Questão 1 – Quatro formandos da UFJF, André, Bernardo, Carlos e Daniel, se juntaram para organizar um churrasco. O número de convidados de Daniel é igual à soma do número de convidados de Bernardo e de Carlos. O número de convidados de Carlos é igual à soma do número de convidados de André e Bernardo. A soma do número de convidados de Bernardo, Carlos e Daniel é oito vezes o número de convidados de André. Sabendo que cada formando convidou pelo menos uma pessoa, e, no máximo, 15 pessoas, determine o número de convidados de cada formando.

Sejam A o número de convidados de André, B o número de convidados de Bernardo, C o número de convidados de Carlos e D o número de convidados de Daniel.

Como o número de convidados de Daniel é igual à soma do número de convidados de Bernardo e Carlos temos que

$$D = B + C. \qquad \text{(Equação 1)}$$

Como o número de convidados de Carlos é igual à soma do número de convidados de André e Bernardo temos que

$$C = A + B. \qquad \text{(Equação 2)}$$

Finalmente, como a soma do número de convidados de Bernardo, Carlos e Daniel é oito vezes o número de convidados de André temos que

$$B + C + D = 8A. \quad \text{(Equação 3)}$$

Substituindo a Equação 1 na Equação 3 temos que

$$(B+C) + D = 8A \;\Rightarrow\; D + D = 8A \Rightarrow\; D = 4A. \quad \text{(Equação 4)}$$

Substituindo a Equação 4 na Equação 1 temos

$$4A = B + C. \qquad \text{(Equação 5)}$$

Substituindo a Equação 2 na Equação 5, temos

$$4A = B + A + B \;\Rightarrow\; 2B = 3A. \quad \text{(Equação 6)}$$

Substituindo a Equação 6 na Equação 2, temos

$$2C = 5A. \qquad \text{(Equação 7)}$$

Como os números de convidados de André, Carlos, Bernardo e Daniel devem ser números inteiros maiores ou iguais a 1, da Equação 7, concluímos que A deve ser um múltiplo de 2 diferente de zero.
Observando a Equação 4, como Daniel pode convidar no máximo 15 pessoas, temos que

$$4A < 16,$$

ou seja, A é um número inteiro par que satisfaz

$$0 < A < \frac{16}{4}.$$

A única solução é $A = 2$.

Substituindo o valor encontrado para A nas Equações 4, 6 e 7, temos que

$$A = 2,\; B = 3,\; C = 5 \text{ e } D = 8.$$

Pauta de correção:
1) Exibir as equações 1, 2 e 3 – até 1,5 pontos;
2) Exibir as equações 4, 6 e 7 ou equivalentes – até 2 pontos;
3) Utilizar a restrição imposta para solucionar o problema – até 1,5 pontos.

Questão 2 – Considere o polinômio $p(x)=16x^5-48x^4-40x^3+120x^2+9x-27.$

a) Sabendo que $p(x)$ possui uma raiz r natural menor que $5,$ determine $r.$

As possíveis raízes racionais irredutíveis de $p(x)$ são da forma $r=\frac{p}{q}$, onde p é um divisor de – 27 e q é um divisor de 16. Portanto, as possíveis raízes inteiras *r* de $p(x)$ são da forma

$$r=\frac{p}{q}\text{, com } p\in\{-27,-9,-3,-1,1,3,9,27\} \text{ e } q\in\{-1,\ 1\}.$$

Sabendo, ainda, que *r* é um número natural menor que 5, os possíveis candidatos para *r* são $r=1$ ou $r=3$.

Como $p(1)=16-48-40+120+9-27=30$ e $p(3)=3888-3888-1080+1080+27-27=0$, temos que $r=3$.

Valor da letra a: até 2,0 pontos.

b) Determine o polinômio $q(x)=\dfrac{p(x)}{x-r}.$

Por Briot-Ruffini:

	16	-48	-40	120	9	-27
3	16	0	-40	0	9	0

Portanto, temos que $q(x)=16x^4-40x^2+9$.

Ou por divisão de polinômios, temos:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
16x^5 & -48x^4 & -40x^3 & +120x^2 & +9x & -27 & x-3 \\
\cline{7-7}
-16x^5 & +48x^4 & & & & & 16x^4-40x^2+9 \\
\cline{1-2}
 & & -40x^3 & +120x^2 & +9x & -27 & \\
 & & +40x^3 & -120x^2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & & +9x & -27 & \\
 & & & & -9x & +27 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Portanto, temos que $q(x)=16x^4-40x^2+9$.

Valor da letra b: até 1,0 ponto.

c) Determine todas as raízes de $q(x),$ especificando suas multiplicidades.

