

NOTAS DE AULAS DE FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 4

PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DA MATÉRIA

Edição de junho de 2014

CAPÍTULO 4 – PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DA MATÉRIA

ÍNDICE

- 4.1- Postulados de de Broglie
- 4.2- Interpretação Probabilística da Dualidade Onda - Partícula
- 4.3- Propriedades das Ondas de Matéria
- 4.4- Princípio da Incerteza

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **3 aulas de quatro créditos**.

CAPÍTULO 4

PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DA MATÉRIA

4.1. Postulados de de Broglie.

Em sua tese de doutorado, apresentada em 1924 à Faculdade de Ciências da Universidade de Paris, Louis Victor Pierre Raymond de Broglie postulou a existência da onda de matéria. Cinco anos mais tarde, de Broglie recebeu o prêmio nobel de física, quando suas ideias foram definitivamente comprovadas por experiências. Foi a ideia da onda de matéria de de Broglie que inspirou Erwin Schrödinger a propor a sua teoria quântica moderna.

Para de Broglie, a dualidade onda-partícula da radiação, também deveria ocorrer com a matéria. De acordo com essa hipótese, a energia $E = h\nu$ e o momento $p = h/\lambda$, dados nos eqs. (2.49) e (2.55) para a radiação, se aplicam também a matéria. A segunda equação, escrita na forma

$$\lambda = h/p, \quad (4.1)$$

é conhecida como a equação de de Broglie e prevê um comprimento de onda de de Broglie para uma partícula em movimento com momento linear de módulo p .

A quantização do momento angular no átomo, proposta empiricamente por Bohr, pode ser obtida diretamente do postulado de de Broglie. Como o elétron no átomo deve mover-se em órbitas discretas e fechadas, de acordo com o postulado de Bohr, então uma órbita de raio r deve conter um número inteiro n de ondas de de Broglie do elétron, como mostra a Fig. 4.1.

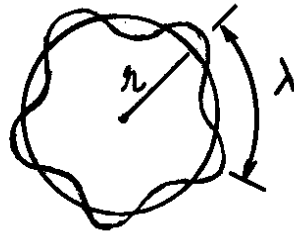


Fig. 4.1 - Estado estacionário numa órbita de Bohr.

De acordo com esta ideia, a razão entre o perímetro da órbita $2\pi r$ e o comprimento de onda λ de de Broglie, resulta em um número inteiro n dado por

$$n = \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r}{h/p} = \frac{2\pi}{h} L$$

ou

$$L_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde $L = rp$ é o momento angular clássico do elétron e $\hbar = h/2\pi$.

Exemplo 4.1

Determinar: (a) o comprimento de onda de de Broglie de um elétron de energia cinética $K = 100 \text{ eV} = 160 \times 10^{-19} \text{ J}$ e, (b) o comprimento de onda de de Broglie de uma bola de boliche de massa $m = 1,0 \text{ kg}$, que se move com uma velocidade de $u = 10 \text{ m/s}$.

(a) Como $K = p^2/2m$ e para o elétron $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, então

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2mK} = 1,2 \text{ \AA} . \quad (4.2)$$

(b) Para a bola de boliche, encontra-se

$$\lambda = h/p = h/mu = 6,6 \times 10^{-25} \text{ \AA} . \quad (4.3)$$

Sabe-se que, no caso da luz, o limite de utilização da óptica geométrica ocorre para $\lambda \ll a$, isto é, para comprimentos de onda λ muito menores do que a dimensão a de aberturas, ou obstáculos. Assim, no domínio da óptica geométrica a luz se comporta como raios geométricos, similarmente ao caso das trajetórias das partículas clássicas macroscópicas. Entretanto, quando $\lambda \gtrsim a$, o ângulo de difração $\theta = \lambda/a$ torna-se importante, a natureza ondulatória da luz se evidencia e o fenômeno deve ser descrito pela óptica física, ou ondulatória. Para se observar a natureza ondulatória da matéria é necessário então aberturas, ou obstáculos, convenientemente pequenos.

Na época de de Broglie, os sistemas mais apropriados para este fim eram os espaçamentos entre planos adjacentes de um cristal, onde $a \approx 1 \text{ \AA}$. Atualmente tem-se acesso a sistemas que envolvem dimensões nucleares, onde $a \approx 10^{-4} \text{ \AA}$. Considerando o comprimento de onda de de Broglie, na eq. (4.3), vê-se que não se pode esperar a detecção de qualquer evidência de movimento ondulatório no movimento da bola de boliche, onde $\theta = \lambda/a \approx 10^{-25} \text{ \AA}$, para $a \approx 1 \text{ \AA}$. Entretanto, aspectos ondulatórios do movimento do elétron com $\lambda = 4,2 \text{ \AA}$ seriam bem evidentes para $a \approx 1 \text{ \AA}$. Uma montagem para testar a natureza ondulatória do elétron, similar em certos aspectos a usada no experimento de Compton com raios X, foi proposta por Walter Maurice Elsassner na Alemanha em 1926 e experimentada por Clinton Joseph Davisson e Lester Halbert Germer nos Estados Unidos em 1927. A experiência de Davisson e Germer, como é chamada, é mostrada na Fig. 4.2.

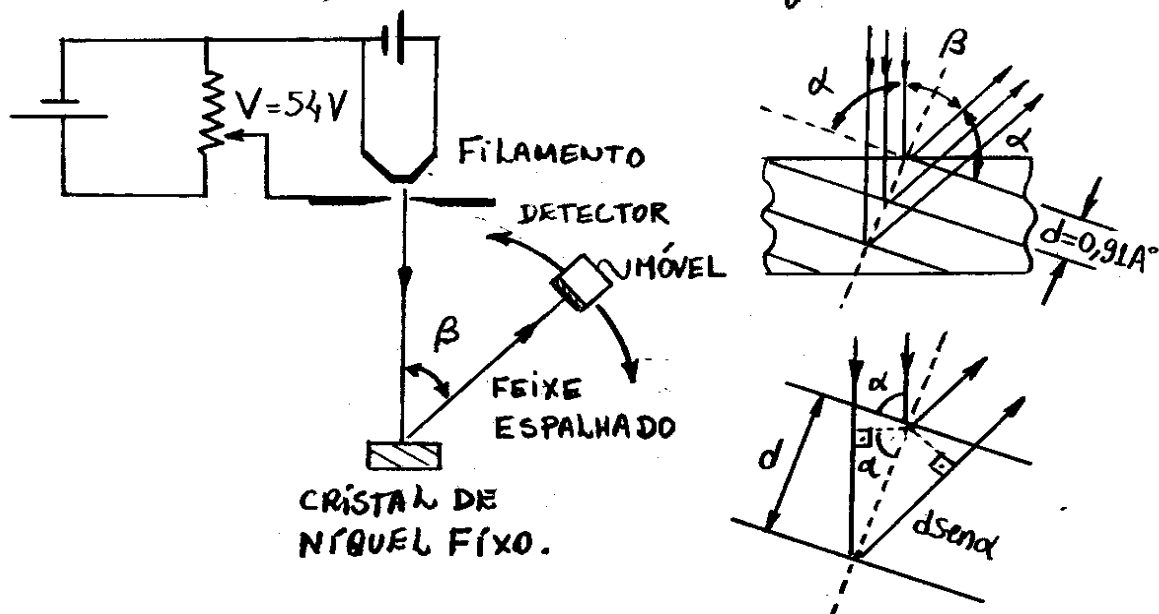


Fig. 4.2 - Experimento de Davisson e Germer.

No experimento, um feixe de elétrons de baixa energia é produzido num filamento aquecido e acelerado por uma diferença de potencial V . O feixe eletrônico incide normalmente sobre a superfície de um cristal de Níquel. Um detector é colocado a um ângulo β em relação ao feixe incidente para medir a intensidade do feixe espalhado. Na experiência espera-se encontrar regiões de máximos e mínimos de intensidade, resultantes das interferências construtiva e destrutiva nos planos cristalinos do cristal de Níquel. Exatamente como ocorre com o espalhamento de raios X nos cristais, para incidência normal, a condição de interferência construtiva, ou na linguagem cristalográfica "a condição de Bragg", fornece

$$2d \sin \alpha = \lambda \quad (4.4)$$

A experiência mostra que existe uma intensidade máxima para $\beta = 50^\circ$, ou $\alpha = 65^\circ$, quando $V = 54$ V. Usando então os valores $d = 0,91 \text{ \AA}$ e $\alpha = 65^\circ$, obtidas da experiência, encontra-se o comprimento de onda do feixe espalhado como

$$\lambda = 2d \sin \alpha = 2 \times 0,91 \times \sin 65^\circ = 1,65 \text{ \AA}.$$

Por outro lado, o comprimento de onda de de Broglie para elétrons de energia cinética $K = 54 \text{ eV} = 86,4 \times 10^{-19} \text{ J}$ será

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = 1,665 \text{ \AA}.$$

A concordância entre os resultados confirma quantitativamente a hipótese da onda de matéria de de Broglie.

