isto chegamos à forma final da **lei de Gauss**:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{dentro de } V} \quad (2.3.16)$$

Lembrando do “banho matemático” e ignorando o fator  $1/\epsilon_0$ , podemos expressar esta lei verbalmente de forma muito simples:

As fontes do campo  $\vec{E}$  são as cargas elétricas.

(2.3.17)

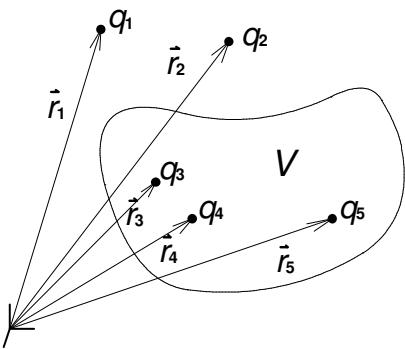


Fig. 2.3.8 Exemplo para a lei de Gauss. Somente as cargas 3, 4 e 5 contribuem para o fluxo através da superfície mostrada.

Cada carga positiva é uma fonte positiva, e cada carga negativa é um sumidouro.

A equação (2.3.16) vale igualmente para uma distribuição contínua de carga elétrica. Se a carga não existe em forma de partículas puntiformes, podemos dividir o espaço em muitos cubinhos minúsculos e tratar cada cubinho como se fosse uma carga puntiforme. O resultado seria outra vez a equação (2.3.16). Neste caso podemos escrever a carga total no volume  $V$  como uma integral de volume da densidade de carga, e a lei de Gauss toma a seguinte forma:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d^3r \quad (2.3.18)$$

Usando o teorema de Gauss, podemos escrever a integral de superfície do lado esquerdo ainda como integral de volume:

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d^3r \quad (2.3.19)$$

Uma vez que tudo está escrito como integral de volume, podemos juntar os dois lados numa única integral

$$\iiint_V \left\{ (\text{div } \vec{E}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right\} d^3r = 0 \quad (2.3.20)$$

Este resultado deve valer para qualquer volume  $V$ ! Ora uma função (supostamente contínua) que integrada sobre qualquer volume sempre resulta em zero só pode ser a função zero. Então podemos concluir que

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.3.21)$$

Esta equação é a forma local ou diferencial da lei de Gauss. Ela é nada mais do que a “densidade da equação (2.3.16)”. Isto significa: você escreve a equação (2.3.16) para um volume  $V$  variável, divide ambos os lados pelo volume e toma o limite  $V \rightarrow 0$ . O resultado é a lei de Gauss em forma local. A lei de Gauss integral deve valer para qualquer volume  $V$ , e a equação local (2.3.21) deve valer para qualquer ponto no espaço.

Aqui no ciclo básico vamos trabalhar predominantemente com a forma integral da lei de Gauss. Não é preciso ter medo das integrais! De fato vamos aplicar a lei de Gauss sempre em situações que resultam em integrais totalmente triviais. Nas disciplinas mais avançadas de eletromagnetismo a forma diferencial da lei de Gauss será também de grande utilidade.

### Exercícios:

**E 2.3.1:** Num processo usado na fabricação de certos componentes de optoeletrônica foi criada uma distribuição de cargas elétricas que produz o seguinte campo elétrico:

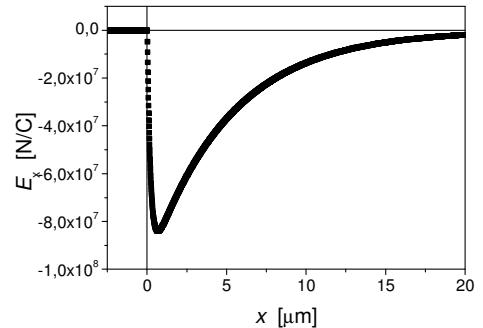
$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ A \hat{x} \left[ e^{-x/a} - e^{-x/b} \right] & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

onde as constantes valem:  $A = 10^8 \text{ N/C}$ ,  $a = 0,20 \mu\text{m}$  e  $b = 5,0 \mu\text{m}$  (Compare gráfico). Calcule a carga elétrica contida num paralelepípedo dado pelas seguintes condições:

$$3 \mu\text{m} \leq x \leq 4 \mu\text{m}$$

$$0 \leq y \leq 1 \mu\text{m}$$

$$0 \leq z \leq 1 \mu\text{m}$$



**E 2.3.2:** Depois de ter lido esta seção escreva a dedução da lei de Gauss a partir da lei de Coulomb sem olhar estas notas.

**E 2.3.3:** Escreva os pontos de destaque desta seção.