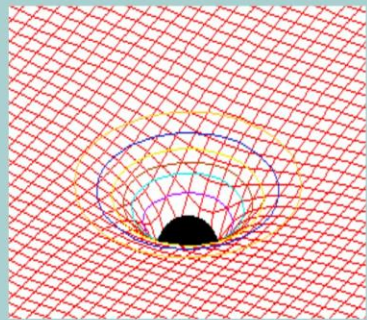
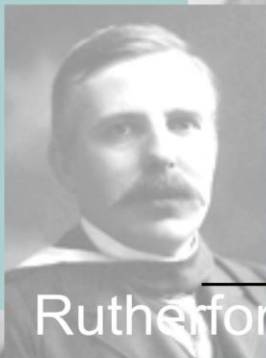
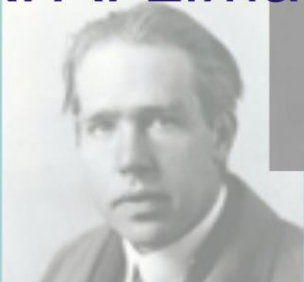
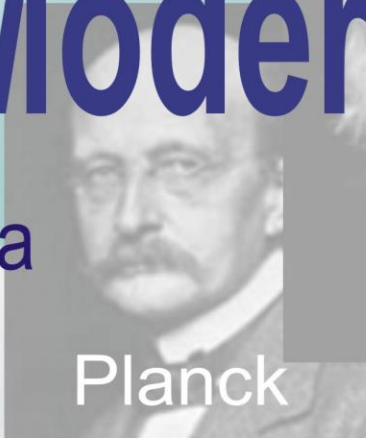
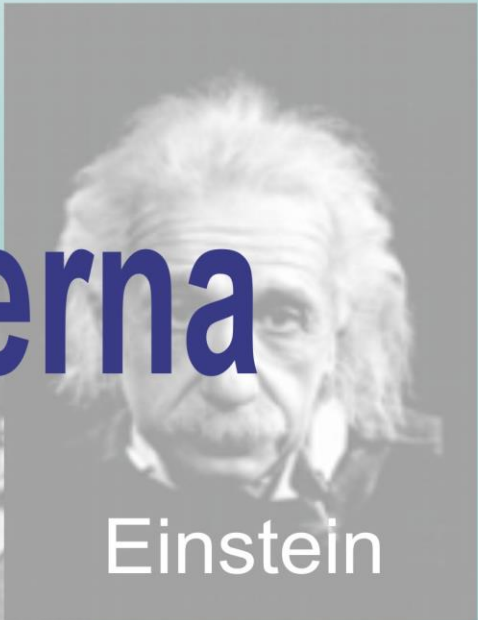
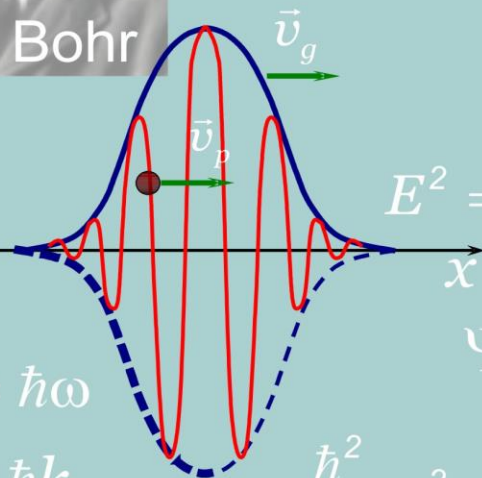


Introdução à Física Moderna

Carlos R. A. Lima



$$E = mc^2$$



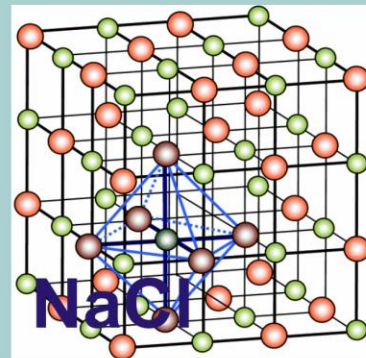
$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

$$\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$$

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \hbar k$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$



NOTAS DE AULAS DE
FÍSICA MODERNA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AO CURSO E
TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Edição de junho de 2014

CAPÍTULO 1 – TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

ÍNDICE

- 1.1- Introdução
- 1.2- Eventos Físicos e Sistemas de Referência
- 1.3- Transformação de Galileu e Relatividade de Newton
- 1.4- Eletromagnetismo e Relatividade de Newton
- 1.5- Experiência de Michelson - Morley
- 1.6- Tentativas para “Salvar o Éter” - FACULTATIVO
 - 1.6.1- Hipótese da Contração de Lorentz - Fitzgerald
 - 1.6.2- Hipótese do Arrastamento do Éter
- 1.7- Postulados da Teoria da Relatividade Especial
- 1.8- Cinemática Relativística
 - 1.8.1- Simultaneidade entre Eventos
 - 1.8.2- Transformações de Lorentz
 - 1.8.3- Transformação de Velocidades
 - 1.8.4- Diagramas Espaço – Tempo e Espaço de Minkowski
 - 1.8.5- Dilatação dos Tempos e Contração dos Comprimentos
 - 1.8.6- Técnicas Experimentais de Medidas de Espaço e Tempo em Relatividade – FACULTATIVO
 - 1.8.6.1- Relógio de Luz
 - 1.8.6.2- Relógio Atômico
 - 1.8.7- Intervalo no Espaço – Tempo
 - 1.8.8- Efeito Doppler na Relatividade
 - 1.8.9- Paradoxo dos Gêmeos
- 1.9- Dinâmica Relativística
 - 1.9.1- Momento Relativístico
 - 1.9.2- Energia Relativística
 - 1.9.3- Transformações das Grandezas Dinâmicas
 - 1.9.4- Invariância da Energia de Repouso
 - 1.9.5- Partículas sem Massa
- 1.10- Velocidades Superluminosas e os Táquions

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como **facultativos**. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Física Moderna. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em **7 aulas de quatro créditos**.

INTRODUÇÃO À FÍSICA

MODERNA

PROF. CARLOS R. A. LIMA

INTRODUÇÃO AO CURSO

Até o final do século XIX acreditava-se que todas as leis da Física já tinham sido descobertas. As leis de Newton pareciam descrever todos os detalhes do movimento mecânico de um objeto, e as equações de Maxwell forneciam uma descrição completa dos fenômenos eletromagnéticos. Entretanto, logo no início do século XX, vários trabalhos desenvolvidos por Max K. L. Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Louis V. P. R. de Broglie e outros, resultaram na elaboração de duas novas teorias: A teoria da Relatividade, utilizada para explicar o comportamento de objetos que se movem com grandes velocidades e que impõe novos conceitos para o espaço e o tempo; e a Teoria Quântica, que se aplica a sistemas microscópicos e questiona o conceito intuitivo da continuidade da natureza.

Essas duas novas teorias Físicas, formam o que se conhece hoje como "Física Moderna". De acordo com o

dicionário, moderno é tudo aquilo que pertence a atualidade ou a um passado recente. Entretanto, Física Moderna tem um significado um pouco diferente e se refere às teorias quântica e relativística, bem como todas as suas aplicações.

Na Física Moderna, a mecânica clássica de Newton e o eletromagnetismo de Maxwell, são incluídos como casos particulares.

O primeiro capítulo deste curso trata os tópicos mais importantes da teoria da relatividade especial aplicada aos referenciais inerciais. O capítulo começa analisando a base experimental que deu origem aos postulados, enunciados por Einstein, para elaborar a teoria da relatividade. Usando como base tais postulados, deduzem-se as novas transformações de coordenadas para diferentes referenciais inerciais. Com o objetivo de formular a mecânica relativística, a cinemática e a dinâmica são reavaliadas.

Os próximos capítulos tratam da origem e fundamentos da teoria da mecânica quântica. Os primeiros capítulos analisam os experimentos cujos resultados estão em desacordo com as teorias clássicas e propõem as formulações alternativas. Os últimos capítulos tratam as bases conceituais que resultaram na elaboração da teoria quântica de Schrödinger. Sistemas de potenciais descontínuos,

oscilador harmônico e átomo monoelétrico, são abordados como exemplos de aplicação da teoria quântica de Schrödinger.

Outros temas importantes da Física moderna são discutidos em Capítulos posteriores. Entre esses temas destacam-se: Estrutura interna dos átomos, moléculas e sólidos; Estatística dos fenômenos quânticos; Superfluidez; Supercondutividade; Modelos e processos nucleares. Na abordagem de todos esses temas, deixa-se de lado o rigor formal e prioriza-se os conceitos fenomenológicos.

CAPÍTULO 1

TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

1.1. Introdução

A teoria da Relatividade foi elaborada com o objetivo de explicar o comportamento de sistemas físicos submetidos a altas energias. Partículas mecânicas que se deslocam a altas velocidades, comparáveis a velocidade da luz, são exemplos de tais sistemas. A teoria da relatividade é uma teoria geral que inclui a teoria clássica como caso particular.

Usualmente, a teoria da relatividade é subdividida em duas partes: A teoria da Relatividade Especial ou Restrita, e a Teoria da Relatividade Geral.

A primeira, desenvolvida por Albert Einstein em 1905, adota um formalismo matemático simplificado e se refere a uma comparação entre medidas efetuadas em diferentes referenciais inerciais que se deslocam uns em relação aos outros com velocidade constante. Por outro lado, também desenvolvida por Albert Einstein em 1916, a teoria da relatividade geral se aplica aos referenciais não-inerciais, adota um formalismo matemático bastante elaborado e tem aplicações limitadas em áreas como cosmologia e gravitação. Raramente a teoria da relatividade geral tem aplicações em outras áreas da física ou engenharia e, por esse motivo, aborda-se aqui somente os principais aspectos associados a Teoria da Relatividade Especial.

1.2 - Eventos Físicos e Sistemas de Referências,

Para efetuar medidas físicas na relatividade é necessário definir evento físico ou simplesmente evento. Um evento pode ser, por exemplo, a colisão entre duas bolas ou o "piscar" de uma fonte luminosa. Um evento é, portanto, algo que ocorre num ponto do espaço e num determinado instante de tempo. Por esse motivo, um evento deve ser assinalado em um sistema de coordenadas quadridimensional, três espaciais e uma temporal.

Um mesmo evento pode ser observado do ponto de vista de diferentes sistemas de referência. Um sistema de referência, ou simplesmente referencial, pode ser inercial ou não-inercial.