Ainda em 1927, George Paget Thomson, filho de J.J. Thomson, mostrou a difração de feixes de elétrons ao passar através de películas cristalinas confirmando, de forma independente, o postulado de de Broglie.

A Fig. 4.3 mostra a figura de difração do espalhamento de elétrons numa película de cristal de ouro. O resultado é similar ao espalhamento de Raios X em cristais, onde o fenômeno da difração aparece por causa de aberturas circulares no interior do filme cristalino.

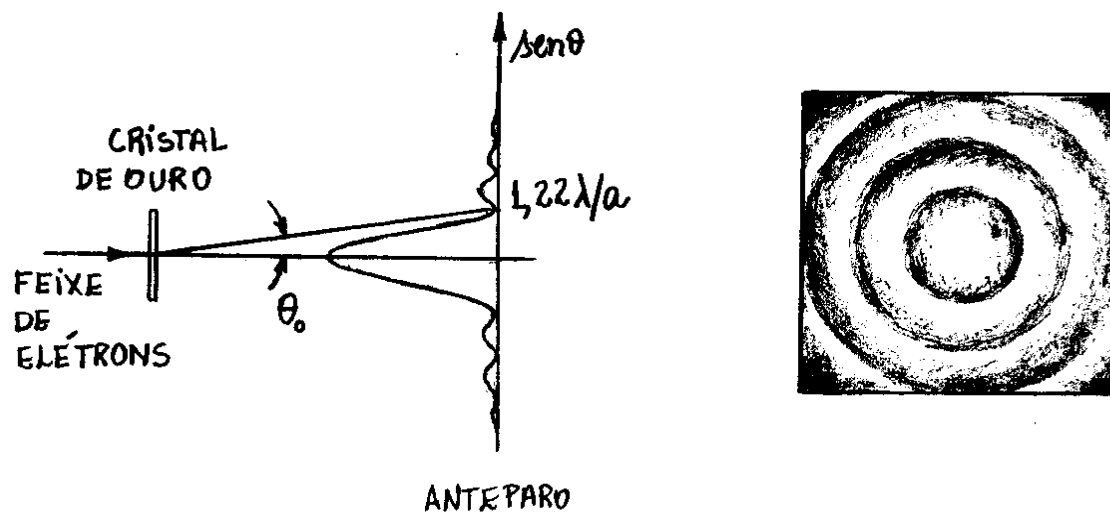


Fig. 4.3 - Experimento de George P. Thomson sobre a difração de elétrons em cristais de ouro.

É interessante mencionar que Joseph John Thomson recebeu o prêmio nobel de física em 1906 pela medida da razão carga/massa do elétron, enquanto seu filho, George Paget Thomson, recebeu o prêmio nobel de física em 1937 por experimentos de difração com elétrons, realizadas em 1927.

Assim, pode-se dizer que Thomson, o pai, recebeu o prêmio nobel por ter mostrado que o elétron é uma partícula e Thomson, o filho, recebeu o prêmio nobel por ter mostrado que o elétron é uma onda.

Exemplo 4.2 - Eisberg 3.5 - FACULTATIVO.

Mostre que o comprimento de onda de de Broglie de uma partícula de carga e , massa de repouso m_0 , movendo-se com uma velocidade relativística, é dada em função do potencial acelerador V como $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eV}} \left(1 + \frac{eV}{2m_0 c^2}\right)^{-1/2}$.

Como $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$ e $E = K + m_0 c^2$, então

$$(K + m_0 c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \Rightarrow K^2 + 2m_0 c^2 K + \cancel{(m_0 c^2)^2} = (pc)^2 + \cancel{(m_0 c^2)^2}$$

$$\Rightarrow pc = \sqrt{K^2 + 2m_0 c^2 K} = \sqrt{2m_0 c^2 K \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2}\right)}$$

$$\Rightarrow pc = c \sqrt{2m_0 K} \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2}\right)^{1/2}$$

ou,

$$p = \sqrt{2m_0 K} \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2} \right)^{1/2}$$

Assim, o comprimento de onda de de Broglie será

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K} \left(1 + \frac{K}{2m_0 c^2} \right)^{1/2}} \quad (4.5)$$

ou, escrevendo $K = eV$, a equação fica demonstrada. A energia total relativística também é dada por

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = m_0 c^2 (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$$

de modo que

$$E = K + m_0 c^2 \Rightarrow m_0 c^2 (1 - u^2/c^2)^{-1/2} = K + m_0 c^2 \Rightarrow \frac{K}{m_0 c^2} = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} - 1$$

No limite clássico $u \ll c$, $u^2/c^2 \rightarrow 0$ e portanto $K/m_0 c^2 \rightarrow 0$. Nesse caso, a eq. (4.5) está de acordo com a definição inicial na eq. (4.2), isto é, $\lambda = h/p = h/\sqrt{2m_0 K}$.

Exemplo 4.3

A resolução máxima atingida por um microscópio está limitada somente ao comprimento de onda da onda utilizada para observar o objeto. Suponha que se queira observar o interior de um átomo com detalhes da ordem de $0,1 \text{ \AA}$. (a) Se um microscópio óptico for usado para observar o átomo, qual seria a energia mínima para os fótons? Qual seria o momento desses fótons? Em que região do espectro eletromagnético estão esses fótons?

- (b) Se um microscópio eletrônico for usado para observar o átomo, qual seria a energia mínima para os elétrons? Qual seria o momento desses elétrons?
- (c) Qual dos microscópios seria mais prático para esse objetivo?

A onda deve ter o comprimento de onda $\lambda = 0,1 \text{ \AA}$.

(a) Para os fótons: $E = pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12400 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{10^{-1} \text{ Å}} \Rightarrow E = 124 \text{ KeV}$.

Essa energia está na região dos raios X, ou raios γ . O momento será,

$$p = E/c = 124 \text{ KeV}/c.$$

(b) Para os elétrons:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{10^{-11} \text{ m}} = 6,63 \times 10^{-23} \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{m}} \times \frac{1}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} \times \frac{30 \times 10^8 \text{ m/s}}{c}$$

$$= 1,24 \times 10^5 \text{ eV}/c = 0,124 \text{ MeV}/c$$

Como a energia de repouso do elétron é $E_0 = 0,511 \text{ MeV}$, então a energia total E e a energia cinética K serão dadas por

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 = (0,124 \text{ MeV})^2 + (0,511 \text{ MeV})^2 \Rightarrow E = 0,5258 \text{ MeV}$$

$$K = E - E_0 = 0,5258 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} \Rightarrow K = 14,8 \text{ KeV}$$

(c) Os microscópios eletrônicos são preferíveis. Os raios X, ou raios γ , são difíceis de serem focalizados e uma blindagem muito eficiente seria necessária.

4.2 - Interpretação Probabilística da dualidade onda-partícula.

Sabe-se agora que a dualidade onda-partícula se aplica tanto a radiação quanto a matéria. Em alguns casos é necessário recorrer ao modelo corpuscular e em outros ao modelo ondulatório. Entretanto, é importante mencionar que os dois aspectos não se revelam simultaneamente num mesmo experimento. Quando a radiação, ou a matéria, é detectada por interação, de modo que é localizada, ela se comporta como partícula. Por outro lado, quando ela se move no espaço livre, de modo que é deslocalizada, se comporta como uma onda e fenômenos de difração são observados.

Niels Bohr resumiu a questão em seu princípio da complementaridade: "O modelo corpuscular e ondulatório são complementares e não contraditórios": A experiência que comprova o caráter ondulatório da radiação é incapaz de comprovar o caráter corpuscular e vice-versa.

Para unificar o caráter ondulatório e corpuscular em um só experimento é necessário incorporar uma interpretação probabilística à dualidade onda-partícula.

A interpretação probabilística da dualidade onda-partícula, para o caso da radiação, foi proposta por Albert Einstein. Em seguida, Max Born usou argumentos similares para o caso da matéria. No modelo ondulatório a intensidade da radiação I é igual ao valor médio do módulo do vetor de Poynting \vec{S} e, portanto, proporcional ao quadrado do valor médio do módulo do campo elétrico \vec{E} , isto é,

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle EB \sin \frac{\pi}{2} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle |\vec{E}|^2 \rangle, \quad (4.6)$$

onde usou-se o fato que $B = E/c$. Por outro lado, no modelo corpuscular, ou de fótons, a intensidade da radiação é dada em função da frequência ν como

$$I = Nh\nu, \quad (4.7)$$

onde N é o número médio de fótons por unidade de área e tempo.

Assim, as diferentes interpretações ondulatória e corpuscular para a intensidade da radiação mostram que

$$N \propto |\vec{E}|^2. \quad (4.8)$$

Espera-se, portanto, que nas regiões onde o campo elétrico \vec{E} é mais intenso, é maior aí a concentração de fótons.

O próprio conceito de fóton, proposto por Einstein para descrever a radiação eletromagnética, implica numa interpretação probabilística para a intensidade luminosa. Tal fato pode ser observado na experiência de interferência de dupla fenda de Young, mostrada na Fig. 4.4.

