

NOTAS DE AULAS DE FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 2

PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIÇÃO

Edição de junho de 2014

CAPÍTULO 2 – PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO

ÍNDICE

- 2.1- Radiação Térmica
- 2.2- Radiação de Cavidade e o Corpo Negro
- 2.3- Teoria Clássica de Rayleigh - Jeans para a Radiação de Corpo Negro
- 2.4- Teoria Quântica de Planck para a Radiação de Corpo Negro
- 2.5- Efeito Fotoelétrico
- 2.6- Efeito Compton
- 2.7- Natureza Dual da Radiação
- 2.8- Produção de Raios X
- 2.9- Produção e Aniquilação de Pares

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **5 aulas de quatro créditos**.

CAPÍTULO 2

PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO

2.1- Radiação Térmica

Um trabalho apresentado por Max Karl Ludwig Planck, em 14 de dezembro de 1900, com o título "Sobre a Teoria da Lei da Distribuição de Energia do Espectro Normal", mostrou falhas importantes na teoria clássica da Termodinâmica. Essa data marcou o início de mais uma revolução na física denominada Teoria quântica.

Assim como a Teoria da relatividade, a Teoria quântica é um caso geral que inclui a Teoria clássica como um caso particular.

Os sólidos aquecidos emitem uma radiação denominada de radiação térmica que, em geral, tem uma distribuição espectral contínua de frequências. As radiações térmicas são ondas eletromagnéticas geradas pelas oscilações das partículas carregadas que compõem os sólidos aquecidos.

Em baixas temperaturas, um sólido pode ser visto, não por emissão, mas por reflexão da luz. Entretanto, em altas temperaturas os sólidos podem emitir luz visível, embora mais de 90% esteja na região do infravermelho do espectro eletromagnético. Carvão em brasa, filamento aquecido de uma lâmpada e estrelas, são exemplos de sólidos aquecidos que irradiam no visível.

A energia irradiada por um sólido aquecido a uma temperatura T , em função da frequência ν , é descrita em termos de uma distribuição espectral de intensidades de radiação $I(\nu)$, ou simplesmente, radiância espectral $R(\nu)$. Adota-se aqui a primeira nomenclatura do fenômeno. A partir da distribuição espectral de intensidades $I(\nu)$, é possível determinar a intensidade de radiação dI emitida entre ν e $\nu + d\nu$, como $dI = I(\nu)d\nu$. Em particular, a intensidade de radiação I_{12} , emitida em um intervalo de frequências entre ν_1 e ν_2 e a intensidade de radiação total I_T , são dados, respectivamente, por

$$I_{12} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I(\nu) d\nu \quad ; \quad I_T = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu \quad (2.1)$$

A distribuição espectral de intensidades de radiação em um sólido aquecido a uma temperatura T , também pode ser descrita em termos do comprimento de onda λ , tal que

$$I_T = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda \quad (2.2)$$

A integral sobre ν pode ser transformada em uma integral sobre λ , como

$$I_T = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu = \int_{\infty}^0 I(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = - \int_0^{\infty} I(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda.$$

Os limites de integração foram invertidos por causa da relação inversa $\nu = c/\lambda$ entre ν e λ . Comparando o último integrando dessa equação com o último integrando da eq. (2.2), obtém-se

$$I(\lambda) = - I(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = I(\nu) \frac{c}{\lambda^2} \quad (2.3)$$

pois, como $\nu = c/\lambda$ então $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$. Em geral, para quaisquer funções $F(\lambda)$ e $F(\nu)$,

$$F(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} F(\nu) \quad (2.4)$$

Assim, a dependência de uma função $F(\nu)$ com ν não é equivalente a dependência de uma função $F(\lambda)$ com λ .

2.2. Radiação de Cavidade e o Corpo Negro.

Em geral, o espectro de radiação térmica emitido por um sólido aquecido depende da sua composição. Sólidos formados por diferentes materiais exibem diferentes espectros de radiação térmica. Esse fato traz sérias dificuldades na elaboração de uma teoria básica para explicar o fenômeno. Entretanto, a experiência mostra que é possível definir um sólido aquecido ideal que emite um espectro de radiação térmica que independe da natureza do material. Trata-se do radiador de cavidade, ou cavidade ressonante. Tal dispositivo se refere a uma cavidade contida no interior de um sólido qualquer, aquecido a uma temperatura T , que se comunica com o meio externo através de um pequeno orifício como mostra a Fig. 2.1.

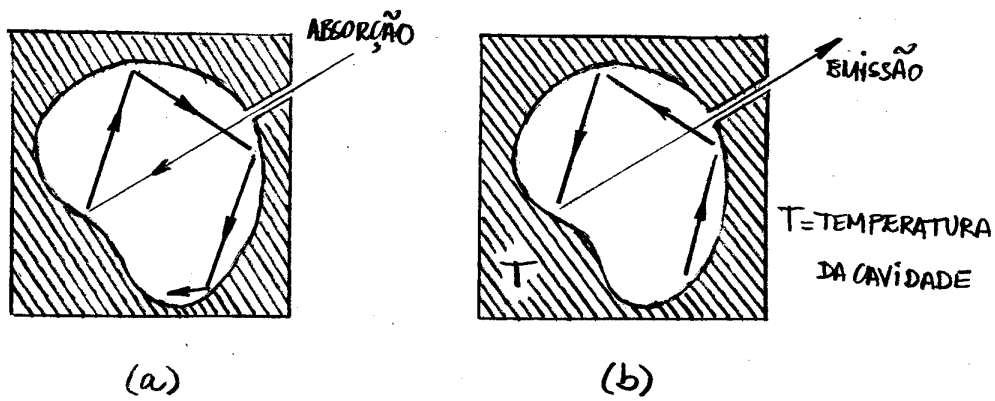


Fig. 2.1 - Caverna construída no interior de um sólido dotado de um pequeno orifício. (a) Absorção de radiação térmica pela caverna e (b) emissão de radiação térmica pela caverna, após aquecimento a uma temperatura T .

Praticamente, toda a radiação, vinda do meio externo, que entra na caverna através do orifício, não conseguindo sair dela, acaba sendo absorvida pelas suas paredes. Com a agitação térmica, as partículas carregadas que compõem as paredes da caverna, oscilam e produzem radiação térmica, que é emitida através do orifício. Por causa da habilidade de absorver toda a radiação vinda do meio externo, o orifício da caverna tem características de um corpo negro e a radiação térmica emitida por ele é conhecida como radiação de corpo negro.

Em 1879, Josef Stefan, usando argumentos empíricos, demonstrados teoricamente mais tarde por Ludwig Edward Boltzmann, concluiu que a intensidade de radiação total I_T , emitida por uma caverna aquecida, a uma temperatura T , deve ser dada por

$$I_T = \sigma T^4 \quad (2.5)$$

onde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ é uma constante universal denominada de Constante de Stefan-Boltzmann e a eq.(2.5) é conhecida como a lei de Stefan-Boltzmann.

A Fig. 2.2 mostram as distribuições espectrais de intensidades de radiação $I(\lambda)$ de cavidade, ou corpo negro, para diferentes temperaturas T , obtidas por Otto Richard Lummer e Ernest Pringheim em 1899.

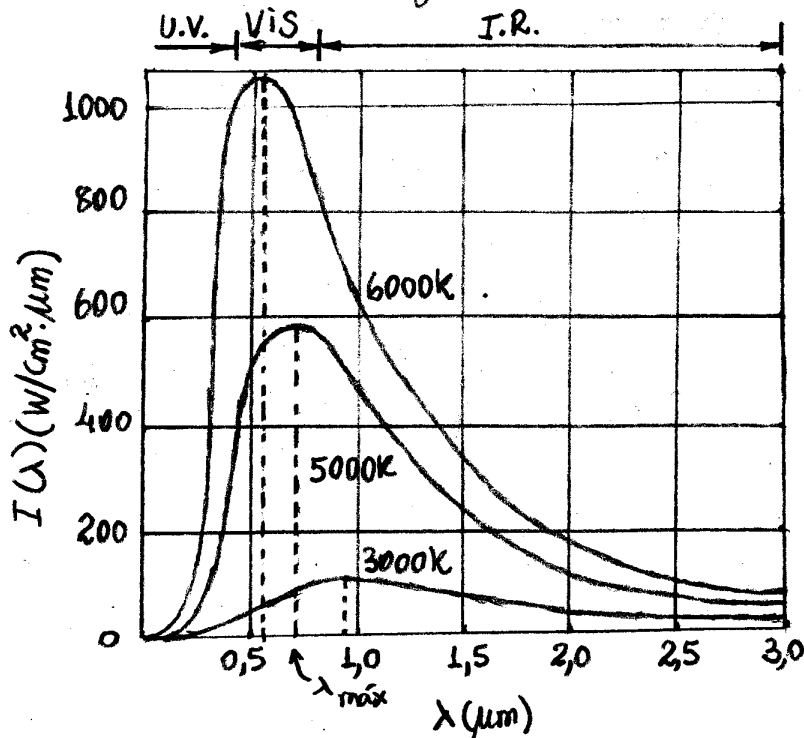


Fig. 2.2 - Distribuições espectrais de intensidades de radiação $I(\lambda)$ para um corpo em termos de comprimentos de onda λ e temperatura T .

A Fig. 2.2 mostra que os máximos das distribuições espectrais de intensidades de radiação, correspondentes aos comprimentos de onda $\lambda_{\text{máx}}$, ou frequências $\nu_{\text{máx}} = c/\lambda_{\text{máx}}$, deslocam-se do vermelho para o azul à medida que a temperatura T aumenta.

Em 1893, Wilhelm Jan Wien, usando argumentos da Termodinâmica, já tinha mostrado que o valor de $\lambda_{\text{máx}}$ é inversamente proporcional à temperatura T , tal que

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (2.6)$$

Tal comportamento ficou conhecido como a lei do deslocamento de Wien.

O pirômetro óptico é um instrumento que utiliza a lei do deslocamento de Wien para registrar a temperatura de um sólido aquecido a partir da sua distribuição espectral de intensidades de radiação.

As leis empíricas de Stefan-Boltzmann e do deslocamento de Wien, são expressões matemáticas que se aplicam somente ao caso idealizado da radiação de corpo negro, emitido por um radiador de cavidade. Por outro lado, a radiação térmica emitida a partir da superfície de um sólido aquecido, varia com a temperatura T de uma forma um pouco mais complicada, diferindo conforme o material. Nesses casos, é comum escrever a lei de Stefan-Boltzmann na sua forma generalizada:

$$J_T = e I_T = e \sigma T^4 \quad (2.7)$$

onde e é a emissividade do sólido que varia entre 0 e 1, dependendo do material. No caso do radiador de cavidade $e=1$. A Fig. 2.3 mostram as distribuições espectrais de intensidades de radiação em função do comprimento de onda λ para o tungstênio e para uma cavidade construída de mesmo material, ambos aquecidos a uma mesma temperatura $T = 2000 \text{ K}$.

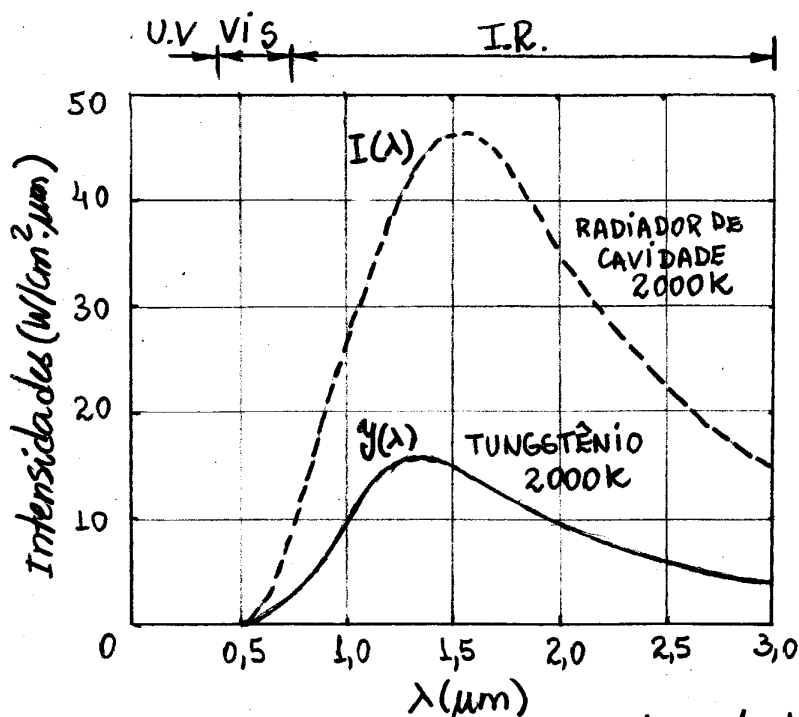


Fig. 2.3. Distribuição espectral de intensidades de radiação para o tungstênio e para a cavidade construída de mesmo material, ambos submetidos a uma mesma temperatura T .

Dev-se observar que a radiação térmica proveniente da cavidade é mais intensa do que a emitida pelas suas paredes externas. Como na eq. (2.2), a intensidade de radiação total é dada pela área abaixo da curva $I(\lambda)$ ou $\gamma(\lambda)$ em função de λ . As intensidades de radiação totais emitidas pelo tungstênio e pela cavidade correspondente, calculados a partir das curvas da Fig. 2.3, são dados respectivamente por, $\gamma_T = 23,5 \text{ W/cm}^2$ e $I_T = 90,0 \text{ W/cm}^2$. Substituindo esses dados na eq. (2.7), obtém-se a emissividade $\epsilon = 0,26$ para o tungstênio à temperatura $T = 2000 \text{ K}$.

Exemplo 2.1

Supondo que a superfície das estrelas se comportam como corpos negros, faça uma estimativa, (a) da temperatura T e (b) da intensidade de radiação total I_T , para o Sol e para a estrela do Norte, sabendo que para o Sol $\lambda_{\text{máx}} = 510 \text{ nm}$ e para a estrela do Norte $\lambda_{\text{máx}} = 350 \text{ nm}$.