O referencial inercial é um sistema de referência no qual se aplica a primeira lei de Newton, ou lei da inércia. Em outras palavras, referencial inercial é aquele que está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Decorre desse fato, que qualquer referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial é também inercial. Na prática, pode-se desprezar os pequenos efeitos da aceleração do movimento orbital da terra, para considerar qualquer conjunto de eixos fixos à terra como um referencial inercial. A teoria da relatividade Especial trata de eventos que ocorrem somente em diferentes referenciais inerciais. A restrição de movimento uniforme é somente para os referenciais. Os objetos cujo movimento se estuda podem estar acelerados.

Antes de dar início às considerações que levaram a proposta da teoria da relatividade especial, na sequência é feito uma breve discussão sobre as medidas de eventos físicos em diferentes referenciais inerciais de acordo com a teoria da física clássica.

1.3 - Transformações de Galileu e Relatividade de Newton.

Seja um referencial inercial S' movendo-se para a direita, ao longo da direção do eixo x com velocidade v , em relação a outro referencial inercial S fixo à terra, como mostrado na Fig. 1.1.

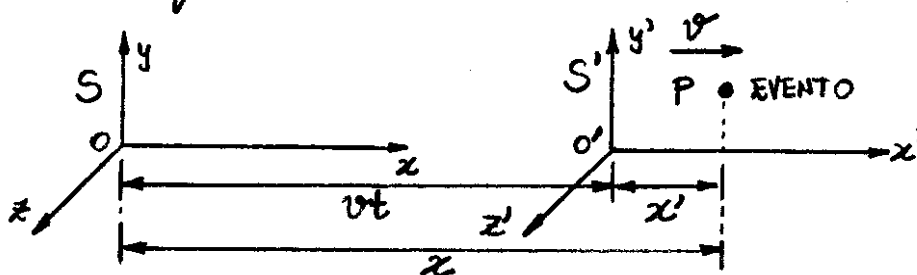


Fig. 1.1 - Movimento relativo entre referenciais inerciais S e S' .

Pode-se adotar também o referencial S movendo-se com velocidade $-v$ em relação a S' . Seja um evento ocorrendo no ponto P , cujas coordenadas de espaço e tempo são medidas por observadores em cada referencial. O observador em S mede a localização e o tempo de ocorrência do evento, atribuindo valores às coordenadas espaciais x, y, z e temporal t . O mesmo é feito pelo observador em S' , atribuindo valores às coordenadas x', y', z' e t' .

Para encontrar as relações de transformação entre x, y, z, t e x', y', z', t' , assume-se que os dois observadores inerciais usam instrumentos calibrados e sincronizados entre si.

Se os relógios de cada observador marcam zero no instante em que as origens O e O' coincidem, então as relações entre as coordenadas x, y, z, t e x', y', z', t' serão:

$$x' = x - vt \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad . \quad (1.1)$$

O procedimento clássico supõe que o tempo seja absoluto, isto é, independente de qualquer sistema de referência. Essa natureza universal do tempo é representada por

$$t' = t \quad . \quad (1.2)$$

As equações (1.1) e (1.2), são conhecidas como Transformações de Galileu e estão de acordo com a intuição clássica de qualquer indivíduo.

Da eq. (1.2) segue que o intervalo de tempo de ocorrência entre dois eventos A e B é o mesmo para observadores em S e em S' , isto é,

$$t'_B - t'_A = t_B - t_A \quad . \quad (1.3)$$

Por outro lado, as posições espaciais dos eventos A e B se transformam, segundo a primeira eq. (1.1), como

$$x'_A = x_A - vt_A \quad , \quad x'_B = x_B - vt_B$$

tal que a distância entre os eventos em S' é

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A - v(t_B - t_A)$$

Se as posições x_A e x_B forem medidas ao mesmo tempo, em S , isto é, os eventos A e B são simultâneos em S , então $t_A = t_B$ e

$$x'_B - x'_A = x_B - x_A \quad (1.4)$$

Nesse caso, são também as mesmas as distâncias entre os eventos A e B medidas em ambos os referenciais. Nota-se que a hipótese da simultaneidade de medições é uma condição necessária para que haja concordância na medida das distâncias, por observadores em diferentes referenciais inerciais.

A partir das transformações de Galileu pode-se encontrar as transformações clássicas das velocidades e acelerações das partículas para diferentes observadores inerciais.

A transformação de velocidade segue das derivadas das transformações de Galileu, dadas nas eqs. (1.1), isto é,

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

ou, como $t = t'$, tal que $d/dt = d/dt'$, então

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z, \quad (1.5)$$

onde

$u_x = dx/dt$, $u_y = dy/dt$, $u_z = dz/dt$ e
 $u'_x = dx'/dt'$, $u'_y = dy'/dt'$, $u'_z = dz'/dt'$, são as componentes das velocidades medidas em S e S' , respectivamente. As eqs. (1.5) podem ser escritas na seguinte notação vetorial:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \quad (1.6)$$

Com $\vec{u}' = u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k}$, $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ e $\vec{v} = v \vec{i}$.

A transformação clássica para a aceleração pode ser obtida derivando as eqs. (1.5), ou (1.6), isto é,

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z \quad (1.7)$$

ou

$$\vec{a}' = \vec{a}, \quad (1.8)$$

uma vez que, sendo v uma constante, $dv/dt = 0$. Assim, as componentes medidas da aceleração de uma partícula não são modificadas pelo movimento do referencial inercial. Logo, de acordo com as transformações de Galileu, a aceleração \vec{a} de uma partícula é invariante do ponto de vista dos observadores de ambos os referenciais inerciais S e S' . Como, classicamente, a massa m da partícula não se altera por causa do movimento do referencial inercial, também será invariante a força que atua sobre a partícula, isto é,

$$\vec{F}' = \vec{F}. \quad (1.9)$$

Esse resultado formaliza o que se conhece como relatividade de Newton.

A relatividade de Newton afirma que as leis de Newton do movimento e as equações de movimento de uma partícula são as mesmas para todos os referenciais inerciais. Em outras palavras, todas as leis da mecânica clássica devem ser invariantes em relação ao movimento de um referencial inercial. Uma consequência desse fato é que nenhum experimento mecânico será capaz de fornecer ao observador, informações sobre o movimento de seu referencial inercial relativamente a outros referenciais inerciais. Um jogador de bilhar em um vagão fechado de um trem em movimento uniforme, por exemplo, não é capaz de dizer, pelo seu jogo, qual é o movimento do trem em relação a estações. O movimento das bolas de bilhar não é capaz de revelar, se quer, se o trem está de fato em movimento. É evidente que é possível determinar a velocidade relativa entre dois referenciais inerciais comparando medidas em ambos os referenciais, mas jamais será possível deduzir essa velocidade relativa a partir de observações confinadas a um só referencial.

Também não há nenhum meio de determinar a velocidade absoluta de qualquer referencial inercial por meio de experiências mecânicas. Para definir uma velocidade absoluta, é necessário adotar um referencial privilegiado em repouso absoluto. De acordo com a relatividade de Newton, todas as referenciais inerciais são equivalentes e

não é possível afirmar que existe um referencial em repouso absoluto. Por exemplo, uma pessoa viajando num trem é incapaz de afirmar, de modo absoluto, se somente ele se move relativamente à estação, ou somente a estação se move relativamente a ele, ou se existe algum movimento combinado entre ele e a estação.

A inexistência de um referencial privilegiado em repouso absoluto é a essência da relatividade de Newton.

Exemplo 1.1

Dois prótons são ejetados de um núcleo atômico radioativo em direções opostas, numa amostra de material radioativo em repouso no laboratório. Cada próton tem a velocidade de $0,95c$, quando medida por um observador no laboratório. Qual é a velocidade de um próton quando medido por um observador colocado no referencial do outro próton?

Pode-se considerar um dos prótons como sendo o referencial fixo S , o laboratório como o referencial móvel S' e o outro próton a partícula cuja velocidade se procura no referencial S , como mostra a Fig. 1.2.

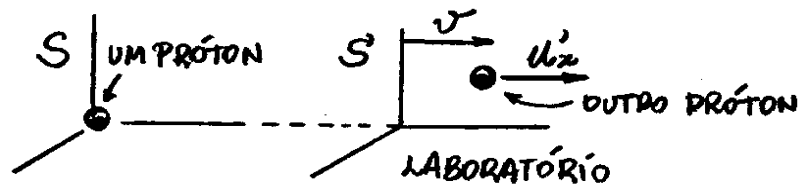


Fig. 1.2 - Movimento de um próton do ponto de vista do outro próton.

Assumindo $u_x' = 0,95c$ e $v = 0,95c$ na primeira eq. (1.5), obtém-se

$$0,95c = u_x - 0,95c \Rightarrow u_x = 1,90c.$$

Essa seria então a velocidade de um próton do ponto de vista do outro próton de acordo com as transformações clássicas de velocidades.

1.4 - Eletromagnetismo e Relatividade de Newton.

A questão agora é saber se além das leis da mecânica, outras leis da física, tais como as leis do eletromagnetismo, também são invariantes em relação as transformações de Galileu. Se assim fosse, o princípio da relatividade de Newton se aplicaria a todos os sistemas físicos e não haveria, de fato, nenhum referencial inercial privilegiado.

A equação da onda eletromagnética, deduzida das equações de Maxwell do eletromagnetismo, identifica a velocidade da luz no vácuo, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, como uma grandeza invariante.

No final do século XIX, época em que a visão mecânica dominava, não se admitia que um distúrbio ondulatorio pudesse se propagar no vácuo. Deu-se portanto o nome "éter" ao meio mecânico no qual a luz se propaga com velocidade c .

Quando se diz que a velocidade do som no ar seco a uma temperatura $T=0^\circ\text{C}$ é $v=331,3\text{ m/s}$, fica implícito que existe um referencial fixo no ar através do qual a onda sonora se propaga com essa velocidade. Entretanto, quando se diz que a velocidade da luz no vácuo é $3,0 \times 10^8\text{ m/s}$, não fica claro que algum referencial está presente. Parecia então razoável admitir a existência de um meio de propagação, como o éter, para todas as ondas eletromagnéticas, mesmo que fosse necessário atribuir propriedades inócuas para ele, tais como densidade nula e transparência absoluta.

Seja S' o referencial do éter, onde um pulso luminoso se propaga com velocidade c . Se o referencial S' , isto é, o éter, se desloca, por exemplo, para a direita com velocidade v em relação a um referencial S , então, de acordo com as transformações de Galileu, do ponto de vista deste referencial, a velocidade da luz seria $c \pm v$, dependendo do sentido do pulso luminoso.

Assim, se o éter fosse considerado como um referencial equivalente a qualquer outro, a teoria eletromagnética de Maxwell e as transformações de Galileu seriam contraditórias. Uma solução possível para o problema seria supor que o éter seja o único referencial privilegiado em repouso absoluto, no qual as equações de Maxwell se aplicam e a velocidade da luz é exatamente c . Nesse caso, a relatividade de Newton não se aplicaria ao eletromagnetismo.