Substituindo $y=x^2$ em $q(x)=0$ temos $16y^2-40y+9=0$.
Usando a fórmula de Bhaskara temos:

$$y=\frac{40\pm\sqrt{1024}}{32}=\frac{40\pm 32}{32}.$$

Então, $y=\frac{9}{4}$ ou $y=\frac{1}{4}$. Se $y=\frac{9}{4}$, temos $x^2=\frac{9}{4}$ e, portanto, $x=\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{3}{2}$.

Se $y=\frac{1}{4}$, temos $x^2=\frac{1}{4}$ e, portanto, $x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{1}{2}$.

Assim, as raízes do polinômio $q(x)$ são $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$. Como encontramos quatro raízes distintas e o polinômio $q(x)$ é de grau 4, temos que todas as raízes possuem multiplicidade 1.

Valor da letra c: até 2,0 pontos.

Questão 3 – João nasceu no dia 15/12/1951 e decidiu usar os algarismos de sua data de nascimento para produzir a senha de sua conta bancária.

a) Quantas opções de senha João terá, ao formar uma sequência de oito dígitos, usando apenas os algarismos de sua data de nascimento?

A sequência de oito dígitos será formada por quatro algarismos iguais a 1, dois algarismos iguais a 5, um algarismo igual a 2 e um algarismo igual a 9. Assim, há quatro algarismos distintos, sendo que dois deles são repetidos quatro e duas vezes, respectivamente. Isso indica que será feita uma permutação de oito elementos, com repetições 4,2,1 e 1. Portanto, o número de senhas possíveis é igual a

$$n = \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 840.$$

Como foi redigido, o problema formulado na letra (a) permite a seguinte interpretação, que também foi considerada:
Podemos usar os algarismos 1,2,5 e 9 em qualquer posição dos dígitos da senha de 8 dígitos. Neste caso, teremos, pelo Princípio Multiplicativo, que o número de senhas é $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^8$.

Valor da letra a: até 2,0 pontos.

b) Para acessar a conta pela internet, o banco de João exige uma senha de quatro dígitos. Sabendo que João deseja usar apenas os seis últimos dígitos de sua data de nascimento, quantas opções de senha ele terá?

Para formar a senha de quatro dígitos, há disponíveis três algarismos iguais a 1, um algarismo igual a 2, um algarismo igual a 5 e um algarismo igual a 9.

Caso 1: A sequência possui três algarismos iguais a 1. Começamos escolhendo três posições para os algarismos 1 de $\frac{4!}{3! \cdot 1!}$ formas. Há três possibilidades para o quarto algarismo restante a ser usado na senha: 2, 5 e 9. Pelo princípio multiplicativo, o número de senhas possíveis é dado por $n_1 = 3 \cdot \frac{4!}{3!} = 12$.

Caso 2: A sequência possui dois algarismos iguais a 1. Começamos escolhendo duas posições para os algarismos 1 de $\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!}$ formas. Para as duas posições restantes devemos escolher dois entre os três algarismos 2, 5 e 9. Temos $\frac{3!}{2! \cdot 1!}$ formas para as duas posições restantes. Pelo princípio multiplicativo, o número de senhas possíveis é dado por $n_2 = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 36$.

Caso 3: A sequência é formada pelos quatro algarismos distintos. Neste caso, o número de senhas possíveis é dado por $n_3 = 4! = 24$.

Sendo assim, o número de senhas possíveis é $n = n_1 + n_2 + n_3 = 72$.

Como foi redigido, o problema formulado na letra (b) permite a seguinte interpretação, que também foi considerada:
Podemos usar os algarismos 1,2,5 e 9 em qualquer posição dos dígitos da senha de 4 dígitos. Neste caso, teremos, pelo Princípio Multiplicativo, que o número de senhas é $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$.

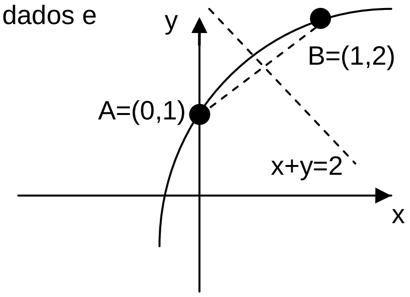
Valor da letra b: até 3,0 pontos.

Questão 4 – Ao estudar a órbita circular de um planeta ao redor de uma estrela, com o auxílio de um plano cartesiano, um jovem astrônomo percebeu que esta passava pelos pontos $A=(0,1)$ e $B=(1,2)$ e tinha raio $r=\sqrt{5}$ U.A., sendo que uma unidade astronômica ou um U.A. é igual a $1,5\times 10^{11}$ metros.

a) Sabendo que a estrela encontra-se no ponto P que é o centro da órbita circular, cuja primeira coordenada é positiva, determine a equação da circunferência que descreve a órbita.