(a) Usando a lei do deslocamento de Wien, obtêm-se

para o Sol: $510 \times 10^{-9} T = 2,9 \times 10^{-3} \Rightarrow T = 5700 \text{ K}$

para a estrela do Norte: $350 \times 10^{-9} T = 2,9 \times 10^{-3} \Rightarrow T = 8300 \text{ K}$.

Como a estrela do Norte emite mais intensamente no ultravioleta (U.V.), então ela é mais quente do que o Sol. O Sol emite mais intensamente na região do visível, sugerindo que, durante a evolução humana, os olhos do homem tornaram-se mais sensíveis aos comprimentos de onda dessa região do espectro eletromagnético.

(b) Como as superfícies das estrelas se comportam como um corpo negro, então a lei de Stefan-Boltzmann, fornece

para o Sol: $I_{TS} = 5,67 \times 10^{-8} \times (5700)^4 = 5,9 \times 10^7 \text{ W/m}^2 \approx 6000 \text{ W/cm}^2$.

para a Estrela do Norte: $I_{TN} = 5,67 \times 10^{-8} \times (8300)^4 \approx 27000 \text{ W/cm}^2$.

2.3. Teoria Clássica de Rayleigh-Jeans para a Radiação de Corpo Negro.

No início do século XX, John William Strutt Rayleigh e James Hopwood Jeans, utilizaram a teoria clássica para estudar a densidade de energia de radiação de cavidade, ou de corpo negro, o que resultou em sérias inconsistências com dados experimentais.

Nesta seção, propõe-se apresentar os cálculos realizados por Rayleigh e Jeans e destacar as inconsistências observadas. Na seção subsequente, propõe-se apresentar a teoria quântica de Max Planck para a radiação de corpo negro, que estabeleceu a quantização da energia como um novo princípio físico.

O comportamento espectral da radiação de corpo negro emitida através do orifício existente em uma cavidade, equivalente ao mostrado na Fig. 2.1, pode ser representado pela distribuição espectral de intensidades de radiação $I(\lambda)$. Entretanto, é mais útil representar a distribuição espectral de intensidades de radiação $I(\lambda)$ em termos de uma distribuição espectral de densidades de energia de radiação $u(\lambda)$ confinada no interior da cavidade. Tais distribuições são proporcionais e, de acordo com o exemplo 2.2, os cálculos mostram que

$$I(\lambda) = c/4 u(\lambda) \quad (2.8)$$

ou, em termos de frequência ν ,

$$I(\nu) = c/4 u(\lambda) \quad (2.9)$$

pois, da eq. (2.3), $I(\lambda) = c/\lambda^2 I(\nu)$ e $u(\lambda) = c/\lambda^2 u(\nu)$.

Exemplo 2.2 - FACULTATIVO

Use a cavidade esférica com orifício, ilustrada na Fig. 2.4, para mostrar que a distribuição espectral de intensidades de radiação I pode ser escrita em termos da distribuição espectral de densidades de energia de radiação u , confinada no seu interior, como $I = c/4 u$.

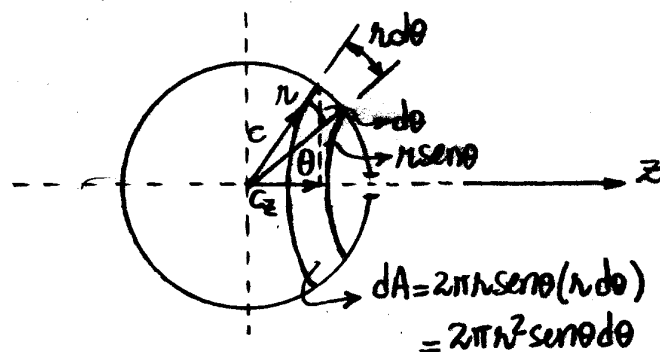


Fig. 2.4 - Cavidade esférica com orifício.

Deve-se observar que somente um dos hemisférios contém um orifício e, portanto, num intervalo de tempo Δt a energia irradiada E será metade da energia no interior da cavidade E_c . Além disso, como somente radiações de velocidade média $\langle C_z \rangle$ passam pelo orifício, então

$$I = \frac{E}{\Delta t} \frac{1}{A} \frac{\langle \Delta z \rangle}{\langle \Delta z \rangle} = \frac{1}{2} \langle C_z \rangle \frac{E_c}{\Delta V} = \frac{1}{2} \langle C_z \rangle u,$$

sendo $\langle C_z \rangle$ ponderada na área da semi-esfera, isto é,

$$\begin{aligned} \langle C_z \rangle &= \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C_z dA}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dA} = \frac{2 \int_0^{\pi/2} C_z dA}{2 \int_0^{\pi/2} dA} = \frac{\int_0^{\pi/2} (C \cos \theta) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta} \\ &= \frac{2\pi r^2 C \int_1^0 x dx}{2\pi r^2 \int_1^0 dx} = \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

onde adotou-se a mudança de variável $x = \cos \theta$. Assim, combinando as duas últimas equações, obtém-se

$$I = C/4 u$$

Como se queria demonstrar.

Para evitar complicações desnecessárias e ao mesmo tempo não perder aspectos gerais do problema, deve-se assumir uma cavidade cúbica de lados de comprimento L e perfeitamente condutora, como mostra a Fig. 2.5.

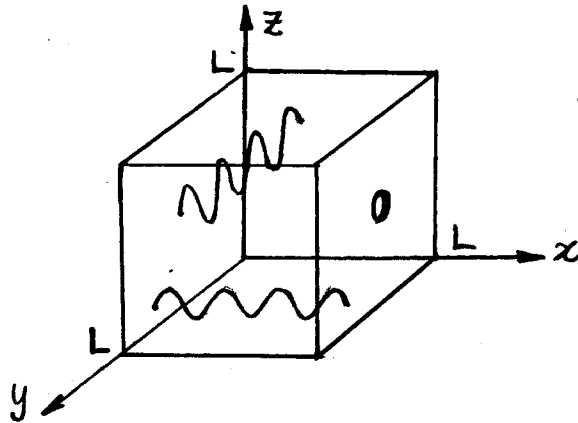


Fig. 2.5 - Cavidade cúbica perfeitamente condutora.

Nesse caso, a radiação eletromagnética fica confinada no interior da cavidade cúbica e as três componentes do campo elétrico e do campo magnético, podem ser tratadas separadamente. Por causa das múltiplas reflexões nas paredes planas e paralelas da cavidade cúbica, as componentes dos campos recombinam-se formando ondas eletromagnéticas estacionárias que, assim como as componentes, satisfazem as equações de Maxwell. Como se verá mais adiante, a energia total das ondas eletromagnéticas estacionárias é armazenada na forma de modos eletromagnéticos discretos de frequências ν , onde cada modo tem uma energia média $\langle E \rangle$. Assim, a distribuição espectral de densidades de energia de radiação $u(\nu)d\nu$, armazenada no intervalo de frequências entre

ν e $\nu+d\nu$, pode ser calculado contando o número de modos eletromagnéticos $\eta(\nu)d\nu$, no mesmo intervalo de frequências, multiplicando pela energia $\langle E \rangle$ de cada modo e dividindo pelo volume $V=L^3$ da cavidade, isto é,

$$u(\nu)d\nu = \frac{\eta(\nu)d\nu}{V} \langle E \rangle. \quad (2.10)$$

A função distribuição $\eta(\nu)$ define o número de modos ν por unidade de intervalos de frequências $d\nu$ e é denominada de densidade de estados eletromagnéticos. Não é difícil perceber que $\eta(\nu)$ depende somente do volume V da cavidade e não da sua forma.

Para calcular os modos eletromagnéticos discretos associados às ondas eletromagnéticas estacionárias confinadas no interior da cavidade cúbica, pode-se recorrer às propriedades básicas do eletromagnetismo clássico.

O comportamento espacial e temporal dos campos \vec{E} e \vec{B} são obtidos por meio das soluções das equações de Maxwell. Entretanto, por causa da natureza vetorial desses campos, a solução geral do problema deve incluir suas três componentes espaciais. Para alcançar esse objetivo, deve-se resolver inicialmente uma situação hipotética onde a cavidade é unidimensional de comprimento L . Com base nos resultados, estende-se a solução ao caso geral.

Seja então a propagação de uma onda eletromagnética ao longo do eixo x , onde paredes metálicas planas e paralelas, encontram-se nas posições $x=0$ e $x=L$, como mostra a Fig. 2.6 (a).

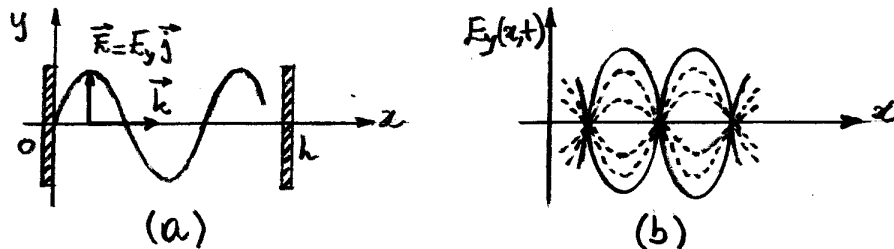


Fig. 2.6- Propagação da onda eletromagnética estacionária ao longo do eixo x .

A componente $E_y = E_y(x,t)$ do campo elétrico \vec{E} , deve satisfazer a equação da onda eletromagnética

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Como se pode verificar por substituição direta, a onda plana co-senoidal que se desloca para a direita $E_y(x,t) = E_0 y \cos(kx - \omega t)$ e a onda plana co-senoidal que se desloca para a esquerda $E_y(x,t) = -E_0 y \cos(-kx - \omega t) = -E_0 y \cos(kx + \omega t)$, são soluções apropriadas da eq. (2.11). Para uma verificação é importante lembrar que a velocidade da luz c no vácuo pode ser escrita em termos do número de onda $k = 2\pi/\lambda$ e da frequência angular $\omega = 2\pi\nu$, como $c = \lambda\nu = 2\pi/k \cdot \omega/2\pi = \omega/k$. Como a eq. (2.11) é uma equação diferencial parcial (EDP) linear de 2ª ordem, a combinação linear, ou superposição, das duas soluções anteriores

$$E_y(x,t) = E_0 y [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] = E_0 y \sin \omega t \sin kx \quad (2.12)$$

fornece a solução geral do problema.

Pode-se recorrer a identidade trigonométrica $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, para demonstrar a eq. (2.12). Também por substituição direta, pode-se verificar que a eq. (2.12) é de fato solução da eq. (2.11). A eq. (2.12) descreve uma onda senoidal ($\sin kx$) fixa no tempo cuja amplitude ($E_0\sin\omega t$) tem uma variação senoidal no tempo. Esse comportamento é mostrado na Fig. 2.6(b) e fornece a descrição geral das ondas eletromagnéticas estacionárias que se formam no interior da cavidade unidimensional.

Como a onda eletromagnética é uma vibração transversal, com o campo elétrico \vec{E} perpendicular à direção de propagação, então esse campo é paralelo às paredes da cavidade cúbica metálica. Por causa disso, ele acaba sendo neutralizado com o surgimento de correntes elétricas na superfície do condutor. Assim, deve-se esperar que as ondas eletromagnéticas estacionárias, que se propagam ao longo do eixo x , apresentam nodos de energia nos planos $x=0$ e $x=L$, exatamente como ocorre com uma corda oscilante com ambas as extremidades fixas.

Para que o campo $E_y(x,t)$, na eq. (2.12), seja nulo em $x=L$, é necessário que $\sin kL = 0$ ou

$$k = n\pi/L, \quad \text{com } n=1,2,3,\dots \quad (2.13)$$

Como $k=2\pi/\lambda$, os comprimentos de onda λ das ondas estacionárias devem assumir somente valores discretos como

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.14)$$

ou, em termos de frequência ν ,

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L} n, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.15)$$

Esta condição determina um conjunto de valores possíveis de comprimentos de onda λ , ou frequência ν , das ondas eletromagnéticas estacionárias que se propagam na cavidade unidimensional. A Fig. 2.7 mostra as três primeiras ondas eletromagnéticas estacionárias, de acordo com a eq. (2.14), definidas para $n=1,2,3$.

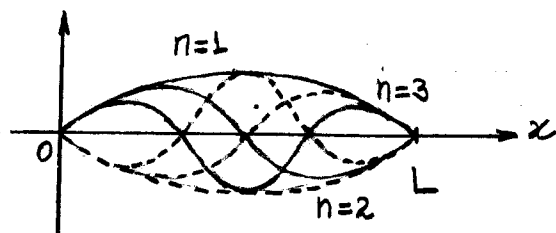


Fig. 2.7 - Três primeiras ondas estacionárias definidas para $n=1,2,3$.

Condições similares ocorrem também para as outras duas componentes do campo elétrico individualmente.

O exemplo 2.3 mostra que, no caso tridimensional, as frequências dos modos eletromagnéticos no interior da cavidade são

$$\nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \quad \text{com } n_x, n_y, n_z = 1,2,3,\dots \quad (2.16)$$

uma equação análoga à eq. (2.15) que, entretanto, depende dos números inteiros n_x, n_y, n_z correspondentes a cada uma das coordenadas espaciais.

Exemplo 2.3 - FACULTATIVO.

Usar a versão tridimensional da equação da onda eletromagnética para mostrar que as frequências dos modos eletromagnéticos no interior da cavidade são dadas pela eq. (2.16).

No caso tridimensional, o campo elétrico é uma função das três componentes espaciais, isto é, $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$. Nesse caso, a equação de onda apropriada para a onda eletromagnética é

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.18)$$

é o operador diferencial laplaciano, ou "nabla". Substituindo a eq. (2.18) na eq. (2.17) e escrevendo o campo elétrico como $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$, obtém-se

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

e equações similares para as componentes E_y e E_z .