Para contornar o problema das diferentes interpretações das transformações de Galileu para a mecânica e o eletromagnetismo, é necessário escolher uma das seguintes hipóteses:

1. A relatividade de Newton se aplica a mecânica mas não ao eletromagnetismo. No caso do eletromagnetismo, existiria um referencial privilegiado em repouso absoluto denominado éter.

Se essa fosse a hipótese correta, deveria ser possível detectar a existência do éter como um referencial privilegiado.

2. A relatividade de Newton se aplica tanto a mecânica quanto ao eletromagnetismo. Nesse caso, a teoria eletromagnética de Maxwell deveria ser modificada.

Se essa fosse a hipótese correta, deveria ser possível detectar as falhas na teoria de Maxwell e reformular as novas leis do eletromagnetismo para que se tornem consistentes com as transformações de Galileu.

3. Existe uma outra relatividade, diferente da relatividade de Newton, que se aplica tanto a mecânica quanto ao eletromagnetismo. Nesse caso, a teoria mecânica de Newton deveria ser modificada para preservar a invariância da velocidade da luz exigida no eletromagnetismo.

Se essa fosse a hipótese correta, deveria ser possível detectar as falhas na teoria de Newton e reformular as novas leis da mecânica.

Nas seções que se seguem apoia-se as bases experimentais que rejeitam as duas primeiras hipóteses e mantêm a terceira como a escolha correta. Essa foi a hipótese que motivou Einstein a elaborar a nova teoria da relatividade, que tem como base transformações de coordenadas que preservam a invariância da velocidade da luz para diferentes referenciais inerciais.

1.5. Experiência de Michelson - Morley.

Em 1881, Albert Abraham Michelson e em 1887, Edward Williams Morley, utilizaram uma técnica interferométrica para medir a velocidade da luz em diferentes referenciais inerciais.

O objetivo dessa experiência era detectar o éter como um referencial privilegiado em repouso absoluto.

Se de fato o éter existisse e fosse um referencial em repouso absoluto, um observador na Terra perceberia um "vento de éter", cuja velocidade \vec{v} é igual a resultante das velocidades de rotação e translação da Terra. Admitindo essa velocidade como sendo somente a velocidade de translação da Terra $v = 30 \text{ km/s}$, então

$$\beta = v/c \approx 10^{-4}. \quad (1.10)$$

Um tratamento teórico para o éter, elaborado por Fresnel e Lorentz, mostrou que um teste da existência do éter exigiria uma experiência que fosse capaz de medir variações da ordem de $\beta^2 = v^2/c^2 \approx 10^{-8}$. Foi a incúvel sensibilidade da experiência de Michelson-Morley que tornou possível tal medida.

Para medir a velocidade da luz em relação ao éter, o interferômetro deveria ser alinhado com o braço OM_1 paralelo à direção do movimento da Terra como mostra a Fig. 1.3. Nessa Figura, o interferômetro está em repouso, fixo à Terra, e o feixe de luz se move através do éter. Como a Terra se desloca para a direita com velocidade \vec{v} , o éter se desloca para a esquerda com velocidade $-\vec{v}$.

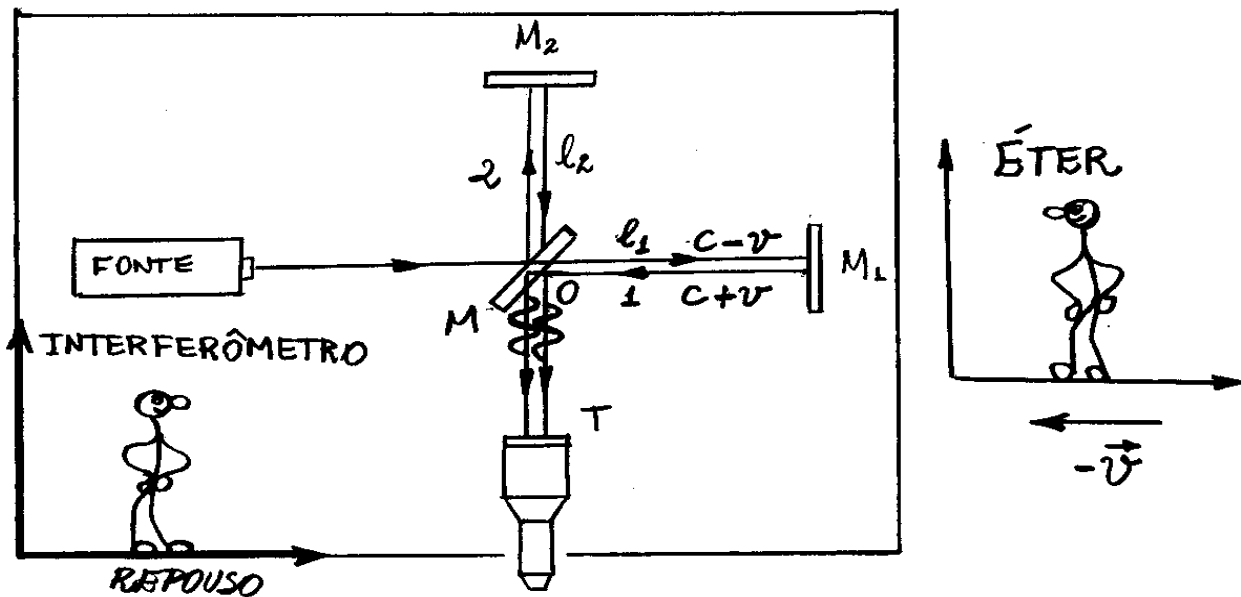


Fig. 1.3 - Diagrama geral da experiência de Michelson-Morley. Referencial do interferômetro.

Um feixe de luz de uma fonte, fixa em relação ao instrumento, é dividido em dois por um semi-espelho M . O feixe 1, denominado de braço 1 do interferômetro, é transmitido através de M e o feixe 2, denominado de braço 2 do interferômetro, é refletido em M . Esses feixes retornam, após refletirem nos espelhos M_1 e M_2 , e interferem-se na região de um telescópio T . A Fig. 1.4 mostra um padrão de franjas típico que se observa com o telescópio.

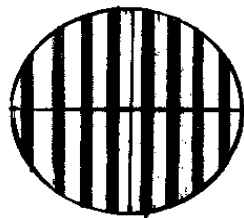


Fig. 1.4 - Padrão de franjas típico que se observa com o interferômetro de Michelson-Morley.

O padrão de interferência tem sua origem na diferença de fase entre os feixes 1 e 2 devido a diferença de caminho óptico e diferenças de velocidades de percurso relativamente ao éter. Para se obter a diferença de fase associada a essas variações, é necessário calcular a diferença de tempo Δt nos percursos de ida e volta dos dois feixes no interferômetro.

De l_1 e l_2 são, respectivamente, os comprimentos dos braços 1 e 2 do interferômetro, então o intervalo de tempo do feixe 1 no percurso M_1, M, M_1 será

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = l_1 \left[\frac{c+v + c-v}{(c-v)(c+v)} \right]$$

$$= l_1 \left[\frac{2c}{c^2 - v^2} \right] = 2l_1 \left[\frac{c}{c^2(1 - v^2/c^2)} \right] = \frac{2l_1}{c} \gamma^2, \quad (1.11)$$

onde

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c, \quad (1.12)$$

pois, de acordo com as transformações de Galileu, o feixe 1 tem velocidade $c+v$ no trajeto de ida e $c-v$ na volta. O tempo t_2 de propagação do feixe 2, pode ser determinado com o auxílio da Fig. 1.5.

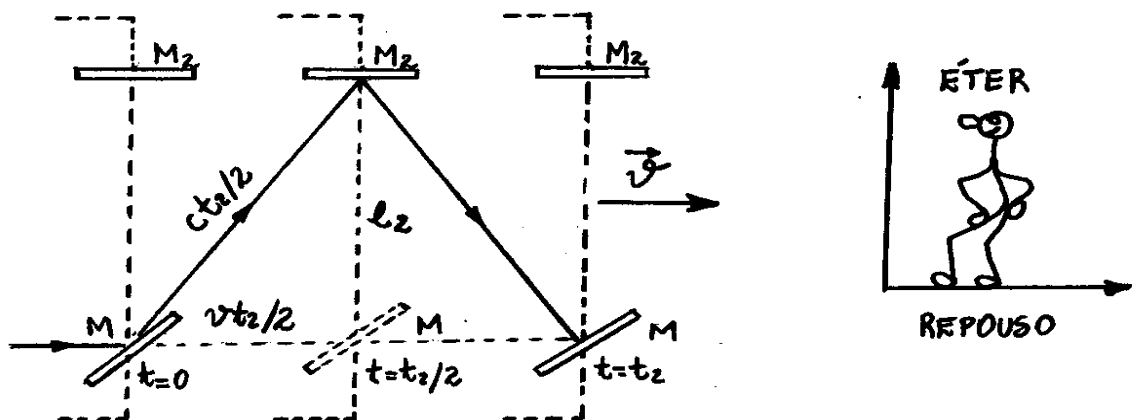


Fig. 1.5 - Geometria do feixe transversal na experiência de Michelson-Morley. Referencial do Éter.

A Fig. 1.5 mostra que

$$(c t_2/2)^2 = (v t_2/2)^2 + l_2^2$$

$$\Rightarrow t_2^2 (c^2 - v^2) = 4l_2^2 \Rightarrow t_2^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = 4l_2^2$$

ou

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2l_2}{c} \gamma \quad (1.13)$$

Somente a diferença de fase associada à variação da velocidade da luz é que se deseja detectar de modo que, qualquer valor de l_1 e l_2 pode ser escolhido. Em particular, assumindo $l_1 = l_2 = l$ nas eqs. (1.11) e (1.13), obtém-se a diferença dos tempos Δt entre as percursos das feixes luminosas nos dois braços do interferômetro como

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l}{c} (\gamma^2 - \gamma) \quad (1.14)$$

onde

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad \text{e} \quad \gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1} \quad (1.15)$$

Pode-se simplificar essas expressões recorrendo a expansão binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1) \frac{x^2}{2} + \dots \approx 1 + nx, \quad (1.16)$$

para $x \ll 1$. Como $\beta = v/c \ll 1$ e de acordo com a eq. (1.16), as eqs. (1.15) tornam-se

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \quad \text{e} \quad \gamma^2 \approx 1 + \beta^2 \quad (1.17)$$

A substituição dessas equações na eq. (1.14) fornece

$$\Delta t = \frac{l}{c} \beta^2 \quad (1.18)$$

O cálculo de t_2 se faz no referencial do éter, enquanto que o de t_1 no referencial do interferômetro. Como o tempo é absoluto em física clássica, então não existe problema no cálculo do intervalo de tempo Δt usando t_1 e t_2 . Dá-se observar que Δt depende do termo de segunda ordem $\beta^2 = v^2/c^2 \approx 10^{-8}$, como evidenciado na eq. (1.18). A fase δ_1 associada a diferença de tempo Δt entre os percursos dos feixes luminosos nos dois braços do interferômetro é

$$\delta_1 = \frac{\Delta t}{T},$$

onde T é o período associado a onda da radiação utilizada no interferômetro, como mostra o gráfico do campo elétrico \vec{E} em função do tempo t na Fig. 1.6.

