

NOTAS DE AULAS DE FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 3

MODELOS ATÔMICOS E A VELHA TEORIA QUÂNTICA

Edição de junho de 2014

CAPÍTULO 3 – MODELOS ATÔMICOS E A VELHA TEORIA QUÂNTICA

ÍNDICE

- 3.1- Primórdios da Teoria Atômica
- 3.2- Modelo Atômico de Dalton
- 3.3- Modelo Atômico de Thomson
- 3.4- Modelo Atômico de Rutherford
 - 3.4.1- Trajetória da Partícula α Espalhada
 - 3.4.2- Cálculo Estatístico do Espalhamento de Partículas α
 - 3.4.3- Cálculo da Seção de Choque de Espalhamento - FACULTATIVO
- 3.5- Espectro Atômico
- 3.6- Modelo Atômico de Bohr
- 3.7- Experimento de Franck e Hertz
- 3.8- Integral de Ação e Regras da Quantização
- 3.9- Modelo Atômico de Sommerfeld

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **4 aulas de quatro créditos**.

CAPÍTULO 3

MODELOS ATÔMICOS E A VELHA TEORIA QUÂNTICA.

3.1. Primórdios da Teoria Atômica.

Em 400 a.c. Demócrito de Abdera propôs que a matéria ou "ente" fosse formada por partículas indivisíveis, que em grego significa "átomos", e que o vácuo fosse um "não ente". Para Demócrito, a matéria seria então discreta e composta por combinações de átomos dos quatro elementos (ar, terra, fogo e água). O atomismo grego de Demócrito é a evidência histórica mais antiga sobre a origem da teoria quântica.

Aristóteles, ao contrário de Demócrito, postulou o modelo da matéria contínua, onde a matéria não seria constituída por partículas indivisíveis. Apesar da elegância da teoria atômica de Demócrito, o modelo da matéria contínua de Aristóteles foi adotado pelos filósofos e pensadores até o final do século XVI d.c.

3.2. Modelo atômico de Dalton

Durante o início do século XIX, o químico e físico Inglês John Dalton propôs o primeiro modelo atômico da era moderna. Mais precisamente, em 1803 Dalton publicou um trabalho intitulado "Absorption of Gases by Water and other liquids", onde enunciava a lei das pressões parciais, ou lei de Dalton, e reintroduzia o conceito de átomos como partículas indivisíveis.

Em 1808, Dalton propôs o modelo atômico onde o átomo seria uma minúscula esfera maciça, contínua, indivisível e neutra, que ficou conhecido como modelo da bola de bilhar. Para Dalton, todos os átomos de um mesmo elemento químico são idênticos. Em 1810 foram publicadas testes de comprovação da lei das pressões parciais de Dalton.

Apesar da simplicidade, foi o modelo atômico de Dalton que inspirou os cientistas a considerar novamente o átomo como uma possível estrutura elementar da natureza.

3.3 - Modelo Atômico de Thomson.

Mesmo antes da estrutura atômica ter sido confirmada por experiências, suspeitava-se que os átomos tinham uma estrutura interna formada por partículas carregadas. Várias foram as evidências, observadas antes de 1900, que levaram a esta convicção:

1. Experiência de Faraday sobre eletrólise, que detectava a presença de partículas carregadas, ou íons, em soluções.
2. Emissão de radiação pela matéria, indicando a existência de alguns tipos de oscilações de cargas no interior de sistemas atômicos.
3. Fenômenos radioativos, que demonstravam a habilidade de alguns elementos emitirem partículas carregadas.

O elétron é a partícula carregada mais importante na formação da estrutura da matéria. Essa partícula foi identificada em 1897 por Joseph John Thomson por meio de medições precisas da razão entre a carga e a massa e/m . Thomson identificou o elétron observando feixes de partículas carregadas, submetidos a campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , num tubo de raios catódicos, como mostrado na Fig. 3.1(a).

Elétrons, gerados por um filamento aquecido, são acelerados a partir de um cátodo, por uma determinada diferença de potencial V .

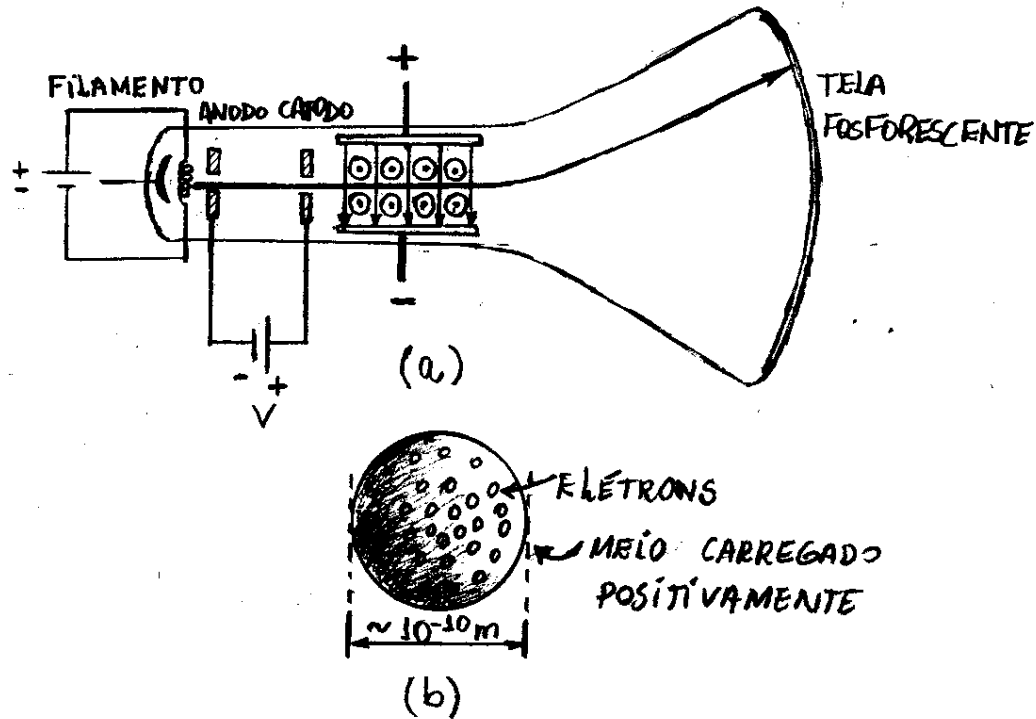


Fig. 3.1. (a) Experimento de Thomson e, (b) modelo atômico do "pudim de ameixas" de Thomson.

A carga negativa do elétron foi identificada observando a deflexão do feixe quando submetido aos campos elétrico e magnético transversais. Thomson determinou a razão e/m atuando no valor do campo elétrico aplicado, até que as forças elétrica e magnética fossem iguais. Essa condição é alcançada quando a deflexão do feixe deixa de ser observada numa tela fosforescente.

Nas condições de equilíbrio, os átomos são neutros e, nesse caso, o número de cargas negativas é igual ao número de cargas positivas. Como a massa do elétron é muito menor do que a massa do átomo, praticamente toda a massa do átomo, deveria estar associada a massa das cargas positivas.

Com essas considerações, Thomson propôs o seu modelo atômico, segundo o qual os elétrons estariam localizados no interior de uma distribuição contínua de carga positiva. Para ele, a forma da distribuição da carga positiva deveria ser esférica, de diâmetro da ordem de 10^{-10} metros, obtido a partir da densidade de um sólido e do número de Avogadro. Por causa de repulsões mútuas, os elétrons estariam uniformemente distribuídos na esfera de carga positiva como na Fig. 3.1 (b), numa configuração conhecida como "pudding de ameixas".

Thomson esperava que as frequências observadas da luz poderia ser explicada a partir dos movimentos periódicos dos elétrons no interior da esfera carregada positivamente. Entretanto, esta concepção não estaria correta como ficaria demonstrado em experiências posteriores.

Em 1911, Ernest Rutherford, ex-aluno de Thomson, demonstrou definitivamente a inviabilidade do modelo atômico de Thomson. Rutherford já tinha ganhado o prêmio Nobel de Química em 1908 pela investigação do decaimento de substâncias radioativas. Entretanto, seu maior desejo

Como um físico, era dar uma contribuição relevante para a física.

Rutherford sabia que as partículas α eram átomos de Hélio duplamente ionizados, isto é, átomos de He com dois elétrons retirados. Rutherford estudou o espalhamento de partículas α por películas metálicas delgadas usando a montagem experimental mostrada na Fig. 3.2(a).

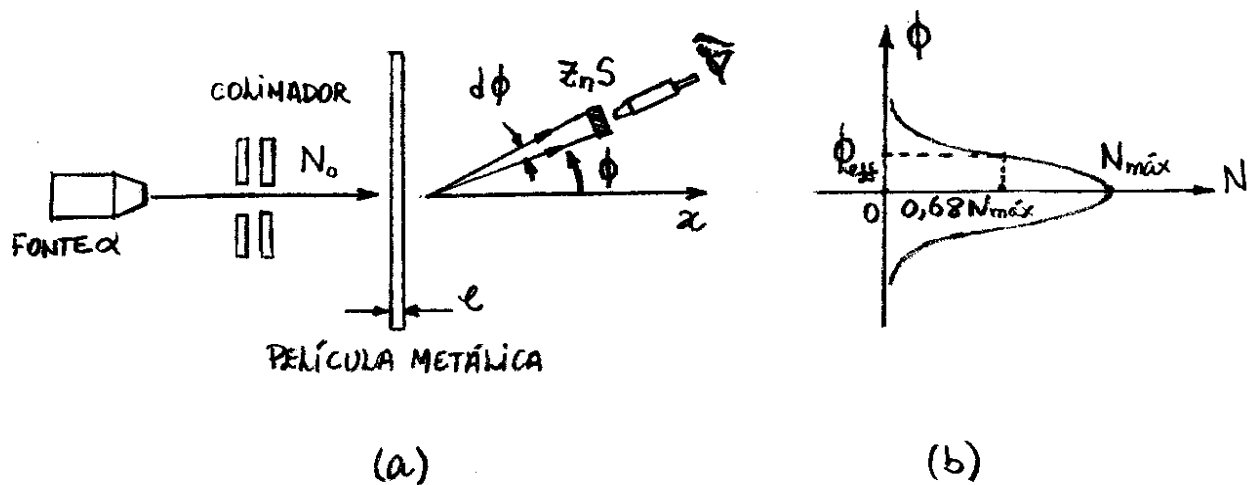


Fig. 3.2- (a) Montagem experimental de Rutherford para estudar o espalhamento de partículas α por películas metálicas delgadas. (b) Contagem do número N de partículas α , por unidade de tempo, espalhadas em função do ângulo de espalhamento ϕ .

As partículas α são emitidas por uma fonte radioativa e colimadas por um par de diafragmas de chumbo. Com esse procedimento, forma-se um feixe com N_0 partículas α por unidade de tempo que, ao atingir perpendicularmente a superfície metálica delgada, passa através dela sem grandes dificuldades.

Por causa de forças Coulombianas, as partículas α sofrem diversas deflexões no interior da película e emergem como um feixe divergente. As partículas α emergentes são detectadas por um cristal de sulfeto de zinco (ZnS), que tem a propriedade de produzir cintilações quando atingido por essas partículas. Utilizando um microscópio, conta-se o número N de cintilações, ou partículas α , por unidade de tempo, para vários ângulos de espalhamento ϕ .

O modelo atômico de Thomson pode ser avaliado teoricamente por meio de uma formulação estatística do espalhamento de partículas α em átomos de Thomson. Pode-se supor o espalhamento de uma partícula α de um ângulo θ , por um único átomo de Thomson, como mostra a Fig. 3.3.

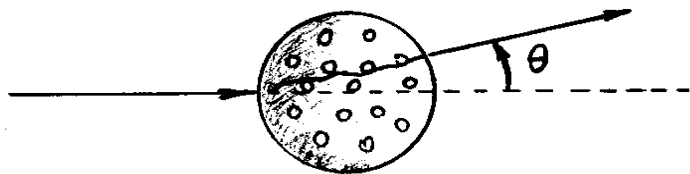


Fig. 3.3 - Espalhamento de uma partícula α por um átomo de Thomson.

Ao longo de toda a espessura l da película metálica, o ângulo de espalhamento ϕ pode variar de zero a 180° . Utilizando a teoria estatística, conhecida como "Caminhada aleatória" ("random walk"), é possível fazer previsões sobre a distribuição dos ângulos de espalhamento ϕ de partículas α , em uma

película metálica formada por átomos de Thomson. De acordo com essa teoria, o número de partículas α , por unidade de tempo, espalhadas no intervalo angular entre ϕ e $\phi + d\phi$, é

$$N(\phi)d\phi = \frac{2N_0}{\phi_{\text{eff}}^2} \phi e^{-\phi^2/\phi_{\text{eff}}^2} d\phi \quad (3.1)$$

onde

$$\phi_{\text{eff}} = \sqrt{n} \theta_{\text{eff}}.$$

Nessa última equação, n é o número total de átomos espalhadores e $\phi_{\text{eff}} = \sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$ é o valor efetivo do ângulo de espalhamento ϕ , correspondente a $N \approx 0,68 N_{\text{máx}}$, onde $N_{\text{máx}}$ é o valor máximo de N e $\langle \phi^2 \rangle$ é o valor médio de ϕ^2 . Ainda na mesma equação, em analogia a ϕ_{eff} , define-se $\theta_{\text{eff}} = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ como o valor efetivo do ângulo de espalhamento θ por um único átomo espalhador. A Fig. 3.2(b) mostra o comportamento de N em função de ϕ de acordo com a eq. (3.1).

Valores de ângulos de espalhamento θ podem ser calculados hipoteticamente incidindo partículas α , uma a uma, em um átomo de Thomson. De posse de um conjunto grande desses valores, é possível determinar o valor máximo $\theta_{\text{máx}}$ e o valor efetivo $\theta_{\text{eff}} = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$. Sabe-se que a massa da partícula α é muito maior do que a massa do elétron e que a sua repulsão coulombiana na distribuição contínua de cargas positivas do átomo de Thomson, deve ser pequena por causa da pequena dimensão atômica ($\sim 10^{-10}$ m).