Em analogia ao caso unidimensional, as ondas eletromagnéticas estacionárias devem satisfazer as seguintes condições de contorno para a cavidade

cúbica metálica:

$$\begin{aligned} E_x \parallel \text{eixos } y \text{ e } z &\Rightarrow E_x = 0 \text{ em } y=0, L \text{ e } z=0, L, \\ E_y \parallel \text{eixos } x \text{ e } z &\Rightarrow E_y = 0 \text{ em } x=0, L \text{ e } z=0, L, \\ E_z \parallel \text{eixos } x \text{ e } y &\Rightarrow E_z = 0 \text{ em } x=0, L \text{ e } y=0, L. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como as componentes do campo elétrico \vec{E} perpendiculares às paredes da cavidade cúbica metálica são incapazes de gerar correntes elétricas sobre a superfície condutora, as seguintes condições de contorno devem ser incluídas no caso tridimensional:

$$\begin{aligned} E_x \perp \text{eixos } y \text{ e } z &\Rightarrow E_x \neq 0 \text{ em } x=0, L, \\ E_y \perp \text{eixos } x \text{ e } z &\Rightarrow E_y \neq 0 \text{ em } y=0, L, \\ E_z \perp \text{eixos } x \text{ e } y &\Rightarrow E_z \neq 0 \text{ em } z=0, L. \end{aligned} \quad (2.21)$$

As versões tridimensionais da equação de onda eletromagnética unidimensional, dada na eq. (2.12), devem ser soluções das equações de onda como a eq. (2.19) e também satisfazer as condições de contorno dadas nas eqs. (2.20) e (2.21). Não é difícil verificar que tais equações são:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \sin \omega t, \\ E_y &= E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \sin \omega t, \\ E_z &= E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \sin \omega t, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

Deve-se observar que os termos cossenoidais são incluídos para satisfazer as condições de contorno dadas na eq. (2.21). Substituindo a primeira eq. (2.22) na eq. (2.19), obtém-se

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)E_x = -\frac{1}{c^2}\omega^2 E_x$$

ou, usando a eq. (2.23) e o fato que $\omega = 2\pi\nu$, obtêm-se a eq. (2.16).

A contagem do número de modos $\eta(\nu)d\nu$, no intervalo de frequência entre ν e $\nu + d\nu$, pode ser calculada construindo uma esfera de raio

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \quad (2.24)$$

em coordenadas retangulares no espaço n_x, n_y, n_z , tal que o conjunto de inteiras (n_x, n_y, n_z) definam pontos no interior de um octante, como mostra a Fig. 2.8. O espaço é limitado a um octante somente, porque $n_x, n_y, n_z > 0$.

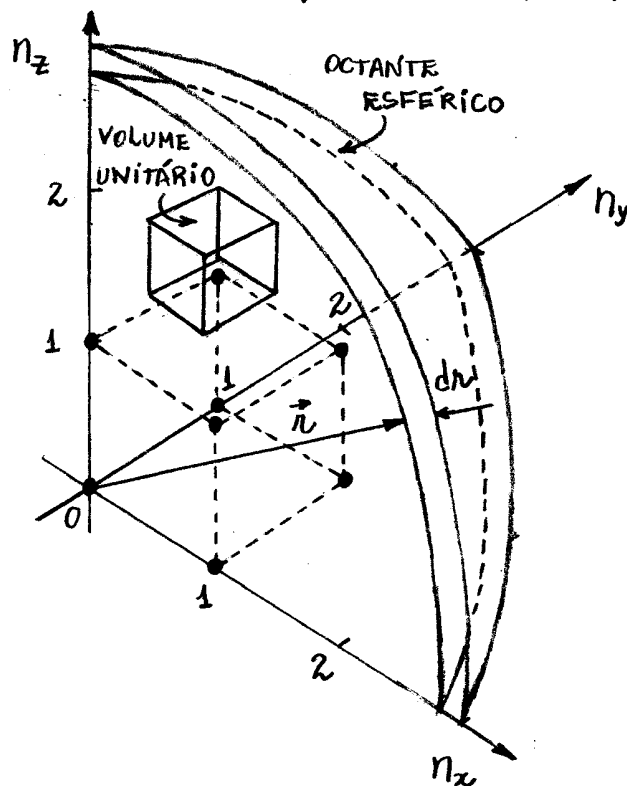


Fig. 2.8 - Octante esférico de raio r no espaço n_x, n_y, n_z .

O volume total do octante esférico pode ser dividido em volumes unitários contendo, cada um, somente um ponto (n_x, n_y, n_z) , tal que a densidade de pontos μ_p seja

$$\mu_p = 1 \text{ ponto / unid. de Volume} \quad (2.25)$$

Cada ponto define uma frequência ν , cuja dependência com o raio r , de acordo com as eqs. (2.16) e (2.24), é

$$r = \frac{2L}{c} \nu \quad (2.26)$$

Assim, o cálculo do número de modos $\eta(\nu)d\nu$ entre ν e $\nu+d\nu$, é equivalente ao cálculo do número de pontos $\eta(r)dr$, contidos na região esférica entre os raios r e $r+dr$. O número $\eta(r)dr$ pode ser calculado multiplicando o volume esférico entre os raios r e $r+dr$, pela densidade de ponto μ_p , isto é,

$$\eta(\nu)d\nu = \eta(r)dr = \left(\frac{1}{8} 4\pi r^2\right) dr \mu_p = \frac{1}{2} \pi r^2 dr, \quad (2.27)$$

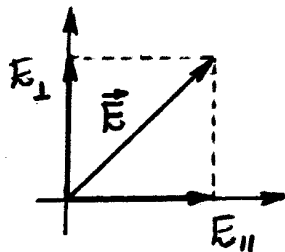
pois $\mu_p = 1$. Substituindo a eq. (2.26) e sua derivada, $dr = 2L/c d\nu$, na equação anterior, obtém-se

$$\eta(\nu)d\nu = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2L}{c} \nu\right)^2 \left(\frac{2L}{c}\right) d\nu = \frac{4\pi \nu^2 V}{c^3} d\nu \quad (2.27)$$

onde, tomou-se o volume da cavidade como $V = L^3$.

Finalmente, deve-se multiplicar o resultado da eq. (2.27) por um fator 2, pois existem na verdade duas ondas independentes, correspondentes a dois possíveis estados de polarização para a radiação eletromagnética, como mostrado na Fig. 2.9.

Fig. 2.9 - Duplo estado de polarização para a onda eletromagnética.



Assim, a forma correta de se escrever a eq. (2.27) é

$$\eta(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (2.28)$$

Combinando a eq. (2.28) com a eq. (2.10), obtém-se

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \langle \epsilon \rangle d\nu. \quad (2.29)$$

A energia média $\langle \epsilon \rangle$ dos modos eletromagnéticos no interior da cavidade cúbica, pode ser calculada utilizando o conceito clássico termodinâmico do "princípio da equipartição da energia". Esse princípio se aplica a um sistema de partículas formado por átomos ou moléculas, livres de potenciais, em equilíbrio térmico a uma temperatura T , e afirma que: "A energia cinética média por átomo, ou molécula, por grau de liberdade, é

onde $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ $\frac{1}{2} k_B T$ é a constante de Boltzmann."

Deve-se observar que as energias dos modos eletromagnéticos resultam das oscilações das partículas carregadas que formam as paredes da cavidade cúbica. O princípio da equipartição da energia pode ser aplicado a esse sistema de partículas desde que se considere também a energia potencial de confinamento das partículas. No equilíbrio térmico, em média, as contribuições da energia cinética e potencial para a energia total, são iguais a $\frac{1}{2} k_B T$. Logo, nessas condições, a energia total média será $k_B T$. No caso em questão, tem-se somente um grau de liberdade, dado pela direção de oscilação das partículas carregadas geradoras dos modos eletromagnéticos. Conclui-se, portanto, que cada modo eletromagnético tem energia total média dada por

$$\langle E \rangle = k_B T. \quad (2.30)$$

É importante mencionar que, do ponto de vista da teoria clássica, a energia total média tem o mesmo valor para todos os modos eletromagnéticos na cavidade, independentemente de suas frequências. Substituindo a eq. (2.30) na eq. (2.29), obtém-se a densidade de energia de radiação no interior da cavidade, com frequências entre ν e $\nu + d\nu$, de acordo com a previsão clássica, como

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi \nu^2 k_B T}{c^3} d\nu \quad (2.31)$$

ou, em termos de comprimento de onda λ ,

$$u(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} d\lambda \quad (2.32)$$

pois $\nu = c/\lambda$ e, de acordo com a eq. (2.3), $u(\lambda) = c/\lambda^2 u(\nu)$. As eqs. (2.31) e (2.32) são referidas como a Lei de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro.

A Fig. 2.10 mostra o comportamento da distribuição espectral de intensidades $I(\lambda) = c/4 \cdot u(\lambda)$, obtida a partir da eq. (2.32), para $T=2000\text{K}$, bem como o resultado experimental correspondente. Observa-se uma discordância evidente. A distribuição espectral de intensidades de radiação clássica se aproxima do resultado experimental somente no limite para grandes comprimentos de onda λ , ou para pequenas frequências ν . A medida que o comprimento de onda λ diminui, ou a frequência ν cresce, o resultado teórico tende ao infinito enquanto que o resultado experimental tende a zero.

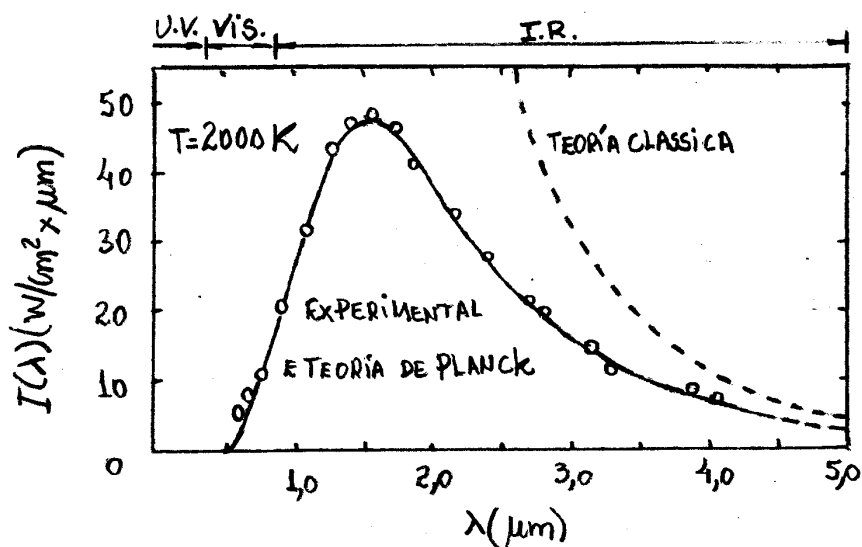


Fig. 2.10 - Comparação entre resultados, clássico, quântico e experimental da distribuição espectral de corpo negro a $T=2000\text{K}$.

A tendência ao infinito para pequenos comprimentos de onda λ , ou grandes frequências ν , com a teoria clássica de Rayleigh-Jeans, ficou conhecida como a catástrofe do ultravioleta.

O problema da radiação de corpo negro foi resolvido por Max Planck, admitindo uma hipótese sobre o princípio da equipartição da energia contraditória com a teoria clássica da Termodinâmica. Na seção seguinte será discutido os detalhes da Teoria de Planck bem como a sua importância para a origem da Teoria quântica moderna.

2.4 - Teoria quântica de Planck para a Radiação de Corpo Negro

Na tentativa de solucionar a inconsistência entre a teoria clássica e a experiência para a radiação de cavidade, Max Karl Ernst Ludwig Planck teve que assumir uma hipótese que violava o princípio da equipartição da energia. Planck percebeu que o resultado experimental não era reproduzido, quando

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \langle E \rangle = k_B T \quad \text{e} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle E \rangle = 0,$$

isto é, a energia total média tende a $k_B T$, como na teoria clássica, quando a frequência tende a zero, mas tende a zero quando a frequência tende ao infinito. Assim, Planck supôs que a energia média dos modos eletromagnéticos seja uma função da frequência ν , contrariando o princípio da equipartição da energia.

O princípio da equipartição da energia tem sua origem na distribuição de partículas clássicas de Boltzmann, que fornece a probabilidade de encontrar o sistema, em equilíbrio térmico a uma temperatura T , com uma energia entre E e $E+dE$. Dispensando os detalhes da demonstração, que serão considerados em capítulos posteriores, a distribuição de partículas clássicas de Boltzmann, é dada por

$$P(E)dE = \frac{1}{k_B T} e^{-E/k_B T} dE. \quad (2.33)$$

A energia média $\langle E \rangle$ pode ser calculada a partir da distribuição de Boltzmann observando que

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E P(E) dE}{\int_0^{\infty} P(E) dE} = \int_0^{\infty} E P(E) dE = \text{ÁREA} . \quad (2.34)$$

O denominador fornece a probabilidade de encontrar o sistema com alguma energia E sendo, portanto, igual a unidade. A integral na eq. (2.34) pode ser calculada utilizando a eq. (2.33) e o resultado reproduz o princípio da equipartição da energia, com

$$\langle E \rangle = k_B T . \quad (2.35)$$

A eq. (2.34) mostra que $\langle E \rangle = k_B T$ é a área abaixo do gráfico de $E P(E)$ em função de E , como mostra a Fig. 2.11. A função $E P(E)$ foi obtida diretamente da eq. (2.33). Pode-se mostrar que o ponto de máximo desta função também ocorre para $E = k_B T = \langle E \rangle$.

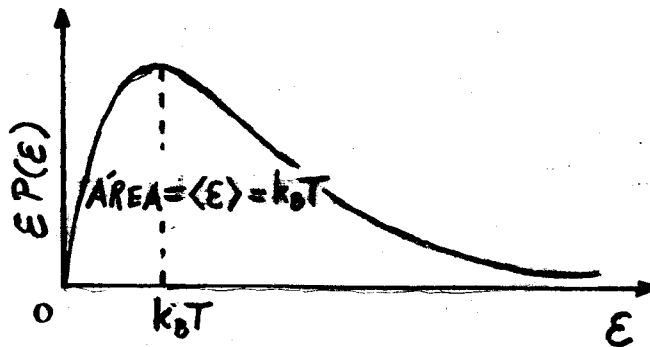


Fig. 2.11 - Gráfico de $E P(E)$ em função de E .

