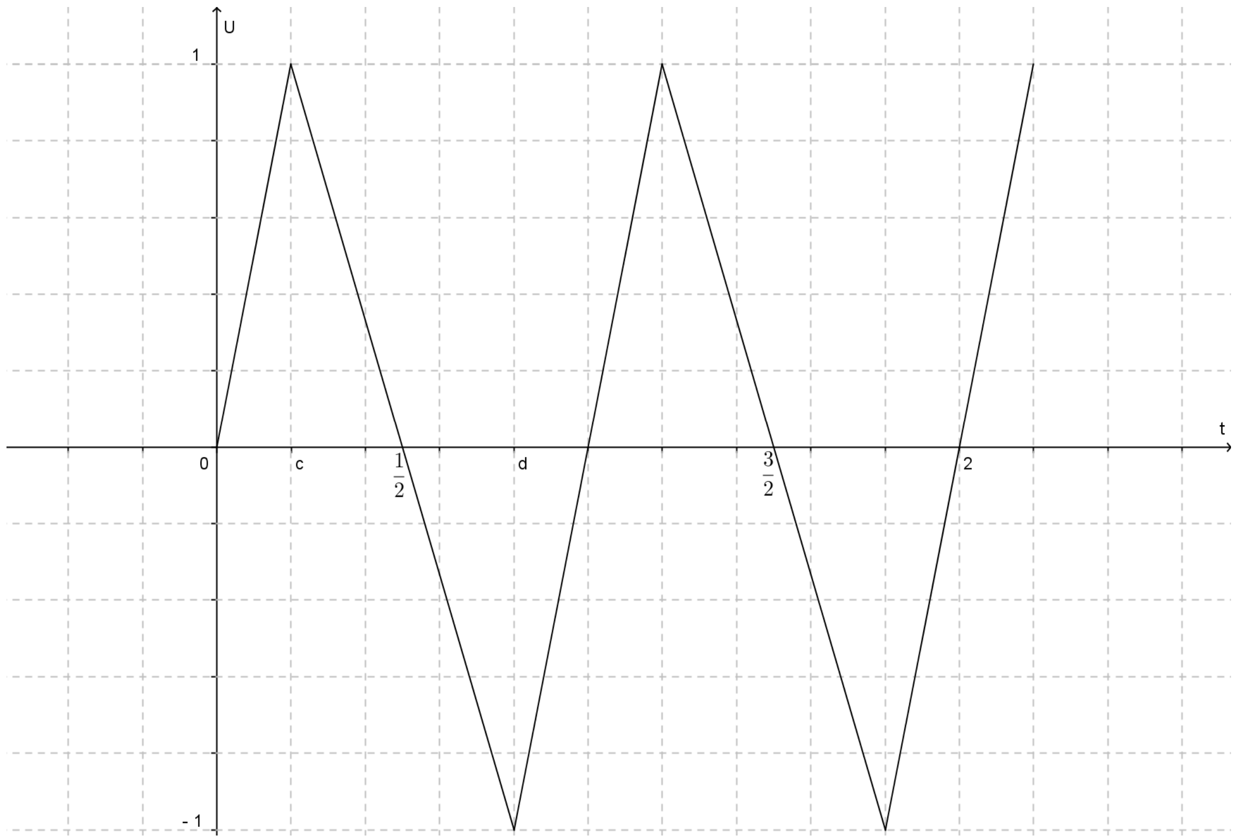
Questão 1 – Uma função é dita periódica de período p, se existe um menor número real positivo p tal que $f(t) = f(t+p)$, para todo t no domínio de f. Alguns fenômenos naturais, tais como as ondas sonoras e as ondas eletromagnéticas, podem ser descritas por funções periódicas. O gráfico a seguir representa um desses fenômenos, a tensão $U:[0,+\infty) \to IR$ em função do tempo t.



A partir da análise do gráfico dessa função, responda cada questão abaixo, justificando suas respostas.

a) Após d unidades de tempo, há instantes em que a tensão é zero no intervalo $[d,3]$? Em caso afirmativo, quais?

Sim. Analisando o gráfico notamos que os pontos de ordenada zero e abscissa no intervalo $[d,3]$ são $(1,0)$, $\left(\frac{3}{2},0\right)$, $(2,0)$, $\left(\frac{5}{2},0\right)$, $(3,0)$. Portanto a tensão é zero no intervalo $[d,3]$ nos instantes 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$ e 3.

Valor da letra a: até 1,0 ponto.

b) Determine uma expressão para $U(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq c$ e outra expressão para $U(t)$ no intervalo $c \leq t \leq d$.

No intervalo $[0,c]$ temos $U(t) = at + b,$, $a, b \in IR$ e $a \neq 0$.

Como $U(0)=0$ e $U(c)=1$, segue que $b=0$ e $ac=1$, logo $a=\frac{1}{c}$. Portanto $U(t)=\frac{1}{c}t$, para todo $t \in [0,c]$.

No intervalo $[c,d]$ temos $U(t) = mt + n,$, $m, n \in IR$ e $m \neq 0$.

Como $U(c)=1$ e $U(d)=-1$ obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} mc + n = 1 & (I) \\ md + n = -1 & (II) \end{cases}$$

Subtraindo a equação (II) da equação (I) obtemos

$$m(c-d) = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{c-d}.$$

Substituindo o valor de m na equação (I) obtemos

$$\frac{2}{c-d}c + n = 1 \Rightarrow n = \frac{-c-d}{c-d}.$$

Logo $U(t) = \frac{2}{c-d}t - \frac{(c+d)}{c-d}$, para todo $t \in [c,d]$.