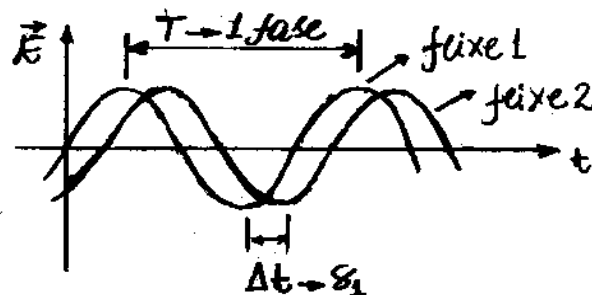


Fig. 1.6 - Relações de fase entre as ondas eletromagnéticas planas para cada feixe, ou braço, do interferômetro.

Para se observar deslocamentos das franjas no interferômetro, é necessário comparar a fase δ_1 com alguma outra fase de referência. Poderia-se, por exemplo, comparar a fase δ_1 , referente a terra em movimento, com uma fase δ_2 , referente a terra em repouso.

Como não se pode parar a terra para fazer a experiência, a alternativa seria girar o interferômetro de 90° e observar as posições das franjas nas duas situações. Se uma rotação fosse realizada, os braços 1 e 2 trocariam de posição e, como eles tem o mesmo comprimento l , a diferença entre os tempos de percurso passariam a ser $\Delta t^* = t_2 - t_1 = -\Delta t$ tal que a nova fase δ_2 seria

$$\delta_2 = \frac{\Delta t^*}{T} = -\frac{\Delta t}{T}.$$

O número de franjas ΔN deslocadas no padrão de interferência é equivalente a diferença de fase $\Delta\delta$, isto é,

$$\Delta N \equiv \Delta\delta = \delta_1 - \delta_2 = 2 \frac{\Delta t}{T} = 2\Delta t \nu = 2\Delta t \frac{c}{\lambda}, \quad (1.19)$$

pois $T = 1/\nu$ e $c = \lambda\nu$. Substituindo a eq. (1.18) na eq. (1.19), obtém-se

$$\Delta N = \frac{2l}{\lambda} \beta^2. \quad (1.20)$$

Michelson e Morley construíram um interferômetro com várias espelhos, para tornar o percurso dos feixes tão grande quanto possível ($l \approx 11\text{m}$). Foi montado sobre uma pedra

pesada que flutuava numa tina cheia de mercúrio, para que o aparelho pudesse girar facilmente em torno de um eixo central e, ao mesmo tempo, não fosse perturbado mecanicamente. Utilizando um feixe de luz de comprimento de onda $\lambda = 590 \text{ nm}$, esperava-se encontrar um deslocamento de franjas dado por

$$\Delta N \approx 0,4 \text{ franjas.} \quad (1.21)$$

Foram efetuadas diversas observações em diferentes horas do dia e em dias diferentes ao longo do ano. No entanto, jámais qualquer deslocamento de franjas teria sido observado.

O resultado nulo da experiência de Michelson-Morley foi tão inesperado que durante 50 anos ela foi repetida por vários pesquisadores. Todas as tentativas descharacterizavam o conceito do éter.

1.6 - Tentativas para "Salvar o Éter" - FACULTATIVO.

Na tentativa de "salvar o éter" e ainda preservar o resultado nulo da experiência de Michelson - Morley, cientistas de sua época sugeriram hipóteses alternativas, as quais se propõe detalhar a seguir.

1.6.1 - Hipótese da Contração de Lorentz - Fitzgerald.

A hipótese de George Francis Fitzgerald, proposta em 1892 e complementada por Hendrik Antoon Lorentz, sugere que todos os corpos sejam contraídos na direção do movimento relativo ao éter estacionário, por um fator $\sqrt{1-\beta^2}$, com $\beta = v/c$. Com essa hipótese, o comprimento dos braços do interferômetro de Michelson - Morley devem ser alterados para

$$l'_1 = l_1 \sqrt{1-\beta^2} \quad \text{e} \quad l'_2 = l_2, \quad \leftarrow$$

sendo agora l_1 e l_2 , os comprimentos dos braços com o interferômetro em repouso. Nesse caso, os tempos nos percursos de ida e volta de cada feixe seriam

$$t_1 = \frac{2l'_1}{c} \gamma^2 = \frac{2l_1 \sqrt{1-\beta^2}}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e

$$t_2 = \frac{2l'_2}{c} \gamma = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Então,

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (l_1 - l_2). \quad (1.22)$$

Similarmente, com a rotação de 90° tem-se

$$l_1' = l_1, \quad l_2' = l_2 \sqrt{1-\beta^2} \quad (1.23)$$

e

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (l_1 - l_2) = \Delta t. \quad (1.24)$$

Logo,

$$\Delta N = \Delta \delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{\Delta t}{T} - \frac{\Delta t'}{T} = 0 \quad (1.25)$$

e, portanto, nenhum deslocamento de franjas seria observado.

Curiosamente a hipótese de Lorentz não era satisfatória e o argumento para se entender o motivo é simples:

Admitindo $l_1 \neq l_2$, para que a solução não seja trivial ($\Delta t = \Delta t' = 0$), mesmo com a contração de Lorentz, poderia-se esperar deslocamento de franjas, quando a velocidade do interferômetro mudar de v para v' . Pode-se mostrar que o deslocamento previsto nesse caso é

$$\Delta N = \frac{l_1 - l_2}{\lambda} \left(\frac{v'^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (1.26) \leftarrow$$

Em 1932, Roy James Kennedy e Edward M. Thorndike, usando um interferômetro com $l_1 - l_2 \approx 16 \text{ cm}$, realizaram

a experiência apropriada. Os dados da experiência foram colhidos nos instantes em que a variação na velocidade de rotação da terra é máxima (intervalo de 12 horas) e a variação na velocidade de translação da terra é máxima (intervalo de 6 meses). Também nessa experiência, nenhum efeito foi observado ($\Delta N = 0$), em direta contradição com a hipótese de contração.

1.6.2 - Hipótese do Arrastamento do Éter.

Com esta hipótese admite-se que o éter esteja ligado a todos os corpos de massa finita e é arrastado com tais corpos. Como não haveria movimento relativo entre o interferômetro e o éter, o resultado da experiência de Michelson-Morley seria automaticamente nulo. Entretanto, existiam dois efeitos bem estabelecidos, que se opunham a hipótese de arrastamento do éter: A aberração das estrelas e o coeficiente de arrastamento de Fresnel.

A aberração das estrelas foi observada em 1727 por James Bradley e tinha como base o movimento circular desses corpos por causa do movimento da terra. Esse efeito pode ser facilmente verificado observando uma estrela na vertical com um telescópio.

Se a terra e a estrela estivessem fixas no éter, o telescópio teria que ser apontado diretamente para cima para que a estrela fosse vista a todo momento, como mostra a Fig. 1.7(a). Nesse caso, a luz emitida pela estrela acompanha o movimento do éter arrastado pela terra.

Por outro lado, se a terra se movesse para a direita através do éter com velocidade v , enquanto a estrela se mantivesse fixa, para ser vista, seria necessário inclinar o telescópio, como mostra a Fig. 1.7(b). Nesse caso, o éter e a estrela estão fixos, enquanto a terra se desloca. Nessa situação, a luz que atingisse a objetiva do telescópio alcançaria a sua ocular.

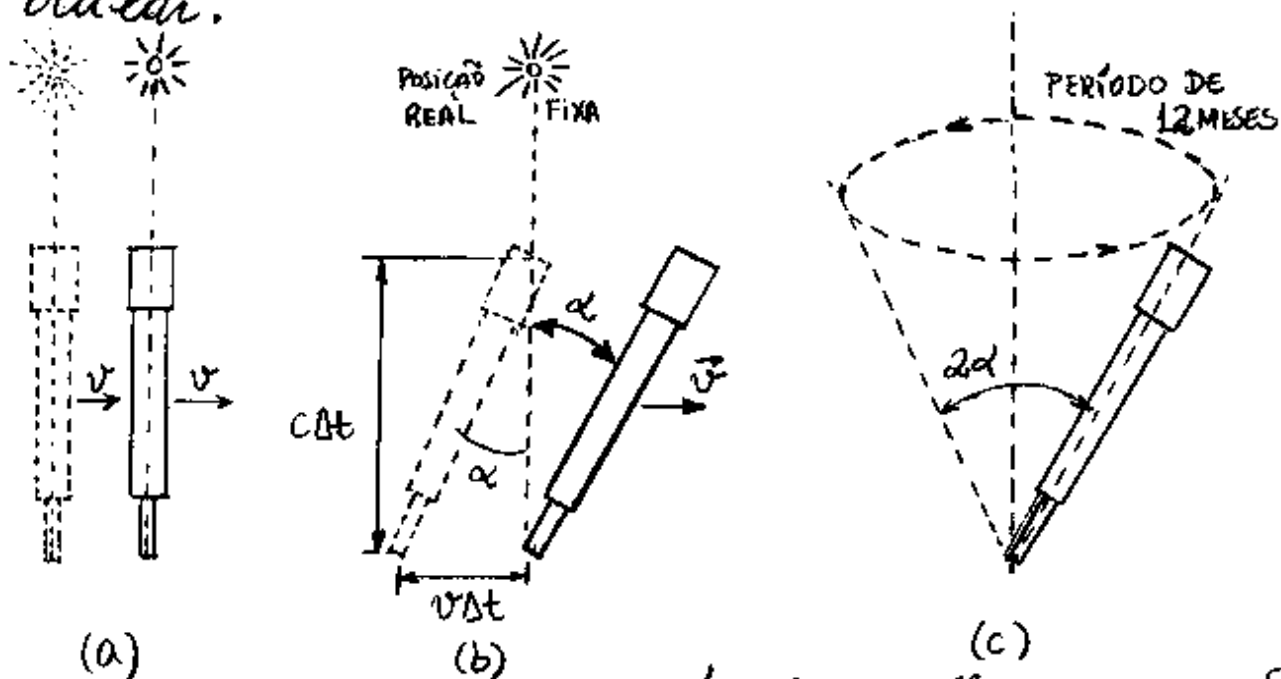


Fig. 1.7- Representação exagerada, para melhor compreensão, da aberração de estrelas por ocasião do movimento da terra.