A grande contribuição de Planck se deu quando ele descobriu que a condição $\lim_{E \rightarrow 0} \langle E \rangle = 0$, poderia ser alcançada, se fosse modificado o cálculo de $\langle E \rangle$ a partir de $P(E)dE$. Planck observou que, em vez de assumir valores contínuos, a energia E deveria assumir somente valores discretos e que tais valores discretos fossem distribuídos uniformemente como

$$E = 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E, \dots \quad (2.36)$$

onde ΔE é uma variável constante entre valores discretos de energia. Com essa hipótese, as integrais na eq. (2.34), usadas para calcular $\langle E \rangle$, devem ser substituídas por somatórios, isto é,

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)} \quad (2.37)$$

A Fig. 2.12 mostra cálculos gráficos de $\langle E \rangle$ a partir de $E P(E)$ para, (a) $\Delta E \ll k_B T$, (b) $\Delta E \approx k_B T$ e (c) $\Delta E \gg k_B T$. O valor de $\langle E \rangle$, em cada caso, é dado pela área dos retângulos hachurados.

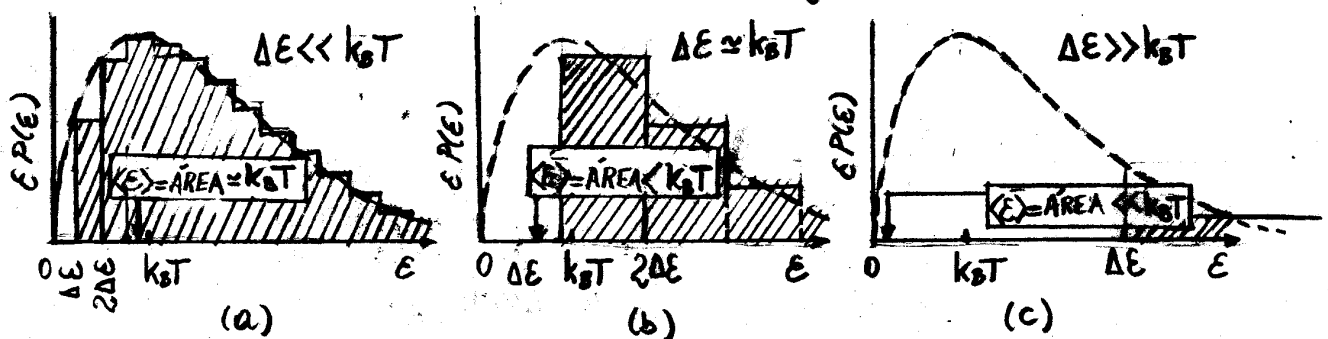


Fig. 2.12- Comportamento gráfico de $\langle E \rangle$ de acordo com eq. (2.37).

O valor de $k_B T$ será a área abaixo da curva suave. Observa-se que quando $\Delta E \ll k_B T$, o valor de $\langle E \rangle \approx k_B T$, isto é, praticamente igual ao resultado clássico. Entretanto, quando $\Delta E \approx k_B T$ ou $\Delta E \gg k_B T$, o valor $\langle E \rangle$ será menor que $k_B T$, pois a redução da área definida pelos elementos discretos começa a se tornar importante quando comparada com a área definida pelos elementos contínuos. Assim, pode-se concluir que

$\langle E \rangle \approx k_B T$ para ΔE pequeno

e

$\langle E \rangle \approx 0$ para ΔE grande.

Como Planck precisava obter o primeiro resultado para baixas frequência ν e o segundo para grandes valores de ν , então o valor ΔE deveria ser proporcional a ν , isto é,

$$\Delta E = h\nu, \quad (2.38)$$

onde h é a constante de proporcionalidade. Cálculos posteriores permitiram que Planck determinasse o valor de h , ajustando resultados teóricos com dados experimentais, obtendo

$$h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \approx 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}. \quad (2.39)$$

Esta constante ficou conhecida como a constante de Planck. A conversão de Joule em elétron-volt foi feita a partir da identidade, $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$, definida na eq. (1.104) do Capítulo anterior.

Assumindo, então

$$\mathcal{E} = nh\nu, \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (2.40)$$

nas eqs. (2.37) e (2.33), obtém-se

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E} P(\mathcal{E})}{\sum_{n=0}^{\infty} P(\mathcal{E})} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{k_B T} e^{-nh\nu/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_B T} e^{-nh\nu/k_B T}} = k_B T \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} \right), \quad \leftarrow$$

onde

$$\alpha = \frac{h\nu}{k_B T}. \quad (2.41)$$

ou, como

$$-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{d}{d\alpha} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}},$$

então,

$$\langle \mathcal{E} \rangle = k_B T \left(-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}, \quad \leftarrow$$

onde usa-se o valor de α dado na eq. (2.41). Usando a expansão binomial,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots = (1 - e^{-\alpha})^{-1},$$

obtém-se

$$\langle \epsilon \rangle = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln(1 - e^{-\alpha})^{-1} = \frac{-h\nu}{(1 - e^{-\alpha})^{-1}} (-1)(1 - e^{-\alpha})^{-2} e^{-\alpha}$$

$$= \frac{h\nu e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{h\nu}{e^{\alpha} - 1}$$

ou

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (2.42)$$

Substituindo a eq. (2.42) na eq. (2.29), obtém-se a distribuição espectral de densidade de energia de radiação, no intervalo de frequências entre ν e $\nu + d\nu$, como

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu, \quad (2.43)$$

ou, em termos do comprimento de onda λ ,

$$u(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda.$$

pois, de acordo com a eq. (2.3), $u(\lambda) = c/\lambda^2 u(\nu)$ e $\nu = c/\lambda$. As eqs. (2.43) e (2.44) são referidas como a Lei de Planck para a radiação de corpo negro.

A Fig. 2.10 mostra o espectro de radiação de corpo negro, para $T = 2000 \text{ K}$, de acordo com o modelo teórico de Planck. Observa-se uma excelente concordância com o resultado experimental.

A lei de Stefan-Boltzmann na eq. (2.2), e a lei do deslocamento de Wien na eq. (2.7), podem ser obtidas a partir da fórmula de Planck. A lei de Stefan-Boltzmann pode ser obtida integrando a fórmula de Planck sobre todo o espectro de comprimentos de onda λ . Por outro lado, a lei do deslocamento de Wien pode ser obtida encontrando o ponto de máximo da função $u(\lambda)$, isto é,

$$d u(\lambda) / d \lambda = 0. \quad (2.46)$$

Para este último caso, o resultado é

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,965 k_B} \approx 2,9 \times 10^{-3} \text{ m} \times \text{K}, \quad (2.47)$$

que está de acordo com a lei do deslocamento de Wien.

Exemplo 2.3

Obter a lei de Stefan-Boltzmann a partir da fórmula de Planck para a radiação de corpo negro.

A distribuição espectral de intensidades de radiação $I(\nu)d\nu$, entre ν e $\nu+d\nu$, emitidas por uma cavidade aquecida a uma temperatura T , pode ser calculada substituindo a eq. (2.43) na eq. (2.9), isto é,

$$I(\nu)d\nu = \frac{c}{4} u(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Assim, a intensidade de radiação total emitida pela cavidade aquecida, será

$$I_T = \int_0^{\infty} I(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{\alpha} - 1},$$

onde usam-se a seguinte mudança de variável:

$$\alpha = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} \alpha \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} d\alpha.$$

Quando se recorre a uma tabela de integrais, encontra-se

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 d\alpha}{e^{\alpha} - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Logo

$$I_T = \sigma T^4,$$

onde

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,8 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \times \text{K}^4,$$

que está de acordo com o valor da constante obtida por Stefan e Boltzmann.

A quantização da energia proposta por Planck para explicar a emissão da radiação de corpo negro, foi a principal inspiração de Einstein para propor o modelo Corpuscular da radiação e explicar o mecanismo da interação da radiação com a matéria. A perfeita harmonia entre essa hipótese e os resultados experimentais, foi suficiente para justificar a quantização da energia como um novo princípio físico.

Nas próximas seções apresentam-se os diferentes tipos de interação da radiação com a matéria e destacam-se as evidências experimentais do Comportamento Corpuscular da radiação.

2.5 - Efeito Fotoelétrico.

Um processo de emissão de cargas elétricas negativas por uma superfície metálica foi descoberto por Heinrich Rudolf Hertz em 1887. A Fig. 2.13 mostra um esquema da montagem utilizada por Hertz. Um catodo C (emissor de cargas negativas) e um anodo A (receptor de cargas negativas) são mantidos no vácuo a uma diferença de potencial de alguns volts.

Quando luz ultravioleta ($\nu \sim 10^{16} \text{ Hz}$), atinge o catodo C, observa-se um fluxo de corrente elétrica através do anodo A. Esse fenômeno ficou conhecido como efeito fotoelétrico.

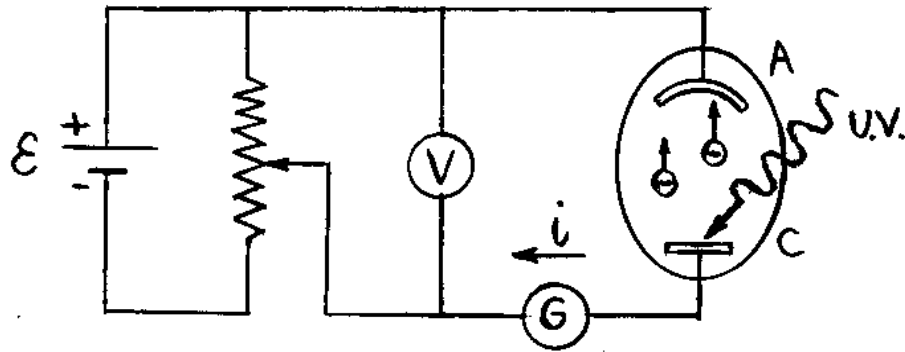


Fig. 2.13 - Experimento de Hertz para o efeito fotoelétrico.

A identificação dos elétrons em 1879, por Joseph John Thomson através da medida da razão e/m entre a carga e a massa das partículas num tubo de raios catódicos, sugeriu que as partículas carregadas negativamente do efeito fotoelétrico também fossem elétrons. Esta hipótese foi confirmada em 1900 por Philipp von Lenard, quando mediu a razão e/m das partículas fotoelétricas e mostrou que era a mesma que a dos elétrons medida por Thomson.

A experiência de Lenard esclareceu dúvidas relativas à identidade das partículas fotoelétricas, entretanto, mostrou também algumas propriedades do efeito fotoelétrico, muito difíceis de serem explicadas em termos das teorias da física clássica. Lenard mediu a corrente através do anodo A como função

da diferença de potencial aplicada entre os eletrodos para intensidades altas e baixas da luz incidente. O resultado é mostrado na Fig. 2.14.

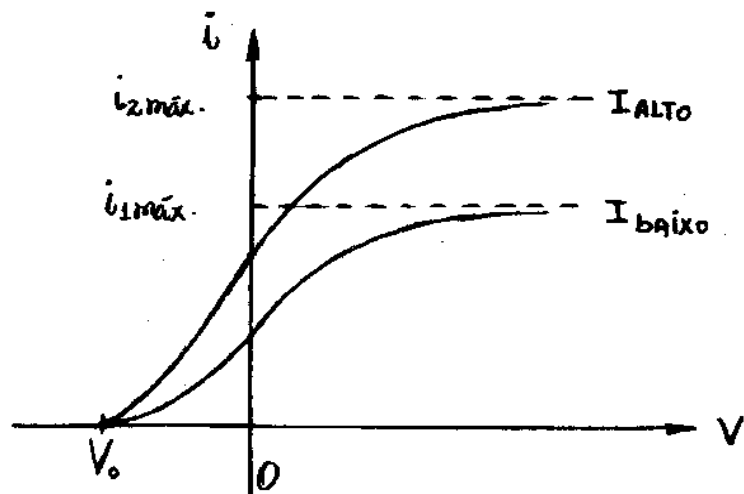


Fig. 2.14 - Corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial para diferentes intensidades.

A corrente fotoelétrica satura para valores altos da diferença de potencial V . Nessas condições, todos os fotoelétrons emitidos por C são coletados por A . Quando V é invertido ($V < 0$), o anodo torna-se negativo e repele os elétrons liberados pelo catodo, entretanto, a corrente fotoelétrica não cai imediatamente a zero como se esperaria. Este fato sugere que os elétrons sejam emitidos de C com alguma energia cinética. Alguns elétrons alcançam o anodo A , mesmo que o campo elétrico se oponha ao seu movimento. Quando a diferença de potencial atinge um valor V_0 , chamado de potencial frenador, a corrente fotoelétrica torna-se nula, independentemente do valor da intensidade da luz incidente.

Nesse momento, nenhum elétron, mesmo aquele mais fracamente ligado ao metal e, conseqüentemente, os de maior energia cinética, alcançam o anodo A. A energia cinética desses elétrons mais rápidos $K_{\text{máx}}$, é dada em função do potencial frenador V_0 como

$$K_{\text{máx}} = e V_0. \quad (2.48)$$

onde $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$ é a carga do elétron.

A teoria ondulatória clássica afirma que a intensidade I de uma onda é proporcional ao quadrado do campo elétrico E , isto é, $I \propto E^2$. Como a força sobre um elétron é $\vec{F} = e\vec{E}$, isso sugere que a energia cinética K dos fotoelétrons seja proporcional a intensidade, isto é, $K \propto I$. Entretanto, a eq. (2.48), obtida da experiência, mostra que a energia cinética deve independe da intensidade da luz.

A Fig. 2.15 mostra o comportamento do potencial frenador V_0 em função da frequência ν da luz incidente sobre uma superfície de sódio, obtida por Robert Andrews Millikan em 1914.

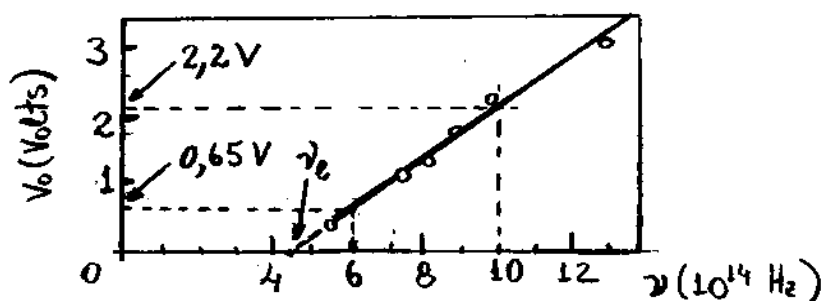


Fig. 2.15 - Comportamento do potencial frenador em função da frequência da luz numa superfície de sódio.