Usando como base essas hipóteses, o exemplo 3.1 mostra que o valor efetivo θ_{eff} do ângulo de espalhamento por um único átomo de Thomson não pode ser maior do que 10^{-4}rd , isto é,

$$\theta_{\text{eff}} \leq 10^{-4} \text{rd}.$$

Supondo uma película metálica de espessura $l = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{m}$, é possível calcular o número n de átomos espalhadores dividindo-se o valor dessa espessura pelo valor aproximado de 10^{-10}m para o diâmetro atômico, isto é,

$$n = \frac{10^{-6} \text{m}}{10^{-10} \text{m}} = 10^4 \text{ átomos}.$$

Nesse caso, o valor efetivo ϕ_{eff} para o ângulo de espalhamento ϕ na película metálica será

$$\phi_{\text{eff}} = \sqrt{n} \theta_{\text{eff}} = 10^2 \text{rd} \approx 1^\circ$$

Assim, de acordo com o modelo atômico de Thomson, é possível mostrar, a partir da eq. (3.1) com $\phi_{\text{eff}} \approx 1^\circ$, que o número de partículas α espalhadas por ângulos ϕ maiores do que 90° é

$$N(\phi > 90^\circ) = \int_{90^\circ}^{180^\circ} N(\phi) d\phi = N_0 e^{-8100} \approx 0.$$

Com o objetivo de comprovar os resultados teóricos obtidos com o modelo atômico de Thomson, Rutherford realizou uma série de experimentos de espalhamento de partículas α utilizando uma película de ouro de espessura $l = 1 \mu\text{m}$.

Os experimentos de Rutherford consistiam na contagem do número N de partículas α , por unidade de tempo, para vários ângulos de espalhamento ϕ . De posse de um grande número de medidas, Rutherford concluiu que, de fato, $\phi_{\text{eff}} \approx 1^\circ$. Mas, por outro lado, concluiu que o número de partículas α espalhadas em ângulos ϕ maiores do que 90° é

$$N(\phi > 90^\circ) \approx 10^{-4} N_0$$

o que está em total desacordo com a previsão teórica, próxima de zero, obtida do modelo atômico de Thomson.

A probabilidade pequena, porém não nula, para o espalhamento de partículas α em grandes ângulos, não poderia ser aplicada em termos do modelo atômico de Thomson. Rutherford observou que algumas partículas α eram espalhadas por ângulos muito grandes, até 180° . Para Rutherford, isso era tão incrível como atirar uma pedra contra um papel de seda e a pedra retornar na direção do atirador.

Exemplo 3.1 - FACULTATIVO.

Mostrar que o ângulo de espalhamento máximo θ_{\max} , num átomo de Thomson não deve ser maior do que 10^{-4} rad.

Para fazer esta estimativa é suficiente utilizar teoria clássica pois, para as partículas α , $v/c \approx 0,05$. Supõe-se que a deflexão seja devida às forças Coulombianas entre a partícula α e as cargas das várias partes do átomo. De acordo com a lei de Coulomb, a força devido a uma região do átomo de carga dq cuja distância à partícula α é r será

$$d\vec{F} = K \frac{ze dq}{r^2} \hat{r} \quad (3.2)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário que está na direção da reta determinada pelas posições da carga dq e da partícula α , ze é a carga da partícula α e $K = 9,0 \times 10^9 \text{ Nxm}^2/\text{C}^2$ é a constante eletrostática do vácuo.

Inicialmente seja calcular a deflexão máxima esperada aos elétrons do átomo. Usando as leis de conservação do momento e da energia, não é difícil mostrar que, na colisão de um corpo massivo, movendo inicialmente com velocidade \vec{v} , com um corpo em repouso de massa muito pequena, a velocidade do corpo leve não pode ser maior do que $2\vec{v}$. Como a massa m do elétron é

muito menor do que a massa M da partícula α , então o momento máximo que pode ser transferido ao elétron é $\vec{p} = m\vec{v}$. Esse momento tem que ser igual em módulo ao momento $\Delta\vec{p}_\alpha$ perdido pela partícula α durante a colisão, isto é,

$$\Delta\vec{p}_\alpha = 2m\vec{v}.$$

Para calcular a ordem de grandeza do ângulo de espalhamento máximo $\theta_{\text{máx}}$, pode-se supor que a variação de momento $\Delta\vec{p}_\alpha$ seja perpendicular ao momento inicial \vec{p}_α da partícula α , como mostra a Fig. 3.4.

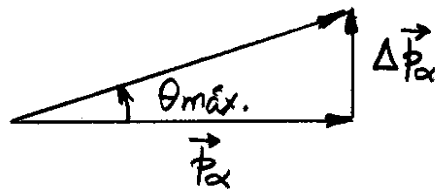


Fig. 3.4 - Ilustração do ângulo de espalhamento máximo $\theta_{\text{máx}}$ quando uma partícula α de momento \vec{p}_α perde o momento $\Delta\vec{p}_\alpha$.

Como a partícula α é formada por 2 prótons e 2 nêutrons e que cada uma dessas partículas tem massa $1836m$, a Fig. 3.4 mostra que

$$\theta_{\text{máx}} \sim \text{tg} \theta_{\text{máx}} = \frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{2m\vec{v}}{M\vec{v}} = \frac{2m\vec{v}}{4(1836)m\vec{v}} = 10^{-4} \text{rd.}$$

Como não se deve esperar muitas colisões da partícula α com elétrons do átomo de Thomson, o valor máximo do ângulo total de deflexão pelas colisões também deve ser da ordem de 10^{-4} rd.

Para calcular a deflexão máxima esperada devida às forças exercidas pelas cargas positivas do átomo, deve-se integrar a eq. (3.2) sobre a distribuição de carga positiva, isto é,

$$F_{\text{máx}} \sim 2eK \int \frac{dq}{r^2}$$

onde r é a distância da posição da partícula α a um elemento de volume contendo a carga dq em um determinado instante de tempo t . A ordem de grandeza da integral pode ser calculada assumindo a média $\langle 1/r^2 \rangle$ de $1/r^2$ sobre uma região do espaço de dimensões atômicas, isto é,

$$F_{\text{máx}} \sim 2Ke \langle 1/r^2 \rangle \int dq = 2Keq \langle 1/r^2 \rangle .$$

Como $q = Ze$ é a carga positiva total do átomo e $\langle 1/r^2 \rangle \sim 1/R^2$, onde R é o raio do átomo, então

$$F_{\text{máx}} \sim 2KZe^2/R^2 .$$

Se a força $F_{\text{máx}}$ atua na partícula α durante o intervalo de tempo Δt de travessia do átomo, então o impulso correspondente, $I = F_{\text{máx}} \Delta t$, deve ser igual à variação de momento Δp_{α} da partícula α , isto é,

$$\Delta p_{\alpha} \sim F_{\text{máx}} \Delta t \sim \frac{2KZe^2}{R^2} \Delta t .$$

Como o intervalo de tempo Δt é aproximadamente igual a R/v , onde v é a velocidade da partícula α , então

$$\Delta p_{\alpha} \sim 2KZe^2/Rv .$$

Finalmente, como no caso anterior, encontra-se

$$\theta_{\max} \sim \frac{\Delta p_x}{p_x} \sim \frac{2KZ e^2}{RMv^2}$$

Supondo um átomo que contém uma carga positiva elevada ($Z=100$) e substituindo as constantes e grandezas conhecidas, $K \approx 9,0 \times 10^9$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $R \approx 10^{-10} \text{ m}$, $M \approx 8,0 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $v = 2,0 \times 10^7 \text{ m/s}$, obtém-se novamente $\theta_{\max} \sim 10^{-4} \text{ rd}$. Vê-se, portanto, que a carga positiva pode produzir também deflexões pequenas. Isso ocorre porque, sendo a carga $+Ze$ uniformemente distribuída sobre o átomo de Thomson de raio $R \approx 10^{-10} \text{ m}$, a partícula α de alta velocidade nunca se aproxima de uma quantidade de carga suficiente para que a força Coulombiana tenha intensidade necessária para produzir grandes deflexões.

Exemplo 3.2

Considere um elétron de carga $-e$ no interior de uma região esférica de raio R e densidade de carga positiva ρ , como no modelo atômico de Thomson. (a) Mostre que o movimento do elétron pode ser representado por um movimento harmônico simples. (b) Considere a carga positiva distribuída uniformemente sobre uma esfera de raio $R = 1,0 \times 10^{-10} \text{ m}$, e suponha que a carga positiva total seja igual, em módulo, à carga de um elétron, tal que a carga total do átomo seja nula. Calcule a constante elástica k e a frequência ν do movimento do elétron.

(a) Se o elétron está a uma distância r do centro do átomo, com $r < R$, a força que atua no elétron será $F = eE$, onde E é o campo elétrico que atua na posição esférica de raio r . De acordo com a lei de Gauss, $E = (1/4\pi\epsilon_0) q/r^2$ e, portanto,

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qe}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) \frac{e}{r^2} = -\frac{\rho e}{3\epsilon_0} r$$

Assim, pode-se escrever $F = -kr$, onde

$$k = \frac{\rho e}{3\epsilon_0}$$

é a constante elástica, isto é, o elétron executa um movimento harmônico simples.

(b) Nesse caso particular, $\rho = e/(4/3)\pi R^3$, de modo que

$$k = \frac{\rho e}{3\epsilon_0} = \frac{e}{4/3\pi R^3} \frac{e}{3\epsilon_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

ou,

$$k = 9,0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(1,0 \times 10^{-10} \text{ m})^3} = 230 \text{ N/m}$$

A frequência do movimento harmônico simples, será

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{230 \text{ N/m}}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

A radiação emitida pelo átomo é equivalente a radiação emitida por elétrons que oscilam numa antena. O comprimento de onda correspondente é

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}}{2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}} = 120 \text{ nm}.$$

que está na região do ultravioleta longínquo do espectro eletromagnético. Pode-se mostrar também que um elétron que se move em uma órbita circular estável no interior do átomo de Thomson, gira com essa mesma frequência e, portanto, também irradia com essa mesma frequência.

3.4. Modelo Atômico de Rutherford

Baseado no fato que algumas partículas α poderiam ser espalhadas por ângulos maiores do que 90° , em 1911 Ernest Rutherford propôs um novo modelo atômico. Nesse modelo, toda a carga positiva do átomo e, portanto, praticamente toda a sua massa, estaria concentrada numa pequena região denominada de núcleo do átomo.

Se a partícula α passasse suficientemente próximo ao núcleo, devido a uma forte repulsão Coulombiana, poderia ser espalhada por um ângulo grande, mesmo que atravessasse um único átomo.

Rutherford utilizou o seu modelo atômico para calcular a distribuição angular esperada no espalhamento de partículas α para o caso de ângulos grandes. Nesse caso, o espalhamento poderia ser atribuído somente à força Coulombiana repulsiva com o núcleo atômico. Além disso, os cálculos de Rutherford considerava somente espalhamentos por átomos parados, de modo que, o núcleo não recuasse e nem fosse penetrado durante o espalhamento.

3.4.1. Trajetória da partícula α Espalhada

A Fig. 3.5(a) mostra o espalhamento de uma partícula de carga $+ze$ e massa M ao passar próximo a um núcleo de carga $+Ze$, onde z e Z são os números de cargas positivas em cada partícula. O núcleo está fixo na origem de um sistema de coordenadas polares (r, φ) .

As velocidades antes e depois do espalhamento são especificadas por v e v' , respectivamente. Os parâmetros de impacto b e b' são as distâncias de retas assintóticas à trajetória da partícula em relação aos eixos coordenadas antes e depois do espalhamento, respectivamente. A posição $r = R$ é denominado de distância de maior aproximação e $r = D$ é o valor particular de R para o caso de colisão frontal, mostrado na Fig. 3.5(b).

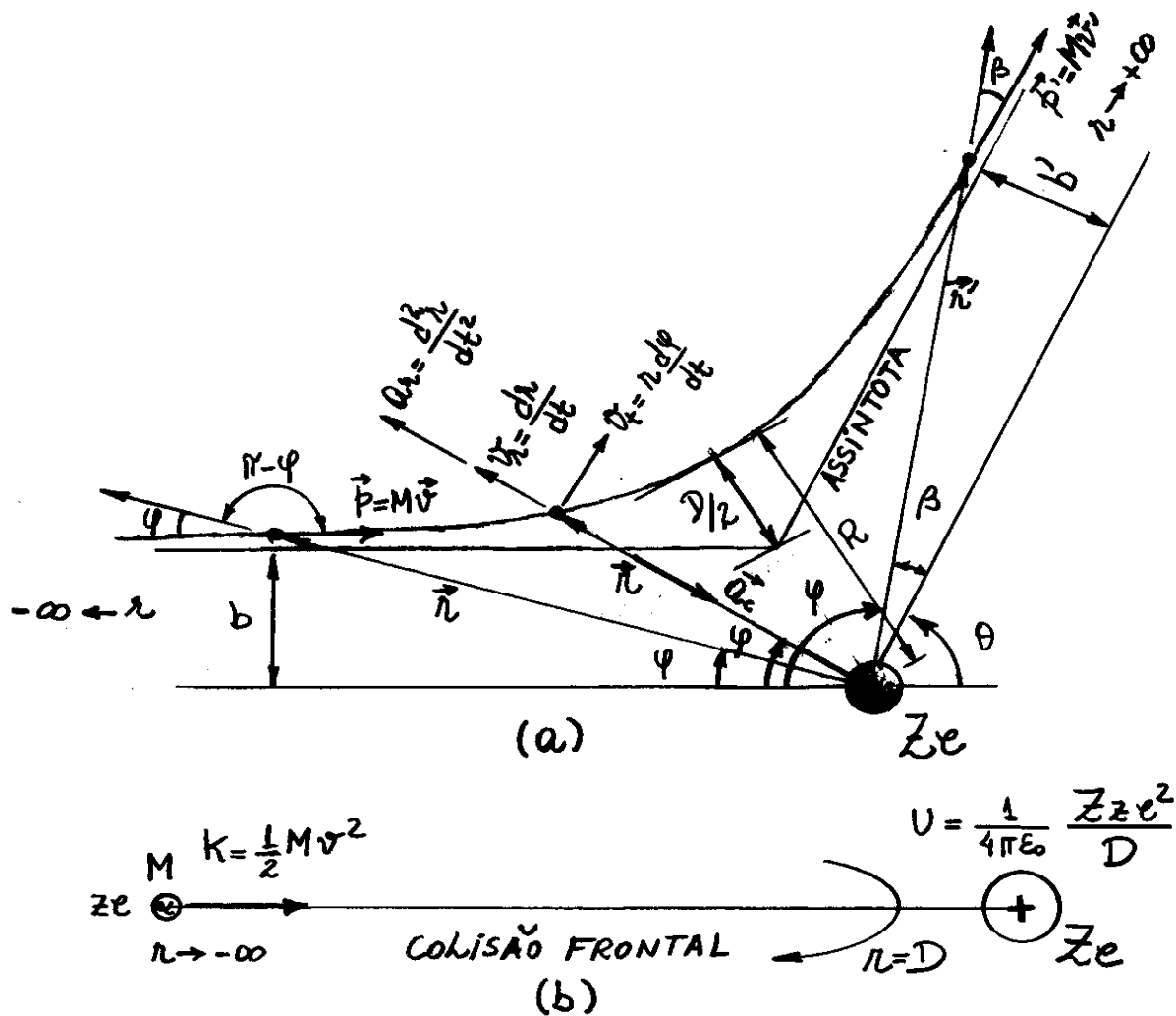


Fig.3.5 - Espalhamento de uma partícula por um núcleo atômico pesado. (a) Caso geral, onde o ângulo de espalhamento é θ e (b) caso particular de colisão frontal onde $\theta = 180^\circ$.

