1.3 A lei de Coulomb

A discussão qualitativa dos fenômenos elétricos nos fez adotar a hipótese da existência de duas substâncias responsáveis pelas forças elétricas. Supomos que as quantidades das duas podem ser quantificadas numa grandeza que chamamos de carga elétrica de tal maneira que uma das substâncias corresponde a valores negativos desta grandeza e a outra, a valores positivos. Além disso aceitamos que cargas do mesmo sinal se repelem e cargas de sinais opostos se atraem. Aceitamos ainda a hipótese que o módulo destas forças diminui com a distância das cargas.

Agora é preciso encontrar uma descrição quantitativa da força elétrica. A última palavra sobre esta lei quantitativa tem que ser a experiência. É preciso medir as forças quantitativamente. Mas, antes de partir para uma experiência, os pesquisadores já fazem umas apostas. Isto pode ajudar na concepção da experiência e também torna uma experiência mais emocionante. No caso das forças elétricas estas experiências foram feitas por Charles-Augustin de Coulomb (14/06/1736 – 23/08/ 1806). Nessa época já se conhecia a lei que descreve a força gravitacional e se esperava que a força elétrica tivesse uma lei semelhante, com as seguintes características:

Propriedade 1.3.1: O módulo da força é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as cargas.

Propriedade 1.3.2: Trata-se de uma força central, ou seja, a direção da força coincide com a direção da linha que une as duas cargas.

Nestas afirmações pensamos em cargas pontuais. Vimos na seção anterior qual é a vantagem de considerar apenas pontos[1]. Então, quando falamos de distância, trata-se da distância dos pontos onde se encontram as cargas. E, quando falamos de linha que une as duas cargas, trata-se da linha que une os pontos de localização das cargas.

A segunda propriedade (propriedade 1.3.2) pode ser motivada também por um argumento de simplicidade. Nenhuma direção no espaço vazio é privilegiada, mas a força, sendo uma grandeza vetorial, tem que ter uma direção. A única direção privilegiada pela presença de dois objetos pontuais é a direção da linha que une os dois pontos. Se a força tivesse qualquer outra direção, as cargas pontuais teriam que ter alguma estrutura interna que definisse direções. Então a hipótese mais simples é que eles não tenham nenhuma estrutura interna.

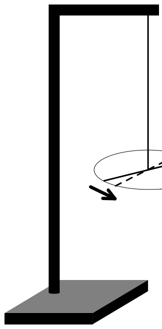
As medidas quantitativas contam com algumas dificuldades técnicas. Primeiramente é preciso ter um medidor de forças para forças relativamente pequenas. Coulomb usou uma balança de torção para medir pequenas forças. Primeiramente ele pesquisou como reage um objeto pendurado num fio fino de metal quando se aplica um torque. A figura 1.3.1 mostra estas experiências esquematicamente. Ele descobriu que o torque τ necessário para modificar a orientação de equilíbrio por um ângulo φ era proporcional ao ângulo. Ainda constatou que, para um dado material, a constante de proporcionalidade era proporcional à quarta potência do diâmetro do arame e inversamente proporcional ao comprimento do arame:

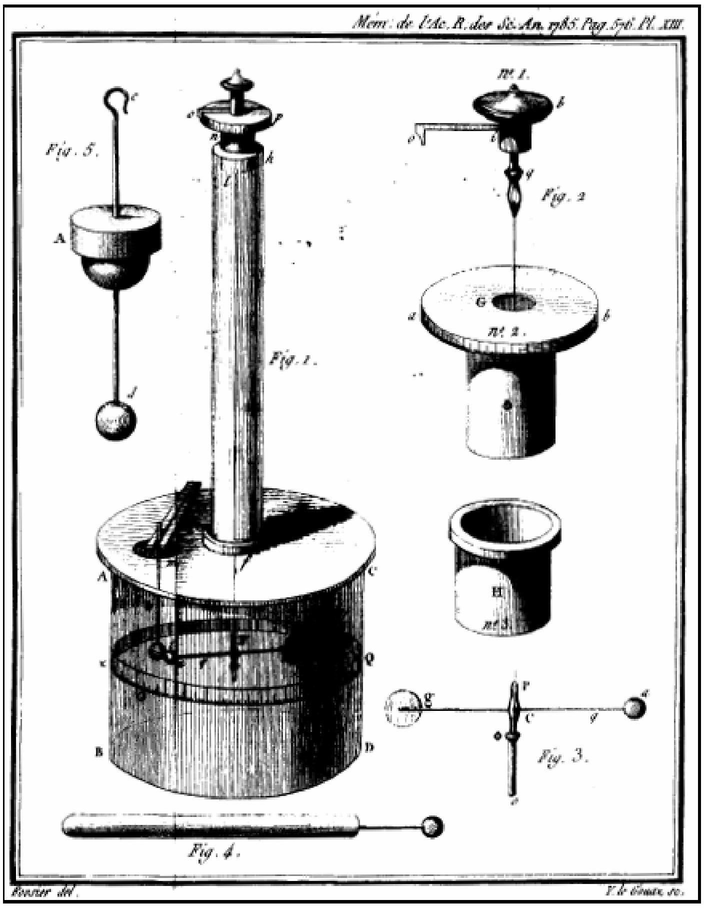
$$\tau = K \frac{d^4}{l} \varphi \qquad (1.3.1)$$

[1] Isto deve ter sido um dos pontos de destaque na sua solução do exercício 1.2.3. Se este ponto não estava na sua solução, você não estudou de forma adequada.

Coulomb relatou este resultado em 1784. Mais ou menos na mesma época (1783) John Michell[2] inventou uma balança de torção para medir a atração gravitacional.

Fig. 1.3.1 Fio de torção com disco pendurado para verificação da lei (1.3.1).

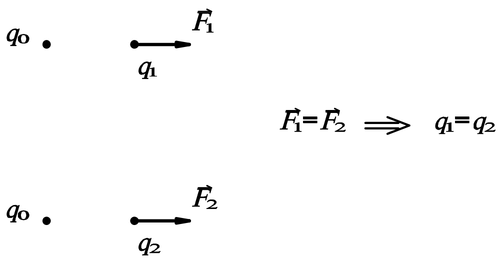




← Fig. 1.3.2 Balança de torção usada por Coulomb.

A figura 1.3.2 mostra a balança que Coulomb usou para as medidas quantitativas das forças elétricas. Há uma haste horizontal (indicada como *Fig.3*) pendurada no fio de torção. Nas pontas desta haste há esferas metálicas (g e *a*). Pode-se transferir carga elétrica para uma destas esferas e colocar uma outra esfera (*J* – *Fig.5*) também eletrizada perto da esfera eletrizada da haste. A força elétrica resulta num torque que pode ser medido usando a relação (1.3.1).

Fig. 1.3.3 Definição de igualdade de valores de cargas.



Fora da tarefa difícil de medir estas forças com precisão, há outro problema que precisa ser resolvido. Os aspectos quantitativos englobam também as quantidades de carga elétrica nas esferas. Primeiramente temos que completar a definição desta grandeza. Já falamos da soma dos valores. Outro item essencial na definição de uma grandeza

2 John Michell (25/12/1724 – 29/04/1793) foi um dos mais geniais cientistas da época, mas, devido à sua modéstia e devido ao fato de que seus pensamentos eram 100 anos à frente da sua época, seus colegas deram pouca importância a seu trabalho e seu nome é pouco conhecido até hoje. Michell foi o primeiro a considerar a possibilidade de buracos negros e elaborou um método para detectá-los, que é usado pelos astrônomos. Ele foi o primeiro a usar métodos estatísticos em astronomia. Ele pensou em redshift gravitacional e em pressão de radiação. Ele inventou ímãs artificiais. Michell interpretou terremotos como ondas mecânicas. Depois da morte de Michell, Henry Cavendish herdou a balança de torção e executou a famosa experiência gravitacional que é conhecida com o nome de Cavendish e não de Michell.

física é a prescrição operacional que determina a igualdade de valores da grandeza. Podemos definir: duas cargas pontuais têm o mesmo valor de carga, se a força exercida por uma terceira carga pontual qualquer, que se encontra na mesma situação geométrica relativa às cargas testadas, provoca a mesma força. Compare com a figura 1.3.3.