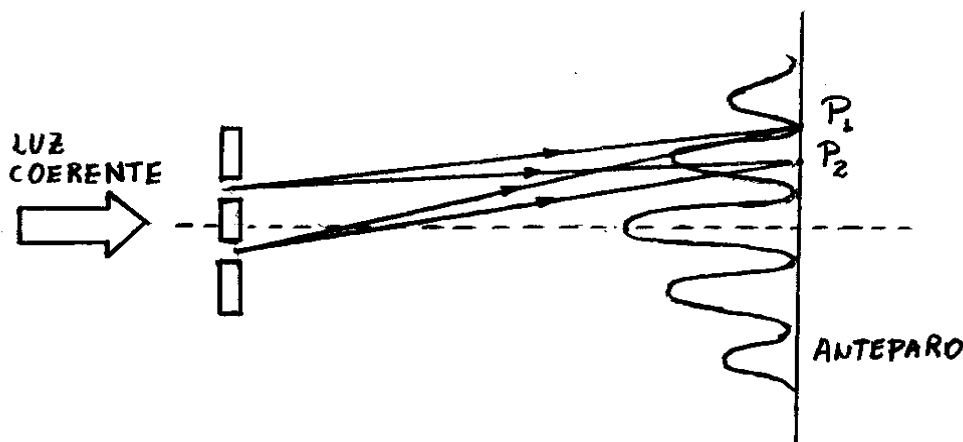
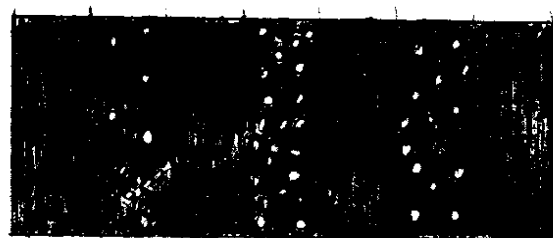


Fig. 4.4 - Experiência de dupla fenda de Young.

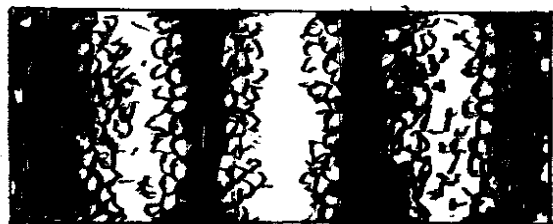
O padrão de interferência observado no anteparo é resultante da interferência entre as ondas provenientes das duas fendas. No ponto P_1 , onde a interferência é destrutiva, o campo elétrico resultante é nulo e nenhum fóton é observado aí. No ponto P_2 , onde a interferência é construtiva, o campo elétrico resultante é máximo e muitos fótons são observados aí. Se a intensidade da luz nas fendas for reduzida, observa-se ainda o padrão de interferência, desde que se substitua o anteparo por um filme fotográfico e espere-se um tempo suficientemente longo para sensibilizá-lo.

A interação da luz com o filme fotográfico é um fenômeno quântico. Se o filme for exposto durante um curto intervalo de tempo, com uma fonte de luz de baixa intensidade, não se observa somente uma versão menos intensa da figura de interferência obtida com luz intensa, mas também "pontos" resultantes das interações dos fótons com os cristálicos do filme como mostra a Fig. 4.5. Nas regiões onde as ondas interferem destrutivamente, não aparecem quaisquer pontos, ou seja, existe uma probabilidade nula de que fótons atinjam essas regiões. Por outro lado, nas regiões onde a interferência é construtiva, aparecem vários pontos, indicando que é grande a probabilidade de que os fótons ali chegam.

A medida que a intensidade, ou o tempo de exposição, aumenta, as flutuações uniformizam-se e não se observa mais a natureza quântica da luz.



(a) 50 fótons



(b) 5000 fótons



(c) 50000 fótons

Fig. 4.5 - Figuras de interferência para diferentes intensidades, ou número de fótons, da luz que incide na dupla fenda de Young.

Como $|\vec{E}|^2$ é proporcional ao número N de fótons por unidade de área e tempo, pode-se concluir que $|\vec{E}|^2$ é proporcional à probabilidade p de um fóton atingir um determinado ponto do filme, isto é, a menos de uma constante

$$p = |\vec{E}|^2. \quad (4.9)$$

Nos pontos onde $|\vec{E}|^2$ é nulo não se observa fótons no filme, ou no anteparo, enquanto que nos pontos onde $|\vec{E}|^2$ é grande será maior a probabilidade de se observar aí os fótons.

Baseado nas conclusões de Einstein para a radiação, Max Born propôs uma interpretação probabilística da dualidade onda-partícula para a matéria. Uma figura de interferência, similar a Fig. 4.4, pode ser obtida com um feixe de partículas.

Na teoria ondulatória da matéria, o movimento da partícula é descrito por uma função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$. Do mesmo modo que o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é uma solução da equação de onda para a radiação eletromagnética, $\Psi(\vec{r}, t)$ deve ser solução de uma equação de onda apropriada.

Tal equação foi obtida por Erwin Schrödinger e será discutida no próximo capítulo. A unificação da dualidade onda-partícula por Born, surgiu alguns anos após Schrödinger propôr o formalismo geral da mecânica quântica, baseado no postulado de de Broglie. A grande contribuição de Born se deve pela interpretação da função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$.

Max Born concluiu que a probabilidade de se encontrar uma partícula numa determinada região do espaço de volume infinitesimal dV , é proporcional a $|\Psi|^2$ e também ao elemento de volume dV . Em particular, no caso unidimensional, a probabilidade diferencial dP de encontrar uma partícula numa determinada região linear dx do espaço será

$$dP = |\Psi|^2 dx = p(x) dx, \quad (4.10)$$

onde

$$p(x) = |\Psi|^2 = \frac{dP}{dx}, \quad (4.11)$$

é uma densidade de probabilidade, que descreve a distribuição de probabilidade de localização da partícula microscópica.

4.3. Propriedades das Ondas de Matéria.

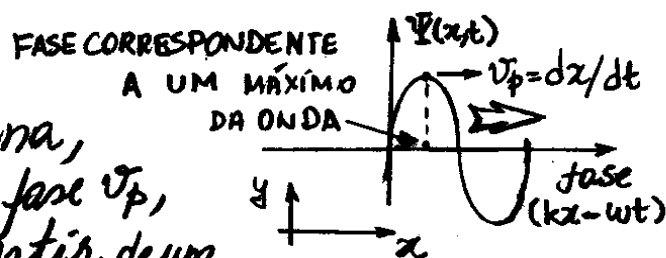
De acordo com a proposta de Max Born, devido ao comportamento ondulatório da matéria, a localização de uma partícula deve depender de uma distribuição de probabilidade.

Esta relação tem como objetivo analisar o comportamento das ondas que controlam o movimento de uma partícula por meio de uma revisão das propriedades das ondas clássicas.

Inicia-se a análise considerando uma simples onda plana monocromática unidimensional, isto é,

$$\Psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (4.12)$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi\nu$ são respectivamente o número de onda e a frequência angular da onda. Essa onda é uma onda plana por ser a função Ψ espacialmente constante sobre qualquer plano yz , perpendicular à direção x de propagação.



A velocidade da onda plana, conhecida como velocidade de fase v_p , pode ser determinada a partir de um valor fixo de $\Psi(x,t)$ na onda, tal como o seu ponto de máximo, e observando seu movimento ao longo do tempo,

Fig. 4.6 - Ponto de máximo fixo numa onda plana.

Como mostra a Fig. 4.6. Formalmente, o valor fixo de $\Psi(x,t)$ corresponde a uma fase constante da onda, isto é,

$$kx - \omega t = \text{constante}, \quad (4.13)$$

ou, diferenciando ambos os lados no tempo, obtém-se

$$v_p = dx/dt = \omega/k = 2\pi\nu/2\pi/\lambda = \lambda\nu. \quad (4.14)$$

No caso de uma onda de de Broglie, associada a uma partícula de momento $p = h/\lambda$ e energia total $E = h\nu$, obtém-se

$$v_p = \lambda\nu = \frac{h}{p} \frac{E}{h} = \frac{E}{p}. \quad (4.15)$$

Usando a equação, $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$, para a energia relativística total da partícula, a velocidade de fase na eq. (4.15), torna-se

$$v_p = \frac{\sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}}{p} = \frac{c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}}{p}$$

ou

$$v_p = c\sqrt{1 + (m_0c/p)^2} > c. \quad (4.16)$$

Assim, a velocidade de fase de uma onda clássica não deve estar associada ao movimento da partícula pois, além de violar a relatividade, isso significaria que a onda de matéria não acompanharia a partícula cujo movimento ela controla. Deve-se observar que, no caso de fótons, controlados por ondas eletromagnéticas planas, não há problemas, pois $m_0 = 0$ e $v_p = c$.