Durante o intervalo de tempo Δt que a luz percorre a distância da objetiva à ocular $c\Delta t$, o telescópio é deslocado de uma distância $v\Delta t$ para a direita. Assim, o ângulo α de inclinação do telescópio é

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v\Delta t}{c\Delta t} = \frac{v}{c} = \beta \quad (1.27)$$

Já se sabia que a terra gira em torno do sol com velocidade $v = 30 \text{ km/s}$. Como $c = 3 \times 10^5 \text{ km/s}$, obtém-se $\alpha = 20,5\%$ de arco. O movimento da terra em torno do sol é praticamente circular, de modo que a direção de observação se inverte a cada 6 meses, e o eixo do telescópio deve traçar um cone de abstração de abertura angular $2\alpha = 41\%$ durante o ano. Essas observações mostram que a hipótese do arrastamento do éter não é justificável. Conseqüentemente, a suposta "falha" na experiência de Michelson-Morley não poderia ser justificada por essa hipótese.

Um outro efeito que contradiz a hipótese de arrastamento do éter, previsto por Augustin Jean Fresnel, em 1817, está relacionado com um arrastamento parcial da luz por um meio em movimento, tal como um suposto éter. O efeito foi confirmado experimentalmente por Armand Hippolyte Louis Fizeau em 1851. A montagem experimental de Fizeau é mostrada na Fig. 1.8.

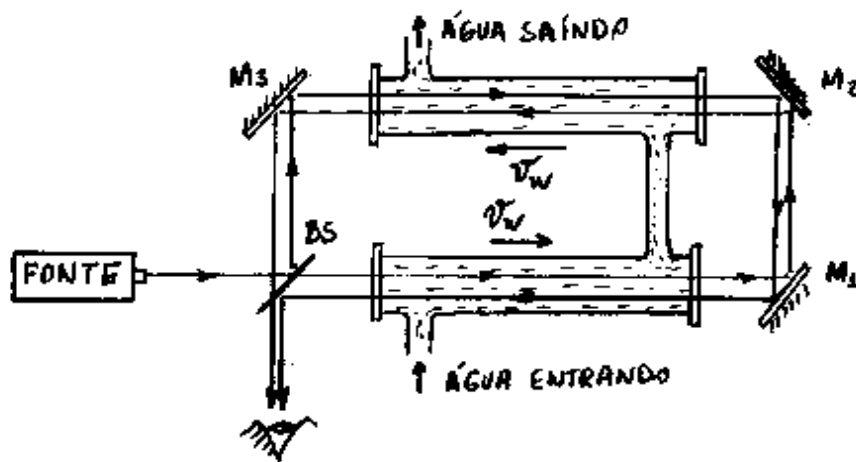


Fig. 1.8. Montagem experimental de Fizeau.

Trata-se de um interferômetro onde a luz de uma fonte é parcialmente transmitida e refletida por um divisor de feixe BS. Antes da interferência, os feixes atravessam regiões de fluxos contrários de água de velocidades v_w constante e refletem nos espelhos M_1 , M_2 e M_3 . Franjas de interferências macroscópicas, associadas às diferenças de caminho óptico dos feixes, são observadas na experiência.

Usando a teoria eletromagnética de Maxwell, Fresnel mostrou que a velocidade v da luz, num meio de índice de refração n , que se move com uma velocidade v_w , é

$$v = \frac{c}{n} \pm v_w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (1.28) \leftarrow$$

onde o fator $(1 - 1/n^2)$ é denominado de coeficiente de arrastamento de Fresnel. A velocidade da luz no meio, c/n , é alterada por causa do movimento do meio. Como $(1 - 1/n^2) < 1$, então, o aumento, ou diminuição, da velocidade v , é menor que v_w . Daí o termo "arrastamento". Nota-se que, para $n=1$ ("vácuo em movimento"), a eq. (1.28) torna-se $v=c$.

Na experiência de Fizeau, a água flui com uma velocidade $v_w = 7 \text{ m/s}$. As medidas de Fizeau confirmaram a previsão de Fresnel. A experiência foi repetida por Michelson e Morley em 1886, e por P. Zeeman e outros depois de 1914, com muito mais precisão, confirmando novamente a previsão de Fresnel.

Se o éter fosse arrastado junto com a água, a velocidade da luz, de acordo com as transformações de Galileu, teria sido $c_n + v_w$ em um tubo e $c_n - v_w$ no outro, de modo que o coeficiente de arrastamento de Fresnel ($1 - 1/n^2$) deveria ser igual a unidade. Entretanto, a experiência de Fizeau mostra que isso não ocorre e, portanto, a hipótese de arrastamento do éter é contraditória.

De fato a hipótese do éter é insustentável. Em adição a isso, experiências mostram que as leis do Eletromagnetismo estão corretas e não necessitam de qualquer modificação. A velocidade da luz, ou qualquer radiação eletromagnética, é independente do movimento de qualquer referencial inercial. Deve-se concluir, portanto, que as leis básicas da mecânica devem ser modificadas.

1.7 - Postulados da Teoria da Relatividade Especial.

Independentemente da existência ou não do éter, do ponto de vista da mecânica clássica, a experiência de Michelson-Morley deveria ser capaz de alcançar os seus objetivos. O problema está justamente neste argumento, isto é, a mecânica clássica não pode ser aplicada a este problema. Em 1905, aos 26 anos de idade, Albert Einstein enuncia os postulados da teoria da Relatividade Especial, cujas consequências explicaria as falhas na experiência de Michelson-Morley. Enunciados com simplicidade, esses postulados são:

Postulado 1: As leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial. Não existe nenhum referencial inercial privilegiado.

Postulado 2: A velocidade da luz no vácuo é independente de qualquer referencial inercial. Seu valor c é um limite superior para partículas ou sinais eletromagnéticos.

Embora pareçam razoáveis, estes postulados têm implicações que, na verdade, fogem ao bom senso. Por exemplo, não é fácil aceitar que qualquer observador deve medir o mesmo valor da velocidade da luz no vácuo, independentemente do movimento relativo entre ele e a fonte. É exatamente este fato que explica a falha na experiência de Michelson-Morley.

A simplicidade e ousadia da teoria da relatividade Especial são características marcantes da genialidade de Einstein e sua validade foi confirmada por inúmeras experiências.

Para formular a teoria da relatividade especial, inicialmente é necessário encontrar as equações de transformação de coordenadas entre referências inerciais com a imposição da invariância da velocidade da luz. Por razões históricas, tais equações ficaram conhecidas como as transformações de Lorentz.

Embora as transformações de Lorentz devam resultar em diferentes leituras para a força \vec{F} , em diferentes referências inerciais, o primeiro postulado de Einstein garante ainda a invariância de todas as leis da física nesses referências. Assim, será necessário examinar as leis de conservação do momento e energia para adequá-las às transformações de Lorentz.

Espera-se que os resultados decorrentes da teoria da relatividade especial reduzam-se nas previsões clássicas para os casos de velocidades muito menores do que a velocidade da luz.

1.8 - Cinemática Relativística.

1.8.1 - Simultaneidade de eventos

Uma das hipóteses clássicas que mais intrigava Einstein era a universalidade do tempo, explicita nas transformações de Galileu como $t=t'$, válida para quaisquer observador inercial. Para estabelecer uma escala universal de tempo é suficiente avaliar o fenômeno da simultaneidade entre eventos A e B. Se diferentes observadores inerciais discordarem na simultaneidade entre eventos A e B, então certamente não haverá uma escala universal de tempo.

A Fig. 1.9 mostra dois eventos A e B ocorrendo em locais diferentes, por exemplo, o "pisca" de duas fontes luminosas. Dois relógios sincronizados, colocados nas posições de cada evento, são necessários para medir os tempos de suas ocorrências.

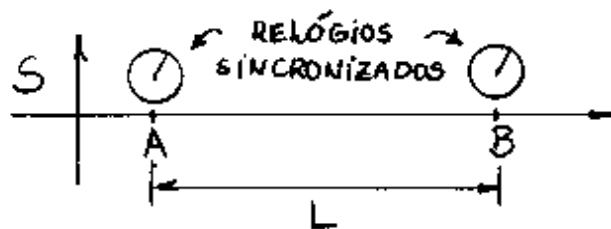


Fig. 1.9 - Relógios sincronizados colocados no locais dos eventos A e B num referencial inercial S.

A primeira dificuldade é a sincronização dos dois relógios separados por uma distância L . Se um observador em A olha para o relógio em B e ajusta o seu relógio para registrar o mesmo tempo, os relógios não estarão sincronizados por causa do tempo L/c necessário para a luz percorrer a distância entre os dois relógios. Os relógios estarão sincronizados se o observador em A adiantar de L/c o seu relógio em relação ao relógio em B. Um procedimento lógico que poderia ser usado para sincronizar dois relógios afastados seria: juntá-los, sincronizá-los e afastá-los novamente.

Para verificar a simultaneidade entre os eventos A e B num mesmo referencial inercial, dois observadores, de posse de relógios sincronizados, combinam emitir sinais luminosos num mesmo instante de tempo $t = t_0$. Como mostrado na Fig. 1.10, um terceiro observador em C, equidistante de A e B, deve concluir que os dois eventos foram simultâneos. Por outro lado, para qualquer outro observador, não equidistante de A e B, os dois eventos não são simultâneos.

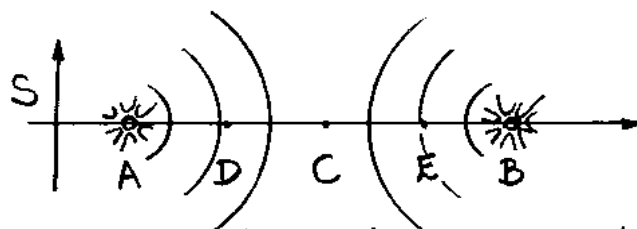


Fig. 1.10 - Simultaneidade entre os eventos A e B.

Seja avaliar a simultaneidade dos sinais luminosos das fontes colocadas no pontos A e B do referencial S da Fig. 1.10, agora do ponto de vista de um segundo referencial S', que se move para a direita, com velocidade v , em relação ao referencial S, como mostra a Fig. 1.11.