Nesta definição não precisamos conhecer o valor q_0 da terceira carga, mas temos que ter certeza de que no intervalo de tempo no qual efetuamos a substituição da carga 1 pela carga 2 não haja alteração do valor da carga q_0. Isto, na prática, pode ser um problema. Como cargas do mesmo sinal se repelem, existe uma tendência natural das cargas de um corpo carregado "fugir" deste corpo. Então os suportes que seguram o objeto carregado devem ser de um material isolante com superfícies perfeitamente limpas. As medidas devem ser feitas de preferência em dias com ar de baixa umidade relativa, e a substituição geométrica da carga 1 pela carga 2 deve ser feita de forma rápida.

A soma de valores de carga foi definida na seção anterior. Para produzir uma sequência conhecida de valores de carga, existe um artifício simples: Imagine uma pequena esfera metálica com algum valor desconhecido q_0 que está suspensa por um fio perfeitamente isolante. Agora pegamos uma segunda esfera do mesmo material com exatamente o mesmo diâmetro também pendurada por um fio perfeitamente isolante. Mas esta segunda esfera está neutra. Em seguida, movendo o suporte do fio, colocamos as duas esferas em contato. Como cargas do mesmo sinal se repelem, as cargas se distribuirão no corpo formado pelas duas esferas de tal forma que elas possam ficar o mais longe possível uma da outra. Então a esfera que estava originalmente neutra receberá carga. Pela simetria da configuração podemos ter certeza que no estado final as duas esferas terão a carga $q_0/2$ cada uma. Finalmente podemos afastar a segunda esfera e geramos um corpo de carga $q_0/2$. Repetindo este procedimento diversas vezes, podemos gerar uma sequência de valores de carga: q_0, $q_0/2$, ... $q_0 \times 2^{-n}$. Fazendo isto com a esfera que se introduz na balança de torção, ou com a esfera presa na haste horizontal, pode-se pesquisar como a força depende dos valores das cargas envolvidas.

O resultado desta pesquisa é: a força é proporcional a cada um dos valores de carga dos dois corpos envolvidos. Então segue:

Propriedade 1.3.3: A força é proporcional ao produto dos valores das duas cargas pontuais.

As experiências de Coulomb confirmaram a afirmação de que as forças elétricas têm a propriedade 1.3.1.

A propriedade 1.3.2 também pode ser testada com uma balança de torção. Basta que se coloque a esfera externa fora da linha tangencial ao círculo que tem centro no fio de torção e no qual se encontra a esfera da haste. Se a força for central, o torque deve diminuir por um fator $\cos\alpha$ da projeção da linha que une as esferas sobre a reta tangencial (compare figura 1.3.4).

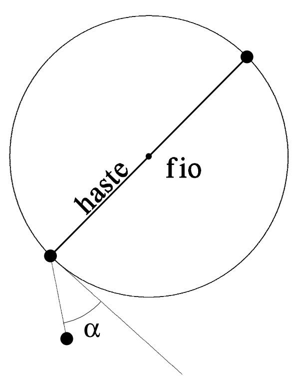


Fig. 1.3.4 Uso da balança de torção para testar se a força elétrica é uma força central.

Contudo as experiências com a balança de torção são extremamente difíceis, e não se pode esperar muita precisão. Também, julgando pela figura 1.2.2, as cargas não eram muito pequenas em comparação com as distâncias envolvidas. Hoje temos outros testes muito precisos que confirmam as afirmações das propriedades 1.3.1 – 1.3.3. Num capítulo posterior conheceremos um teste muito preciso destas afirmações.

Estas três afirmações verbais podem ser condensadas numa única fórmula. Usaremos a linguagem vetorial para escrever estas propriedades de forma compacta. Primeiramente vamos descrever as posições das duas cargas pontuais no espaço do referencial que usamos. Isto pode ser feito também com a ajuda de vetores. Escolhemos um ponto fixo O, chamado de origem, no espaço e com este ponto podemos descrever as posições P_1 e P_2 das cargas com dois vetores de deslocamento:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_1 \quad &\rightarrow \quad \vec{r}_1 \underset{def.}{=} \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \\ \mathrm{P}_2 \quad &\rightarrow \quad \vec{r}_2 \underset{def.}{=} \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Estes vetores são chamados de vetores posição dos pontos P_1 e P_2. Lembramos que um vetor deslocamento é uma classe de equivalência de pares ordenados de pontos, sendo a relação de equivalência definida por transporte paralelo dos pares de pontos. Na Física III usaremos vetores extensamente, e o aluno que não tem familiaridade com os conceitos vetoriais deve dedicar algumas horas de intenso estudo para entender estes conceitos, de preferência logo no início do semestre. No apêndice destas notas há um ensaio sobre geometria e vetores.