Para descobrir a correlação entre o movimento de uma onda clássica e o movimento da partícula, é suficiente avaliar a propriedade de superposição de duas ou mais ondas planas monocromáticas cujos números de onda k e frequências ω diferem por pequenas quantidades Δk e $\Delta \omega$ respectivamente. Por exemplo, no caso de duas ondas $\Psi_1(x,t)$ e $\Psi_2(x,t)$ de mesma amplitude A , tem-se

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t), \quad (4.17)$$

onde

$$\Psi_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad \Psi_2(x,t) = A \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t].$$

Adotando $\alpha = kx - \omega t$ e $\beta = (k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t$, na identidade trigonométrica

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos[(\alpha - \beta)/2] \sin[(\alpha + \beta)/2], \quad (4.18)$$

pode-se concluir que

$$\Psi(x,t) = 2A \cos\left[-\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] \sin\left[\frac{2k+\Delta k}{2}x - \frac{2\omega+\Delta\omega}{2}t\right]$$

Assumindo $\Delta k \ll k$, $\Delta\omega \ll \omega$ e o fato de que o cosseno é uma função par, obtém-se

$$\Psi(x,t) \approx \left[2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] \sin(kx - \omega t). \quad (4.19)$$

Esta equação é uma função de onda que tem a mesma forma que a eq. (4.12), com a diferença que a amplitude é modulada, tal que as oscilações de $\Psi(x,t)$ são limitadas por uma envoltória cossenoidal que varia periodicamente no espaço e no tempo. Esse comportamento, conhecido como "batimento", é mostrado na Fig. 4.7, num gráfico de $\Psi(x,t)$ em função de x para um tempo t fixo.

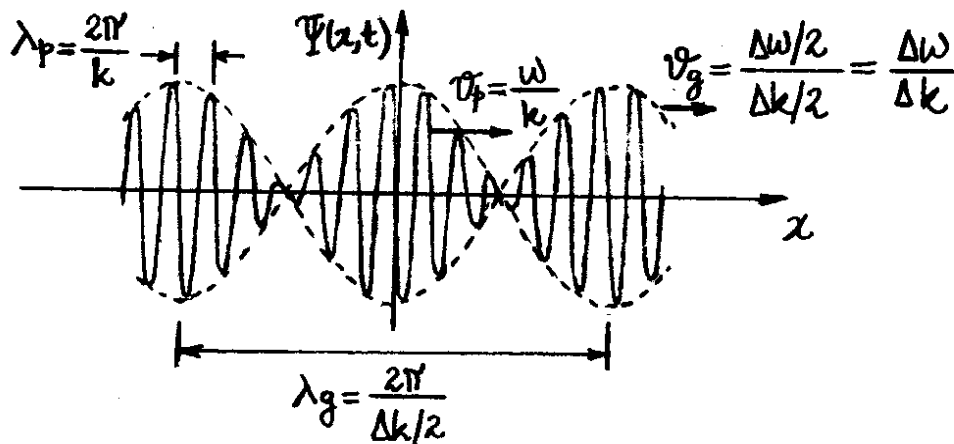


Fig. 4.7. Superposição de duas ondas periódicas deslocadas ligeiramente em números de onda k e frequência angular ω , para um instante de tempo t fixo.

Assim, duas ondas, de frequência e número de onda ligeiramente deslocados, interferem-se construtivamente e destrutivamente, de forma alternada, gerando uma sucessão infinita de grupos. A velocidade de fase v_p , das ondas individuais, pode ser calculada a partir do segundo termo de $\Psi(x,t)$. Entretanto, surge agora um novo deslocamento de onda, associado ao grupo de ondas, com uma velocidade característica, denominada de velocidade de grupo v_g , que pode ser calculada a partir do termo de amplitude de $\Psi(x,t)$. Da mesma forma que se obtém v_p na eq. (4.14), obtém-se a velocidade de grupo, da eq. (4.19), como

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (4.20)$$

Para avaliar o caso geral de superposição de várias ondas planas monocromáticas, onde tanto a fase quanto a amplitude variam, é necessário adotar um formalismo matemático mais elaborado baseado na teoria sobre as séries de Fourier. Mesmo para o caso simples de superposição de apenas duas ondas planas de diferentes amplitudes, inevitavelmente deve-se recorrer a esse formalismo. O caso geral de superposição de infinitas ondas planas monocromáticas, de números de onda k e frequências ω , deslocadas por quantidades infinitesimais dk e $d\omega$, pode ser avaliado com relativa simplicidade, assumindo a forma complexa da onda plana, isto é,

$$\Psi(x,t) = A(k) [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] = A(k) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.21)$$

A superposição de uma quantidade infinita dessas ondas, é representada pela seguinte integral:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (4.22)$$

onde a variável de integração é definida somente em função de k porque a variável angular $\omega = v_p k = \omega(k)$, é também uma função de k . O fator $1/\sqrt{2\pi}$ foi introduzido na eq. (4.22) para torná-la equivalente a uma expressão recorrente no formalismo de Fourier denominada de integral de Fourier. A integral de Fourier é uma extensão das séries de Fourier que permite obter expansões de funções não-periódicas e tem um papel fundamental na mecânica quântica. Na teoria de Fourier, o tratamento algébrico da integral de Fourier tem como base o conceito de Transformada de Fourier. Uma das formas de definir a Transformada de Fourier de uma função $f(x')$ é

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \quad (4.23)$$

Associada a essa função existe a transformada de Fourier inversa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (4.24)$$

Uma forma equivalente de definir a transformada de Fourier, é trocando os sinais das exponenciais nas eqs. (4.23) e (4.24).

Para verificar a consistência das expressões anteriores, basta substituir a eq. (4.23) na eq. (4.24), utilizar a forma complexa da função delta de Dirac

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ik(x-x')} dk \quad (4.25)$$

e encontrar uma identidade. O exemplo 4.3 mostra como isso pode ser feito. Como evidenciado na eq. (4.25), uma propriedade importante da função $\delta(x-x')$ é a sua paridade positiva tal que $\delta(x-x') = \delta(x'-x)$.

Quando se compara as eqs. (4.23) e (4.24), deve-se concluir que a amplitude $A(k)$, que descreve a distribuição espectral da função de onda $\Psi(x,t)$ na eq. (4.22), é identificada como a transformada de Fourier de $\Psi(x,t)$, para cada instante de tempo t . Particularmente, para o caso $t=t_0=0$, a transformada de Fourier de $\Psi(x,0)$ é

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} dx \quad (4.26)$$

Assumindo uma função de onda $\Psi(x,0) = e^{ik_0x}$ com um número de onda k_0 particular, obtém-se

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(k-k_0)} dx$$

ou, de acordo com a função delta de Dirac dada na eq. (4.25),

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi \delta(k-k_0) = \sqrt{2\pi} \delta(k-k_0). \quad (4.27)$$

Assim, a forma espacial da função de onda $\Psi(x,t)$ na eq. (4.22) é modulada por uma função $A(k)$ que é diferente de zero somente em torno de um ponto $k=k_0$, como mostra a Fig. 4.8(a). Isso significa que $\Psi(x,t)$ tem a forma de um grupo ou pacote de ondas espacialmente localizado, como mostra a Fig. 4.8(b), onde, fora dessa região, ocorrem somente interferências destrutivas com as infinitas ondas planas monocromáticas.

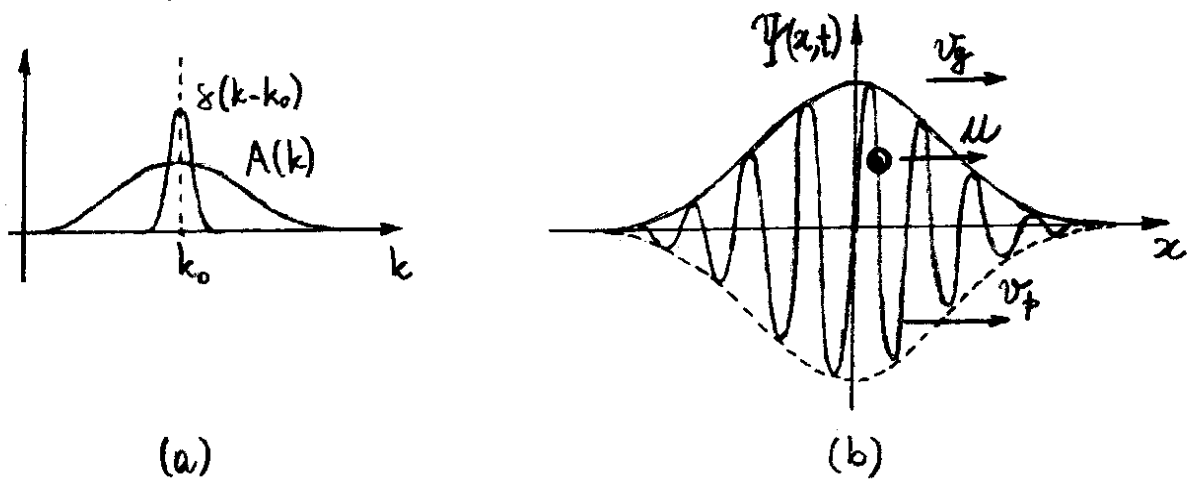


Fig. 4.8 - (a) Comportamento de $\delta(k-k_0)$ e $A(k)$ em função da variável k . (b) Pacote de ondas apropriado para descrever a onda de matéria.