A velocidade da partícula, em qualquer ponto, é composta por uma componente radial \vec{v}_r e uma componente tangencial \vec{v}_t , cujos módulos são

$$v_r = dr/dt, \quad v_t = r\omega = r d\phi/dt.$$

A força resultante que atua sobre a partícula está sempre na direção radial e, portanto, o torque é nulo, isto é,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv 0$$

Assim, o momento angular \vec{L} é uma constante durante todo o movimento, pois $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt = 0$ ou $\vec{L} \equiv \text{constante}$. Os valores do momento angular antes e depois do espalhamento são, respectivamente,

$$L = r p \sin(\pi - \varphi) = r M v \sin \varphi = M v b \quad \leftarrow$$

e

$$L' = r' p' \sin \beta = r' M v' \sin \beta = M v' b',$$

pois $b = r \sin \varphi$ e $b' = r' \sin \beta$ como se pode verificar na Fig. 3.5. Como $L = L'$, então

$$L = M v b = M v' b' \quad (3.3)$$

Como o núcleo permanece estacionário durante o espalhamento, a energia cinética K da partícula também se conserva e, portanto,

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M v'^2 \Rightarrow v' = v$$

Assim, a eq. (3.3) mostra que $b = b'$ durante todo o processo de espalhamento.

Na Fig. 3.5(b) observa-se que, na colisão frontal, a energia cinética K da partícula em $r = -\infty$, é igual a energia potencial U em $r = D$, onde a partícula para e inverte o seu sentido de movimento, isto é,

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{D} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{M v^2} = \frac{D}{2} \quad (3.4)$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton ao movimento da partícula, obtém-se

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} = M(a_r - a_c) = M \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right], \quad (3.5) \leftarrow$$

onde o termo à esquerda é a força Coulombiana, $a_r = d^2 r / dt^2$ é a aceleração radial devido à variação do módulo de \vec{r} e $a_c = r\omega^2 = r(d\varphi/dt)^2$ é a aceleração centrípeta devido à variação na direção de \vec{r} , que aponta para o centro do sistema de coordenadas.

A solução da eq. (3.5) pode ser encontrada utilizando a seguinte mudança de variável:

$$r = 1/\mu. \quad (3.6)$$

O exemplo 3.2 mostra que essa mudança de variável faz com que a eq. (3.5) torne-se

$$\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2 b^2} = -\frac{D}{2b^2}, \quad (3.7) \leftarrow$$

onde substituiu-se a eq. (3.4) na última igualdade.

Exemplo 3.3 - FACULTATIVO.

Fazer a mudança de variável $r = 1/\mu$ na eq. (3.5) para mostrar a eq. (3.7).

Como $L = r p = r M v = r M \omega r = M r^2 d\varphi/dt$ ou
 $d\varphi/dt = L/Mr^2 = L\mu^2/M$, então

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\mu} \frac{d\mu}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{d\varphi} \frac{L\mu^2}{M} = -\frac{L}{M} \frac{d\mu}{d\varphi} \quad (3.8)$$

e

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dr}{dt} \right] = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{dr}{dt} \right] \frac{d\varphi}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left[-\frac{L}{M} \frac{d\mu}{d\varphi} \right] \frac{L\mu^2}{M} = -\frac{L^2 \mu^2}{M^2} \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} \quad (3.9)$$

Assim, a eq. (3.5) torna-se

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{1/\mu^2} = M \left[-\frac{L^2 \mu^2}{M^2} \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} - \frac{1}{\mu} \left(\frac{L\mu^2}{M} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2 \mu^2}{M} = \frac{L^2 \mu^2}{M^2} \frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \frac{L^2 \mu^3}{M^2} \Rightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2 \mu^2}{M} = \frac{L^2 \mu^2}{M^2} \left(\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu \right)$$

ou

$$\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2 M}{L^2},$$

que combinada com a equação $L = Mvb$ resulta na eq. (3.7).

A solução da eq. (3.7) é

$$\mu = A \cos \varphi + B \sin \varphi - \frac{D}{2b^2}, \quad (3.10) \leftarrow$$

onde A e B são constantes que devem ser determinadas. Para verificar que é solução, basta substituir a eq. (3.10) na eq. (3.7) e encontrar uma identidade.

Para determinar as constantes A e B , pode-se adotar as seguintes condições de contorno para a eq. (3.10):

$$\text{quando } \varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} \rightarrow -v \quad (3.11)$$

O sinal (-) é devido ao fato que \dot{r} tem sentido inverso à velocidade v no trecho considerado. De exemplo 3.3 mostra que $A = D/2b^2$ e $B = 1/b$. Logo, a eq. (3.10) torna-se

$$u = \frac{1}{r} = \frac{D}{2b^2} \cos \varphi + \frac{1}{b} \sin \varphi - \frac{D}{2b^2}$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) \quad (3.12)$$

Essa equação mostra que a trajetória da partícula tem a forma hiperbólica no sistema de coordenadas polares (r, φ) .

Exemplo 3.4 - FACULTATIVO. Mostrar que $A = D/2b^2$ e $B = 1/b$.

Adotando a condição $r \rightarrow -\infty$ quando $\varphi \rightarrow 0$ na eq. (3.10) e a condição $dr/dt = -v$ quando $\varphi \rightarrow 0$ na equação

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{L}{M} (-A \sin \varphi + B \cos \varphi),$$

obtem-se

$$u = \frac{1}{r} = 0 = A \cos 0^\circ + B \sin 0^\circ - \frac{D}{2b^2} \Rightarrow A = \frac{D}{2b^2},$$

$$-v = -\frac{L}{M} (-A \sin 0^\circ + B \cos 0^\circ) \Rightarrow B = \frac{Mv}{L} = \frac{Mv}{Mvb} = \frac{1}{b}.$$

A Fig. 3.6(a) mostra que quando $\varphi \rightarrow \pi - \theta$, então $r \rightarrow +\infty$. De acordo com o exemplo 3.4, quando se aplica esta condição na eq. (3.12), obtém-se

$$\text{ctg } \theta/2 = 2b/D. \quad (3.13)$$

Por outro lado, a Fig. 3.6(b) mostra que quando $2\varphi + \theta = \pi$ ou $\varphi = (\pi - \theta)/2$, então $r = R$. Também de acordo com o exemplo 3.4, quando se aplica esta condição na eq. (3.12), obtém-se

$$R = D/2 \left[1 + 1/\text{sen}(\theta/2) \right]. \quad (3.14)$$

Observa-se nesta equação, que quando $\theta \rightarrow \pi$, o que corresponde a $b=0$ na eq. (3.13), ou a uma colisão frontal, tem-se $R=D$ como é de se esperar.

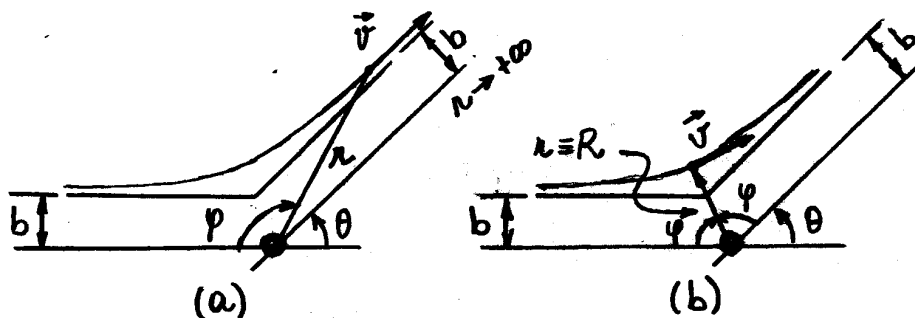


Fig. 3.6 - Método para obtenção, (a) do ângulo de espalhamento θ e (b) da distância R de maior aproximação.

Exemplo 3.5 - FACULTATIVO.

Usar a eq. (3.12) e as Figs. 3.6(a) e 3.6(b) para mostrar, (a) a eq. (3.13) e (b) a eq. (3.14).

(a) Substituindo $r \rightarrow +\infty$ e $\varphi = \pi - \theta$ na eq. (3.12), obtêm-se

$$\frac{1}{r} = 0 = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) \Rightarrow -\frac{1}{b} \sin \varphi = \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$$

ou

$$2b/D = (1 - \cos \varphi) / \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi / 2 = \operatorname{tg} (\pi - \theta) / 2 = \operatorname{tg} (\pi/2 - \theta/2) = \operatorname{ctg} \theta/2 .$$

(b) Substituindo $r = R$ e $\varphi = (\pi - \theta)/2$ na eq. (3.12), obtêm-se

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b} \sin (\pi - \theta)/2 + \frac{D}{2b^2} [\cos (\pi - \theta)/2 - 1] , \quad (3.15)$$

Por outro lado, da eq. (3.13),

$$b = \frac{D}{2} \operatorname{ctg} \theta/2 = \frac{D}{2} \operatorname{tg} (\pi - \theta)/2 = \frac{D}{2} \frac{\sin (\pi - \theta)/2}{\cos (\pi - \theta)/2} \Rightarrow \cos (\pi - \theta)/2 = \frac{D}{2b} \sin (\pi - \theta)/2 ,$$

cujas substituição na eq. (3.15) e, após algumas manipulações matemáticas, obtêm-se a eq. (3.14).

3.4.2 - Cálculo estatístico do espalhamento de partículas α .

Da relação entre θ e b , dada na eq. (3.13), observa-se que no espalhamento de uma partícula α por um único núcleo, se o parâmetro de impacto estiver entre b e $b+db$, então o ângulo de espalhamento estará entre θ e $\theta+d\theta$, como ilustra a Fig. 3.7. Dessa forma, pode-se afirmar que a probabilidade $P(\theta)d\theta$ da partícula α ser espalhada entre θ e $\theta+d\theta$ é igual, em módulo, a probabilidade $P(b)db$ do parâmetro de impacto estar entre b e $b+db$, isto é;

$$P(\theta)d\theta = -P(b)db , \quad (3.16)$$

onde o sinal(-) é devido ao fato que $d\theta = -db$.

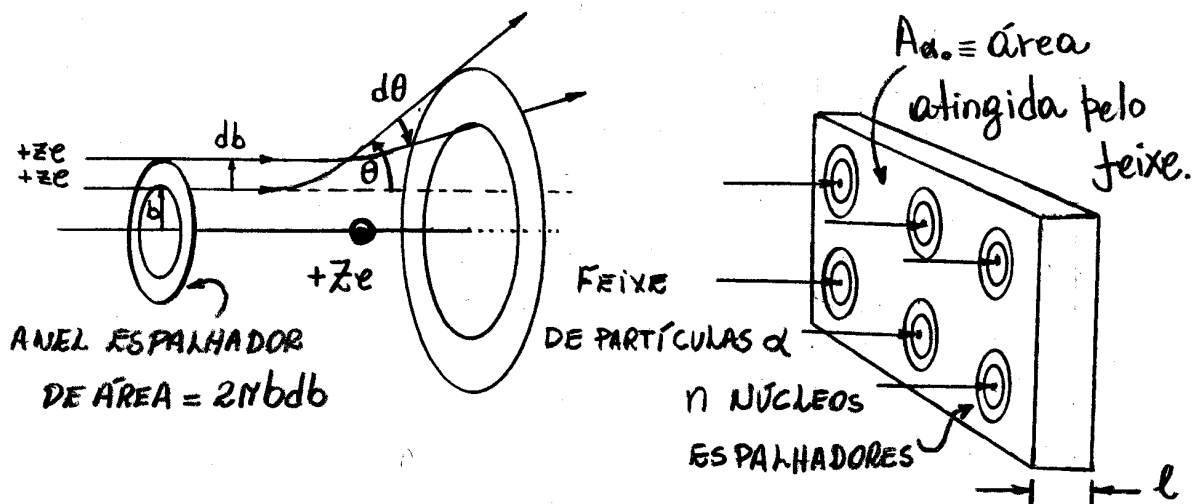


Fig. 3.7- Comportamento das partículas α espalhadas pelos núcleos atômicos.