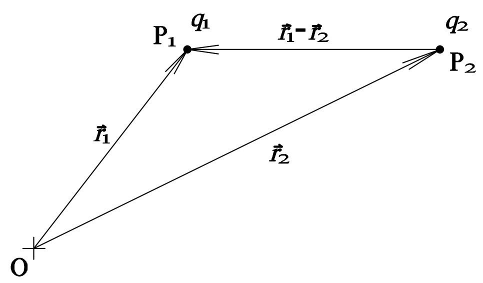


Fig. 1.3.5 Vetores posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ das cargas e o vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Temos que expressar a distância entre as cargas e a direção da linha que une as cargas em termos dos vetores posição. A distância é simplesmente o módulo do vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, e podemos descrever a direção com o vetor unitário $\dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$. Com estes elementos podemos finalmente escrever a força que a carga 2 exerce sobre a carga 1:

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} \quad = \quad k \times \underbrace{\frac{\overbrace{q_1 q_2}^{\text{Propriedade 1.3.3}}}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}}_{\text{Propriedade 1.3.1}} \times \overbrace{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}}^{\text{Propriedade 1.3.2}} \tag{1.3.3}$$

Esta relação é a lei de Coulomb.

Caso as duas cargas tenham o mesmo sinal, a força é repulsiva e tem o mesmo sentido do vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. A constante de proporcionalidade k é uma constante dimensional que conecta o espaço de valores de quadrados de carga dividido por quadrados de distâncias com o espaço de módulos de força.

Falta definir uma unidade para a grandeza carga. Uma possibilidade é usar a própria lei de Coulomb para definir uma unidade. Poder-se-ia formular uma definição do seguinte tipo: Duas cargas pontuais de mesmo valor têm cada uma a carga unitária $\mathrm{U}_{\mathrm{carga}}$ se a força que uma exerce sobre a outra quando postas numa distância de 1 m for 1 N. Com esta escolha de unidade o valor da constante k seria: $k = 1\dfrac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{U}_{\mathrm{carga}}{}^2}$. De fato este tipo de proposta foi feita pelo matemático Johann Carl Friedrich Gauss (30/041777 – 23/021855), mas usando centímetros e gramas como unidades básicas no lugar do metro e do quilograma. A unidade de carga[3] correspondente é chamado de stat-Coulomb (statC) e com ela a constante k fica na forma $k = 1\dfrac{\mathrm{g\,cm}^3}{\mathrm{statC}^2\, s^2}$. Do ponto de vista da teoria, esta escolha de unidade parece boa. Mas, do ponto de vista experimental, ela não é boa. Como mencionamos, as experiências eletrostáticas são dificilmente experiências de alta precisão porque as cargas naturalmente têm a tendência de "fugir". O sistema internacional adotou uma outra unidade de carga que permite mais precisão nas realizações do padrão. Infelizmente ainda não temos condições de entender como esta definição de unidade é feita, pois esta usa forças magnéticas. Então, por enquanto, ficamos somente com o nome desta unidade: ela se chama "Coulomb" e é abreviada com "C". Somente quando chegarmos quase no fim do semestre, teremos condições de entender como o Coulomb é definido. Em termos desta unidade, a constante k tem o valor de

$$k = 8{,}987551788\ldots\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2} \tag{1.3.4}$$

Para muitas aplicações é suficiente usar o valor aproximado

$$k \approx 9\times 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2} \tag{1.3.5}$$

que pode ser memorizado muito facilmente por causa do duplo aparecimento da cifra 9 no expoente e na mantissa. Mais tarde conheceremos razões pelas quais muitas pessoas preferem escrever a constante k numa forma um tanto estranha:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{1.3.6}$$

com

$$\varepsilon_0 = 8{,}854187817\ldots\times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-2} \tag{1.3.7}$$