A ideia do pacote de ondas localizado parece ser razoável para descrever a onda de De Broglie da partícula em movimento. Entretanto, é necessário ainda verificar se esse pacote de ondas acompanha a partícula em movimento.

Como a função de onda $\Psi(z,t)$ foi obtida da superposição contínua de incrementos infinitesimais dk e $d\omega$, então a velocidade de grupo, na eq. (4.20), deve ser escrita nesse caso como

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.28)$$

Como a energia da partícula é $E = h\nu$ e o comprimento de onda de de Broglie é $\lambda = h/p$, então

$$E = h\nu = h\omega/2\pi = \hbar\omega \quad (4.29)$$

e

$$p = h/\lambda = \hbar k/2\pi = \hbar k \quad (4.30)$$

ou, $d\omega = dE/\hbar$ e $dk = dp/\hbar$, tal que

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad (4.31)$$

Aplicando o operador diferencial, $\partial/\partial E dE + \partial/\partial p dp$, a ambos os lados da equação relativística

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2,$$

obtem-se

$$2EdE = 2pc^2dp$$

ou

$$\frac{dE}{dp} = c^2 \frac{p}{E} \quad (4.32)$$

Assim, a velocidade de grupo será

$$v_g = c^2 \frac{p}{E} \quad (4.33)$$

Utilizando as equações relativísticas

$$E = mc^2 \quad \text{e} \quad p = m\mu, \quad (4.34)$$

onde $m = m_0 / \sqrt{1 - \mu^2/c^2}$ é a massa relativística e μ é a velocidade da partícula, obtém-se

$$v_g = c^2 \frac{m\mu}{mc^2} = \mu, \quad (4.35)$$

ou seja, a velocidade de grupo do pacote de ondas é exatamente igual a velocidade da partícula cujo movimento ele controla. A relação entre a velocidade de grupo $v_g = \mu$ e a velocidade de fase v_f , pode ser obtida combinando a equação $v_f = E/p$, com as eqs. (4.34), isto é,

$$v_f = \frac{mc^2}{m\mu} = \frac{c^2}{\mu} = \left(\frac{c^2}{\mu^2}\right)\mu > \mu = v_g, \quad (4.36)$$

pois $c^2/\mu^2 > 1$. Como $v_f > v_g$, os pontos geométricos das ondas individuais movem-se constantemente através do grupo com uma velocidade de fase $v_f > \mu$, ao mesmo tempo que o grupo move-se com uma velocidade $v_g = \mu$. Esse mesmo fenômeno pode ser observado, produzindo perturbações apropriadas sobre a superfície da água. No caso do pacote de onda, não há nenhum impedimento de que $v_f > c$, pois as ondas de fase no interior do pacote descrevem, simplesmente, regiões geométricas no espaço que podem ser ocupadas pela partícula. No caso particular da luz $\mu = c$, as eqs. (4.35) e (4.36), fornecem $v_g = v_f = c$.

Exemplo 4.4 - FACULTATIVO

Utilizar a forma complexa da função delta de Dirac para mostrar que as eqs. (4.23) e (4.24) são consistentes.

Substituindo a eq. (4.23) na eq. (4.24), obtêm-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right] e^{ikx} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dk \right] f(x') dx' \end{aligned}$$

ou, de acordo com a definição dada na eq. (4.24),

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x') f(x') dx' \equiv f(x)$$

onde foi adotado uma das propriedades fundamentais da função delta de Dirac na última igualdade. Esse resultado mostra a consistência das equações que definem a transformada de Fourier.

4.4 - Princípio da Incerteza

A representação da função de onda $\Psi(x,t)$ em termos de um pacote de ondas de largura Δx têm consequências diretas na forma de definir a localização espacial de uma partícula microscópica. A partícula deve ter diferentes probabilidades de ser encontrada em diferentes posições no interior do pacote de ondas, para qualquer instante de tempo $t=t_0$. Seja novamente o caso particular do pacote de ondas, obtido da superposição de duas ondas planas, com k e ω ligeiramente deslocados. Em particular, tomando $t=t_0=0$ na eq. (4.19), obtém-se

$$\Psi(x,0) \approx \left[2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x\right) \right] \sin kx \quad (4.37)$$

A formação desse pacote de ondas é ilustrado na Fig. 4.9.

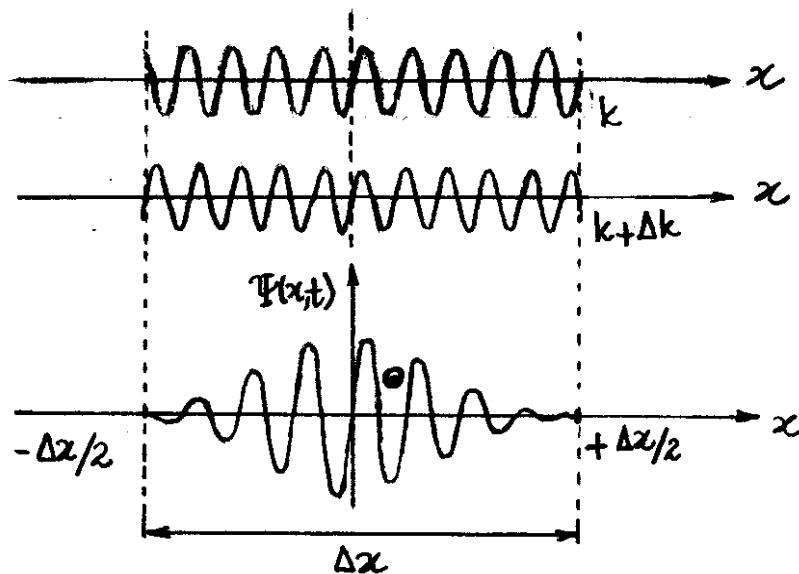


Fig. 4.9 - Grupo de ondas formado pela superposição de duas ondas de número de onda k e $k + \Delta k$.

A eq. (4.37) mostra que a amplitude do grupo é máxima, igual a $2A$, em $x=0$ e nula em $x=\Delta x/2$, desde que $\Delta k/2 \Delta x/2 = \pi/2$ ou

$$\Delta k \Delta x = 2\pi. \quad (4.38)$$

Essa equação mostra que a largura Δx do pacote de ondas diminui, isto é, a partícula fica mais localizada, ou tem sua posição x definida com maior precisão, a medida que Δk aumenta. Por outro lado, Δx aumenta quando Δk diminui. Em particular, $\Delta x \rightarrow \infty$ quando $\Delta k \rightarrow 0$, deixando a partícula totalmente deslocalizada. Nesse caso, as ondas na Fig. 4.9 interferem-se constructivamente em todos os pontos do espaço e a eq. (4.37) transforma-se numa simples onda plana.

Um comportamento similar para a frequência ω , pode ser observado no tempo, fazendo $x=x_0=0$ na eq. (4.19), isto é,

$$\Psi(0,t) \approx \left[2A \cos\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \sin(-\omega t) = \left[-2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \sin \omega t.$$

Nesse caso, a amplitude anula-se para $t=\Delta t/2$, desde que

$$\Delta\omega \Delta t = 2\pi, \quad (4.39)$$

o que mostra que, quanto maior o intervalo de tempo Δt , menor o valor do intervalo $\Delta\omega$ e conseqüentemente a frequência ω da onda de matéria fica definida com maior precisão.

Para o caso de um único grupo de ondas, obtido quando se soma um número infinito de ondas com k e ω diferindo de valores infinitesimais dk e $d\omega$ respectivamente, relações similares as eq. (4.38) e (4.39), podem ser encontradas.

Aplicando o formalismo de Fourier, partindo da equação de onda definida na forma da eq. (4.22), pode-se mostrar que as novas relações são

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

ou

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.40)$$

e

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.41)$$

pois, de acordo com as eqs. (4.29) e (4.30), $\Delta p = \hbar \Delta k$ e $\Delta E = \hbar \Delta \omega$. Essas inequações foram primeiramente obtidas por Werner Karl Heisenberg, em 1927 e se referem ao princípio da indeterminação ou princípio da incerteza.

O princípio da incerteza de Heisenberg garante que, mesmo com instrumentos ideais, não se pode encontrar resultados melhores do que aqueles definidos nas eqs. (4.40) e (4.41). Na eq. (4.40), Δp e Δx são as incertezas nas medidas simultâneas do momento p e da posição x da partícula. Na eq. (4.41), por outro lado, ΔE é a incerteza na medida da energia total E da partícula, quando se dispõe de um intervalo de tempo Δt para medi-la. Quanto mais se modifica a experiência para melhorar a precisão na determinação de p , ou E , mais se abre mão da

precisão na determinação da posição x , ou t . Por exemplo, quando se conhece o momento p exatamente, nada se sabe a respeito da posição x , isto é, se $\Delta p = 0$ então $\Delta x = \infty$. Portanto, a restrição não é em relação a precisão com que p , ou x , podem ser medidos individualmente, mas em relação a medida simultânea de ambos.