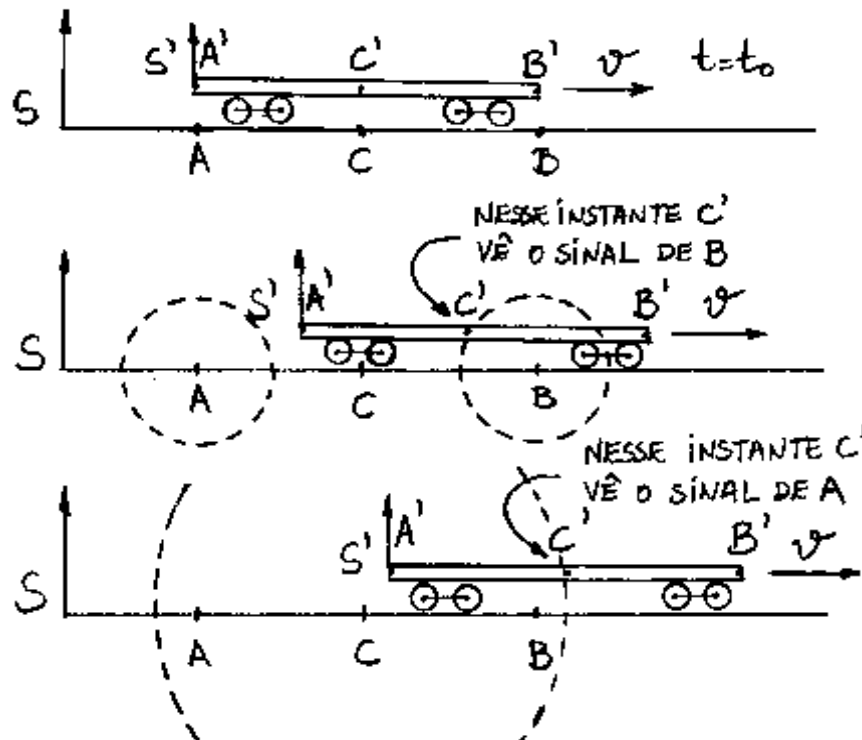


Fig. 1.11 - Sinais simultâneos emitidos dos pontos A e B. Os sinais são simultâneos para C mas não para C'.

Na Fig. 1.11, o referencial S' é representado por um vagão de trem cujas extremidades A' e B' coincidem com os pontos A e B do referencial S num instante de tempo $t=t_0$. Nesse mesmo instante de tempo, um ponto C', colocado no centro do vagão, coincide também com o ponto C do referencial S.

Se, por um lado, os eventos A e B são simultâneos para um observador em C no referencial S, por outro lado, esses mesmos eventos, não são simultâneos para um observador em C' no referencial S'. Observa-se que o sinal emitido de B é visto por C' antes do sinal emitido de A, pois C' move-se em direção a B, ao mesmo tempo que se afasta de A. Assim, a simultaneidade é um conceito relativo, tal que:

"Dois eventos simultâneos num referencial inercial não serão simultâneos em nenhum outro referencial inercial".

Uma consequência imediata da relatividade da simultaneidade ocorre nas medidas dos comprimentos. Por exemplo, a medida do comprimento do vagão na Fig. 1.11, depende da localização simultânea das suas extremidades. Assim, o comprimento dos objetos depende do referencial inercial e será também um conceito relativo.

A relatividade dos conceitos da simultaneidade e do comprimento serão tratadas quantitativamente nas próximas seções.

1.8.2 - Transformações de Lorentz.

Seja um evento ocorrendo num referencial inercial S , caracterizado por coordenadas espaço-tempo (x, y, z, t) . Em um segundo referencial S' , o mesmo evento é caracterizado por coordenadas espaço-tempo (x', y', z', t') . Deseja-se encontrar relações funcionais do tipo:

$$x' = f(x, y, z, t) ; y' = f(x, y, z, t) ; z' = f(x, y, z, t) ; t' = f(x, y, z, t),$$

isto é, equações de transformação que relacionam as coordenadas espaço-tempo de um evento do ponto de vista de um observador inercial, com as coordenadas do mesmo evento do ponto de vista de outro observador inercial.

Juntamente com os postulados fundamentais da teoria da relatividade, deve-se recorrer a uma hipótese de que o espaço e o tempo são homogêneos, isto é, todos os pontos no espaço e tempo são equivalentes. Essa hipótese exige que as equações de transformação sejam lineares, tal que a forma mais geral que podem assumir é:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \quad (1.29)$$

Se as equações não fossem lineares, a hipótese de homogeneidade do espaço e tempo seria violada. Isso significaria, por exemplo, que o comprimento medido de

uma barra dependeria de onde ela se encontra no espaço. Similarmente, pode-se rejeitar qualquer dependência não linear com t , pois o intervalo de tempo entre dois eventos dependeria do instante de tempo em que começa a sua medida.

Uma outra hipótese que se pode admitir para o caso particular do espaço é que ele é isotrópico, isto é, todas as direções no espaço são equivalentes. Essa hipótese permite simplificar o problema supondo que a velocidade relativa v do referenciais S e S' ocorra paralelamente aos eixos comuns x e x' , e que os planos correspondentes sejam mantidos paralelos. Espera-se que os 16 coeficientes nas eqs. (1.29) dependam da velocidade v relativa aos dois referenciais inerciais. Por exemplo, se $v=0$ os dois referenciais coincidem o tempo todo tal que $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=1$ e todas as outras coeficientes são nulos. Deve-se procurar as dependências desses coeficientes para o caso geral $v \neq 0$.

O eixo x coincidirá continuamente com o eixo x' , se pontos sobre o eixo x ($y=z=0$) resultarem em pontos sobre o eixo x' ($y'=z'=0$). Para que isso ocorra, é necessário que os coeficientes a_{21} , a_{24} , a_{31} e a_{34} se anulem nas equações para y' e z' em (1.29) tal que

$$y' = a_{22}y + a_{23}z \quad \text{e} \quad z' = a_{32}y + a_{33}z.$$

Similarmente, para que os pontos do plano xz ($y=0$) resultem em pontos do plano $x'z'$ ($y'=0$) e pontos do plano xy ($z=0$) resultem em pontos do plano $x'y'$ ($z'=0$), é necessário que

sejam nulos os coeficientes a_{23} e a_{32} nas equações anteriores, isto é,

$$y' = a_{22}y, \quad z' = a_{33}z. \quad (1.30)$$

Seja uma barra colocada no referencial S ao longo do eixo y de comprimento unitário ($y=1$) como mostra a Fig. 1.12(a). De acordo com a eq. (1.30), para um observador no referencial S' , o comprimento da barra será

$$y' = a_{22} \times 1 = a_{22}. \quad (1.31)$$

Se agora, a mesma barra for colocada no referencial S' , o observador em S deve medir o mesmo comprimento unitário para a barra ($y=1$) como mostra a Fig. 1.12(b).

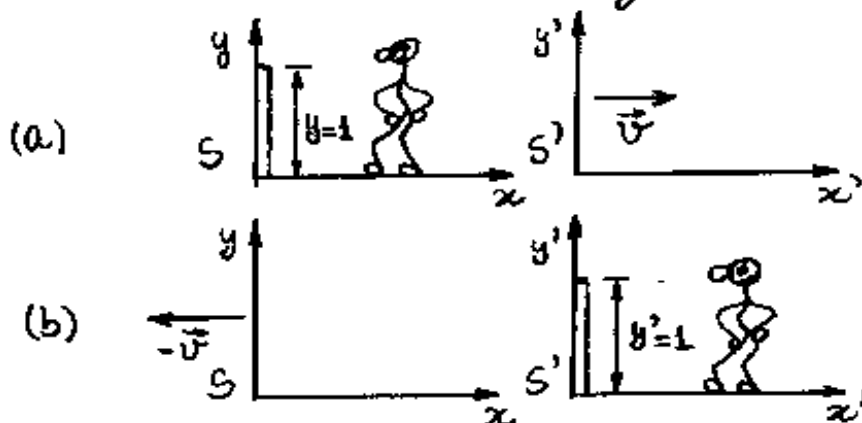


Fig. 1.12 - Comprimento de uma barra medido de pontos de vistas do referencial, (a) S e, (b) S' .

Entretanto, neste caso, de acordo com a eq. (1.30), o observador em S mediria o comprimento da barra, como

$$y = \frac{1}{a_{22}} x' = \frac{1}{a_{22}} \cdot \quad (1.32)$$

Para que as referenciais sejam fixamente equivalentes, exigência do primeiro postulado de Einstein, é necessário que as duas medidas da mesma barra (qs. (1.31) e (1.32)), sejam rigorosamente as mesmas, isto é, $a_{22} = \frac{1}{a_{22}}$ ou $a_{22} = 1$. Argumentos idênticos podem ser utilizados para concluir que $a_{33} = 1$. Portanto, as equações de transformação (1.30) tornam-se

$$y' = y \quad e \quad z' = z \quad (1.33)$$

Restam ainda analisar as equações de transformação para t' e x' em (1.29). Não se pode esperar a dependência de t' com y e z , pois relógios colocados simetricamente nesses eixos ($\pm y$ ou $\pm z$) discordariam quando vistos de S' . Deve-se lembrar que nessas direções não existem movimentos relativos e as leituras dos relógios devem ser as mesmas. Para que isso ocorra, é necessário que $a_{42} = a_{43} = 0$ na última eq. (1.29), isto é,

$$t' = a_{41}x + a_{44}t \quad (1.34)$$

Quanto a transformação para x' , recorre-se a Fig. 1.13, onde um ponto $x' = 0$ em S' se desloca com velocidade v em relação ao referencial S .

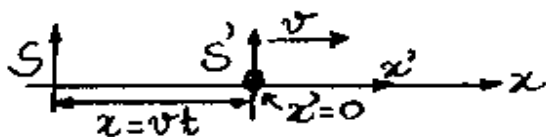


Fig. 1.13 - Movimento de um ponto $x' = 0$ em S' , em relação ao referencial S .