Se no volume da película existem n núcleos espalhadores numa região de área A_{α} atingida pelas partículas α , então dispõe-se desse mesmo número de anéis espalhadores de área $2\pi b db$. A probabilidade $P(b)db$, de que uma partícula α passe através de um desses anéis, é dada pela razão entre a área de todos os n anéis e a área A_{α} do feixe sobre a superfície espalhadora, isto é,

$$P(b)db = \frac{n \times (\text{área de um anel})}{A_{\alpha}} = \frac{n}{A_{\alpha}} 2\pi b db. \quad (3.17)$$

Partindo da eq. (3.13), o exemplo 3.5 mostra que

$$bdb = -\frac{D^2}{16} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (3.18)$$

Substituindo a eq. (3.18) na eq. (3.17), obtêm-se

$$P(b)db = -\frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha}} D^2 \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)} = -P(\theta)d\theta,$$

onde adotou-se a eq. (3.16) na última igualdade. Supondo uma distribuição uniforme de núcleos espalhadores, então a probabilidade da partícula α ser espalhada por um único núcleo entre θ e $\theta + d\theta$ e a probabilidade da partícula α ser espalhada por n núcleos entre ϕ e $\phi + d\phi$ devem ter a mesma relação funcional, isto é,

$$P(\theta)d\theta \equiv P(\phi)d\phi = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} D^2 \frac{\sin\phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} \quad (3.19)$$

Seja $I_{\alpha_0} = N_{\alpha_0}/A_{\alpha_0}$ a intensidade do feixe de partículas α incidente na película, onde N_{α_0} é o número de partículas α , por unidade de tempo, presentes no feixe. Assim, o número $N(\phi)d\phi$ dessas partículas espalhadas, por unidade de tempo, entre ϕ e $\phi + d\phi$, é

$$N(\phi)d\phi = N_{\alpha_0} P(\phi)d\phi = I_{\alpha_0} A_{\alpha_0} P(\phi)d\phi$$

ou, da eq. (3.19),

$$N(\phi)d\phi = \frac{\pi}{8} n I_{\alpha_0} D^2 \frac{\sin\phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} \quad (3.20)$$

Esta equação fornece a distribuição de partículas α , espalhadas numa película delgada, de acordo com o modelo do átomo nucleado de Rutherford. Deve-se observar que embora o número de partículas espalhadas cai rapidamente com o aumento do ângulo de espalhamento ϕ , essa queda é muito mais lenta do que aquela prevista no modelo de Thomson. O resultado expresso na eq. (3.20) foi confirmado experimentalmente por Johannes (Hans) Wilhelm Geiger e seu aluno Ernest Marsden alguns meses depois de ter sido obtida por Rutherford.

Exemplo 3.6 - FACULTATIVO.

Usar a eq. (3.13) para mostrar a eq. (3.18).

Da eq. (3.13), $b = \frac{D}{2} \operatorname{ctg}(\theta/2) = \frac{D}{2} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$, tem-se

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} \frac{D^2}{2} \operatorname{csc}^2(\theta/2) \Rightarrow db = -\frac{D}{4} \frac{d\theta}{\sin^2(\theta/2)}$$

$$\Rightarrow bdb = -\frac{D^2}{8} \frac{\cos(\theta/2) d\theta}{\sin^3(\theta/2)} = -\frac{D^2}{8} \frac{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

Como $\sin 2\delta = 2 \sin \delta \cos \delta$, ou $\sin \theta/2 \cos \theta/2 = 1/2 \sin \theta$, a equação anterior resulta na eq. (3.18).

O modelo atômico de Rutherford permite impor um limite superior para o raio nuclear. O raio nuclear não deve ser maior do que o valor da aproximação máxima D na colisão frontal, dada na eq. (3.4), como

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{1/2 Mv^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{K_\alpha}, \quad (3.21)$$

onde $K_\alpha = 1/2 Mv^2$ é a energia cinética da partícula α incidente e $z=2$ é o número de cargas positivas no núcleo do He. O valor de D pode ser calculado a partir da eq. (3.21) sabendo a energia cinética K_α da partícula α e o número de cargas positivas Z do núcleo alvo. Alternativamente, o valor de D também pode ser encontrado a partir da fórmula de Rutherford, dada na eq. (3.20), e de dados experimentais de espalhamentos de partículas α com energia cinética K_α . Como a teoria de Rutherford está limitada a núcleos pesados, divergências foram encontradas na obtenção de D pelos dois métodos. Entretanto, mesmo depois da massa nuclear finita ter sido considerada, as divergências continuaram para partículas α de alta energia K_α . Essas divergências

são atribuídas a outra condição não aplicável na teoria de Rutherford, que é a penetração de partículas α na região nuclear. Portanto, o raio nuclear será corretamente definido como sendo o valor de R para um ângulo de espalhamento limite (não necessariamente π), associada a uma energia cinética incidente limite K_α , para o qual começa a ocorrer divergências no espalhamento Rutherford. Um experimento como este foi realizado com partículas α de diferentes energias, para determinar o raio nuclear do alumínio e o resultado obtido foi de $10^{-14} \text{ m} = 10 \text{ F}$. Aqui, $1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}$ é uma unidade de medida, denominada Fermi, muito usada em Física nuclear.

Exemplo 3.7 - Eisberg.

Ao atravessar uma película fina de ouro, uma partícula α de energia $K_\alpha = 5,30 \text{ MeV}$, é espalhada de um ângulo $\theta = 60^\circ$ por um único núcleo. Calcular, (a) a distância D de maior aproximação na colisão frontal e (b) o parâmetro de impacto b correspondente.

(a) De acordo com a eq. (3.21), o valor de D será

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{K_\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ e^2}{5,3 \times 10^6 \text{ eV}} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 2 \times 79 \times 1,6 \times 10^{-19}}{5,3 \times 10^6}$$

$$\Rightarrow D = 42,9 \times 10^{-15} \text{ m} = 42,9 \text{ F}$$

pois,

$$z = 2 \text{ (part. } \alpha \text{)}, Z = 79 \text{ (Au)}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2, e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

(b) Como $\text{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D}$, o parâmetro de impacto b será

$$b = \frac{D}{2} \text{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{42,9 \times 10^{-15}}{2} \text{ctg} \frac{60^\circ}{2} = 21,45 \times 10^{-15} \frac{1}{\text{tg} 30^\circ}$$

$$\Rightarrow b = 37,1 \times 10^{-15} \text{ m} = 37,1 \text{ f.}$$

Exemplo 3.8 - FACULTATIVO

Uma película de ouro de espessura $l = 2,1 \times 10^{-7} \text{ m}$, é atingida por um feixe de partículas α com $N_{\alpha_0} = 10^4$ partículas/segundo e energia cinética $K_{\alpha} = 5,30 \text{ MeV}$. (a) Sabendo que a densidade do ouro é $\rho = 19,3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, a massa molar do ouro é $M = 0,197 \text{ kg/mol}$ e o número de Avogadro é $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, calcular a densidade numérica $\delta = N_A/V$ de núcleos contidos numa amostra de ouro. (b) Calcular o número n/A_{α_0} de núcleos espalhadores na película de ouro por unidade de área A_{α_0} do feixe de partículas α incidente. (c) Usar a distância de maior aproximação $D = 42,9 \text{ f}$, calculado no exemplo 3.6, e a equação de espalhamento de Rutherford para calcular o número total N_{α} de partículas α retro espalhadas por segundo entre $\phi = \pi/2$ e $\phi = \pi$.

$$(a) \delta = \frac{N_A}{V} = \frac{M}{V} \frac{N_A}{M} = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{19,3 \times 10^3 \times 6,02 \times 10^{23}}{0,197} = 5,9 \times 10^{28} \text{ núcleos/m}^3.$$

$$(b) \frac{n}{A_{\alpha_0}} = \frac{n l}{A_{\alpha_0} l} = \frac{n}{V_{\alpha_0}} = \delta l = 5,9 \times 10^{28} \times 2,1 \times 10^{-7} = 1,24 \times 10^{22} \text{ núcleos/m}^2.$$

(c) De acordo com a equação de espalhamento de Rutherford

$$N_{\alpha} = \int_{\pi/2}^{\pi} N_{\alpha}(\phi) d\phi = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin \phi}{\sin^4(\phi/2)} d\phi,$$

em que

$$J = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin \phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(\phi/2) \cos(\phi/2) d\phi}{\sin^4(\phi/2)} = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(\phi/2)}{\sin^3(\phi/2)} d\phi.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$\mu = \sin(\phi/2) \Rightarrow d\mu = \frac{1}{2} \cos(\phi/2) d\phi,$$

tal que os limites de integração, tornam-se

$$\mu_1 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \sin \pi/2 = 1,$$

então

$$J = 2 \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{2d\mu}{\mu^3} = 4 \left[-\frac{1}{2\mu^2} \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 \right] = -4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1/2)} \right] = -4(-1/2) = 2.$$

Assim,

$$N_{\alpha} = \frac{\pi}{4} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 = \frac{\pi}{4} (1,24 \times 10^{22}) (10^4) (42,9 \times 10^{-15})^2 = 0,179 \text{ parts./s.}$$

Esse valor é comparável com as observações feitas por Geiger e Marsden.

3.4.3 - Seção de Choque de Espalhamento - FACULTATIVO.

Do ponto de vista experimental, o espalhamento de Rutherford é usualmente expresso em termos de uma seção de choque diferencial $d\sigma$, como ilustrado na Fig. 3.8.

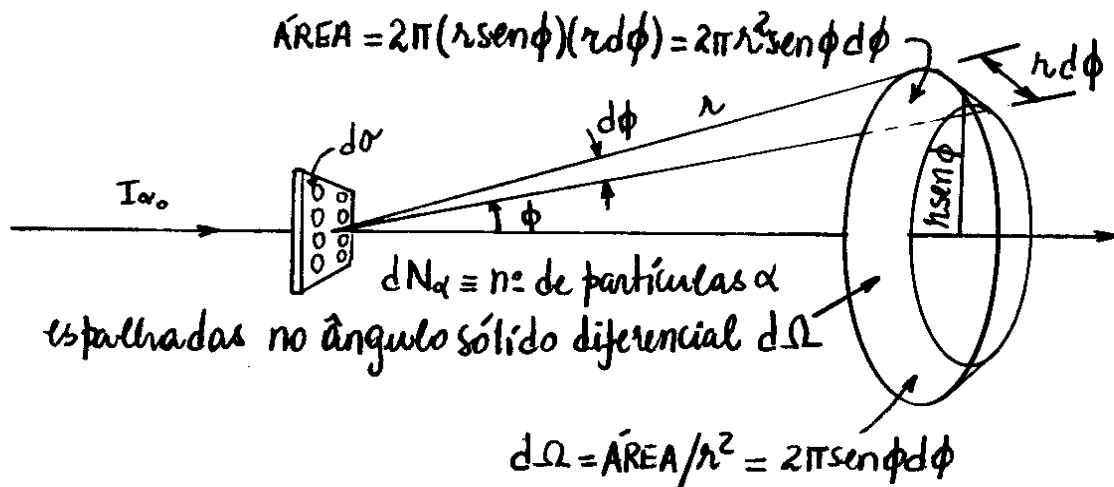


Fig. 3.8 - Ilustração da definição da seção de choque diferencial.

A seção de choque diferencial $d\sigma$, é a área efetiva de um dos
átomos sobre um dos núcleos espalhadores, isto é,

$$d\sigma = 2\pi b db, \quad (3.22)$$

que espalha a partícula α sobre um ângulo sólido diferencial $d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi$, na região de detecção.

A seção de choque de uma superfície espalhadora é usualmente medida em termos de uma unidade denominada de "barn", em que

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2. \quad (3.23)$$

Se N_{α_0} partículas α , por unidade de tempo, incidem numa área A_{α_0} da película então, o número de partículas α , por unidade de tempo, incidente numa secção de choque diferencial $d\sigma$ em um dos núcleos, será

$$\text{N}^\circ \text{ de part. } \alpha \text{ incid. num núcleo} = N_{\alpha_0} \frac{d\sigma}{A_{\alpha_0}} = I_{\alpha_0} d\sigma. \quad (3.24)$$

Se dN_{α} partículas α , por unidade de tempo, são espalhadas por n núcleos da película, na região angular $d\Omega$ então, o número de partículas α espalhada, por um único núcleo, nessa mesma região angular, é

$$\text{N}^\circ \text{ de part. } \alpha \text{ esp. por um núcleo} = \frac{dN_{\alpha}}{n}. \quad (3.25)$$

Como cada partícula α que incide sobre um núcleo, eq.(3.24), deverá ser espalhada por ele, eq.(3.25), então

$$dN_{\alpha} = n I_{\alpha_0} d\sigma \quad (3.26)$$

ou

$$dN_{\alpha} = n I_{\alpha_0} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (3.27)$$

Por outro lado, a fórmula do espalhamento de Rutherford, dada na eq.(3.20), fornece

$$dN_{\alpha} = N_{\alpha}(\phi) d\phi = \frac{n I_{\alpha_0} D^2}{16 \sin^4(\phi/2)} (2\pi \sin\phi d\phi) \quad (3.28)$$

ou

$$dN_{\alpha} = n I_{\alpha_0} d\Omega \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4(\phi/2)}, \quad (3.29)$$

pois

$$d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi. \quad (3.30)$$

Comparando a eq. (3.27) com a eq. (3.29), obtém-se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4(\phi/2)} = \frac{D^2}{16} \operatorname{cosec}^4(\phi/2), \quad (3.31)$$

que é a fórmula do espalhamento de Rutherford escrita em termos da seção de choque diferencial.

Exemplo 3.9 - FACULTATIVO

Resolva o item (c) do exemplo 3.7 usando a fórmula do espalhamento de Rutherford na forma da eq. (3.31).

Como $I_{\alpha_0} = N_{\alpha_0}/A_{\alpha_0}$, a eq. (3.27), fornece

$$dN_{\alpha} = N_{\alpha_0} \frac{n}{A_{\alpha_0}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \Rightarrow N_{\alpha} = N_{\alpha_0} \frac{n}{A_{\alpha_0}} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (3.32)$$

ou, das eqs. (4.30) e (4.31),

$$N_{\alpha} = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\phi d\phi}{\sin^4(\phi/2)} = \frac{\pi}{8} \frac{n}{A_{\alpha_0}} N_{\alpha_0} D^2 \int$$

ou ainda, usando os dados do exemplo 3.7,

$$N_{\alpha} = 0,179 \text{ partículas/s.}$$

3.5 - Espectro Atômico.

O sucesso do modelo atômico de Rutherford inspirou Niels Bohr a imaginar uma separação no domínio físico dos átomos, em que os elétrons estariam associadas as propriedades químicas dos elementos, enquanto que o núcleo seria responsável por comportamentos radioativos. Essa proposta revelava uma correlação entre o número de elétrons no átomo e a sua localização numa tabela periódica de elementos.

Evidências do comportamento quântico da matéria já tinham sido observadas bem antes da época de Bohr e Rutherford. Uma das mais notáveis evidências desse comportamento era a emissão do espectro eletromagnético por átomos.

A Fig. 3.9 mostra o esquema de um espectrógrafo utilizado para observação do espectro atômico.