Sabe-se que as equações clássicas do movimento uniforme fazem previsões exatas da posição e do momento de uma partícula. Basta que se saiba a posição e o momento num certo instante de tempo, que o movimento futuro fica determinado exatamente. Entretanto, deve-se esperar que o ato de observar poderia interferir no processo de medida. Esse efeito não é importante no caso macroscópico, porque a energia de repouso ($m_0 c^2$) da partícula é muito maior do que a energia do fóton usado para observá-la. Por outro lado, na escala microscópica a situação é bem diferente.

É novamente a constante de Planck h que distingue os resultados clássicos dos quânticos. Se h fosse nulo nas eqs. (4.40) e (4.41), não haveria qualquer restrição nas medidas, como ocorre na Física clássica. É exatamente o fato de h ser pequeno que ajusta o princípio da incerteza das experiências cotidianas.

Para verificar o princípio da incerteza de Heisenberg, pode-se recorrer a uma experiência "imaginária", devido a Bohr, que se baseia na observação do elétron através de um microscópio. O esquema desta experiência é mostrado na Fig. 4.10.

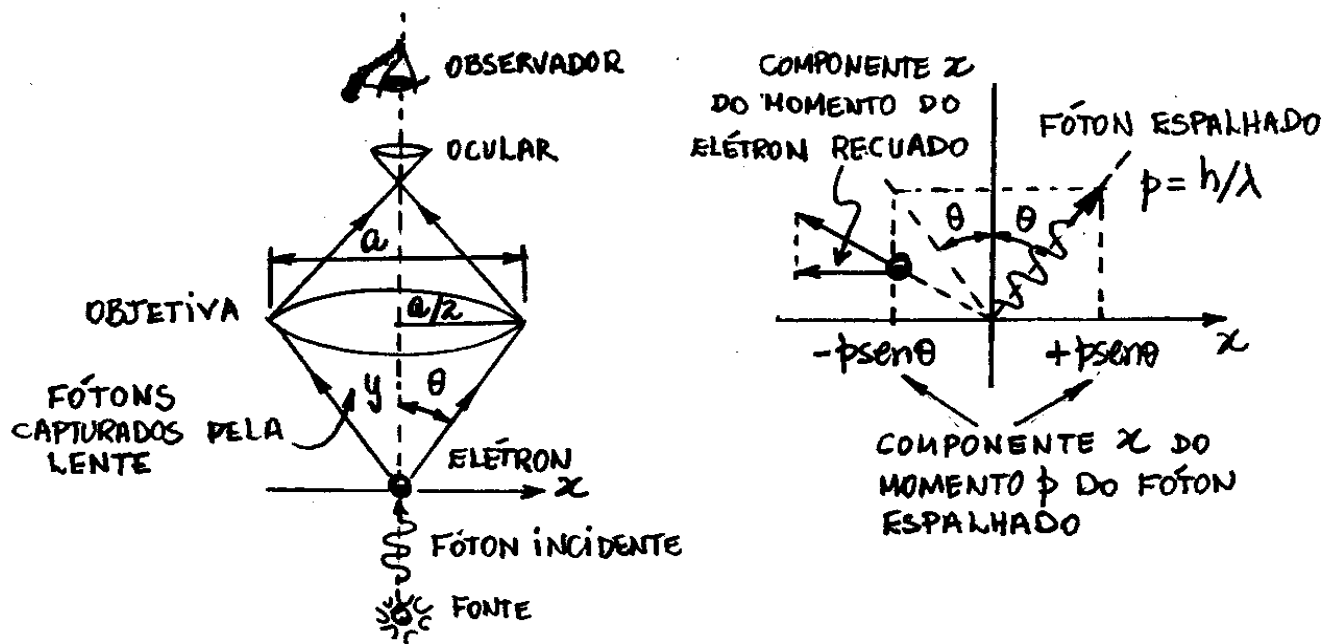


Fig. 4.10 - Experiência imaginária do microscópio de Bohr.

Para "vê" o elétron é necessário "iluminá-lo" pois, na verdade, é o fóton de luz espalhado por ele que é visto pelo observador. No momento que o elétron é iluminado, ele reua por causa do efeito Compton.

É possível reduzir, ao máximo, a perturbação sobre o elétron usando uma fonte de luz pouco intensa. Num caso extremo, podéria-se ver o elétron usando somente um fóton.

O fóton, de momento $p = h/\lambda$, pode ser espalhado em qualquer direção dentro da região angular 2θ .

Como se pode ver na Fig. 4.10, a componente x do momento do fóton espalhado pode variar de $+p\sin\theta$ a $-p\sin\theta$ de modo que, após o espalhamento, a incerteza é

$$\Delta p_x = 2p\sin\theta = (2h/\lambda)\sin\theta. \quad (4.42)$$

Pela lei da conservação do momento, na direção do eixo x , a variação do momento do elétron é igual a do fóton. Logo, o elétron tem a mesma incerteza do fóton na determinação da componente x do momento. Observa-se que para reduzir Δp_x pode-se aumentar λ , ou usar um microscópio com um ângulo de abertura θ menor.

A imagem de um objeto pontifórmate vista através de um microscópio, não é um ponto, mas uma figura de difração. As diferentes localizações do objeto pontifórmate são definidas pelo critério de resolução de Rayleigh, como ilustrado na Fig. 4.11. Por esse critério, a resolução máxima entre duas posições do elétron ocorre quando, o máximo de difração da imagem do elétron

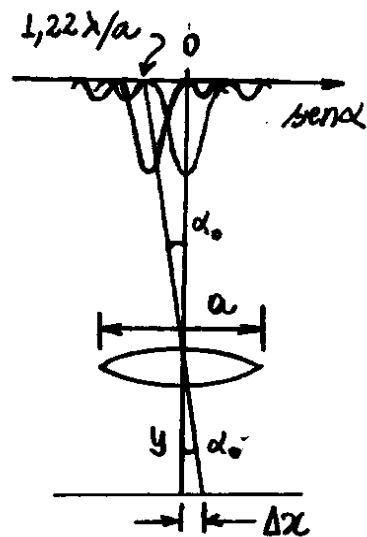


Fig. 4.11 - Critério de resolução de Rayleigh.

numa posição, coincide com o mínimo de difração do elétron numa outra posição. Nessa condição, o ângulo de difração α_0 é pequeno e portanto

$$1,22 \frac{\lambda}{a} = \text{sen} \alpha_0 \approx \text{tg} \alpha_0 = \frac{\Delta x}{y}$$

ou

$$\Delta x = 1,22 \frac{\lambda}{a} y.$$

Por outro lado,

$$\text{tg} \theta = \frac{a/2}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{2 \text{tg} \theta} = \frac{a \cos \theta}{2 \text{sen} \theta},$$

de modo que

$$\Delta x = 1,22 \frac{\lambda}{2 \text{sen} \theta} \cos \theta. \quad (4.43)$$

Multiplicando a eq. (4.42) pela eq. (4.43), obtém-se

$$\Delta p_x \Delta x = (1,22 \cos \theta) h, \quad (4.44)$$

que concorda, razoavelmente, com o limite $\hbar/2$ fixado pelo princípio da incerteza de Heisenberg.

Quando se tenta usar luz de comprimentos de onda λ pequeno (Raios X ou γ), para melhorar a resolução, reduzindo Δx na eq. (4.43), aumenta-se o recuo Compton do elétron e, conseqüentemente, Δp_x na eq. (4.42). Na prática, uma experiência daria resultados piores do que aquele mostrado na eq. (4.44), pois trata-se da melhor situação possível.

O princípio da incerteza de Heisenberg ajuda a entender o aspecto complementar não contraditório, atribuído à dualidade onda-partícula por Niels Bohr. Seja por exemplo a experiência da dupla fenda de Young realizada com um feixe de elétrons e um anteparo apropriado. Suponha que a intensidade de elétrons sobre as fendas seja de 1 elétron/hora. Cada elétron pode passar por qual quer uma das duas fendas. Sabe-se que a baixa intensidade de partículas não deve afetar a figura clássica de interferência.

Podem-se incorporar ao experimento um microscópio de Bohr para observar por qual das duas fendas cada elétron irá passar. Com essa informação, seria possível fechar a fenda por onde o elétron não passaria. Espera-se que a figura de interferência não seja afetado por esse procedimento. Entretanto, sabe-se que uma única fenda aberta não pode gerar uma figura de interferência clássica.

É o princípio da incerteza de Heisenberg que inviabiliza a experiência acima. A simples presença do microscópio, promove uma incerteza na componente vertical do momento do elétron, suficiente para destruir a figura de interferência clássica sobre o anteparo.