Para que se tenha $x' = 0$ quando $x = vt$, deve-se esperar que

$$x' = \alpha(x - vt) = \alpha x - \alpha vt$$

cujas comparações com a primeira equação de transformação em (1.29), resulta em

$$a_{11} = \alpha, \quad a_{12} = a_{13} = 0, \quad a_{14} = -\alpha v = -a_{41}v$$

e, portanto,

$$x' = a_{11}(x - vt). \quad (1.35)$$

Por fim, é necessário determinar os três coeficientes a_{11} , a_{41} e a_{44} , presentes nas equações de transformação (1.34) e (1.35). Isso pode ser feito a partir do 2º postulado de Einstein. Suponha que em $t = 0$, uma onda eletromagnética esférica seja emitida da origem de S , coincidente com a origem de S' , naquele instante. A onda se propaga em todas as direções com velocidade c em ambos os referenciais. A frente de onda é descrita pela equação de uma esfera cujo raio se expande no tempo com velocidade c tal que, para cada referencial,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

e

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

(1.36)

Substituindo as eqs. (1.33), (1.34) e (1.35) na segunda eq. (1.36) obtém-se

$$a_{11}^2 (x-vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}x + a_{44}t)^2 \quad \leftarrow$$

ou

$$a_{11}^2 (x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}^2 x^2 + 2a_{41}a_{44}xt + a_{44}^2 t^2)$$

ou ainda

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2) x^2 + y^2 + z^2 - 2(v a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44}) xt = (c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2) t^2.$$

Comparando esta equação com a primeira eq. (1.36), conclui-se que

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 &= 1, \\ v a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} &= 0, \\ c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2 &= c^2. \end{aligned} \quad \leftarrow$$

Tem-se aqui um problema de três equações com três incógnitas identificadas pelos coeficientes a_{11} , a_{41} e a_{44} . Pode-se verificar, por substituição nas três equações acima, que as soluções são

$$a_{11} = a_{44} = \gamma \quad \text{e} \quad a_{41} = -\gamma v/c^2 \quad (1.37)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{e} \quad \beta = v/c. \quad (1.38)$$

Substituindo esses coeficientes nas eqs. (1.34) e (1.35), obtêm-se as equações de transformação de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad . \quad (1.39)$$

Se as coordenadas do espaço-tempo do evento fossem observadas a partir do referencial S' , ao invés de S , a única mudança permitida pelo princípio da relatividade é no sentido da velocidade relativa de v para $-v$. Assim, trocando x por x' , y por y' , z por z' , t por t' e v por $-v$ nas eqs. (1.39), obtêm-se as transformações de Lorentz inversa:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2) \quad . \quad (1.40)$$

Deve-se observar que as transformações de Lorentz, na eq. (1.39), se reduzem nas transformações de Galileu quando $v/c^2 \approx 0$ e $\beta = v/c \ll 1$ ou $\gamma \approx 1$.

1.8.3 - Transformação de Velocidades.

Seja um referencial S' movendo-se com velocidade v em relação a um referencial S . Se u_x' é a componente x da velocidade de uma partícula em relação a S' , de acordo com a transformação clássica de Galileu, a componente u_x em relação a S será

$$u_x = u_x' + v \quad . \quad (1.41)$$

Por outro lado, de acordo com as transformações de Lorentz inversa, dadas na eq. (1.40), a posição x e o tempo t da partícula em relação a S são, respectivamente,

$$x = \gamma(x' + vt') = \mu_x t \quad \text{e} \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2) .$$

Combinando estas equações obtém-se

$$\cancel{\gamma}(x' + vt') = \mu_x \cancel{\gamma}(t' + vx'/c^2)$$

ou

$$x' + vt' = \mu_x t' + \frac{\mu_x v}{c^2} x' \Rightarrow x' \left(1 - \frac{\mu_x v}{c^2}\right) = (\mu_x - v)t'$$

ou ainda

$$x' = \frac{\mu_x - v}{1 - \mu_x v/c^2} t' \quad (1.42)$$

Se u'_x é a velocidade da partícula em relação a S' , então, sua localização nesse referencial a medida que o tempo passa, é $x' = u'_x t'$.

Comparando esta equação com a eq. (1.42), obtém-se

$$u'_x = \frac{\mu_x - v}{1 - \mu_x v/c^2} \quad (1.43)$$

cuja transformação inversa é:

$$\mu_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \quad (1.44)$$

Se u'_x e $v \ll c$, a eq. (1.44) transforma-se no resultado clássico, dado na eq. (1.41), como $\mu_x = u'_x + v$. Por outro lado, se $u'_x = c$, caso em que a partícula é um "pulso luminoso", a eq. (1.44) fornece

$$\mu_x = \frac{c + v}{1 + cv/c^2} = \frac{c + v}{c(c + v)} c^2 = c, \quad (1.45)$$

independente, portanto, do referencial inercial como exigido no segundo postulada de Einstein.

Exemplo 1.2

Resolver o exemplo 1.1 utilizando o formalismo da teoria da Relatividade Especial. Nesse exemplo dois prótons são ejetados de um núcleo atômico radioativo em direções opostas, numa amostra de material radioativo em repouso no laboratório. Cada próton tem velocidade de $0,95c$, quando medida por um observador no laboratório. Pedir-se a velocidade de um próton quando medido pelo outro.

Como naquele exemplo, um dos prótons deve ser o referencial fixo S , o laboratório deve ser o referencial móvel S' e o outro próton como a partícula cuja velocidade no referencial S se deseja calcular. A Fig. 1.14 mostra a representação desses referenciais.

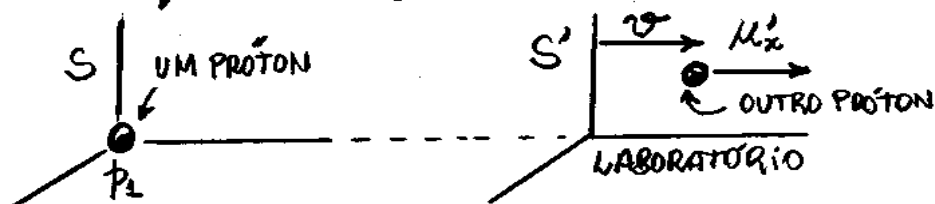


Fig. 1.14 - Movimento de um próton do ponto de vista do outro próton.

Nesse caso, $u'_x = v = 0,95c$ e a eq. (1.44) resulta

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{0,95c + 0,95c}{1 + (0,95)^2} = \frac{1,9c}{1,9025} \approx 0,9987c,$$

Valor menor que a velocidade c como exigido no segundo postulada de Einstein.

Exemplo 1.3 - FACULTATIVO.

Usar a transformação relativística de velocidades para obter o coeficiente de arrastamento de Fresnel dado na eq. (1.28).

Adotando $v_w = v$ como a velocidade da água em relação ao aparelho de Fizeau, mostrado na Fig. 1.8, e $c/n = u_x$ como a velocidade da luz em relação à água, a eq. (1.44) resulta

$$u_x = \frac{c/n + v_w}{1 + v_w/c} = \left(\frac{c}{n} + v_w \right) \left(1 + \frac{v_w}{nc} \right)^{-1}.$$

Pode-se usar a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$, uma vez que $v_w/c \ll 1$ no caso em questão, isto é,

$$\begin{aligned} u_x &\approx \left(\frac{c}{n} + v_w \right) \left(1 - \frac{v_w}{nc} \right) = \frac{c}{n} - \frac{v_w}{n^2} + v_w - \frac{v_w^2}{nc} \\ &\approx \frac{c}{n} + v_w - \frac{v_w}{n^2} \end{aligned}$$

ou

$$u_x \approx \frac{c}{n} + v_w \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Observa-se que não há a necessidade de se admitir nenhum mecanismo de "arrastamento", ou inventar teorias de interação entre a matéria e o "éter". O resultado é uma consequência inevitável da transformação relativística de velocidades.

Para determinar a transformação da componente y da velocidade da partícula do referencial S' para o referencial S , usa-se as equações de transformação de Lorentz para dois eventos A e B , $t'_A = \gamma(t_A - vx_A/c^2)$ e $t'_B = \gamma(t_B - vx_B/c^2)$, tal que

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma [t_B - t_A - (x_B - x_A)v/c^2]$$

ou

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t - \Delta x v/c^2) \quad (1.46)$$

De acordo com esta equação e do fato que $\Delta y' = \Delta y$ obtém-se

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \Delta x v/c^2)} = \frac{\Delta y/\Delta t}{\gamma(1 - (\Delta x/\Delta t)v/c^2)}$$

ou

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \quad (1.47)$$

uma vez que, $u_y = \Delta y/\Delta t$ e $u_x = \Delta x/\Delta t$.

Similarmente, mostra-se que

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \quad (1.48)$$

As transformações inversas das eqs. (1.47) e (1.48) são

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} \quad \text{e} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)} \quad (1.49)$$

Deve-se observar que as componentes transversais da velocidade de uma partícula u_y e u_z vistas de S dependem, tanto das componentes transversais u'_y e u'_z , como também da componente paralela u'_x da velocidade da partícula vista de S' .

É possível obter também equações relativísticas de transformações para a aceleração da partícula, utilizando um método semelhante ao utilizado para a velocidade. Os cálculos, apresentados no exemplo 1.4, mostram que

$$a'_z = \frac{a_z}{\gamma^3 (1 - u_x v/c^2)^3} \quad (1.50)$$

Equações similares podem ser obtidas para a'_y e a'_x . A eq. (1.50) mostra que a aceleração de uma partícula depende do referencial inercial no qual é medida, contrariando a relatividade de Newton, segundo a qual $a'_z = a_z$. Observa-se que $a'_z \rightarrow a_z$ somente quando u_x e $v \ll c$. Deve-se concluir, portanto, que a mecânica deve ser modificada para manter invariantes as leis de Conservação.

Exemplo 1.4 - FACULTATIVO.

Determinar a fórmula da transformação relativística para a aceleração, mostrada na eq. (1.50).

De acordo com a fórmula de transformação relativística de velocidades, dada na eq. (1.43), obtém-se

$$a'_x = \frac{dU'_x}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{U_x - v}{1 - U_x v/c^2} \right)$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{U_x v}{c^2}\right) \left(\frac{dU_x}{dt'}\right) - (U_x - v) \left(-\frac{v}{c^2} \frac{dU_x}{dt'}\right)}{\left(1 - U_x v/c^2\right)^2} = \frac{dU_x}{dt'} \frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - U_x v/c^2\right)^2}$$

Da transformação de Lorentz para os tempos, $t = \gamma(t' + xv'/c^2)$, obtém-se

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right) = \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} U'_x\right),$$

tal que

$$\frac{dU_x}{dt'} = \frac{dU_x}{dt} \frac{dt}{dt'} = a_x \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} U'_x\right)$$

ou, da transformação de velocidades, $U'_x = (U_x - v)/(1 - U_x v/c^2)$,

$$\frac{dU_x}{dt'} = a_x \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{U_x - v}{1 - U_x v/c^2}\right) = a_x \gamma \left(1 + \frac{vU_x/c^2 - v^2/c^2}{1 - U_x v/c^2}\right)$$

$$= a_x \gamma \left(\frac{1 - U_x v/c^2 + U_x v/c^2 - v^2/c^2}{1 - U_x v/c^2}\right) = a_x \gamma \left(\frac{1 - v^2/c^2}{1 - U_x v/c^2}\right).$$

A substituição desta equação na equação para a'_x resulta:

$$a'_x = a_x \gamma \left(\frac{1 - v^2/c^2}{1 - U_x v/c^2}\right) \frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - U_x v/c^2\right)^2} = a_x \gamma \frac{(1 - v^2/c^2)^2}{\left(1 - U_x v/c^2\right)^3}$$

Assumindo $1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2$ nesta equação obtém-se a eq. (1.50).