Na fórmula da lei de Coulomb (1.3.3) mantivemos as parcelas que correspondem às três propriedades 1.3.1-1.3.3 separadas. Mas, quando fazemos cálculos, não é preciso manter esta separação e podemos juntar os dois fatores de módulo da diferença de vetores posição:

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = k\times\frac{q_1 q_2\times\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|^3} \tag{1.3.8}$$

[3] De fato Gauss não considerava carga elétrica como uma nova grandeza física mas ele identificava carga com uma raiz quadrada de massa, multiplicada por uma raiz quadrada de um volume e dividido por um tempo, de tal forma que a constante k fica adimensional com o valor 1.

Repare que o expoente 3, que aparece no denominador, não significa que a força cai proporcionalmente ao cubo da distância! Pois no numerador há o vetor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ cujo módulo aumenta com a distância.

Interrompemos aqui nosso estudo da força elétrica para um comentário sumamente importante:

No contexto da lei de Coulomb usamos a palavra "proporcional" diversas vezes. É um erro muito comum confundir "proporcional" com "monotonicamente crescente" e "inversamente proporcional" com monotonicamente decrescente. Estas noções são totalmente diferentes.

Definição1.3.1: Uma grandeza y é proporcional a uma grandeza x se e somente se vale

$$y = A \times x \tag{1.3.9}$$

com algum valor de A que não depende de x. Uma variável y é dita inversamente proporcional a x se y for proporcional a x^{-1}.

Proporcionalidade não tem absolutamente nenhuma ligação com crescimento monótono. Veja os seguintes exemplos: $y = x^3$ cresce monotonicamente, mas aqui y não é proporcional a x. Por outro lado com $y = -5\,x$ a variável y <u>é proporcional</u> a x, mas y <u>decresce</u> quanto x cresce.

Proporcionalidade é um caso especial de uma noção sumamente importante nas ciências quantitativas. Especialmente aqui no estudo do eletromagnetismo, usaremos esta noção frequentemente. Proporcionalidade é um caso especial de <u>**linearidade**</u>.

Seja $f : V \to W$ uma função que mapeia um conjunto V num conjunto W. Queremos definir <u>linearidade de uma função</u>. Mas esta noção só faz sentido quando os conjuntos V e W tiverem a estrutura de espaços lineares. Isto significa que dentro destes conjuntos deve existir uma definição de soma de elementos e uma multiplicação de elementos com números com as seguintes propriedades.

$$\forall (a,b \in V): \quad a+b = b+a \tag{1.3.10}$$

$$\forall (a,b,c \in V): \quad a+(b+c) = (a+b)+c \tag{1.3.11}$$

$$\exists (0 \in V)\forall (a \in V): \quad a+0 = a \tag{1.3.12}$$

$$\forall (a \in V)\exists ((-a) \in V): \quad a+(-a) = 0 \tag{1.3.13}$$

$$\forall (\alpha,\beta \in \mathbb{R})\forall (a \in V): \quad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \tag{1.3.14}$$

$$\forall (a \in V): \quad 1a = a \tag{1.3.15}$$

$$\forall (a,b \in V)\forall (\alpha \in \mathbb{R}): \quad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b \tag{1.3.16}$$

$$\forall (a \in V)\forall (\alpha,\beta \in \mathbb{R}): \quad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a \tag{1.3.17}$$

Analogamente para o espaço W. Os valores de grandezas físicas ficam em espaços lineares. Os vetores de deslocamento formam um espaço linear e há muitos outros exemplos importantes de espaços lineares. Então podemos agora definir quando uma função que mapeia um espaço linear em outro espaço linear é uma função linear.

Definição1.3.2: Uma função $f: V \rightarrow W$ entre dois espaços lineares V e W é chamada de linear se e somente se

$$\forall(a, b \in V)\forall(\alpha, \beta \in \mathbb{R}): \quad f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) \tag{1.3.18}$$

Podemos formular esta definição verbalmente de forma bem simples:

Uma função é linear se ela se comporta de forma "simpática" em relação à formação de combinações lineares; pode-se fazer a combinação linear antes de aplicar a função ou depois, e o resultado é sempre o mesmo.