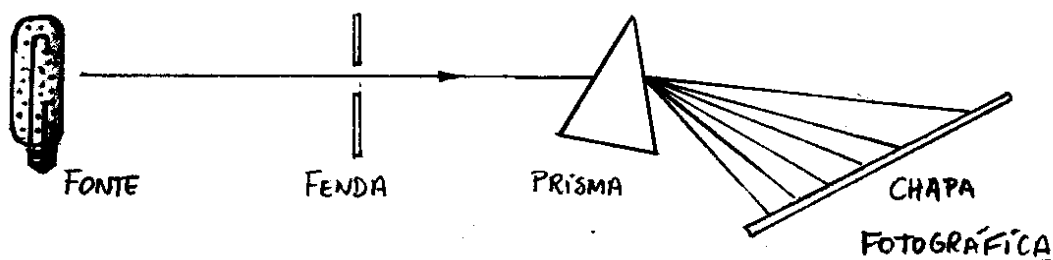


Fig. 3.9 - Espectrógrafo usado para observação do espectro eletromagnético emitido por átomos.

A fonte consiste de uma descarga elétrica num meio que contém um gás monoatômico. Os átomos são colocados fora do equilíbrio por colisões com elétrons da descarga. Ao voltar ao seu estado normal, os átomos liberam o excesso de energia emitindo radiação eletromagnética. A radiação é colimada por uma fenda e atravessa um prisma, que separa as linhas espectrais que compõem a radiação. Uma rede de difração poderia também ser usada no lugar do prisma. O espectro é registrado numa simples chapa fotográfica.

Diferentemente do espectro contínuo da radiação eletromagnética emitida, por um corpo negro, a radiação eletromagnética emitida por um átomo livre, está concentrada em um número discreto de comprimentos de onda. Observa-se que cada espécie de átomo tem o seu próprio espectro característico, isto é, tem um conjunto específico de linhas espectrais que o identifica. Em geral, os espectros atômicos são extremamente complexos, pois podem conter centenas de linhas. Entretanto, por conter somente um elétron, o espectro do átomo de hidrogênio é relativamente simples.

No final do século XIX, vários espectros do átomo de hidrogênio foram observados sem que nenhuma explicação satisfatória fosse realizada.

A Fig. 3.10 mostra as linhas emitidas pelo átomo de hidrogênio na região do visível do espectro eletromagnético. A primeira interpretação empírica bem sucedida desse espectro foi realizada por Johan Jakob Balmer em 1885.

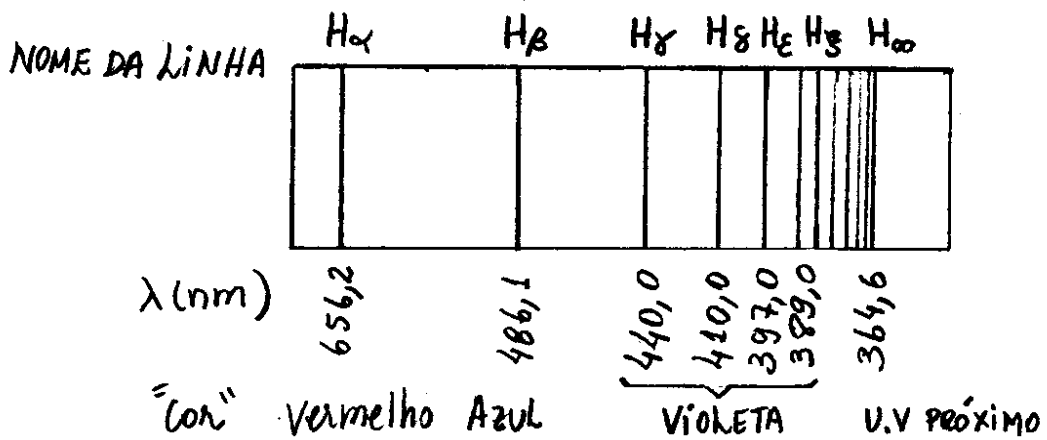


Fig. 3.10 - Região Visível do espectro do hidrogênio.

A regularidade óbvia na seqüência das linhas espectrais do hidrogênio, na região do visível, induziu Balmer a propor o seguinte comportamento para os comprimentos de onda observados:

$$\lambda = 364,6(\text{nm}) \frac{n_i^2}{n_i^2 - 4}, \quad (3.33)$$

onde $n_i = 3, 4, 5, \dots$ correspondem, respectivamente, as linhas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ do espectro. A partir da eq. (3.33), Balmer conseguiu reproduzir, com uma precisão de 0,1%, os comprimentos de onda das nove linhas da única série do átomo de hidrogênio conhecida na época.

Após a descoberta de Balmer, várias tentativas foram realizadas para explicar outras séries de linhas observadas em outros elementos. O resultado para o átomo de hidrogênio foi generalizado em 1890 por Johannes Robert Rydberg, quando observou que a eq.(3.33) poderia ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left(\frac{n_i^2 - 4}{n_i^2} \right) = \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left(\frac{1}{1} - \frac{4}{n_i^2} \right) = \\ &= \frac{4}{364,6 \text{ nm}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad (3.34) \end{aligned}$$

onde R_H é denominado de constante de Rydberg para o hidrogênio. De acordo com dados espectroscópicos recentes

$$R_H = 10,9677576 \mu\text{m}^{-1}. \quad (3.35)$$

Rydberg interpretou a eq.(3.34) como sendo um caso particular de uma expressão mais geral para o átomo de hidrogênio dada por

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i > n_j \quad (3.36)$$

A introdução do novo índice n_j permitiria descrever outras possíveis séries de linhas espectrais do hidrogênio, além do espectro visível ($n_j=2$) observada por Balmer.

linhas espectrais no hidrogênio para $n_i=3$, observadas na região do infravermelho, foram descobertas por Louis Karl Heinrich Friedrich Paschen em 1908. Em 1914, Theodore Lyman descobriu as linhas associadas a $n_i=1$, observadas na região do ultravioleta. Outras séries foram também reveladas mais tarde no espectro infravermelho. A Tab.3.1 resume as principais séries observadas a partir dos resultados de Rydberg.

NOME	REGIÃO	FÓRMULA
LYMAN	U.V	$1/\lambda = R_H (1/1^2 - 1/n_i^2); n_i = 2, 3, \dots$
BALMER	UV PRÓXIMO E VISÍVEL	$1/\lambda = R_H (1/2^2 - 1/n_i^2); n_i = 3, 4, \dots$
PASCHEN	I.R	$1/\lambda = R_H (1/3^2 - 1/n_i^2); n_i = 4, 5, \dots$
BRACKETT	I.R	$1/\lambda = R_H (1/4^2 - 1/n_i^2); n_i = 5, 6, \dots$
PFUND	I.R	$1/\lambda = R_H (1/5^2 - 1/n_i^2); n_i = 6, 7, \dots$

Tab.3.1 - Séries de linhas espectrais mais importantes observadas no átomo de hidrogênio.

Assim, os resultados empíricos de Balmer e Rydberg, além de fornecer uma descrição quantitativa de cada linha espectral, tornou possível também a abertura de todo o código espectral do átomo de hidrogênio.

Um dos resultados mais notáveis observados nos espectros atômicos, foi o fato de que as linhas espectrais são discretas. No modelo atômico de Rutherford os elétrons se movem em torno do núcleo sob influência de uma força Coulombiana. Nesse modelo, os elétrons poderiam emitir somente radiações contínuas, resultantes de seus movimentos acelerados. As leis clássicas do eletromagnetismo prevêem que o sistema atômico poderia ter perdas radiativas de energia, levando o átomo a uma instabilidade intrínseca. Assim, o elétron poderia entrar em colapso com o núcleo, enquanto a radiação fosse emitida continuamente. Este efeito é uma consequência do tratamento clássico do modelo atômico de Rutherford.

3.6- Modelo Atômico de Bohr

Em 1913, Niels Bohr resolveu o problema da instabilidade atômica, a exemplo de Planck e Einstein, compendo com princípios fundamentais da física clássica. Sua proposta daria importantes contribuições para o desenvolvimento da teoria quântica.

A motivação principal de Bohr, para propor seu ousado modelo atômico, foi a regularidade dos espectros atômicos observados.

O modelo atômico de Bohr tem como base os seguintes postulados:

1- Os elétrons no átomo podem se mover, somente, em órbitas discretas, as quais definem os estados estacionários, de onde não emitem radiação eletromagnética.

2- A emissão de radiação eletromagnética ocorre somente quando o elétron faz uma transição de um estado estacionário para o outro.

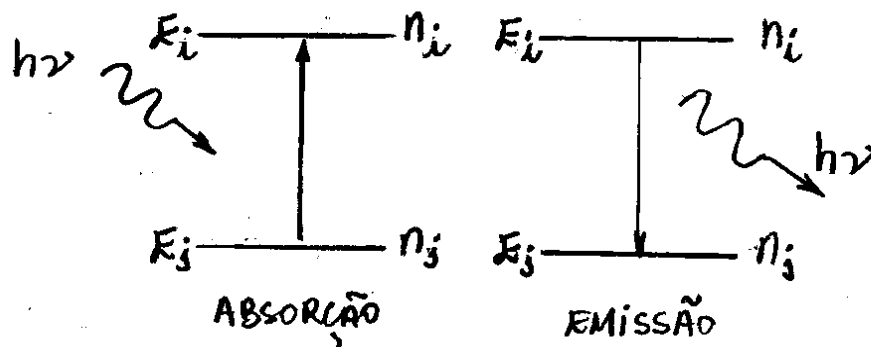


Fig. 3.11 - Estados estacionários representados por um sistema de dois níveis de energia no átomo de Bohr.

Como se vê na Fig. 3.11, na transição entre estados estacionários, o átomo pode emitir, ou absorver, um fóton de energia

$$h\nu = hc/\lambda = E_i - E_j \quad (3.37)$$

O primeiro postulado elimina o problema da instabilidade atômica assumindo que a emissão de radiação por cargas aceleradas, simplesmente, não ocorre com elétrons atômicos.

Uma consequência imediata do primeiro postulado está associada a quantização do momento angular L do elétron atômico. Tendo como base observações empíricas de espectros do átomo de hidrogênio, Bohr concluiu que os momentos angulares nas órbitas atômicas são múltiplos inteiros da constante

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 6,58 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s},$$

isto é,

$$L_n = n\hbar, \quad (3.38)$$

em que $n = 1, 2, 3, \dots$ e a constante \hbar , que se lê "h com um traço", possui dimensões de momento angular e tem um destaque especial na teoria quântica.

A única evidência que se tinha para justificar os postulados de Bohr, nos quais se baseia o seu modelo atômico, era a observação experimental do espectro do átomo de hidrogênio. O átomo de hidrogênio faz parte de um sistema atômico mais geral,

denominado de átomos monoelétrônicos, que são aqueles que possuem somente um elétron na sua constituição. Além do hidrogênio ($Z=1$), exemplos desses sistemas atômicos são: átomo de Hélio ($Z=2$) ionizado, átomo de Lítio ($Z=3$) duplamente ionizado, etc. Propõe-se aqui verificar as consequências dos postulados de Bohr para esses tipos de átomos. Esses átomos são formados por duas partículas carregadas, o elétron de carga $-e$ e o núcleo de carga $+Ze$, em que Z é o número de cargas positivas do núcleo.

O problema deve ser analisado então como um sistema mecânico de duas partículas em movimento de rotação em torno de um centro de massa CM comum como mostra a Fig. 3.12(a).

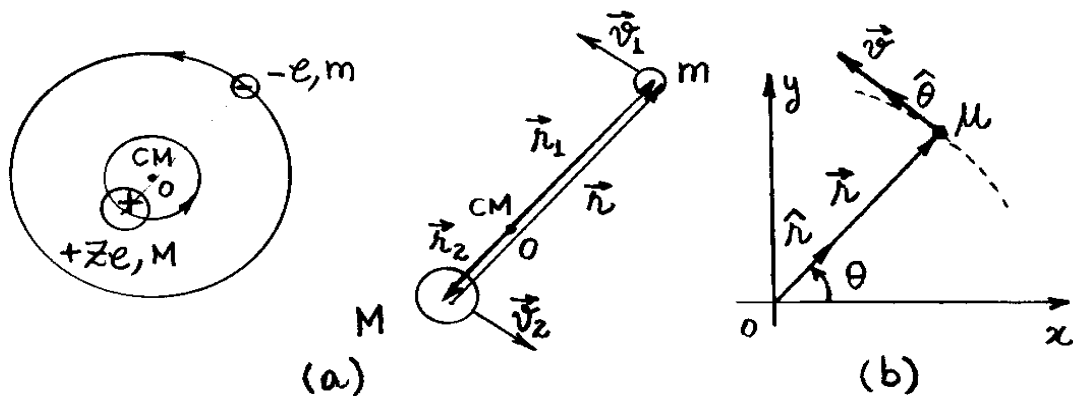


Fig. 3.12 - (a) Movimento de rotação de duas partículas em torno do centro de massa e (b) redução ao problema de uma única partícula. O sistema é equivalente ao movimento de um rotor rígido.

As velocidades das partículas atômicas em torno do centro de massa não são muito elevadas. Particularmente, para o átomo de hidrogênio, a velocidade do elétron é

$$v \approx 10^{-2}c \quad (3.39)$$

Assim, um tratamento não-relativístico pode ser adotado aqui como uma boa aproximação. Como ficará evidente na sequência, o movimento de rotação das partículas é equivalente ao movimento de um rotor rígido. A Fig. 3.12 (b) mostra como se pode reduzir o problema de duas partículas ao problema de uma única partícula de massa reduzida μ e coordenada relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = r \hat{r}, \quad (3.40)$$

em que \hat{r} é um vetor unitário na direção radial. Como o centro de massa CM está na origem do sistema de coordenadas, então \vec{r}_1 e \vec{r}_2 devem satisfazer a seguinte condição:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2}{m+M} = 0 \Rightarrow m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2 = 0. \quad (3.41)$$

Resolvendo o sistema de eqs. (3.40) e (3.41), obtém-se

$$\vec{r}_1 = \frac{M}{m+M} \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m}{m+M} \vec{r}. \quad (3.42)$$

Derivando essas equações em relação ao tempo, obtém-se as velocidades tangenciais de cada partícula como

$$\vec{v}_1 = \frac{M}{m+M} \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = -\frac{m}{m+M} \vec{v}, \quad (3.43)$$

em que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\hat{r}}{dt} = r \frac{d}{dt} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) = r(-\mu\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{ou} \quad \vec{v} = r\omega \hat{\theta}, \quad (3.44)$$

é a velocidade tangencial relativa as duas partículas, $\omega = d\theta/dt$ é a velocidade angular e $\hat{\theta} = -\mu\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$ é

um vetor unitário na direção angular. Observa-se nas eqs. (3.43) que \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são mantidos em sentidos contrários, porém, na mesma direção da velocidade relativa \vec{v} . Isso mostra que o sistema tem um movimento equivalente ao movimento de um rotor rígido.