Observar-se a presença de um limiar de frequência ν_0 abaixo do qual o efeito fotoelétrico deixa de ocorrer espontaneamente.

Pela teoria clássica, o efeito fotoelétrico deveria ocorrer para qualquer frequência da luz incidente, desde que a intensidade seja suficiente para ejetar os elétrons. Entretanto, o gráfico da Fig. 2.15 mostra a existência de um limiar de frequência para o efeito fotoelétrico para qualquer que seja a intensidade da luz incidente.

Uma outra importante divergência do efeito fotoelétrico com a teoria ondulatória clássica, ocorre com o intervalo de tempo entre a incidência de luz e a ejeção do elétron. Seja, por exemplo, uma placa de potássio a uma distância $R = 1,0 \text{ m}$ de uma fonte luminosa pouco intensa, de potência $P = 1,0 \text{ W}$. Supõe-se que o elétron ejetado tenha sua energia absorvida na área circular correspondente ao raio atômico $r \approx 10^{-10} \text{ m}$. Na distância R , a potência P é distribuída isotropicamente em uma área de casca esférica $4\pi R^2$. O elétron no átomo ocupa somente um pedaço πr^2 dessa área total. Assim, a potência P_{alvo} sobre o alvo atômico é uma fração da potência P dada por

$$P_{\text{alvo}} = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} P = \frac{\pi \times (10^{-20} \text{ m}^2)}{4\pi \times (1,0 \text{ m}^2)} \times 1,0 \text{ W} = 2,5 \times 10^{-21} \text{ J/s}.$$

Se a energia necessária para remover um elétron da superfície do potássio é $\Delta E = 2,1 \text{ eV} = 3,4 \times 10^{-19} \text{ J}$, então o tempo necessário para o elétron absorver uma energia igual a essa é

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P_{\text{alvo}}} = \frac{3,4 \times 10^{-19}}{2,5 \times 10^{-21}} = 140 \text{ s} \approx 2 \text{ minutos}.$$

Assim, durante todo esse intervalo finito de tempo, o elétron deveria estar absorvendo energia da luz até o seu escape. Entretanto, nenhum tempo de retardo jamais foi observado. De fato, experiências posteriores realizadas por Ernest Orlando Lawrence e Jesse Wakefield Beams em 1928, usando uma fonte de luz várias ordens de grandeza menos intensa do que a considerada acima, mostraram um atraso menor que 1 ns.

Em 1905, Einstein propôs a teoria quântica do efeito fotoelétrico. De acordo com a teoria quântica de Planck, partículas e campos eletromagnéticos oscilantes a frequência ν , podem mudar de energia somente por múltiplos inteiros da energia quântica $h\nu$. Einstein sugeriu que, no processo de ir de um estado de energia $n h\nu$ para outro $(n-1) h\nu$, a fonte emite uma porção de energia eletromagnética.

$$E = h\nu. \quad (2.49)$$

Einstein assumiu que tal porção de energia emitida, estivesse localizada num pequeno volume do espaço e que se afasta da fonte com uma velocidade c . Esse quantum de energia tem características de partícula sem massa, como se verifica na sequência, e foi denominado de fóton.

Do ponto de vista relativístico, a energia total de uma partícula de massa de repouso m_0 e velocidade u é

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = K + m_0 c^2. \quad (2.50)$$

Como a velocidade do fóton é c e sua energia $E = h\nu$ é finita, então a sua massa de repouso m_0 deve ser nula para que E não tenda ao infinito quando $u = c$, mas a algo que é a sua energia cinética K . Logo, o fóton é uma partícula de massa de repouso nula e energia total relativística E puramente cinética.

No processo fotoelétrico, um fóton é absorvido completamente por um elétron do fotocátodo, que é emitido da superfície do metal com uma energia cinética $K = h\nu - w$, onde $h\nu$ é a energia do fóton incidente e w é o trabalho necessário para remover o elétron do metal. Alguns elétrons estão mais fortemente ligados ao metal do que outros. Alguns perdem energia por colisões na sua trajetória. No caso do elétron mais fracamente ligado ao metal, o foto elétron deve emergir com a energia cinética máxima

$$K_{\text{máx.}} = h\nu - w_0, \quad (2.51)$$

onde w_0 , uma energia característica do metal denominada de função trabalho, é a energia mínima necessária para o elétron escapar às forças atrativas de ligação ao metal.

Como se pode ver na eq. (2.51), a teoria quântica do efeito fotoelétrico concorda com a observação de Lenard de que $K_{\text{máx}}$ independe da intensidade. Aumentar a intensidade da luz meramente aumenta o número de fótons e

consequentemente a fotocorrente, mas isto não altera a energia $h\nu$ de cada fóton.

O limiar de frequência ν_e , observado por Millikan, é obtido também da eq. (2.51) tomando-se $K_{\text{max}} = 0$, tal que

$$h\nu_e = W_0. \quad (2.52)$$

Um fóton de frequência ν_e tem somente a energia suficiente para retirar o elétron do metal. Se a frequência for menor que ν_e , nenhum elétron será ejetado independentemente da intensidade, ou número de fótons, da luz incidente.

Finalmente, a emissão de um fotoelétron será imediata logo que este absorva um fóton da luz incidente. A energia é fornecida em pacotes concentrados e não se espalha uniformemente sobre uma área extensa como se supôs no exemplo com a teoria ondulatória clássica.

Combinando a eq. (2.48) com a eq. (2.51), obtém-se

$$V_0 = (h/e)\nu - W_0/e. \quad (2.53)$$

Portanto, a teoria de Einstein prevê uma relação linear entre V_0 e ν , concordando com o resultado experimental de Millikan mostrado na Fig. 2.15. A inclinação (h/e) da reta pode ser calculada diretamente do gráfico e o resultado é $h/e = 3,9 \times 10^{-15} \text{ V}\cdot\text{s}$. Usando $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, obtém-se $h = 6,2 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ para a constante de Planck.

De uma análise muito mais criteriosa realizada posteriormente, com superfícies de lítio, Millikan obteve um valor $h = 6,57 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, com uma precisão de aproximadamente 0,5%. Esta medida estava muito próxima do valor de h deduzido da teoria quântica de Planck para a radiação de corpo negro. A concordância numérica de h , usando teorias completamente diferentes, era notável. Um valor atual de h , conhecido com sete algarismos significativos, é $h = 6,626076 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,135669 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$.

Em 1921 Einstein recebeu o prêmio Nobel pela teoria quântica do efeito fotoelétrico e, em 1923, Millikan recebeu o prêmio Nobel pela comprovação experimental do efeito fotoelétrico.

A hipótese do fóton é atualmente usada, não somente no visível ou ultravioleta, mas para todas as regiões do espectro eletromagnético. Para $\lambda = 10 \text{ cm}$, um comprimento de onda típico das microondas, pode-se calcular a energia do fóton para obter $1,2 \times 10^{-5} \text{ eV}$. Por ser baixa, esta energia é incapaz de ejetar fotoelétrons de uma superfície metálica. Para raios X, ou raios γ , tais como os que são emitidos por fontes radioativas, a energia do fóton pode atingir valores maiores do que 10^6 eV . Estes fótons podem ejetar elétrons fortemente ligados a átomos extremamente pesados.

Exemplo 2.4

O lítio foi um dos metais estudados por Millikan para comprovar a teoria de Einstein do efeito fotoelétrico. Esse metal tem uma função trabalho $w_0 = 2,42 \text{ eV}$. (a) Calcular o limiar fotoelétrico para uma radiação incidente neste metal. (b) Calcular o número de fótons dessa radiação que atingem uma área $A = 1 \text{ cm}^2$ do lítio, num tempo $\Delta t = 1 \mu\text{s}$, sabendo que a fonte possui uma potência $P = 1 \text{ W}$ e é mantida a uma distância $R = 1 \text{ m}$.

a) Da eq. (2.52), $\nu_c = \frac{w_0}{h} = \frac{2,42 \text{ eV}}{4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}} = 5,84 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

O comprimento de onda correspondente, é $\lambda_c = c/\nu_c = 514 \text{ nm}$, que está na região do visível (luz verde). Assim, qualquer comprimento de onda menor do que este deve ejetar elétrons do lítio.

b) A potência P_{alvo} da radiação que atinge o alvo de área $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ do lítio será

$$P_{\text{alvo}} = \frac{A}{4\pi R^2} P_0 = \frac{10^{-4}}{4\pi (1)^2} (1 \text{ W}) \approx 8,0 \times 10^{-6} \text{ W}.$$

A energia total E dos fótons que atingem o alvo durante um tempo $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ é

$$E = P_{\text{alvo}} \Delta t = 8,0 \times 10^{-6} \text{ J} = 5,0 \times 10^{13} \text{ eV},$$

pois $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. Se cada fóton tem uma energia igual a função trabalho do lítio $w_0 = 2,42 \text{ eV}$, então

$$n_{\text{fótons}} = \frac{E}{w_0} = \frac{5,0 \times 10^{13} \text{ eV}}{2,42 \text{ eV}} \approx 2,1 \times 10^{13} \text{ fótons}.$$

Isso mostra que a concentração de fótons que atinge o metal é extremamente grande mesmo que a intensidade seja pequena.

2.6 - Efeito Compton.

Em 1923, a natureza corpuscular da radiação foi definitivamente comprovada por Arthur Holly Compton, observando variações de comprimentos de onda da radiação, resultantes do espalhamento ou colisão por alvos de átomos pesados. A experiência de Compton mostrada na Fig. 2.16, consiste na incidência de um feixe de raios X, de comprimento de onda λ_0 , sobre um alvo de grafite.

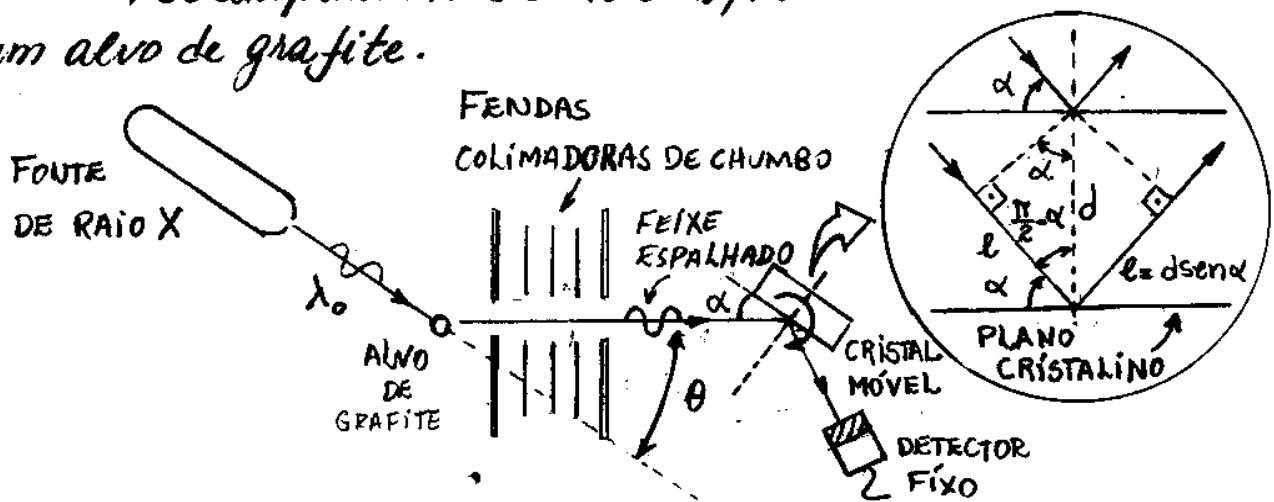


Fig. 2.16 - Diagrama da experiência de Compton.

A função do cristal no experimento é identificar os comprimentos de onda do feixe espalhado pela condição de interferência construtiva nos planos cristalinos

$$\lambda = 2d \sin \alpha \quad (2.54)$$

denominada, neste caso, condição de Bragg, onde d é a distância entre os planos cristalinos e α é o ângulo do feixe em relação à superfície do cristal, como mostrado na Fig. 2.16.

As intensidades I dos raios X espalhados, foram medidas como função dos comprimentos de onda, para vários ângulos θ de espalhamento. A Fig. 2.17 mostra os resultados obtidos. Observa-se que, embora o feixe incidente consiste de um único comprimento de onda λ_0 , os raios X espalhados tem máximos de intensidades em dois comprimentos de onda. Um dos comprimentos de onda é o próprio λ_0 incidente e o outro, representado por λ_1 , é maior do que λ_0 . Este fenômeno é conhecido como efeito Compton e a quantidade $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ é denominada de deslocamento Compton. A Fig. 2.17 mostra que $\Delta\lambda$ depende do ângulo θ segundo o qual os raios X espalhados são analisados.

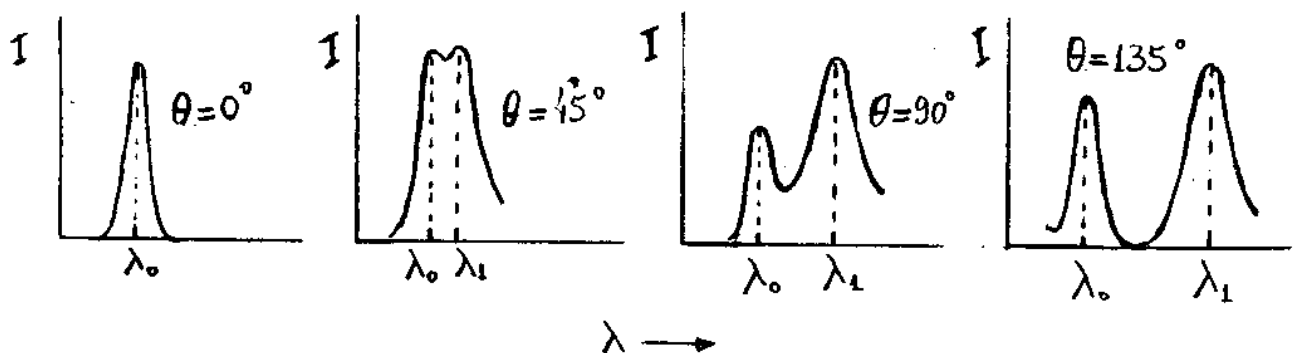


Fig. 2.17- Espectros obtidos no experimento de Compton.