O centro $P=(x,y)$ desta órbita tem a mesma distância dos pontos A e B dados e satisfazem

$$\mathrm{d}((x,y),(0,1))=\mathrm{d}((x,y),(1,2))\Rightarrow$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\Rightarrow$$
$$x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-4y+4\Rightarrow x+y=2.$$



Os pontos da reta $x+y=2$ que distam $\sqrt{5}$ de A e B são dados por

$$\mathrm{d}((x,2-x),(0,1))=\sqrt{5}\Rightarrow x^2+1-2x+x^2=5\Rightarrow x^2-x-2=0.$$

Logo, $x=2$ ou $x=-1$.

Como a primeira coordenada do ponto P é positiva,

$$x=2\Rightarrow y=2-2=0\Rightarrow P=(2,0).$$

Então, a equação da circunferência é dada por

$$(x-2)^2+y^2=5.$$

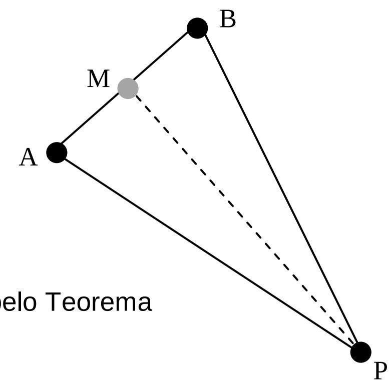
Valor da letra a: até 2,5 pontos.

b) Após um período de observação, o astrônomo percebeu que uma grande erupção estelar atingiu a órbita do planeta do ponto A até o ponto B. Determine a área atingida pela erupção, considerando que essa é aproximadamente a área do triângulo de vértices A, B e P.

Considere o triângulo de vértices A, B e P.

Temos que $\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$.

Como $\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{5}$, o triângulo é isósceles e, portanto, a altura do triângulo relativa ao lado $\overline{AB}$ é igual ao comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.



Seja M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e considere o triângulo de vértices A, M e P, retângulo em M. Como $\overline{MB}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $\overline{MP}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Logo a área do triângulo de vértices A, B e P é dada por

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{MP}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\ (\text{U.A.})^2.$$

Valor da letra b: até 2,5 pontos.

Questão 5 – Para um campeonato de voleibol, um técnico convocou 12 jogadores, sendo um líbero e dois levantadores. Para o início de uma partida, devem ser escolhidos 6 jogadores que ficarão em seis posições distintas, sendo 3 na parte superior da quadra e 3 na parte inferior.

a) Determine o número de maneiras distintas do time ser escalado para o início de uma partida, sendo que quaisquer jogadores podem começar a jogar, independente de serem levantadores ou líbero.

Como qualquer dos 12 jogadores podem começar jogando em qualquer uma das 6 posições, para a primeira posição devemos escolher um entre os 12 jogadores. Para a segunda posição devemos escolher um entre os 11 jogadores restantes. Para a terceira posição devemos escolher um entre os 10 jogadores restantes, e assim sucessivamente até a sexta posição. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas do time ser escalado é dado por

$$n = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 .$$

Valor da letra a: até 2,0 pontos.

b) Sabendo que esse técnico sempre começa o jogo com exatamente um levantador e que o líbero sempre joga em uma das três posições da parte inferior da quadra, determine o número de maneiras diferentes de iniciar uma partida.

O levantador pode ser escolhido de duas maneiras. O líbero pode estar nas três posições diferentes na parte inferior da quadra. Uma vez determinada a posição do líbero, o levantador pode estar em cinco posições diferentes da quadra. As outras quatro posições da quadra devem ser ocupadas pelos 9 jogadores restantes. Observe que já foram escolhidos um líbero e um levantador dentre duas opções. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de iniciar uma partida será dado por

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}_{\text{Posições para os demais jogadores}} ,$$

Posições para o levantador
Posições para o líbero
Escolha do levantador

Valor da letra b: até 2,0 pontos.

c) Supondo que o técnico não compareceu no dia da partida e que o auxiliar recém contratado escalou o time aleatoriamente, calcule a probabilidade dessa escalação estar de acordo com as condições do item b).

A probabilidade é dada pela divisão do número de maneiras diferentes de iniciar uma partida nas condições do item b) pelo número de maneiras diferentes de iniciar uma partida nas condições do item a), isto é,

$$P = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{22} .$$

Valor da letra c: até 1,0 ponto.