A massa reduzida μ do sistema de duas partículas pode ser obtida calculando a energia cinética total K a partir da eq. (3.43), isto é,

$$K = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 v^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 v^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(m+M)^2} v^2 (mM^2 + Mm^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{(m+M)^2} v^2 mM(m+M) = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v^2$$

ou

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (3.45)$$

em que

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{mM}{M(m/M+1)} = \frac{m}{1+m/M} \quad (3.46)$$

é a massa reduzida do sistema de duas partículas. Sabe-se que a massa M do núcleo é muito maior do que a massa m do elétron, tal que $M \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow m$ na eq. (3.46). Em particular, para o hidrogênio o núcleo é um próton de massa $M_p = 1836 m$. Entretanto, o pequeno efeito da massa nuclear finita é, em geral, detectável e portanto é importante considerá-la.

Por causa da presença de uma força central Coulombiana, ocorrendo na direção radial, não há torque e o momento angular \vec{L} do sistema é uma constante de movimento. O módulo L do momento angular conservado, pode ser calculado a partir das eqs. (3.42) e (3.43), isto é,

$$L = m v_1 r_1 + M v_2 r_2 = m \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 v r + M \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 v r$$

$$= \frac{(mM^2 + Mm^2)}{(m+M)^2} v r = \frac{mM(M+m)}{(m+M)^2} v r = \frac{mM}{(m+M)} v r$$

ou

$$L = \mu v r \quad (3.47)$$

O módulo da força centrípeta F_c associada ao movimento circular é

$$F_c = M \frac{v_2^2}{r_2} = m \frac{v_1^2}{r_1} = m \frac{(M/m+M v)^2}{M/m+M r} = m \frac{M^2}{(m+M)^2} v^2 \frac{(m+M)}{M r}$$

ou

$$F_c = \mu \frac{v^2}{r} \quad (3.48)$$

A energia potencial U para o átomo monoelétrônico é dada diretamente em termos da variável relativa r como

$$U = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r} \quad (3.49)$$

onde Z é o número de cargas positivas no núcleo atômico.

A energia total E do sistema de duas partículas, pode ser calculada somando a eq. (3.49) com a energia cinética K , isto é,

$$E = K - \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.50)$$

Na condição de equilíbrio, a força centrípeta F_c deve ser igual, em módulo, a força Coulombiana atrativa, isto é,

$$\mu \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \Rightarrow K = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.51)$$

cuja substituição na eq. (3.50) resulta

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -K, \quad (3.52)$$

em que a última identidade é consequência direta da eq. (3.51).

Deve-se observar que a energia total E do átomo monoelétrônico é uma quantidade negativa pois, em módulo, a energia potencial negativa U é maior do que a energia cinética positiva K , resultando num sistema de estado ligado. Além disso, a eq. (3.52) mostra que a energia total E do átomo monoelétrônico é igual, em módulo, a energia cinética K das partículas que formam o átomo de Bohr.

Até aqui, todas as considerações do problema de duas partículas tem sido limitado a argumentos puramente clássicos. A primeira consideração quântica do problema está associado a uma das consequências dos postulados de Bohr, que trata da quantização do momento angular e que permite identificar a eq. (3.38) com a eq. (3.47), isto é,

$$L_n = \mu v r = n\hbar \quad (3.53)$$

ou

$$v \equiv v_n = \frac{nh}{\mu r}$$

que, substituída na eq. (3.51) sem o fator $\frac{1}{2}$, fornece

$$\mu \left(\frac{nh}{\mu r} \right)^2 = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow n^2 \frac{\hbar^2}{\mu r} = Z \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

ou

$$r \equiv r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 \mu} \times \frac{m}{m} \quad (3.54)$$

ou ainda

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} a_0, \quad (3.55)$$

em que

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} \approx 0,05 \text{ nm}, \quad (3.56)$$

é um parâmetro atômico importante denominado de raio de Bohr. Essa quantidade é utilizada como uma escala de comprimento em problemas de física atômica.

Assim como o raio orbital r_n é quantizado, tem-se também quantização na energia E quando se insere a eq. (3.55) na eq. (3.52'), isto é,

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{2} \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 m}{Z \mu} a_0} = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \right).$$

ou

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} E_0, \quad (3.57) \leftarrow$$

onde, de acordo com a eq. (3.56),

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m}{2\hbar^2}, \quad (3.58)$$

é uma unidade de energia atômica denominada de energia de Rydberg, que também pode ser escrita, como

$$E_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 mc^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 mc^2, \quad (3.59)$$

envolvendo a energia relativística do elétron mc^2 que, no caso em questão não-relativístico, é a própria energia de repouso do elétron, e uma nova constante

$$\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c. \quad (3.60)$$

Esta constante é uma quantidade adimensional denominada Constante de estrutura fina que está associada às transições de energias mais finas no interior do átomo. Tanto o valor da constante α quanto a energia de Rydberg E_0 , são conhecidas com precisão experimental e são dados por

$$E_0 = 13,6056981 \text{ eV}, \quad \alpha = 1/137,0359895. \quad (3.61)$$

A massa reduzida μ aparece explicitamente nas expressões para h_n e E_n através da fração μ/m . No caso do átomo de hidrogênio, onde $M = M_p = 1836m$ é a massa do próton, a eq. (3.16), fornece

$$\mu_H = \frac{m}{1 + m/M_p} = \frac{m}{1 + m/1836m} \approx m \Rightarrow \mu_H/m \approx 1, \quad (3.62)$$

isto é, a massa reduzida μ é praticamente igual a massa m do elétron.

Admitindo assim $Z=1$ e $\mu/m \approx 1$ nas eqs. (3.55) e (3.57), obtêm-se os raios r_n e as energias E_n para o átomo de hidrogênio como

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} a_0 \approx n^2 a_0 \quad (3.63)$$

e

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} E_0 \approx -\frac{E_0}{n^2} \quad (3.64)$$

O caso particular $n=1$, isto é,

$$r_1 \approx a_0 = 0,05 \text{ nm} \text{ e } E_1 \approx -E_0 \approx -13,6 \text{ eV}, \quad (3.65)$$

forneem, respectivamente, a primeira e menor órbita de Bohr e a menor energia, ou energia do estado fundamental, do átomo de hidrogênio.

O maior valor de n se refere ao estado excitado de maior energia e maior órbita de Bohr, ocorrendo quando se faz $n \rightarrow \infty$ nas eqs. (3.63) e (3.64), isto é,

$$r_{\infty} = \infty \text{ e } E_{\infty} = 0. \quad (3.66)$$

Nesse caso, as duas partículas tem separação infinita e nenhuma interação. Assim, o valor limite $n \rightarrow \infty$ está associado a uma condição limiar para a ionização do átomo. A energia de ionização é determinada pela diferença entre o limiar de ionização e a energia do estado fundamental, isto é,

$$\Delta E_{1 \rightarrow \infty} = E_{\infty} - E_1 = 0 - (-13,60) = 13,60 \text{ eV.} \quad (3.67)$$

A maior credibilidade do modelo atômico de Bohr está nas corretas previsões realizadas, principalmente, com o átomo de hidrogênio. Essas previsões podem ser verificadas examinando os comprimentos de onda no espectro de emissão do átomo de Bohr. Seja, por exemplo, uma transição de um estado excitado inicial E_i para um estado final de menor energia E_j , como mostra a Fig. 3.13.

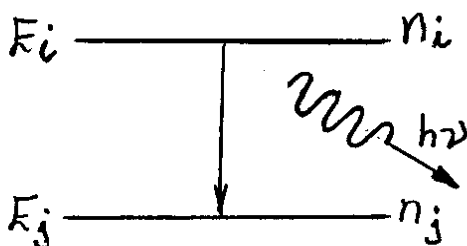


Fig. 3.13 - Emissão de um fóton numa transição $E_i \rightarrow E_j$.

De acordo com a eq. (3.57), essa transição radiativa libera um fóton de energia

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_j = -\frac{Z^2}{n_i^2} \frac{\mu}{m} E_0 - \left(-\frac{Z^2}{n_j^2} \frac{\mu}{m} E_0 \right) \quad (3.68)$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2}{m} \frac{\mu}{hc} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

ou ainda

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2}{m} R_{\infty} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.69)$$

onde, de acordo com a eq. (3.59),

$$R_{\infty} = \frac{E_0}{hc} = \frac{1/2 \alpha^2 mc^2}{hc} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{mc}{h}. \quad (3.70)$$

O resultado na eq. (3.69) é, essencialmente, o mesmo que a fórmula empírica de Rydberg, dada na eq. (3.36). A semelhança ocorre quando se identifica a constante de Rydberg R_H , para $Z=1$, com $R_H = \mu_m R_{\infty} \approx R_{\infty}$, isto é,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \approx R_{\infty} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (3.71)$$

A notação R_{∞} significa que esta constante é igual a R_H quando $\mu = m$, isto é, de acordo com a definição $\mu = m / (1 + m/M)$ na eq. (3.46), quando $M \rightarrow \infty$. Tanto R_H quanto R_{∞} são conhecidos com precisão e, em particular,

$$R_{\infty} = 10,973731534 \mu\text{m}^{-1}. \quad (3.72)$$

Assim, fica evidente que os níveis de energia, previstos no modelo atômico de Bohr, concordam com as linhas espectrais observadas no átomo de hidrogênio.

A eq. (3.71) descreve todas as séries de linhas espectrais previstas por Rydberg. Deve-se lembrar que essas séries são classificadas pela escolha sistemática de vários valores fixos para o número quântico final n_j .

As transições para $n_f = 1$ com $n_i \geq 2$, fornecem a série de Lyman, as transições para $n_f = 2$ com $n_i \geq 3$, fornecem a série de Balmer, as transições para $n_f = 3$ com $n_i \geq 4$, fornecem a série de Paschen e assim por diante.

Essas transições, juntamente com as regiões do espectro eletromagnético correspondentes, são mostradas na Fig. 3.14, num diagrama de níveis de energia, para o átomo de hidrogênio onde, de acordo com a eq. (3.64), $E_n = -E_0/n^2$.

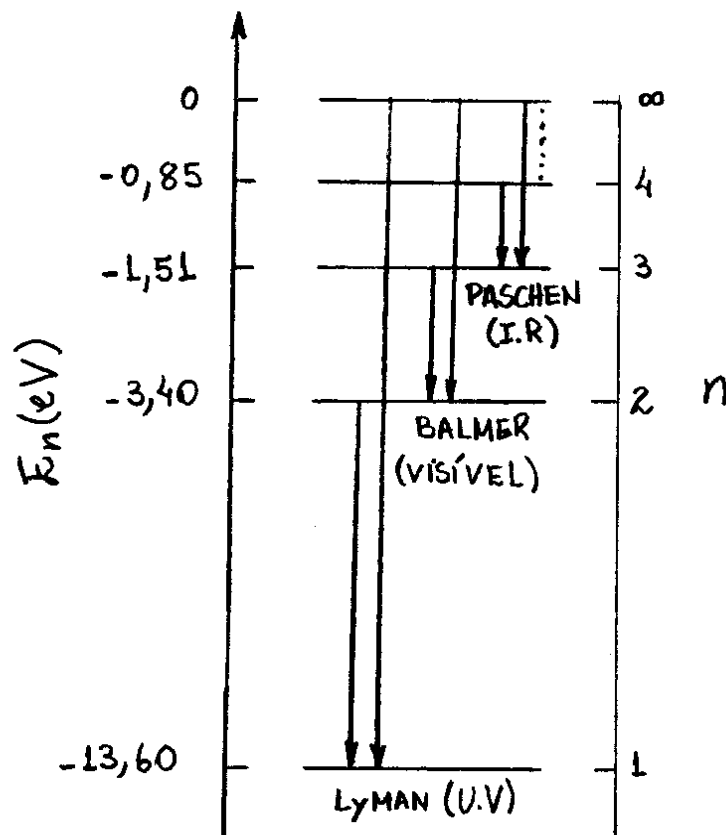


Fig. 3.14 - Níveis de energia e principais transições para o átomo de hidrogênio de acordo com o modelo atômico de Bohr.

Exemplo 3.10 - Exemplo do Mullin.

Encontrar uma expressão para o comprimento de onda mais curto nas transições do átomo de hidrogênio, previsto pelo modelo atômico de Bohr. Com esta expressão, encontrar os valores desses comprimentos de onda para as séries de Lyman, Balmer e Paschen.

A fórmula de Rydberg é

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Os comprimentos de onda mais curtos ocorrem para $n_i \rightarrow \infty$ e, nesse caso,

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \frac{1}{n_j^2} \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{n_j^2}{R_H} \quad ; \quad R_H \approx 10,96 \mu\text{m}^{-1}$$

$$\text{Lyman } (n_j=1) \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{1^2}{10,96} = 0,0912 \mu\text{m} = 91,2 \text{ nm}$$

$$\text{Balmer } (n_j=2) \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{2^2}{10,96} = 0,3649 \mu\text{m} = 364,9 \text{ nm}$$

$$\text{Paschen } (n_j=3) \Rightarrow \lambda_\infty = \frac{3^2}{10,96} = 0,8211 \mu\text{m} = 821,1 \text{ nm}$$

Exemplo 3.11 - Texto do Mullin - FACULTATIVO.

- Utilizando o modelo atômico de Bohr,
- (a) Encontrar uma expressão para a frequência da radiação emitida numa transição $i \rightarrow j$.
- (b) Mostrar que, para números quânticos n elevados, a frequência de transição entre níveis adjacentes, $n_i = n$ para $n_j = n-1$, é igual a frequência f_n da órbita eletrônica.