A presença do comprimento de onda λ_1 não pode ser explicada se os raios X forem tratados como ondas eletromagnéticas clássicas. Classicamente, os elétrons livres do grafite oscilam com a mesma frequência ν da onda incidente. Esses elétrons, como qualquer carga, devem irradiar ondas eletromagnéticas com a mesma

frequência ν . Assim, o modelo ondulatório clássico prevê somente um comprimento de onda no espalhamento da radiação.

Para explicar seus resultados experimentais, Compton assumiu que os raios X incidentes fossem formados por fótons de energia $E = h\nu$, que colidem com os elétrons do alvo da mesma forma que bolas num jogo de bilhar. Nesse caso, os fótons são considerados como partículas de massa de repouso nula ($m_0 = 0$), tal que, a equação relativística $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$, permite calcular o momento p do fóton como

$$p = E/c = h\nu/c = h/\lambda, \quad (2.55)$$

onde $\lambda = c/\nu$ é o comprimento de onda do fóton. É importante mencionar que a equação $p = E/c$ é também prevista na teoria clássica de Maxwell da radiação. Entretanto, nesse caso, p e E são definidas como grandezas por unidade de volume de radiação, não exibindo necessariamente o caráter corpuscular da radiação. A Fig. 2.18 mostra o espalhamento de um fóton por um elétron de acordo com o modelo de Compton.

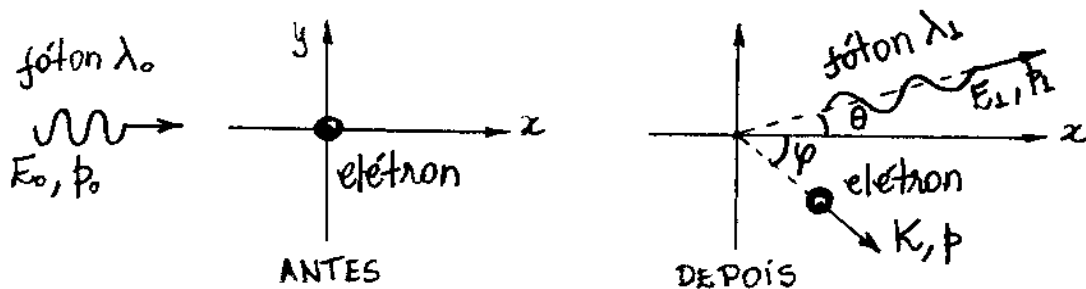


Fig. 2.18 - Espalhamento Compton de um fóton por um elétron.

Deve-se mencionar que, diferentemente do efeito fotoelétrico, no modelo de Compton o fóton é espalhado em vez de simplesmente absorvido.

Como o fóton e o elétron movem-se com velocidades altas, então o problema deve ser tratado do ponto de vista da teoria da relatividade. O fóton de energia total E_0 e momento p_0 , colide com o elétron de energia de repouso m_0c^2 . O fóton é, então, espalhado de um ângulo θ e se afasta com energia total E_1 e momento p_1 , enquanto que o elétron recua com energia cinética K e momento p , formando um ângulo φ com a direção horizontal.

A conservação do momento fornece

$$p_0 = p_1 \cos \theta + p \cos \varphi \Rightarrow p_0 - p_1 \cos \theta = p \cos \varphi$$

e

$$p_1 \sin \theta = p \sin \varphi .$$

Elevando ao quadrado essas equações e, em seguida, somando-as, obtêm-se

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos \theta = p^2 . \quad (2.56)$$

A conservação da energia total relativística fornece

$$E_0 + m_0c^2 = E_1 + K + m_0c^2$$

ou

$$E_0 - E_1 = K$$

ou ainda, como $E_0 = p_0c$ e $E_1 = p_1c$,

$$c(p_0 - p_1) = K . \quad (2.57)$$

Substituindo $E = K + m_0 c^2$ na equação $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$, para o elétron, obtêm-se

$$(K + m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

ou

$$K^2 + 2K m_0 c^2 = p^2 c^2$$

ou ainda

$$\frac{K^2}{c^2} + 2K m_0 = p^2 \quad (2.58) \leftarrow$$

Substituindo p^2 da eq. (2.56) e K da eq. (2.57) na eq. (2.58), obtêm-se

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0 c (p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cancel{p_0^2} + \cancel{p_1^2} - 2p_0 p_1 + 2m_0 c (p_0 - p_1) = \cancel{p_0^2} + \cancel{p_1^2} - 2p_0 p_1 \cos \theta$$

ou

$$m_0 c (p_0 - p_1) = p_0 p_1 (1 - \cos \theta)$$

ou ainda

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad \leftarrow$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por h e aplicando as expressões $\lambda_1 = h/p_1$ e $\lambda_0 = h/p_0$, obtêm-se o deslocamento Compton como

$$\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad (2.59)$$

onde

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,0243 \text{ \AA} \quad (2.60)$$

é denominado de comprimento de onda Compton para o elétron.

Observa-se que $\Delta\lambda$ só depende do ângulo de espalhamento θ , variando desde zero, para $\theta=0$ (colisão de "raspad") até $2h/m_0c = 0,049\text{\AA}$, para $\theta=180^\circ$ (colisão frontal). A eq. (2.59) está de acordo com os resultados experimentais de Compton, dados na Fig. 2.17.

A eq. (2.59) explica também a existência do primeiro máximo nos experimentos de Compton, mostrados na Fig. 2.17. O motivo está associado aos elétrons que estão fortemente ligados aos átomos do alvo e que também participam do processo de colisão. Se um elétron de massa m_0 não é ejetado de um átomo de massa M_0 , quem retila durante a colisão é o próprio átomo. Nesse caso, a massa característica para o processo é a massa M_0 do átomo, que deve substituir a massa eletrônica m_0 , na eq. (2.60). Como $M_0 \gg m_0$, em particular $M_0 \approx 22000 m_0$ para o carbono, vê-se que $\Delta\lambda$ é extremamente pequeno, de modo que o comprimento de onda do fóton espalhado permanece praticamente inalterado. Assim, no efeito Compton, alguns fótons são espalhados por elétrons que são liberados na colisão (esses fótons têm seus comprimentos de onda modificados). Outros fótons são espalhados por elétrons que permanecem ligados após a colisão (esses fótons não têm seus comprimentos de onda modificados).

O processo de espalhamento de fótons, no qual o comprimento de onda não é alterado, é denominado espalhamento Thomson, pois já tinha sido observado e explicado por Joseph John Thomson em 1900, utilizando a teoria eletromagnética

clássica. Embora a explicação clássica do espalhamento Thomson seja diferente da explicação quântica, ambas explicam o mesmo fato experimental. Nesse contexto, o espalhamento Thomson é um caso onde resultados clássicos e quânticos se equivalem.

Existem regiões do espectro eletromagnético onde o espalhamento Thomson é dominante e regiões onde o espalhamento Compton é dominante. Se por exemplo, a radiação incidente está abaixo da região do visível (infravermelho, microondas, ou rádio), então $\Delta\lambda \sim 0$; pois difícilmente um elétron é liberado na colisão. Nesse caso, a onda espalhada terá um comprimento de onda igual ao comprimento de onda da onda incidente dentro da precisão experimental. Assim, a medida que $\lambda \rightarrow \infty$, os resultados quânticos são equivalentes aos resultados clássicos e o espalhamento Thomson é dominante. A medida que a radiação incidente se aproxima da região dos raios X, o espalhamento Compton começa a se tornar importante. Na região dos raios X onde $\lambda \rightarrow 0$, a energia do fóton é tão grande que um elétron sempre é liberado na colisão e o espalhamento Compton torna-se dominante. Assim, é na região de pequenos comprimentos de onda que a teoria clássica deixa de explicar o espalhamento da radiação, da mesma forma que é também nessa região que as previsões clássicas não explicam o espectro de radiação de corpo negro.

Exemplo 2.5 - Eisberg 02.16 (a) - FACULTATIVO

Fótons de comprimento de onda $\lambda_0 = 0,024 \text{ \AA}$ incidem sobre elétrons livres. Calcule o comprimento de onda λ_1 de um fóton que é espalhado de um ângulo $\theta = 30^\circ$ em relação à direção de incidência, e a energia cinética transferida ao elétron.

O deslocamento Compton para $\theta = 30^\circ$ será

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta) = 0,0243(1 - \cos 30^\circ) = 0,003256 \text{ \AA}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - 0,024 = 0,003256 \Rightarrow \lambda_1 \cong 0,027 \text{ \AA}$$

A energia cinética transferida ao elétron, pode ser calculada a partir da eq. (2.57) e do fato que $p = h/\lambda$, isto é,

$$K = c(p_0 - p_1) = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

$$= 6,63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \left(\frac{1}{0,024 \times 10^{-10}} - \frac{1}{0,027 \times 10^{-10}} \right)$$

$$= 92,08 \times 10^{-16} \text{ J}$$

ou, como $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$K \cong 0,057 \text{ MeV}$$

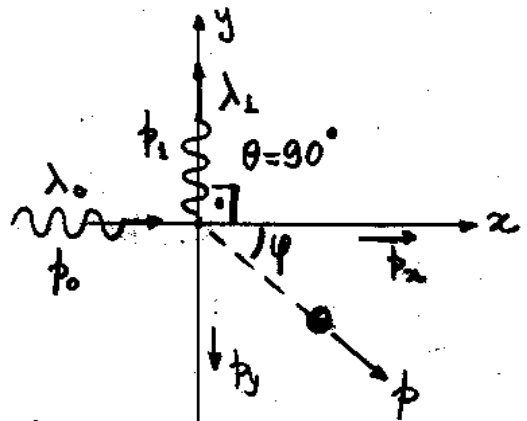
Exemplo 2.6 - Exemplo do Mullin

Raios X de comprimento de onda $\lambda_0 = 0,711 \text{ \AA}$, incidem sobre elétrons livres de uma amostra de grafite. Se os fótons espalhados numa direção $\theta = 90^\circ$, são detectados, encontre o módulo p do momento do elétron e o ângulo φ de recuo desse elétron.

Como $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$,
o comprimento de onda λ_1
do fóton espalhado será

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

$$= 0,711 + 0,0243(1 - \cos 90^\circ) = 0,735 \text{ \AA}$$



A conservação do momento fornece

$$p_x = p_0 = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{0,711 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

$$p_y = p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{0,735 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

Logo,

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 12,97 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

O ângulo φ de recuo será

$$\tan \varphi = \frac{p_y}{p_x} = \frac{9,02 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{9,32 \times 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}} \Rightarrow \varphi = 44^\circ$$

2.7 - Natureza Dual da Radiação.

A hipótese da existência do fóton para explicar processos que envolvem a interação da radiação com a matéria é satisfatória, todavia, ao mesmo tempo é necessária a concepção ondulatória da radiação para entender os fenômenos de interferência e Difração. Nesse contexto, a radiação se comporta como onda em certas circunstâncias e como partícula em outras. Essa dualidade onda-partícula se evidencia nos trabalhos experimentais de Compton. Por um lado, a presença de um comprimento de onda adicional na interação da radiação com a matéria, só pode ser explicada por um modelo corpuscular da radiação. Por outro lado, a detecção desses comprimentos de onda por estruturas periódicas cristalinas, só pode ser explicada por um modelo ondulatório da radiação.

No início, quando foi sugerida, a natureza dual onda-partícula da radiação eletromagnética foi difícil de ser reconhecida. Entretanto, essa dualidade foi, nos pontos, sendo reconhecida quando a mecânica quântica previa que tal comportamento é, na verdade, uma propriedade de todos os entes físicos.

2.8 - Produção de Raios X.

Os raios X, radiação eletromagnética de comprimento de onda menor do que 1\AA , recebeu esse nome porque quando foi descoberto, em 08 de novembro de 1895, por Wilhelm Conrad Röntgen, tinha natureza desconhecida. Os raios X podem ser produzidos quando um feixe de elétrons de alta energia são desacelerados ao atingir um alvo de átomos pesados, como mostra a Fig. 2.19. De acordo com a teoria eletromagnética clássica, a desaceleração dos elétrons causaria emissão de um espectro contínuo de radiação, desde comprimentos de onda zero até infinito.

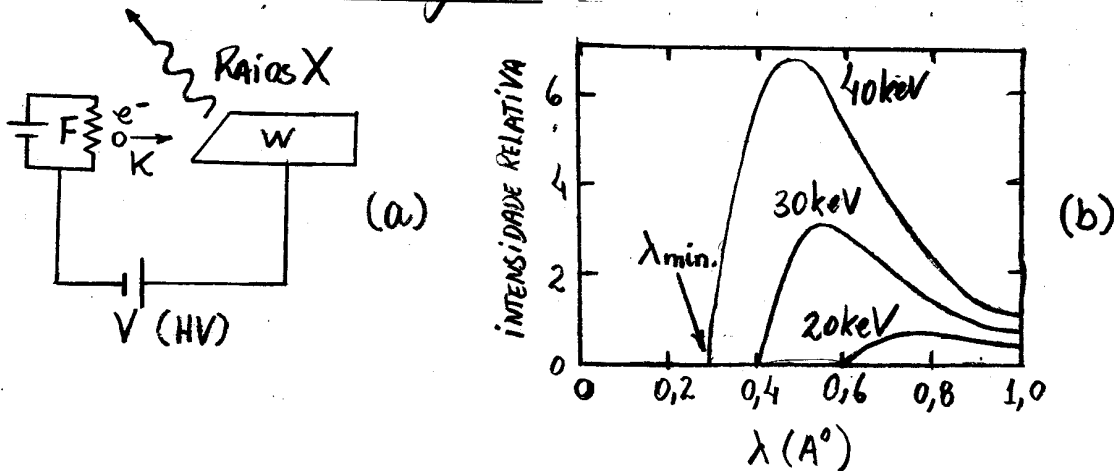


Fig. 2.19-(a) Sistema para produção de raios X, onde F é um filamento aquecido e A é um alvo. (b) Espectros contínuos de raios X para um alvo de Tungstênio W.