Repare na semelhança com outra propriedade de funções. Uma função é contínua se ela for "simpática" em relação à formação de limites; pode-se tomar um limite antes de aplicar a função ou depois, e o resultado é sempre o mesmo.

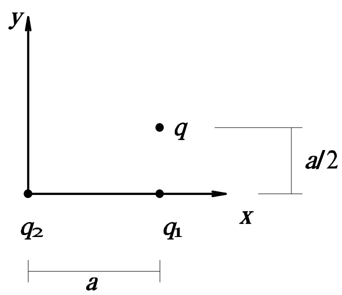
A noção de linearidade é fundamental. Por exemplo, não faz o menor sentido aprender o que é uma derivada sem ter entendido a noção de linearidade, pois a derivada é uma aproximação linear das variações locais de uma função na vizinhança de um ponto. Na Física III linearidade aparecerá em muitos pontos estratégicos e peço ao aluno que não tem clareza desta noção para praticar com exemplos (vide exercícios no fim da seção).

Voltemos às forças elétricas. Precisamos dizer algo sobre a força que atua numa carga na presença de várias outras cargas. Neste caso a própria mecânica Newtoniana prevê que se devem somar as forças exercidas por todas as outras cargas. Então seja q o valor de uma carga elétrica que se encontra no ponto $\vec{r}$ [4]. Na presença de N cargas q_k nas posições $\vec{r}_k$ com $k = 1, 2, 3 \dots N$, a força que atua sobre a carga q é

$$\vec{F} = k\, q \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k\left(\vec{r} - \vec{r}_k\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_k\right|^3} \tag{1.3.19}$$

Vejamos um exemplo. Vamos considerar que uma carga pontual q esteja no ponto $\langle x = a, y = a/2, z = 0\rangle$ de um sistema de coordenadas cartesianas e que haja uma carga q_1 no ponto $\langle x = a, y = 0, z = 0\rangle$ e uma carga q_2 na origem $\langle x = 0, y = 0, z = 0\rangle$ como mostra a figura 1.3.6

Fig. 1.3.6 Disposição de cargas no exemplo calculado.



A força que a carga 1 exerce sobre a carga q é

$$\vec{F}_1 = k\, q\, q_1 \frac{\left(\hat{x}\, a + \hat{y}\, a/2 + \hat{z}\, 0\right) - \left(\hat{x}\, a + \hat{y}\, 0 + \hat{z}\, 0\right)}{\left(0^2 + a^2/4 + 0^2\right)^{3/2}} \tag{1.3.20}$$

e a força que a carga 2 exerce sobre q é

[4] Usamos aqui uma linguagem abreviada. "No ponto $\vec{r}$" deve ser entendido como "no ponto cujo vetor posição é $\vec{r}$".

$$\vec{F}_2 = k\,q\,q_2 \frac{\left(\hat{x}a+\hat{y}a/2+\hat{z}0\right)-\left(\hat{x}0+\hat{y}0+\hat{z}0\right)}{\left(a^2+a^2/4+0^2\right)^{3/2}} \qquad (1.3.21)$$

Nestas fórmulas escrevemos, de forma totalmente exagerada, termos do tipo $\hat{z}0$ e 0^2 somente para deixar claro de onde vem cada expressão. Você não precisa fazer isto nos seus cálculos. Chamamos os vetores unitários que apontam nas direções dos eixos de coordenadas de $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. É também muito comum escrever estes vetores como $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. A notação que usa os nomes das coordenadas tem a vantagem de poder ser aplicada da mesma forma para outros sistemas de coordenadas. Por exemplo, com um sistema de coordenadas esféricas r, θ, φ temos analogamente vetores básicos $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ usando a notação com a mesma lógica.