Assim, é possível observar o comportamento corpuscular, ou ondulatório, de uma partícula, mas o princípio da incerteza de Heisenberg impede que se faça isso simultaneamente. A onda e a matéria são como "moedas", pois mostram somente uma das faces, nunca ambas simultaneamente. Essa é a essência do princípio da complementaridade de Bohr.

Deve-se concluir que quando o microscópio não está presente, o elétron se comporta como uma onda clássica e não é possível saber por qual das fendas o elétron vai passar. A única informação possível está relacionada à probabilidade do elétron passar por uma ou outra fenda.

Exemplo 4.5 - Exemplo do Eisberg.

Verificou-se que a velocidade de um projétil de massa $m = 0,05 \text{ kg}$ e a velocidade de um elétron de massa $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, são iguais a 300 m/s com uma incerteza de $0,01\%$. Com que precisão fundamental poderia-se localizar cada uma dessas partículas em uma medida simultânea com a velocidade?

Para o elétron, tem-se

$$p = mv = 9,1 \times 10^{-31} \times 300 = 2,7 \times 10^{-28} \text{ kg.m/s}$$

e

$$\Delta p = 0,0001 \times 2,7 \times 10^{-28} = 2,7 \times 10^{-32} \text{ kg.m/s}$$

Assim, do princípio da incerteza,

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1,055 \times 10^{-34}}{2 \times 2,7 \times 10^{-32}} = 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,2 \text{ cm} .$$

$\approx 10^7$ diâm. atômicos

Para o projétil, tem-se

$$p = mv = 0,05 \times 300 = 15 \text{ kg.m/s}$$

e

$$\Delta p = 0,0001 \times 15 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ kg.m/s},$$

Assim, do princípio da incerteza,

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{1,055 \times 10^{-34}}{2 \times 1,5 \times 10^{-3}} = 3,5 \times 10^{-32} \text{ m} .$$

$\approx \frac{1}{10^{22}}$ diâm. atômicos

Portanto, para partículas macroscópicas, o princípio da incerteza não impõe nenhum limite prático ao processo de medida. Neste exemplo, Δx é cerca de 10^{22} vezes menor que o diâmetro do átomo. Por outro lado, para objetos microscópicos, tais como elétrons, limites práticos são evidentes. Neste exemplo, Δx é cerca de 10^7 vezes maior que o diâmetro do átomo.

Exemplo 4.6 - Eisberg - FACULTATIVO

A energia de um oscilador harmônico linear é

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 .$$

Admitindo que a incerteza $\Delta E \equiv E$ na energia seja dada por

$$\Delta E \equiv E = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{1}{2} k \Delta x^2 ,$$

(a) mostrar que $E = \frac{\hbar^2}{8m\xi^2} + \frac{1}{2} k \xi^2$, onde $\xi = \Delta x$. (b) Mostrar então que a energia mínima é dada por

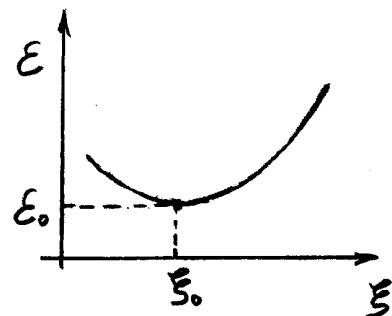
$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega , \quad (4.45)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

(a) Do princípio da incerteza, $\Delta p = \hbar/2\Delta x$. Logo,

$$E = \frac{\hbar^2}{8m\xi^2} + \frac{1}{2} k \xi^2 ,$$

onde $\Delta x \equiv \xi$. A Figura ao lado mostra um gráfico da energia E em função da incerteza ξ . A presença de um ponto de mínimo é evidente.



(b) A incerteza mínima ξ_0 pode ser determinada como

$$\frac{dE}{d\xi} = -\frac{\hbar^2}{4m\xi_0^3} + k\xi_0 = 0$$

ou

$$\xi_0^2 = \sqrt{\hbar^2/4mk}$$

e portanto

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\hbar^2}{8m} \sqrt{\frac{4mk}{\hbar^2}} + \frac{1}{2} k \sqrt{\frac{\hbar^2}{4mk}} = \frac{\hbar^2}{4\hbar} \sqrt{\frac{4mk}{4m^2}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k^2}{mk}} \\ &= \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0, \end{aligned}$$

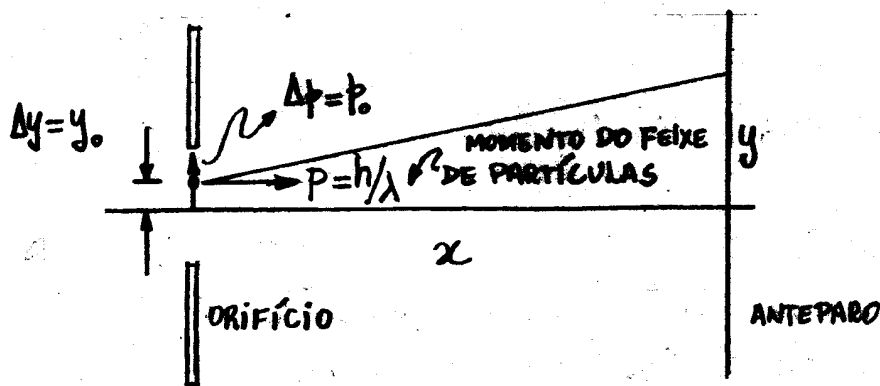
onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

A Física clássica prevê uma energia mínima igual a zero para o caso trivial de um oscilador na origem, onde $p=0$ e $x=0$. Essa configuração simples viola o princípio da incerteza, pois o oscilador deve ter algum movimento mínimo devido a incerteza em x e p .

Exemplo 4.7

Considere a imagem sobre um anteparo, produzida por um feixe de partículas, projetado através de uma abertura circular. O raio da imagem circular aumenta com o raio da abertura e, por causa da difração, também aumenta quando o raio da abertura diminui. Então, deve existir um raio limite R_e para a abertura que produz um raio mínimo R_{min} para a imagem. Usar o princípio da incerteza para calcular o raio limite R_e da abertura circular e o raio mínimo R_{min} da imagem correspondente.

Suponha que uma partícula passe através do orifício numa posição de incerteza vertical $\Delta y = y_0$, em relação ao eixo central do orifício, como mostrado na Figura abaixo.



De acordo com o princípio da incerteza, a componente vertical do momento da partícula tem incerteza

$$p_0 = \frac{h}{2y_0} .$$

Essa incerteza pode ser usada como uma condição inicial para o movimento subsequente da partícula. O deslocamento vertical da partícula no anteparo é

$$y = y_0 + v_{y_0} t = y_0 + \frac{p_0}{m} t = y_0 + \frac{\hbar}{2m y_0} t,$$

onde t é o tempo que a partícula leva para atingir o anteparo. A distância x ao anteparo pode ser calculada em termos do momento $P = h/\lambda$ do feixe de partículas, como $x = v_x t = P/m t$ ou $t = mx/P$, de modo que

$$y = y_0 + \frac{\hbar}{2m y_0} \frac{mx}{P} = y_0 + \frac{\hbar x}{2P} \frac{1}{y_0}.$$

Essa expressão tem um mínimo para um determinado valor de y_0 , obtido da condição

$$\frac{dy}{dy_0} = 1 - \frac{\hbar x}{2P y_0^2} = 0 \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{\hbar x}{2P}}$$

e portanto

$$y_{\min} = y_0 + \frac{y_0^2}{y_0} = 2y_0. \quad (4.46)$$

Conclui-se que a imagem circular projetada no anteparo terá um raio mínimo $R_{\min} = y_{\min} = 2y_0$ quando o orifício circular tiver um raio limite $R_e = y_0$, onde

$$y_0 = \sqrt{\frac{\hbar x}{2\pi} / \frac{2\hbar}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\hbar x}{2\pi} \frac{\lambda}{2\hbar}} = \sqrt{\frac{\lambda x}{4\pi}}, \quad (4.47)$$

pois $P = h/\lambda$ e $\hbar = h/2\pi$.

Lista de Exercícios

Questões conceituais

- 1- Por que a natureza ondulatória da matéria não é evidente em nossas observações diárias? O comportamento ondulatório de uma partícula clássica pode ser obtido assumindo-se $m \rightarrow \infty$ na fórmula de de Broglie? Explique.
- 2- O comprimento de onda de de Broglie pode ser menor que a dimensão da partícula? Pode ser maior? É necessário que haja alguma relação entre essas grandezas?
- 3- A difração de elétrons pode ser utilizada para se estudar a estrutura de sólidos cristalinos? Explique.
- 4- Discuta a analogia: A óptica ondulatória é para a óptica geométrica assim como a mecânica quântica é para a mecânica clássica.
- 5- Afinal de conta o que é um elétron, uma partícula ou uma onda? Explique.
- 6- Discuta semelhanças e diferenças entre uma onda de matéria e uma onda eletromagnética.
- 7- Referindo-se ao princípio da incerteza de Heisenberg, dê exemplo de algum caso em que o processo de medida perturba o sistema que está sendo medido.
- 8- Dê uma justificativa à partir do princípio da incerteza de Heisenberg ($\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$) que a energia de um oscilador harmônico não pode ser nula. (*Sugestão: Será que o período de um oscilador pode ser infinito? Pense nisso*).