Entretanto, como mostrado também na Fig. 2.19 para o caso de um alvo de tungstênio W, o espectro de raios X, observado para diferentes voltagens de aceleração, não está totalmente de acordo com a previsão clássica.

A característica mais importante observada nos espectros da Fig. 2.19, é que para uma dada energia dos elétrons, existe um comprimento de onda mínimo λ_{\min} muito bem definido. Para qualquer material, o valor de λ_{\min} dependerá somente da diferença de potencial V . Este é o fato que a teoria eletromagnética clássica não pode explicar, pois de acordo com essa teoria, o espectro emitido deveria ser contínuo, não havendo razão para a existência de um limiar de comprimento de onda. Se entretanto o modelo de fótons for adotado para o Raio X, então o fenômeno terá uma explicação satisfatória, como se verifica na sequência.

Um elétron de energia cinética K é desacelerado na interação com o núcleo pesado do alvo. A energia perdida pelo elétron nesse processo é convertida em um fóton de raio X como mostra a Fig. 2.20. Esse processo é conhecido como bremstrahlung. Do Alemão, "bremss" que significa "freagem" e "strahlung" que significa "radiação".

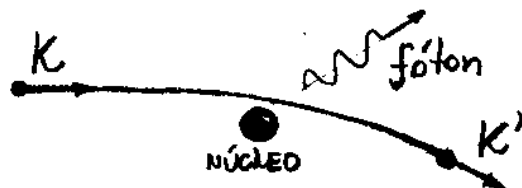


Fig. 2.20 - Processo de bremsstrahlung para produção de raios X.

Se a energia cinética do elétron após a desaceleração é K' , então a energia do fóton gerado será:

$$h\nu = K - K' ,$$

ou, em termos de comprimentos de onda,

$$\frac{hc}{\lambda} = K - K' \quad (2.61)$$

Antes de chegar ao repouso, o elétron experimenta vários processos bremsstrahlung. As consequentes perdas de energias cinéticas, resultam no espectro contínuo observado na Fig. 2.19. O fóton de menor comprimento de onda λ_{\min} , é emitido quando um elétron perde toda a sua energia cinética ($K'=0$) num único processo de bremsstrahlung. Nesse caso, a eq. (2.61) torna-se

$$\lambda_{\min} = hc/K,$$

ou, assumindo $K = eV$,

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} \quad (2.62)$$

Assim, o limite mínimo dos comprimentos de onda corresponde a uma conversão completa da energia dos elétrons em fótons de raios X. A eq. (2.62) mostra, explicitamente, que $\lambda_{\min} \rightarrow 0$ para $h\nu \rightarrow 0$, que é a previsão clássica. Entretanto, é o fato de h ser diferente de zero que confere a λ_{\min} uma manifestação da quantização da energia radiante.

É interessante observar que bremsstrahlung e efeito fotoelétrico são processos inversos. No bremsstrahlung, ocorre emissão de fótons devido a absorção da energia de elétrons, enquanto que no efeito fotoelétrico, ocorre emissão de elétrons devido a absorção da energia de fótons.

Exemplo 2.7 - FACULTATIVO

Um elétron, acelerado até uma energia cinética $K = 50 \text{ keV}$ em um tubo de raios X, sofre duas colisões sucessivas antes de atingir o repouso no alvo, emitindo dois fótons de bremsstrahlung no processo, como mostra a Fig. 2.21. O segundo fóton emitido tem um comprimento de onda $0,95 \text{ \AA}$ a mais do que o primeiro.

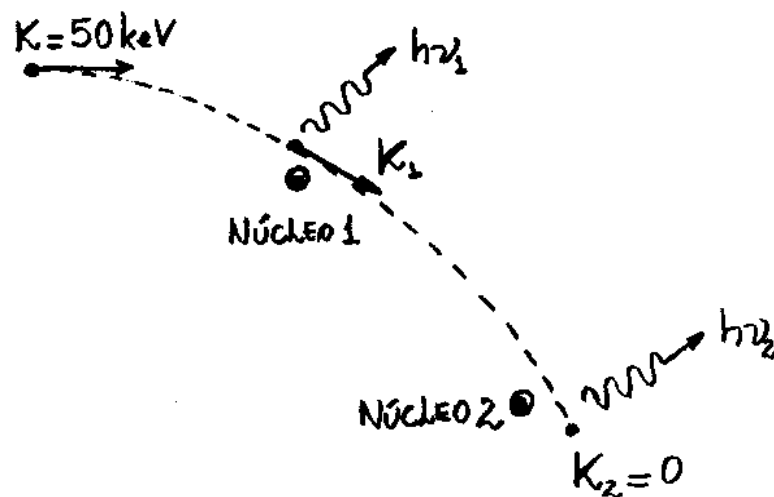


Fig. 2.21 - Processos bremsstrahlung com geração de dois fótons de raios X.

(a) Quais são os comprimentos de onda dos dois fótons? (b) Qual é a energia do elétron após a emissão do primeiro fóton?

De acordo com a lei da conservação da energia, tem-se

$$\text{NÚCLEO 1} \rightarrow K = h\nu_1 + K_1 \quad ; \quad \text{NÚCLEO 2} \rightarrow K_1 = h\nu_2$$

(a) Combinando as equações anteriores e adotando $\lambda_2 = \lambda_1 + 0,95 \text{ \AA}$, obtém-se

$$K = h\nu_1 + h\nu_2 = h\left(\frac{c}{\lambda_1} + \frac{c}{\lambda_2}\right) = hc\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\right)$$

$$\Rightarrow K = hc\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_1 + 0,95}{\lambda_1(\lambda_1 + 0,95)}\right] = hc\left(\frac{2\lambda_1 + 0,95}{\lambda_1^2 + 0,95\lambda_1}\right)$$

ou

$$\frac{K}{hc}\lambda_1^2 + (0,95\frac{K}{hc} - 2)\lambda_1 - 0,95 = 0$$

Como $\frac{K}{hc} = \frac{50000 \text{ eV}}{12400 \text{ eV}\cdot\text{\AA}} \approx 4,0 \text{ 1/\AA}$, então

$$4,0\lambda_1^2 + 1,8\lambda_1 - 0,95 = 0$$

cuja solução é

$$\lambda_1 = \frac{-1,8 \pm \sqrt{18,44}}{8} = \frac{-1,8 + 4,3}{8} = 0,31 \text{ \AA}$$

Para o segundo fóton, tem-se

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 0,95 \text{ \AA} = 0,31 \text{ \AA} + 0,95 \text{ \AA} = 1,26 \text{ \AA}$$

$$(b) K_2 = h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{12400 \text{ eV}\cdot\text{\AA}}{1,26 \text{ \AA}}$$

ou

$$K_2 \approx 9,8 \text{ keV}$$

2.9 - Produção e Aniquilação de Pares.

No processo de produção de pares, mostrado na Fig. 2.22, um fóton de alta energia perde toda a sua energia $h\nu$ numa colisão com um núcleo, criando um par elétron-pósitron. O pósitron é uma partícula que tem as mesmas propriedades do elétron, exceto o sinal de sua carga e seu momento magnético, que são opostos ao do elétron.

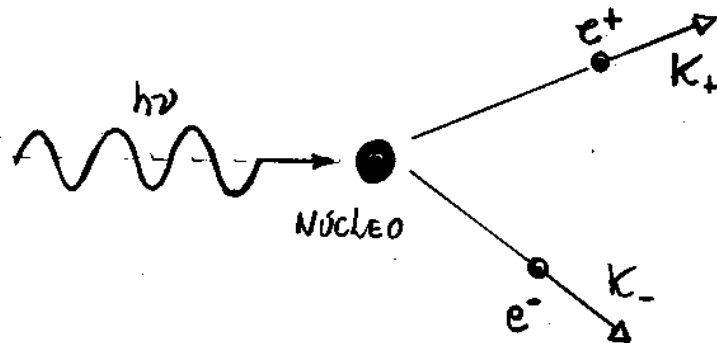


Fig. 2.22 - Processo de produção de pares.

Na produção de pares o seio do núcleo é desprezível. Assim, a conservação da energia relativística fornece

$$h\nu = K_- + K_+ + 2m_0c^2, \quad (2.63)$$

onde K_- e K_+ são as energias cinéticas do elétron e do pósitron, respectivamente. Observa-se que as duas partículas têm a mesma energia de repouso m_0c^2 . O pósitron tem uma energia cinética um pouco maior do que a energia cinética do elétron por causa da repulsão coulombiana do pósitron e atração do elétron com o núcleo.

Da eq. (2.63) observa-se que a energia mínima necessária para um fóton criar um par elétron-pósitron é $2m_0c^2$, ou 1,02 MeV, correspondente a um comprimento de onda 0,012 Å. Logo, o processo de produção de pares é um fenômeno de alta energia, com fótons nas regiões dos raios X, ou raios γ , do espectro eletromagnético. Na natureza, pares elétron-pósitrons são produzidos por fótons de raios cósmicos (raios γ) e em laboratório por fótons de bremsstrahlung (raios X), obtidos em aceleradores de partículas. Resultados experimentais confirmam a teoria quântica para o processo de produção de pares. Não existe qualquer explicação satisfatória para o fenômeno na teoria clássica.

Um processo inverso ao processo de produção de pares ocorre quando um elétron e um pósitron estão próximos um do outro, formando um sistema ligado, ou "átomo", chamado positrônio. O positrônio tem um tempo de vida extremamente curto, da ordem de 10^{-10} s. Após esse intervalo de tempo, as duas partículas se fundem, produzindo energia radiante, num processo denominado de aniquilação de pares, mostrado na Fig. 2.23.

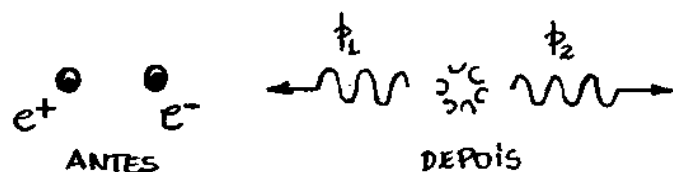


Fig. 2.23 - Processo de aniquilação de pares.

Como o momento inicial é zero, não é possível a criação de apenas um fóton, pois um único fóton não poderia ter momento nulo. A criação de dois fótons, mostrado na Fig. 2.23, é mais provável, embora seja possível também a formação de três fótons.

No processo de aniquilação de pares para formação de dois fótons, a conservação do momento fornece $p_1 = p_2$ ou $h\nu_1/c = h\nu_2/c$ ou ainda

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad (2.64)$$

indicando que os dois fótons são idênticos. Por outro lado, a conservação da energia relativística fornece $m_0c^2 + m_0c^2 = h\nu + h\nu$ ou

$$h\nu = m_0c^2 = 0,51 \text{ MeV}. \quad (2.65)$$

Como $E = pc$, pode-se obter o momento p do fóton em termos da massa de repouso m_0 das partículas como

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{m_0c^2}{c} = m_0c \quad (2.66)$$

de forma que, o comprimento de onda λ será

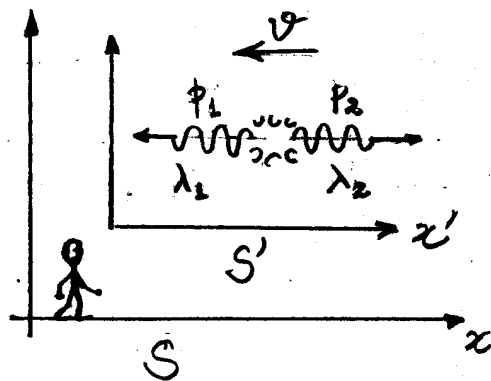
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0c} = 0,024 \text{ \AA}. \quad (2.67)$$

A semelhança com o comprimento de onda Compton λ_c é mera coincidência. Se o par tivesse, inicialmente, alguma energia cinética, a energia do fóton excederia aos 0,51 MeV e seu comprimento de onda seria ainda menor do que 0,024 \AA.

Exemplo 2.8 - Exemplo do Eisberg - FACULTATIVO.

Considere um processo de aniquilação de pares ocorrendo num referencial S' que se move, para a esquerda, com velocidade v em relação a um referencial fixo S . Determine os comprimentos de onda dos fótons medidos por um observador que está sobre o eixo x do referencial S .

Nesse caso, como o par se move para a esquerda com velocidade v , o seu momento inicial será $2mv$, em vez de zero como antes. Nesse caso, a conservação do momento fornece



$$2mv = p_1 - p_2 \Rightarrow 2mv c = p_1 c - p_2 c \quad (2.68)$$

onde p_1 e p_2 são os momentos lineares dos fótons no referencial S . Por outro lado, agora o par tem energia total relativística inicial de $2mc^2$, em vez da energia da energia de repouso $2m_0c^2$ e, como $E = pc$ para um fóton, a conservação da energia fornece

$$2mc^2 = p_1 c + p_2 c \quad (2.69)$$

Somando as eqs. (2.68) e (2.69) e adotando $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, obtém-se

$$p_1 = m(c+v) = m_0 \frac{(c+v)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0 c \sqrt{\frac{(c+v)^2}{(c-v)(c+v)}} = m_0 c \sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

Substituindo esse resultado na eq. (2.67) obtém-se o comprimento de onda para o primeiro fóton, como

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \lambda \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}, \quad (2.70)$$

onde λ é o comprimento de onda dos fótons no referencial S' .
 Similarmente, subtraindo as eq.s. (2.68) e (2.69), obtém-se o comprimento de onda do segundo fóton no referencial S , como

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad (2.71)$$

Assim, os fótons não devem ter o mesmo comprimento de onda, pois estes são alterados pelo efeito Doppler, em relação ao valor λ que possuem no referencial de repouso S' . Se as partes se aproximam do observador, ele detectará o fóton 1 com um comprimento de onda menor do que o comprimento de onda de repouso, e detectará o fóton 2 com um comprimento de onda maior do que o comprimento de onda do repouso.