Limpando as fórmulas (1.3.20) e (1.3.21) destas "sujeiras" "$\hat{z}0$" e "0^2" obtemos:

$$\vec{F}_1 = \frac{k\,q\,q_1 4}{a^2}\,\hat{y} \qquad (1.3.22)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{k\,q\,q_2}{a^2}\frac{\left(\hat{x}8+\hat{y}4\right)}{5^{3/2}} \qquad (1.3.23)$$

Então a força total será

$$\vec{F}_{total} = \frac{k\,q}{a^2}\left\{\hat{x}\frac{8q_2}{5^{3/2}}+\hat{y}\left(\frac{4q_2}{5^{3/2}}+4q_1\right)\right\} \qquad (1.3.24)$$

Agora vamos imaginar que $q=-1\mu\text{C}$, $q_1=+1\mu\text{C}$ e $q_2=+11{,}18\mu\text{C}\approx 5^{3/2}\mu\text{C}$ e $a=1\,\text{cm}$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}\vec{F}_{total} &= \frac{9\times 10^9\,\text{N}\,\text{m}^2\times\left(-10^{-6}\text{C}\right)}{10^{-4}\,\text{m}^2\text{C}^2}\left\{\hat{x}\,8\times 10^{-6}\text{C}+\hat{y}\,8\times 10^{-6}\text{C}\right\} = \\ &= -\hat{x}720\text{N} \;-\; \hat{y}720\text{N}\end{aligned} \qquad (1.3.25)$$

O módulo desta força é $\left|\vec{F}_{total}\right|\approx 1018\,\text{N}$. Isto é uma força enorme. Podemos concluir que uma carga de um micro-Coulomb é uma quantidade de carga gigante se for comparada com as cargas das nossas experiências da seção 1.2. É interessante comparar este módulo com a soma dos módulos das forças parciais:

$$\left|\vec{F}_1\right| + \left|\vec{F}_2\right| \approx 360\,\text{N} + 805\,\text{N} = 1165\,\text{N} \qquad (1.3.26)$$

Esta soma é consideravelmente maior que o módulo da força total. Por que esta diferença? Compare com o exercício E 1.3.2.

Terminamos esta seção com um comentário importante. A verificação experimental da lei de Coulomb feita pelo Coulomb e também a verificação muito mais precisa que conheceremos mais tarde tratam exclusivamente de cargas em repouso. Então podemos supor a validade desta lei somente para este caso. De fato futuramente veremos que as forças que atuam sobre cargas em movimento são consideravelmente mais complicadas.

Exercícios:

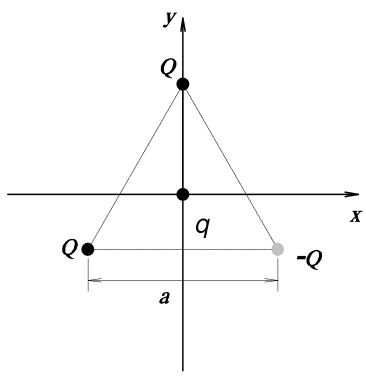
E 1.3.1: Quando giramos um objeto por um ângulo α em torno de um eixo, pares de pontos marcados no objeto se transformam em outros pares de pontos. Cada par de pontos $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ define um vetor deslocamento $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Desta maneira um giro joga vetores em vetores. Esta função é linear?

E 1.3.2: O módulo de um vetor é uma função que associa a cada vetor um valor escalar $f(\vec{a}) = |\vec{a}|$. Esta função é linear?

E 1.3.3: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = A + Bx$ é linear?

E 1.3.4: O sol (considerado infinitamente distante) projeta sombra de pontos marcados com pequenos objetos opacos. Coletamos estas sombras num plano. Um par de pontos no espaço é projetado num par de pontos no plano. Desta forma pode-se definir uma função que mapeia vetores do espaço tridimensional para vetores no plano. Esta função é linear?

E 1.3.5: Três cargas pontuais se encontram nos vértices de um triângulo equilátero de lado a. O centro do triângulo está na origem de um sistema de coordenadas cartesianas e o plano do triângulo fica no plano x-y. Uma das cargas está no eixo-y e as outras simetricamente nos quadrantes III e IV, como mostra a figura. A carga no eixo-y assim como a carga no quadrante III têm o valor $+Q$ e a carga no quadrante IV tem o valor $-Q$. Calcule a força que atua sobre uma carga q na origem de coordenadas. Escreva o seu resultado de forma vetorial usando a base $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ou $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.



E 1.3.6: Escreva os pontos de destaque da seção 1.3.