Valor da letra b: até 2,0 pontos.

c) Para quais valores de $t \in [0,c]$ temos $\frac{1}{2} \leq U(t) \leq 1$?

Sabemos, pelo item b, que $U(t)=\frac{1}{c}t$, para todo $t \in [0,c]$. Fazendo $U(t)=\frac{1}{2}$ obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{c}t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{c}{2}.$$

Por outro lado, $U(t)$ é crescente no intervalo $[0,c]$, pois $c > 0$. E como $U(c)=1$, segue que $\frac{1}{2} \leq U(t) \leq 1$, para todo $t \in \left[\frac{c}{2}, c\right]$.

Valor da letra c: até 1,0 ponto.

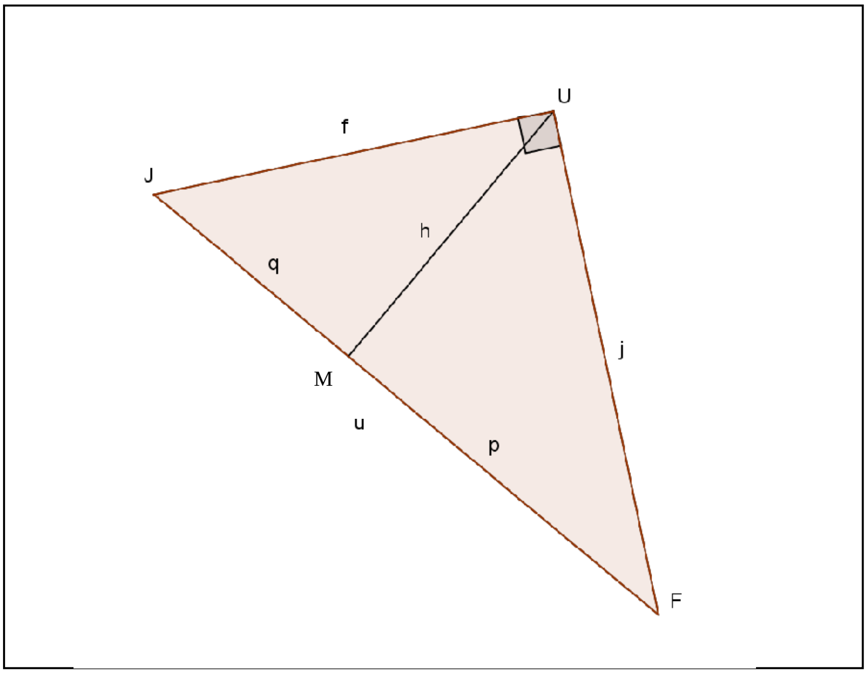
d) Determine o período da função $U(t)$. Em quais instantes a tensão é mínima?

De acordo com a representação gráfica e a definição de função periódica temos que o período da função $U(t)$ é $p=1$.

O primeiro instante em que a tensão é mínima é $t=d$. Como a função é periódica de período 1, segue que a tensão é mínima em $t=d+n$, para todo inteiro não negativo n.

Valor da letra d: até 1,0 ponto.

Questão 2 – Considere o triângulo UJF a seguir, o retângulo em U e h a altura relativa à base JF de medida u.



a) Se a área do triângulo UJF é igual a $2\sqrt{2}\,cm^2$, $h=\sqrt{6}\,cm$ e $p=2\,cm$, determine o valor da projeção q.

A área do triângulo UJF é dada por $A=\dfrac{uh}{2}$. Sendo $A=2\sqrt{2}$ e $h=\sqrt{6}$ obtemos:

$$2\sqrt{2}=\frac{u\sqrt{6}}{2} \Rightarrow u=\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$$

Como $u=p+q$ temos $q=u-p$. Assim, $q=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-2=\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}cm$.

Tendo em vista os dados inconsistentes apresentados na letra (a), a seguinte solução também foi considerada:

Se a altura *h*, relativa à base JF, do triângulo UJF retângulo em U é igual a $h=\sqrt{6}\,cm$ e $p=2\,cm$, o valor da projeção *q* pode ser obtida da seguinte maneira:

$$h^2=p.q \Rightarrow \left(\sqrt{6}\right)^2=2.q \Rightarrow 6=2.q \Rightarrow q=3\,cm$$

Valor da letra a: até 2,0 pontos.

b) Mostre que $uh = jf$ e $f^2 = uq$.

Os triângulos UJF e UJM são semelhantes pelo caso AAA, pois são triângulos retângulos e possuem o ângulo J comum; logo, as razões de semelhança são

$$\frac{u}{f} = \frac{j}{h} = \frac{f}{q}.$$

Assim, temos que: $uh = jf$ e $f^2 = uq$.

Observação: As demonstrações das relações solicitadas na letra (b) foram consideradas, caso tenham sido utilizados, nas mesmas, valores numéricos encontrados e compatíveis para as medidas dos lados do triângulo retângulo UJF.

Valor da letra b: até 2,0 pontos.

c) Mostre que $h < f$.

Como o triângulo UJM é retângulo em M, pelo Teorema de Pitágoras temos $f^2 = h^2 + q^2$; logo,

$$f = \sqrt{h^2 + q^2} > \sqrt{h^2} = h, \text{ pois } q > 0,\ h > 0 \text{ e } f > 0.$$

Observação: A demonstração solicitada na letra (c) foi considerada, caso tenha sido utilizado, na mesma, valor numérico encontrado e compatível para a medida do lado *f* do triângulo retângulo UJF.

Valor da letra c: até 1,0 ponto.