Lista de Exercícios

Questões conceituais

- 1- Um corpo negro tem que ser necessariamente negro? Justifique o termo corpo negro!
- 2- Uma das primeiras tentativas de se explicar a distribuição espectral de um corpo negro foi feita por Rayleigh – Jeans, a partir de conceitos clássicos da termodinâmica. Em que região do espectro eletromagnético a lei de Rayleigh – Jeans não se verifica, e que fato ficou conhecido como catástrofe do ultravioleta?
- 3- Um pedaço de metal brilha com uma cor avermelhada a 1100 K . Entretanto, nessa mesma temperatura, um pedaço de quartzo não brilha. Justifique este fato sabendo-se que, ao contrário do metal, o quartzo é transparente à luz visível.
- 4- Na tentativa de explicar os resultados experimentais observados no espectro de um corpo negro, Planck concluiu que o problema estava principalmente num conceito clássico da termodinâmica. Qual seria esse conceito, e que alteração foi sugerida por Planck? Essa alteração invalida conceitos clássicos da termodinâmica, ou redefine esses conceitos de modo a incluir os casos clássicos como particulares? Justifique!
- 5- Em muitos sistemas clássicos as frequências possíveis são quantizadas, tal como por exemplo a propagação de ondas sonoras num tubo ressonante. Nestes casos, a energia também é quantizada? Justifique!
- 6- Nas experiências do efeito fotoelétrico, a fotocorrente é proporcional à intensidade da luz. Esse resultado isolado pode ser usado para distinguir as teorias quântica e clássica? Justifique!
- 7- Por que mesmo para radiações incidente monocromáticas os fotoelétrons são emitidos com diferentes velocidades?
- 8- O limiar fotoelétrico é considerado como sendo a objeção mais evidente da teoria ondulatória. Explique essa afirmativa!
- 9- É mais fácil observar o efeito Compton com alvos compostos de átomos com número atômico alto ou baixo? Justifique! O efeito Compton pode ser observado com luz visível? Justifique! Discuta o espalhamento Thomson, comparando-o com o espalhamento Compton.
- 10- Discuta o processo de *bremstrahlung* como sendo o inverso do efeito Compton e do efeito fotoelétrico. Pensando nas energias dos elétrons num tubo de televisão, você esperaria que esse eletrodoméstico poderia emitir raios X ? Justifique! Quais efeitos que se tem sobre o espectro resultante quando se diminui a voltagem num tubo de raios X ?

Problemas

- 1- Em que comprimento de onda um radiador de cavidade a 6000 K irradia mais por unidade de comprimento de onda? Resp.: 4830 \AA .
- 2- Faça uma estimativa para encontrar o comprimento de onda em que corpo humano emite sua radiação térmica máxima.
- 3- Em uma explosão termonuclear, a temperatura no centro da explosão é momentaneamente 10^7 K . Calcule o comprimento de onda para o qual a radiação emitida é máxima.

4- A uma dada temperatura, $\lambda_{\max} = 6500 \text{ \AA}$ para uma cavidade de corpo negro. Qual será o valor de λ_{\max} se a intensidade de radiação total I_T for duplicada? Resp. $\lambda_{\max} = 546,6 \text{ nm}$.

5- (a) Utilizando a relação $P(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon/k_B T}}{k_B T}$ mostre que $\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon = k_B T$. (b) Mostre que o ponto de máximo da função $\varepsilon P(\varepsilon)$ ocorre para $\varepsilon = k_B T$.

6- Na determinação clássica da energia total média de cada modo da radiação no interior de uma cavidade ressonante, adotou-se a lei da equipartição da energia. De acordo com essa lei, moléculas de um gás que se movem em equilíbrio térmico a uma temperatura T , a energia cinética média por grau de liberdade da molécula é $\frac{1}{2} k_B T$. Essa lei poderia ser aplicada ao problema do corpo negro desde que se adotasse um modelo mecânico de oscilador harmônico para as partículas que compõe as paredes da cavidade, como se fossem pequenos sistemas massa – molas, de modo que a energia potencial também deveria ser incluída na determinação da energia total. A vibração dessas partículas, por consequência da temperatura, daria origem as vibrações dos campos elétricos associados as ondas eletromagnéticas transversais. Baseado nesse modelo mecânico, conclui-se que a energia total média por grau de liberdade deveria ser $k_B T$, isto é, o dobro da energia cinética média que se esperaria para cada partícula oscilante. Considerando-se que a energia total de um oscilador harmônico simples é $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$, onde k é a constante elástica da mola, m é a massa da partícula, v sua velocidade e $x = x_0 \cos \omega t$ sua posição em cada instante de tempo, mostre que essa energia total é o dobro da energia cinética média.

7- O máximo da distribuição espectral de intensidade de radiação para uma certa cavidade ocorre para um comprimento de onda de $27,0 \mu\text{m}$ (na região do infravermelho). A temperatura da cavidade é aumentada até que a potência total irradiada se torne três vezes maior. (a) Determine a nova temperatura da cavidade. (b) Determine a nova posição do máximo da distribuição espectral.

8- A energia solar que atinge a parte superior da atmosfera da terra é 1360 W/m^2 , a chamada **constante solar**. (a) Supondo que a terra se comporte como um corpo negro de temperatura uniforme use a equação de Stefan - Boltzmann para estimar a temperatura de equilíbrio da terra. (b) Se o raio do sol é da ordem de $6,96 \times 10^8 \text{ m}$, a distância da terra ao sol é de aproximadamente $1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ e supondo que o sol irradie como um corpo negro, use a equação de Stefan - Boltzmann para estimar a temperatura na sua superfície. Resp.: (a) $T = 393,5 \text{ K}$, (b) $T_{\text{sol}} = 5759 \text{ K}$.

9- Um radiador de cavidade a 6000 K tem um orifício de 10 mm de diâmetro feito em sua parede. Ache a potência irradiada através do orifício no intervalo de comprimentos de onda entre 5500 \AA a 5510 \AA . (Sugestão:

Usualmente, a intensidade de radiação seria calculada por $I = \int_{5500 \text{ \AA}}^{5510 \text{ \AA}} I(\lambda) d\lambda$ multiplicada pela área do orifício.

Entretanto, $\Delta\lambda$ é pequeno o suficiente para permitir uma aproximação do tipo $I = \text{área abaixo da curva} \approx I(\bar{\lambda}) \Delta\lambda$, em que $\bar{\lambda}$ é o valor médio entre os comprimentos de onda 5500 \AA e 5510 \AA , e $I(\bar{\lambda})$ pode ser calculada utilizando a fórmula de Planck para a radiação de corpo negro).

Resp.: $P \approx 7,50 \text{ W}$.

10- Obtenha a lei do deslocamento de Wien, $\lambda_{m\acute{a}x}T = 2,9 \times 10^{-3} K \times m$, a partir da distribuição espectral de densidade de energia de radiação de um corpo negro obtida por Planck $u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$. (Sugestão:

faça a substituição de variável $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$, e reescreva a distribuição espectral de densidade de energia de

radiação na forma $u(\lambda) = \frac{8\pi(k_B T)^5}{h^4 c^4} g(x)$, onde $g(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}$ descreve a forma universal do espectro de um

corpo negro para qualquer temperatura. Encontre a condição para o qual a função $g(x)$ é máxima, derivando-a em relação a x e igualando a zero. Mostre que a operação resulta numa equação transcendental, isto é, na igualdade entre duas funções cuja a solução é gráfica. Mostre que a solução representada pelo ponto de

interseção entre os dois gráficos é $x_{m\acute{a}x} \approx 4,965$. Use esse valor na equação $x_{m\acute{a}x} = \frac{hc}{\lambda_{m\acute{a}x} k_B T}$ e obtenha o

resultado procurado).

11- (a) A energia necessária para que um ele tron seja removido do sódio é $2,3 eV$. Pode-se observar o efeito fotoelétrico no sódio utilizando-se radiação de comprimento de onda $\lambda = 5890 \text{ \AA}$? (b) Qual é o comprimento de onda limiar para a emissão fotoelétrica do sódio? Resp.: (b) 5400 \AA .

12- Radiação de comprimento de onda 2000 \AA incide sobre uma superfie de alumínio. Para o alumínio, são necessários $4,2 eV$ para remover um ele tron. Qual é a energia cinética do fotoele tron emitido (a) mais rápido e (b) mais lento? (c) Qual é o potencial frenador? (d) Qual o comprimento de onda limiar para o alumínio? (e) Se a intensidade da luz incidente é $2,0 W / m^2$, qual é o número médio de fótons por unidade de tempo e por unidade de área que atinge a superfie?

13- O potencial frenador para fotoele trons emitidos por uma superfie atingida por luz de comprimento de onda $\lambda = 4910 \text{ \AA}$ é $0,71 V$. Quando se muda o comprimento de onda da radiação incidente, encontra-se para este potencial um valor de $1,43 V$. Qual é o novo comprimento de onda?

14- A função trabalho para uma superfie de Lítio é $2,3 eV$. Faça um esboço do gráfico do potencial frenador V_0 em função da frequência da luz incidente para uma tal superfie, indicando suas características importantes.

15- Numa experiência fotoelétrica na qual se usa luz monocromática e um fotocatodo de sódio, encontra-se um potencial frenador de $1,85 V$ para $\lambda = 3000 \text{ \AA}$ e de $0,82 V$ para $\lambda = 4000 \text{ \AA}$. Destes dados, determine (a) o valor da constante de Planck, (b) a função trabalho do sódio, e (c) o comprimento de onda limiar para o sódio? Resp.: (a) $6,6 \times 10^{-34} J \times s$, (b) $2,3 eV$, (c) 5400 \AA .

16- Considere uma incidência de luz sobre uma placa fotográfica. A luz será "gravada" se houver uma dissociação de moléculas de $AgBr$ da placa. A energia mínima necessária para dissociar essas moléculas é da ordem de $10^{-19} J$. Calcule o comprimento de onda limiar, acima do qual a luz não vai sensibilizar a placa fotográfica.

17- Fótons de comprimento de onda $\lambda = 0,024 \text{ \AA}$ incidem sobre ele trons livres. (a) Ache o comprimento de onda de um fóton espalhado de um ângulo de 30° em relação à direção de incidência e a energia cinética transmitida ao ele tron. Resp.: (a) $0,027 \text{ \AA}$, $0,057 MeV$, (b) $0,060 \text{ \AA}$, $0,31 MeV$.

18- Um fóton de energia inicial $1,0 \times 10^5 eV$ que se move no sentido positivo do eixo x , incide sobre um elétron livre em repouso. O fóton é espalhado de um ângulo de 90° , dirigindo-se no sentido positivo do eixo y . Ache as componentes do momento do elétron.

19- Qual é a energia cinética máxima possível de um elétron envolvido no processo Compton em termos da energia do fóton incidente $h\nu$ e da energia de repouso do elétron m_0c^2 ?

20- Determine a variação máxima do comprimento de onda no espalhamento Compton de fótons por prótons. Resp.: $2,64 \times 10^{-5} A^\circ$.

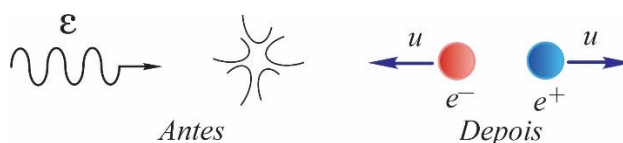
21- (a) Qual a voltagem mínima que deve ser aplicada a um tubo de raios X para que seja produzido raios X com o comprimento de onda Compton do elétron? E com o comprimento de onda de $1A^\circ$? (b) Qual é a voltagem mínima necessária para que a radiação de *bremsstrahlung* resultante seja capaz de produzir um par?

22- (a) Mostre que o comprimento de onda mínimo no espectro contínuo de raios X é dado por $\lambda_{\min} = 12,4 A^\circ/V$, onde V é a voltagem aplicada em quilovolts. (b) Se a voltagem aplicada a um tubo de raios X é $186 KV$, qual deve ser o valor de λ_{\min} ? Resp.: (a) $\lambda_{\min} \approx 12,4 A^\circ/V$, (b) $\lambda_{\min} \approx 0,067 A^\circ$.

23- Um raio γ de comprimento de onda $0,005 nm$ incide sobre um elétron inicialmente em repouso e é retro espalhado. Calcule o comprimento de onda do raio γ espalhado e a energia cinética, em KeV , do elétron recuado.

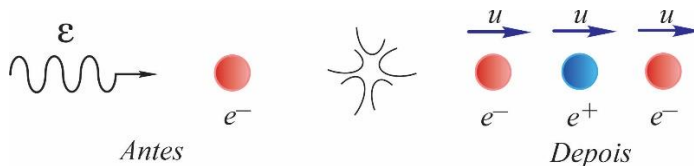
24- Um raio γ de comprimento de onda $0,0062 nm$ incide sobre um elétron inicialmente em repouso. O elétron é recuado com energia cinética de $K = 60 KeV$. (a) Calcule a energia do raio γ espalhado, em KeV . (b) Determine a direção de espalhamento. Resp.: $140 keV$, 96° .

25- Um raio γ cria um par elétron – pósitron como mostra a Figura abaixo. Mostre diretamente que, sem a presença de uma terceira partícula (o núcleo), para absorver uma parte do momento, a energia e o momento *não se conservam simultaneamente*.



(Sugestão: Iguale as energias e mostre que isto implica em momentos diferentes antes e depois da interação).

26- Um raio γ pode produzir um par elétron - pósitron na vizinhança de um elétron em repouso, na forma $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$, da mesma maneira como ocorre nas vizinhanças de um núcleo atômico. A Figura abaixo mostra, de modo simplificado, como este processo de interação pode ser representado. Mostre que nesse caso a energia mínima é $4m_0c^2$.



(Sugestão: Use as leis da conservação do momento linear e da energia, para mostrar que $u = \frac{\varepsilon c}{\varepsilon + m_0 c^2}$, ou

$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\varepsilon + m_0 c^2}{\sqrt{2\varepsilon m_0 c^2 + m_0^2 c^4}}$. Substitua esses resultados na equação resultante da conservação do momento

e mostre que $\varepsilon = \frac{9m_0 c^2 - m_0 c^2}{2} = 4m_0 c^2$).