Como a energia quantizada é

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{\mu}{m} E_0,$$

então, a frequência da radiação emitida na transição $i \rightarrow j$, será

$$\nu_{i \rightarrow j} = \frac{E_i - E_j}{h} = \frac{Z^2 \mu}{m h} \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = \frac{Z^2 \mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right),$$

onde usa-se a relação, $E_0 = \frac{1}{2} \alpha^2 m c^2$. Escrevendo $n_i = n$, $n_j = n-1$, e considerando o valor de n muito grande, tem-se

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m 2h} \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m 2h} \left[\frac{1}{n^2 - 2n + 1} - \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m 2h} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right] = \frac{Z^2 \mu \alpha^2 m c^2}{m 2h} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{\frac{n-2}{n}} - 1 \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} v_n &= Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[\frac{n}{n-2} - 1 \right] = Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[\frac{n-(n-2)}{n-2} \right] \\ &= Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[\frac{2}{n-2} \right] \approx Z^2 \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{2h} \frac{1}{n^2} \left[\frac{2}{n} \right], \end{aligned}$$

pois $n \gg 2$. Assim,

$$v_n = \frac{Z^2 \mu}{n^3 m} \frac{\alpha^2 m c^2}{h}. \quad (3.73)$$

Para calcular a frequência f_n da órbita de raio r_n , é necessário calcular, antes, a velocidade v_n nessa órbita. De acordo com os postulados de Bohr,

$$L_n = \mu v_n r_n = n\hbar \quad \Rightarrow \quad v_n = \frac{n\hbar}{\mu r_n}.$$

Das eqs. (3.56) e (3.60), tem-se $a_0 = (4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / e^2) k / m = 1/\alpha c \hbar / m$. Assim,

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} a_0 = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m c} = \frac{n^2}{Z} \frac{1}{\mu} \frac{\hbar}{\alpha c}.$$

Logo,

$$v_n = \frac{Z}{n} \alpha c. \quad (3.74)$$

Finalmente, de acordo com a eq. (3.74), a frequência f_n da órbita de raio r_n , será

$$f_n = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{\frac{Z}{n} \alpha c}{2\pi \frac{n^2}{Z} \frac{1}{\mu} \frac{\hbar}{\alpha c}} = \frac{Z \alpha c}{n} \frac{Z \mu \alpha c}{2\pi \hbar n^2} = \frac{Z^2}{n^3} \frac{\mu}{m} \frac{\alpha^2 m c^2}{h},$$

cujos resultados é idêntico a eq. (3.73).

3.7. Experimento de Franck-Hertz.

O modelo atômico de Bohr é capaz de justificar o fenômeno da quantização observado no espectro atômico. Embora isso tenha sido mostrado somente para átomos monoelétrônicos, fica evidente a validade também para átomos multieletrônicos.

Deve-se lembrar que a quantização da energia nos átomos, já tinha sido proposta por Planck na teoria da radiação de corpo negro.

A confirmação experimental da quantização da energia interna dos átomos, foi realizada em 1914 por James Franck e Gustav Hertz. A Fig. 3.15 mostra o diagrama da montagem experimental, usado por Franck e Hertz.

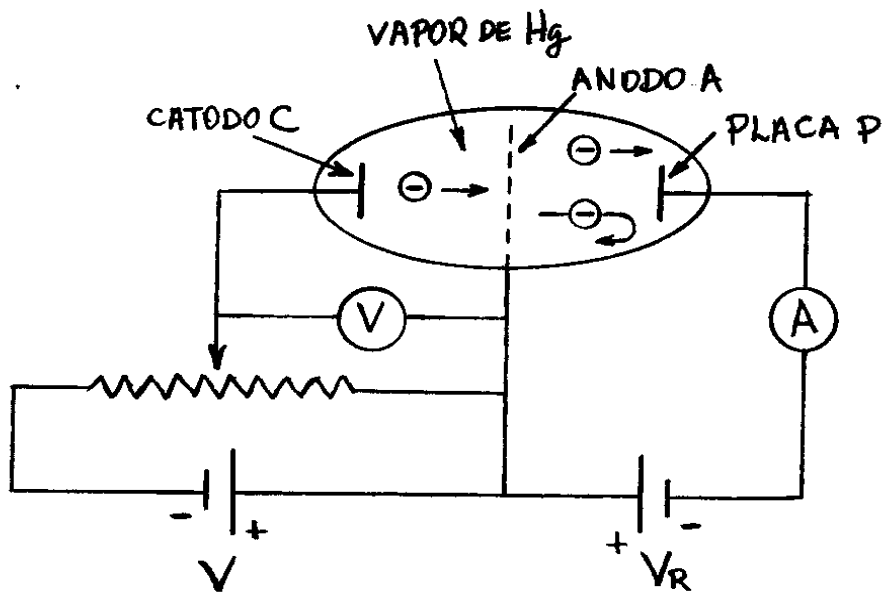


Fig. 3.15 - Diagrama esquemático do experimento de Franck-Hertz.

Elétrons de baixa energia são emitidos, termicamente, de um catodo aquecido C. Esses elétrons são acelerados em direção a um anodo A por uma diferença de potencial V , aplicada entre os dois eletrodos. Alguns dos elétrons podem atravessar orifícios no anodo e alcançar uma placa P, desde que, tenham energia cinética K suficiente para vencer um pequeno potencial retardador V_R , aplicado entre P e A. Os elétrons passam por um meio composto por um gás, ou vapor, de átomos a baixa pressão, cujas propriedades se deseja investigar. A experiência se baseia na medida da corrente elétrica i , que passa através da placa P, em função do potencial acelerador V . A Fig. 3.16 mostra um resultado para o caso de átomos de Hg.

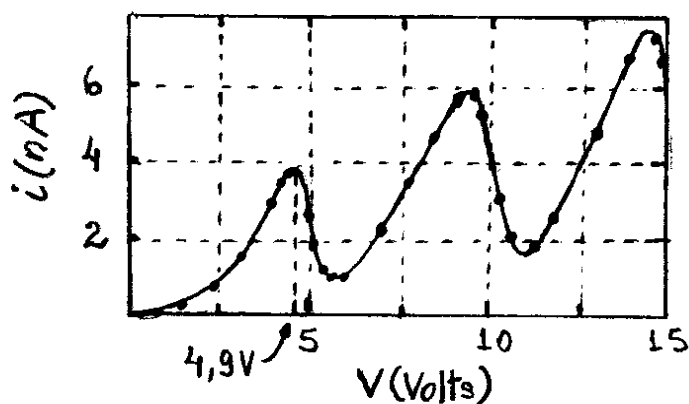


Fig. 3.16 - Resultado do experimento de Franck e Hertz para o vapor de Hg.

Observa-se que, para voltagens aceleradoras baixas, a corrente i cresce com o aumento de V . No entanto, quando V atinge 4,9V, a corrente cai abruptamente.

Deve-se concluir que alguma interação entre os elétrons e os átomos de Hg tem início repentinamente, quando os elétrons adquirem a energia cinética $K = 4,9 \text{ eV}$. Aparentemente, elétrons com energia cinética ligeiramente superior a $4,9 \text{ eV}$, perde parte dela para excitar átomos de Hg e não consegue mais vencer o potencial retardador V_R para atingir a placa P.

Quando V continua crescendo, os elétrons voltam a ganhar energia cinética suficiente após o processo de excitação, superar V_R e atingir P. As mudanças bruscas na curva para determinados valores da energia cinética K dos elétrons, é consistente com a existência de estados quantizados de energia nos átomos de Hg. O primeiro estado excitado do Hg tem uma energia de $4,9 \text{ eV}$ acima do estado fundamental.

Franck e Hertz descobriram que quando a energia dos elétrons é menor do que $4,9 \text{ eV}$, o vapor de Hg não emite nenhuma linha espectral e, quando é um pouco maior que esse valor, apenas uma linha é vista no espectro. A linha observada tem comprimento de onda $\lambda = 253,6 \text{ nm}$, que corresponde exatamente a um fóton de energia $4,9 \text{ eV}$.

A experiência de Franck e Hertz não forneceu somente evidências da quantização da energia, mas também um método para a medida direta das diferenças de energia entre estados quânticos de um átomo.

3.8. Integral de Ação e Regras de Quantização.

O modelo atômico de Bohr foi confirmado por vários resultados experimentais. Entretanto, este fato não acentuou a natureza misteriosa dos postulados nos quais se baseava o modelo. A quantização do momento angular L no modelo atômico de Bohr e a quantização da energia E na teoria de Planck foram, sem dúvida, as propostas mais arrojadas para explicar o comportamento microscópico da matéria.

Em 1916, William Wilson e Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld enunciaram uma regra de quantização válida para todos os sistemas físicos de coordenadas periódicas, que permitiu uma melhor compreensão do tema. Essa regra inclui a quantização de Planck e a quantização de Bohr como casos particulares. De acordo com Wilson e Sommerfeld, para todo sistema físico de coordenadas periódicas, vale a seguinte integral de ação:

$$\int_{\text{ciclo}} p_q dq = n_q h, \quad (3.75)$$

onde q é uma coordenada periódica generalizada, p_q é o momento generalizado associado a essa coordenada, n_q é um número quântico, e \int_{ciclo} é uma integração sobre um ciclo, ou período, da coordenada generalizada q .

Por exemplo, para o oscilador harmônico simples unidimensional, que é o modelo de gerador de radiação de cavidade proposto por Planck, a energia total é

$$E = K + U = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$$

ou

$$\frac{p_x^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (3.76)$$

onde

$$a = \sqrt{2E/k} \quad e \quad b = \sqrt{2mE} \quad (3.77)$$

que é a equação de uma elipse num espaço de fase representado pelas coordenadas p_x e x , e parametrizada pela energia constante E .

Durante um ciclo de oscilação, o ponto (p_x, x) , associado a posição e ao momento da partícula, faz uma volta completa em torno da elipse, como mostra a Fig. 3.17. Dessa forma, a integral $\int_{\text{ciclo}} p_x dx$ fornece a área $A = \pi ab$ da elipse, onde a é o raio maior e b é o raio menor da elipse. Assim, a regra de quantização, definida na eq. (4.75), fornece

$$\int_{\text{ciclo}} p_x dx = \pi ab = nh \quad (3.78)$$

A Fig. 3.17 mostra também como duas elipses consecutivas, correspondentes a n e $n+1$, podem ser construídas a partir da eq. (3.78). Deve-se observar que a área entre as elipses determina o valor de h :

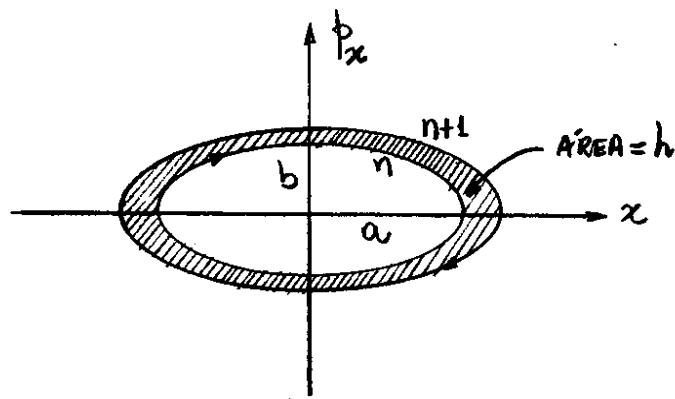


Fig. 3.17- Duas elipses associadas a dois números quânticos consecutivos n e $n+1$.

Substituindo as eqs. (3.77) na eq. (3.78), obtém-se

$$\pi \sqrt{\frac{2E}{k}} \sqrt{2mE} = \frac{2\pi E}{\sqrt{k/m}} = nh$$

ou

$$E = n \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = nh\nu = nh\omega, \quad (3.79)$$

pois

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu \text{ e } h = h/2\pi$$

resultando assim na quantização da energia postulada por Planck. Deve-se observar que quando $n \rightarrow \infty$, a área entre as elipses na Fig. 3.17 tende a se anular, isto é, $h \rightarrow 0$. Nesse caso, qualquer elipse, ou qualquer energia E , será permitida. Esse é o caso em que os resultados quânticos e clássicos se equivalem.

É possível também deduzir a quantização de Bohr para o momento angular a partir da regra de quantização de Wilson-Sommerfeld.

Um elétron, movendo-se numa órbita circular de raio r , tem momento angular L constante. Nesse caso, a variável periódica no tempo é a coordenada angular θ , que cresce linearmente no tempo de 0 a 2π , de 2π a 4π e assim por diante. Portanto, a regra de quantização na eq. (3.75) torna-se

$$\int_{\text{ciclo}} L d\theta = nh$$

ou, como L é constante,

$$\int_{\text{ciclo}} L d\theta = L \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi L \Rightarrow 2\pi L = nh$$

ou
$$L = nh/2\pi = n\hbar, \quad (3.80)$$

o que concorda com a proposta do modelo atômico de Bohr.

3.9 Modelo Atômico de Sommerfeld

O modelo atômico de Bohr prevê transições eletrônicas entre níveis de energia E_n , associadas às interações Coulombianas entre o elétron e o núcleo do átomo. Além dessas transições, outras transições menos intensas, da ordem de $10^{-4}E_n$, também tinham sido observadas no espectro do átomo de hidrogênio. Essas transições, conhecidas como estrutura fina, indicam que um único estado de energia do hidrogênio consiste, na verdade, de vários estados muito próximos.

Na tentativa de explicar a estrutura fina observada no espectro do hidrogênio,

baseado nas regras de quantização discutidas anteriormente, Sommerfeld propôs um modelo atômico no qual o elétron poderia assumir também órbitas elípticas. A ideia de Sommerfeld tem como base a descrição do movimento do elétron em termos de coordenadas polares r e θ , de modo que as condições de quantização sejam

$$\int_{\text{ciclo}} L d\theta = n_{\theta} h \quad \text{e} \quad \int_{\text{ciclo}} p_r dr = n_r h \quad (3.81)$$

em que, $n_{\theta} = 1, 2, 3, \dots$ e $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$

A primeira condição, associada a quantização do momento angular, reproduz a trajetória circular do elétron do átomo de Bohr e a segunda, reproduz trajetórias elípticas previstas nas regras de quantização de Wilson-Sommerfeld. O valor $n_r = 0$, ou $p_r = 0$, ou ainda velocidade radial nula, inclui a trajetória circular como um caso particular. A partir de um cálculo similar ao feito como modelo atômico de Bohr para átomos monoelétrônicos, com a inclusão de possíveis órbitas elípticas para o elétron, Sommerfeld obteve a mesma energia, $E_n = -Z^2/n^2 \mu/m E_0$, obtida anteriormente na eq. (3.57), com a diferença que

$$n = n_{\theta} + n_r \quad (3.82)$$

Como $n_{\theta} = 1, 2, 3, \dots$ e $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$ então, os valores de n são $n = 1, 2, 3, \dots$

exatamente como no modelo atômico de Bohr.