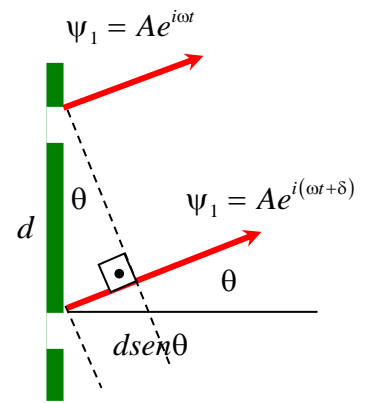
Problemas

- 1- Um projétil de massa $m = 40g$ move-se a uma velocidade $v = 1000m/s$. (a) Qual é o comprimento de onda de de Broglie que se pode associar a ele? (b) Por que sua natureza ondulatória não se revela por meio de efeitos de difração?
- 2- O comprimento de onda da emissão espectral amarela do sódio é $\lambda = 5890\text{Å}$. Com que energia cinética um elétron teria o mesmo comprimento de onda de de Broglie?
- 3- Um elétron e um fóton têm ambos um comprimento de onda $\lambda = 2,0\text{Å}$. Quais são (a) seus momentos? (b) suas energias totais? (c) Compare as energias cinéticas do elétron e do fóton.
- 4- Um nêutron térmico tem uma energia cinética $(3/2)kT$, onde $T = 300K$ é a temperatura ambiente. Estes nêutrons estão em equilíbrio térmico com o ambiente. (a) Qual é a energia em elétrons - volt de um nêutron térmico? (b) Qual é o comprimento de onda de de Broglie?
- 5- Um feixe de nêutrons de $1eV$ atinge um cristal cujos planos cristalinos estão separados por $d = 0,025nm$. Determine o ângulo de fase φ para o qual o primeiro máximo de interferência é observado.
- 6- O espaçamento planar em um cristal de cloreto de potássio é $d = 3,14\text{Å}$. Compare o ângulo de reflexão de Bragg de primeira ordem, por esses planos, de elétrons com energia cinética $40keV$ com o de fótons com energia $40keV$.

7- Considere a interferência de duas ondas ψ_1 e ψ_2 , emitidas de duas fendas estreitas e paralelas de distância d , como mostra a figura ao lado. As ondas têm a mesma amplitude A , mesma frequência ω e diferença de fase δ . Construa a superposição $\psi_1 + \psi_2$ usando a notação complexa para a função de onda e mostre que a dependência do padrão de interferência resultante com o ângulo θ é, $I = 4|A|^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2} \text{sen}\theta\right)$. (Sugestão: mostre primeiramente que,

$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A[e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2}]e^{i(\omega t + \delta/2)}$, em seguida escreva as exponenciais complexas entre colchetes na forma trigonométrica. Escreva a distribuição de intensidades do padrão de interferência $I = |\psi|^2$, e observe que

a diferença de fase entre as duas ondas pode ser escrita na forma $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{sen}\theta = kd \text{sen}\theta$.



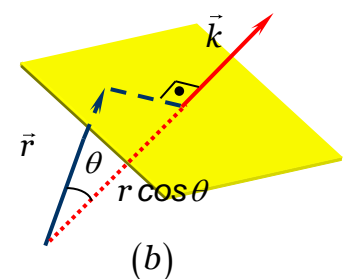
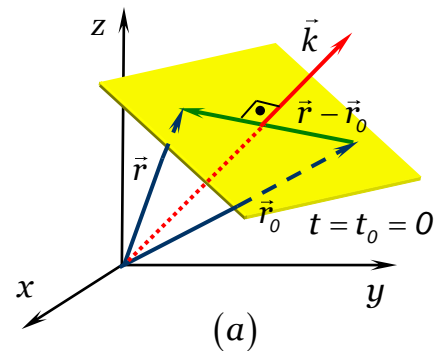
8- Na representação complexa da onda plana no espaço $\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, o vetor de propagação, ou número de ondas, $\vec{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{k}$ é definido para ter mesma direção e sentido da propagação da onda, como mostra a Fig. (a). Para evitar complicações desnecessárias, nessa Figura foi escolhido um plano particular em $t = t_0 = 0$, no qual está contido um vetor $\vec{r} - \vec{r}_0$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$. (a) Mostre que a condição de que o vetor \vec{k} seja perpendicular ao vetor $\vec{r} - \vec{r}_0$ resulta em:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante}$$

que é a equação do plano, uma vez que este é o lugar geométrico de pontos do espaço com mesma projeção do vetor \vec{r} sobre o vetor \vec{k} , como mostrado na Figura (b). (b) Usando a propriedade de periodicidade da onda plana oscilante

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \lambda\hat{k})$$

para cada comprimento de onda λ , onde $\hat{k} = \vec{k}/k$ é o vetor unitário na direção do vetor \vec{k} , mostre que o módulo do vetor de propagação é $k = 2\pi/\lambda$. (Sugestão: Escreva a identidade $\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \lambda\hat{k})$ para $\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}, 0) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ e lembre-se que $1 = e^{i2\pi}$).



9- Qual seria a voltagem aceleradora necessária dos elétrons em um microscópio eletrônico para que se tenha a mesma resolução máxima que pode ser obtida em um "microscópio de raios γ " usando raios γ de $0,2 \text{ MeV}$?

10- A resolução máxima atingida por um microscópio é limitada apenas pelo comprimento de onda λ utilizado, isto é, o menor detalhe que se pode distinguir é aproximadamente igual ao comprimento de onda. Suponhamos que se queira ver o interior de um átomo, com detalhes da ordem de $0,1 \text{ \AA}$. (a) Se usarmos um microscópio eletrônico, qual seria a energia mínima necessária para os elétrons? (b) Se usarmos um microscópio óptico, qual seria a energia mínima para os fótons? Em que região do espectro eletromagnético esses fótons são encontrados? (c) Qual dos microscópios seria mais prático para esse objetivo? Explique.

11- Mostre que para uma partícula livre pode-se escrever a relação de incerteza também na forma $\Delta\lambda\Delta x \geq \lambda^2/4\pi$, onde Δx é a incerteza na posição da onda e $\Delta\lambda$ é a incerteza simultânea no comprimento de onda. (Sugestão: assuma que a incerteza no comprimento de onda $\Delta\lambda$ é da ordem de grandeza do próprio comprimento de onda λ).

12- Mostre que se a incerteza na posição de uma partícula for aproximadamente igual a seu comprimento de onda de de Broglie, então a incerteza em sua velocidade é aproximadamente igual a sua velocidade.

13- Um microscópio óptico é utilizado para localizar um elétron em um átomo em uma região de dimensão linear de $0,2A^{\circ}$. Qual é a incerteza na velocidade de um elétron localizado dessa forma?

14- Uma partícula de massa m está confinada em uma região unidimensional de comprimento a . Use o princípio da incerteza para obter uma expressão para a energia mínima da partícula. Calcule o valor dessa energia para uma gota de massa $m = 1g$ mantida sobre um fio de comprimento $a = 10cm$, e para um elétron em uma região de comprimento $a = 0,1nm$.

15- (a) Considere um elétron em algum ponto dentro de um átomo de diâmetro $1A^{\circ}$. Qual é a incerteza no momento do elétron? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de elétrons em átomos? Pense em termos de energias das transições atômicas pertencente a região visível do espectro eletromagnético. (b) Imagine que um elétron esteja em algum ponto no interior de um núcleo de $10^{-12}cm$. Qual é a incerteza no momento do elétron? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de partículas constituintes do núcleo? Pense em termos de energias das transições nucleares pertencente à região dos raios X e γ do espectro eletromagnético. (c) Considere um nêutron, ou um próton, no interior desse núcleo atômico. Qual é a incerteza no momento do nêutron, ou do próton? Esse resultado é consistente com a energia de ligação de partículas constituintes do núcleo?

16- A vida média de um estado excitado de um núcleo é normalmente de cerca de $10^{-12}s$. Qual é a incerteza na energia do fóton de raio γ emitido?

17- um garoto no alto de uma escada de altura H está jogando bolas de gude de massa m em uma abertura existente no solo, como mostra a Figura ao lado. Para atingi-la, ele utiliza a maior precisão possível. (a) Use a cinemática de lançamento de projéteis e o princípio da incerteza para mostrar que as bolas de gude deixarão de atingir a abertura por uma distância horizontal da ordem de

$$\Delta x \approx \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{H}{g}\right)^{1/4}, \text{ onde } g \text{ é a aceleração da gravidade. (b)}$$

Utilizando valores razoáveis de H e m , calcule esta distância.