Na sequência, observa-se como os possíveis valores de $n_0 = n - n_r$ podem ser gerados para cada valor de n :

$$n=1 \Rightarrow n_0 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow n_0 = 1$$

$$n=2 \Rightarrow n_0 = 2 - 0 = 2, n_0 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow n_0 = 1, 2$$

$$n=3 \Rightarrow n_0 = 3 - 0 = 3, n_0 = 3 - 1 = 2, n_0 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow n_0 = 1, 2, 3$$

ou, para um valor qualquer de n ,

$$n_0 = 1, 2, 3, \dots, n-1, n \quad (3.83)$$

O número inteiro n é denominado de número quântico principal e n_0 é denominado de número quântico secundário. Para cada valor do número quântico principal n , haverá n diferentes órbitas eletrônicas. Uma dessas órbitas, $n_0 = n$ (correspondente a $n_r = 0$), é a órbita circular descrita no modelo de Bohr, enquanto que as outras são elípticas, como mostra a Fig. 3.18.

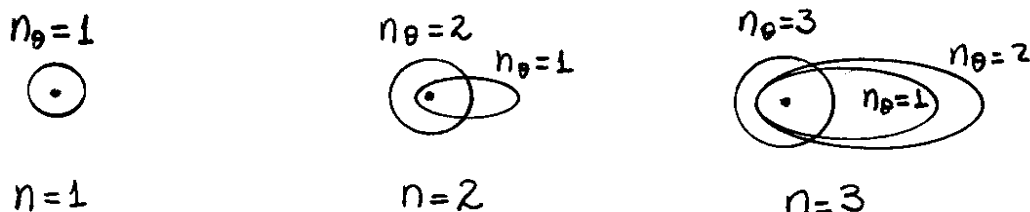


Fig. 3.18 - Órbitas de Bohr-Sommerfeld onde o núcleo está no foco comum das elipses.

A energia total, $E_n = -Z^2/n^2 \mu/m E_0$, depende somente de $n = n_0 + n_r$. Assim, todas as órbitas, ou configurações espaciais, caracterizadas pelo mesmo valor de n , degeneram-se numa mesma energia e portanto são ditas degeneradas. Algumas degenerescências, de fato, existem por causa de certas simetrias do sistema, outras, entretanto, ocorrem devido ao uso de teorias aproximadas e podem ser removidas por teorias mais refinadas.

Sommerfeld "removeu a degenerescência" do átomo de hidrogênio tratando o problema relativisticamente. Sabe-se que para o elétron no átomo de hidrogênio $v/c \approx 10^{-2}$. Assim, espera-se que a correção relativística para a energia total, seja $v^2/c^2 \approx 10^{-4}$, que é exatamente a ordem de grandeza da separação dos níveis de energia na estrutura fina do espectro do hidrogênio.

Após os cálculos, não reproduzidos aqui, Sommerfeld mostrou que as energias do átomo monoelétrônico com órbitas eletrônicas, caracterizadas por números quânticos n e n_0 , são

$$E_{n,n_0} = - \frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2n^2 \hbar^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{n_0} - \frac{3}{4n} \right) \right], \quad (3.84)$$

onde $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$ é a constante de estrutura fina definida na eq. (3.60). A Fig. 3.19 mostra algumas transições entre níveis de energia no hidrogênio de acordo com a eq. (3.84).

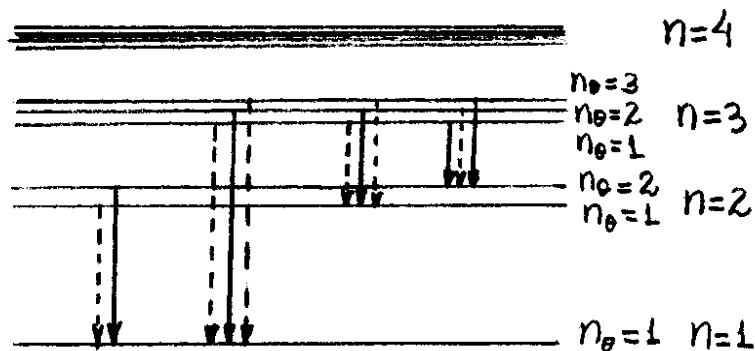


Fig. 3.19 - Transições de estrutura fina no hidrogênio.

As transições indicadas pelas setas contínuas de fato são observadas no espectro do hidrogênio.

Por outro lado, as transições indicadas pelas setas tracejadas não são encontradas no espectro e portanto não devem ser consideradas.

A Fig. 3.19 mostra que as transições permitidas são aquelas que satisfazem a seguinte condição:

$$m_{0i} - m_{0j} = \pm 1 \quad (3.85)$$

Esta condição é denominada de regra de seleção e seleciona as transições que realmente ocorrem.

Uma regra de seleção está associada a uma probabilidade média de ocorrência de determinadas transições. Para uma compreensão satisfatória desse tema, é necessário uma teoria quântica mais elaborada, que será abordada nos próximos capítulos.

Todas as propriedades quânticas discutidas até aqui, fazem parte do que se chama de "velha teoria quântica". Em muitos casos a velha teoria quântica é bem sucedida. No entanto, a teoria tem limitações importantes que podem ser resumidas como:

- 1- A velha teoria quântica se aplica somente a sistemas periódicos. Entretanto, grande parte dos sistemas físicos importantes não são periódicos.

2 - A velha teoria quântica prevê somente as energias dos fótons emitidos, ou absorvidos, nas transições, mas não prevê as taxas, ou número médio por segundo, com que essas transições ocorrem. Tais informações são necessárias para o cálculo das intensidades das linhas espectrais.

3 - A velha teoria quântica é bem sucedida somente para átomos de um elétron, ou átomos mono-elétrônicos. Falha mesmo quando aplicada ao átomo de Hélio neutro, que possui somente dois elétrons.

Em 1925, Erwin Schrödinger propôs uma teoria quântica moderna que, além de estar livre das objeções da velha teoria quântica, permitiu compreender vários outros aspectos relacionados ao mundo microscópico. Embora seja baseada em mais um postulado (postulado de de Broglie), a teoria quântica de Schrödinger é bem diferente da velha teoria quântica. Por exemplo, como na teoria quântica de Schrödinger a localização das partículas microscópicas possui interpretação probabilística, os elétrons não podem seguir órbitas definidas como no átomo de Bohr. Entretanto, a velha teoria quântica é bastante útil como uma primeira aproximação. A razão disso é que a velha teoria quântica é capaz de gerar resultados numericamente corretos usando um formalismo matemático simplificado. Além disso, essa teoria permite uma visualização dos processos atômicos que dificilmente seriam percebidas com a linguagem abstrata da teoria quântica de Schrödinger.

Lista de Exercícios

Questões conceituais

1- Por que é necessário considerar uma folha fina em experiências que visam verificar a fórmula do espalhamento de Rutherford?

2- Compare a atração gravitacional entre um elétron e um próton no estado fundamental de um átomo de hidrogênio com a atração coulombiana entre eles. É razoável ignorar a atração gravitacional nesses casos?

Resp.: $F_{grav} / F_{elet} \approx 10^{-40}$.

3- A fórmula do espalhamento de Rutherford não está de acordo para ângulos de espalhamento muito pequenos. Explique o motivo disso.

4- Em que a relação $\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1)$, que dá a trajetória de uma partícula que se move sob ação de uma força coulombiana repulsiva proporcional ao inverso do quadrado da distância, difere da dedução da trajetória de um planeta que se move sob influência do campo gravitacional do sol?

5- Mostre que a constante de Planck tem unidades de momento angular.

6- Para as órbitas do átomo de hidrogênio de Bohr, a energia potencial é negativa e maior em módulo do que a energia cinética. Qual a implicação disso?

7- Um átomo de hidrogênio pode absorver um fóton cuja energia exceda sua energia de ligação $13,6eV$?

8- A energia de ionização do deutério é diferente da do hidrogênio? Explique.

Problemas

1- Mostre que para um átomo de Thomson, com uma distribuição de carga positiva esfericamente simétrica em todo o volume do átomo, um elétron que se move em uma órbita circular estável, gira com a mesma frequência que teria caso oscilasse ao longo de um diâmetro atômico em torno do centro. (Sugestão: Mostre

que a frequência angular é $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, com $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ onde R é o raio atômico, para ambos os casos).

2- O modelo de Thomson para o átomo de hidrogênio prevê uma frequência única de oscilação para o elétron. Considerando o raio do átomo de hidrogênio como sendo $R = 0,05nm$, calcule o comprimento de onda da radiação emitida por esse átomo. (Sugestão: Use o resultado obtido no Problema 1).

3- Qual deve ser o raio de um átomo de um elétron, no modelo de Thomson, para que ele irradie uma linha espectral de comprimento de onda $\lambda = 600nm$?

4- Um feixe de partículas α de energia $3MeV$ bombardeia uma lâmina de alumínio. Determine a distância D de maior aproximação ao núcleo do átomo de alumínio associada a uma colisão frontal e o número de núcleos por unidade de volume na lâmina, sabendo-se que o número atômico do alumínio é 13, o número de massa é 27 e a densidade é $\rho = 2,70g/cm^3$.

5- Qual a distância de maior aproximação de uma partícula α com $5,30MeV$ a um núcleo de cobre em uma colisão frontal? Resp.: $15,8 \times 10^{-15}m$.

6- Referindo-se ao espalhamento da partícula α por elétrons em um átomo de Thomson, use as leis da conservação do momento linear e da energia para mostrar que a velocidade de recuo de um elétron durante o espalhamento é da ordem do dobro da velocidade da partícula α . (Sugestão: Considere uma partícula de massa M e velocidade v colidindo contra uma partícula em repouso de massa m com $M \gg m$. Suponha que após a colisão a partícula de massa M adquira a velocidade v_1 e a partícula de massa m adquira a velocidade v_2 . Use a conservação do momento para mostrar que $v_1 = v - (m/M)v_2$. Use a conservação da energia para mostrar que $Mv^2 - mv_2^2 = Mv_1^2$. Combine essas duas equações para eliminar v_1 , assumindo $m^2/M^2 \approx 0$ e conclua que $v_2 \approx 2v$).

7- De acordo com a mecânica clássica, um elétron deve sempre se mover em um átomo com qualquer momento angular. Entretanto, de acordo a teoria de Bohr para o átomo de hidrogênio, o momento angular é quantizado na forma $L = n\hbar/2\pi$. O princípio da correspondência pode reconciliar essas duas afirmações? Explique.

8- Mostre que a frequência de revolução de um elétron no modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio é dada por $\nu = 2|E|/hn$, onde E é a energia total do elétron. (Sugestão: Use as equações $|E| = 1/2mv^2 = pv/2$, $v = 2\pi r/T$ válidas para átomos monoelétrônicos e o fato que $L = n\hbar$).

9- (a) Mostre que no estado fundamental do átomo de hidrogênio a velocidade do elétron pode ser escrita como $v = \alpha c$, onde α é a constante de estrutura fina. (b) A partir do valor de α , o que se pode concluir a respeito do fato de se desprezar os efeitos relativísticos nos cálculos de Bohr? (Sugestão: Use a equação $E_0 = 1/2mv^2$ válida para a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio).

10- (a) Calcule os três maiores comprimentos de onda da série de Balmer a partir da fórmula de Bohr. (b) A série de Balmer está entre que limites de comprimento de onda?

11- Calcule o menor comprimento de onda da série de Lyman, da série de Paschen e da série de Pfund para o átomo de hidrogênio. Em qual região do espectro eletromagnético está cada uma?

12- Quanta energia é necessária para remover um elétron de um átomo de hidrogênio em um estado com $n = 8$?

13- Um átomo de hidrogênio é excitado de um estado com $n = 1$ até $n = 4$. (a) Calcule a energia que deve ser absorvida pelo átomo. (b) Calcule e trace sobre um diagrama de níveis de energia as energias dos diferentes fótons que serão emitidos se o átomo voltar a seu estado $n = 1$. (c) Calcule a velocidade de recuo do átomo de hidrogênio, ao fazer uma transição de $n = 4$ a $n = 1$ em um único salto quântico, supondo que ele está inicialmente em repouso.

14- Um átomo de hidrogênio com energia de ligação (energia necessária para remover um elétron) de $0,85eV$ sofre uma transição para um estado com energia de excitação (diferença de energia entre este estado e o fundamental) de $10,2eV$. (a) Calcule a energia do fóton emitido. (b) Mostre essa transição em um diagrama de níveis de energia para o hidrogênio, designando os números quânticos apropriados.

15- Calcule a energia necessária para remover um elétron de um átomo de hélio ionizado utilizando o modelo atômico de Bohr. Resp.: $54,4eV$.

16- Em uma experiência do tipo Franck e Hertz, bombardeiam-se átomo de hidrogênio com elétrons, e obtém-se os potenciais de excitação em $10,21V$ e $12,10V$. (a) Trace um diagrama de níveis de energia para as três possíveis transições observadas. (b) Supondo que as diferenças de energia podem ser expressas como $\Delta E = h\nu$, obtenha os três possíveis valores de ν e dos respectivos comprimentos de onda λ .

17- Suponha que, na experiência de Franck e Hertz, a energia eletromagnética emitida por um átomo de Hg, devido à absorção de energia de elétrons com $4,9eV$ seja expressa por $\Delta E = h\nu$, onde ν é a frequência correspondente à linha de ressonância $\lambda = 253,6nm$ do mercúrio. Calcule o valor de h de acordo com essa experiência e compare com o valor obtido por Planck.

18- Nas estrelas observa-se a série de Pickering no espectro do íon de hélio He^+ . Ela é emitida quando o elétron no He^+ salta para o nível $n = 4$ a partir de níveis de mais altas energias. (a) Obtenha a fórmula dos comprimentos de onda das linhas que pertencem a essa série. (b) Encontre o comprimento de onda limite dessa série. (c) Essa série pertence a qual região do espectro eletromagnético? (d) Calcule o potencial de ionização em elétrons-volt, se o He^+ estiver no estado fundamental.

19- Se o momento angular da terra de massa $M = 6,0 \times 10^{24} kg$, devido ao seu movimento em torno do sol numa órbita de raio $R = 1,5 \times 10^{11} m$, fosse quantizado segundo a relação de Bohr $L = n\hbar$, qual seria o valor do número quântico n ? Poderíamos detectar tal quantização?