1.8.4 - Diagramas Espaço-Tempo e Espaço de Minkowski

O fato que a mecânica relativística os intervalos de tempo não são os mesmos para diferentes referências inerciais, reforça o caráter quadridimensional de um evento físico. Em 1907, o matemático Alemão Hermann Minkowski propôs um diagrama espaço-tempo para representar um sistema de referência no espaço quadridimensional, que ficou conhecido como espaço de Minkowski. A Fig. 1.15 mostra o diagrama espaço-tempo representando um referencial inercial S no espaço de Minkowski.

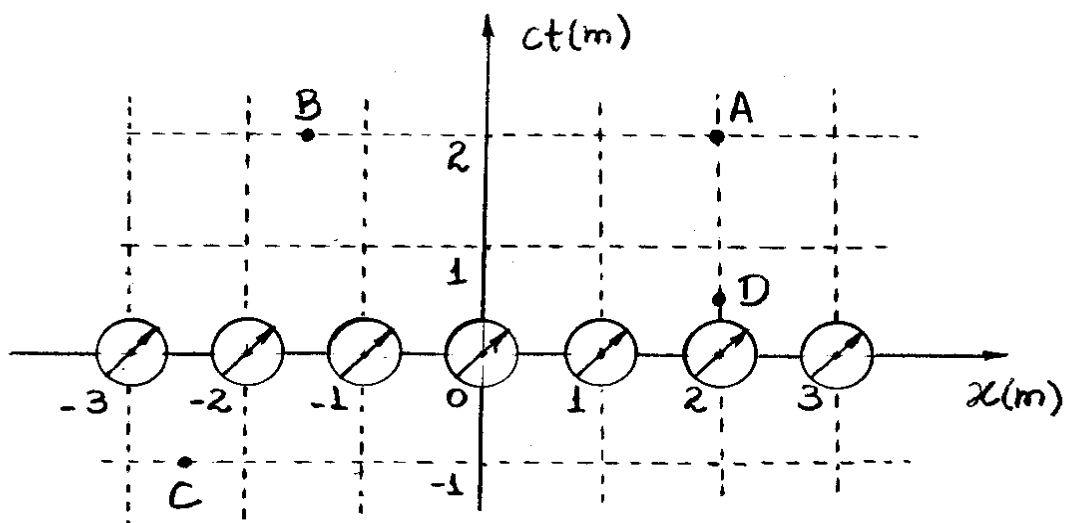


Fig. 1.15 - Diagrama espaço-tempo para um referencial inercial S.

Nos diagramas espaço-tempo as posições dos eventos são indicadas no eixo horizontal (eixo x) e as instantes em que ocorrem são indicados no eixo vertical (eixo ct). O uso da coordenada x somente para representar a posição espacial do evento, não restringe em nada a análise do movimento, pois todas as mudanças relevantes ocorrem sempre na direção do eixo x .

Como os eventos exibem efeitos relativísticos em altas velocidades, é conveniente multiplicar a escala de tempos pela velocidade constante c da luz. Isso permite que se use mesmas escalas e mesmas unidades nas eixos espacial e temporal (metros de distância e metros percorridos pela luz). Na Fig. 1.15, os relógios colocados sobre o eixo x , são sincronizados e podem permanecer verticalmente ao longo das linhas tracejadas, a medida que o tempo passa. Assim, quando eventos A, B, C e D ocorrem no espaço-tempo, sempre existem relógios nas proximidades para registrá-los.

Na Figura, os eventos A e D ocorrem no mesmo local ($x=2m$), embora em instantes diferentes. Por outro lado, os eventos A e B ocorrem em locais diferentes, mas ao mesmo tempo, isto é, simultaneamente.

O evento C ocorreu no passado, uma vez que $ct = -1m$ e o presente ocorre em $ct = 0$.

O lugar geométrico dos pontos ocupadas por uma partícula no diagrama espaço-tempo, é denominado de linha do universo da partícula.

Na Fig. 1.16 (a) é mostrado vários relógios sincronizados colocados em diferentes pontos do eixo x . Nessa figura é mostrado também o movimento de cinco partículas, a partir de $x=0$, com diferentes

velocidades, durante um tempo $ct = 3m$. A partícula P_1 tem velocidade nula. As partículas P_2 e P_3 , movem-se com velocidades constantes, em sentidos opostos, ao longo do eixo x . A partícula P_4 move-se para a direita com aumento de velocidade e a partícula P_5 move-se para a esquerda com redução de velocidade. A Fig. 1.16(b) mostra as linhas do universo das mesmas partículas num diagrama espaço-tempo.

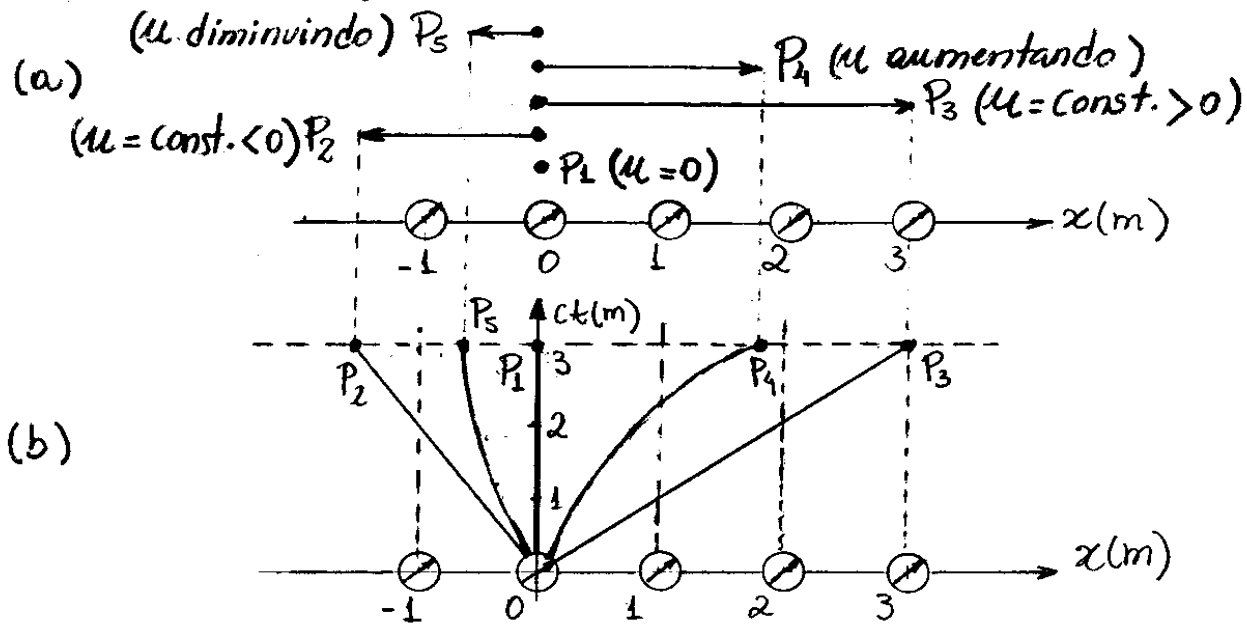


Fig. 1.16 - (a) Trajetórias no espaço de os partículas e, (b) Linhas do universo para essas mesmas partículas.

Como as 03 primeiras partículas movem-se com velocidade constante, suas linhas do universo tem coeficiente angular constante inversamente proporcional à velocidade. Por outro lado, por terem velocidades variáveis, as linhas

do universo das duas últimas partículas não são retas.

A velocidade de qualquer uma das partículas pode ser calculada a partir do diagrama espaço-tempo. Por exemplo, a velocidade da partícula P_3 é calculada observando que

$$\Delta x = 3,0 - 0 = 3,0 \text{ m}$$

$$\Delta(ct) = c\Delta t = 3,0 \text{ m}$$

e portanto

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Logo, a partícula P_3 é, na verdade, um pulso luminoso. O coeficiente angular da sua linha do universo é $\Delta(ct)/\Delta x = 3/3 = 1$. Por outro lado, um pulso luminoso que se propaga para a esquerda tem uma linha do universo de coeficiente angular -1 .

Como as partículas não podem ter velocidades maiores do que a velocidade da luz, então as suas linhas do universo, que passam por $x=0$ e $ct=0$, estarão limitadas ao triângulo hachurado maior da Fig. 1.17. Esses mesmos limites se aplicam a todos os pontos da linha do universo de uma partícula, tal como o ponto A, que aparece na Fig. 1.17.

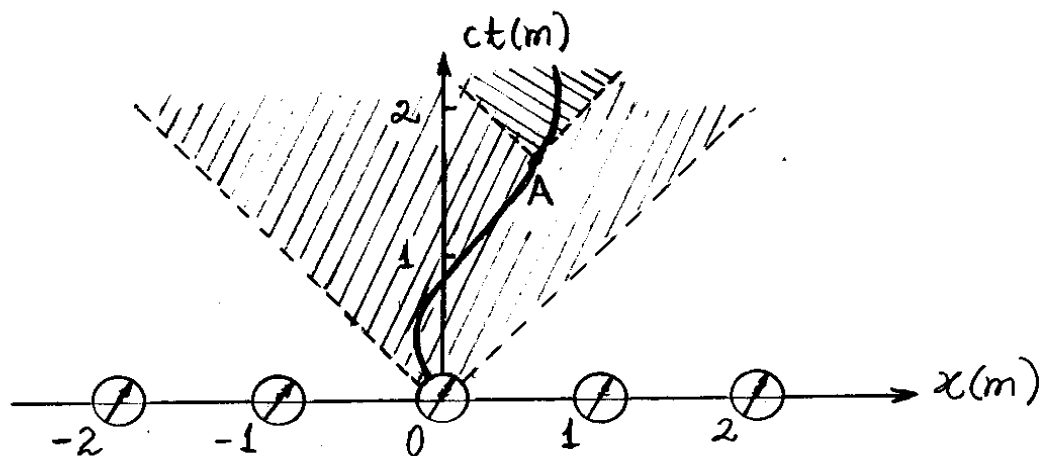


Fig. 1.17 - Regiões limiares das inclinações das linhas do universo das partículas.

Os referenciais inerciais S e S' , com S' movendo-se para a direita com velocidade constante v em relação a S , podem ser representados em termos de diagramas espaço-tempo. Os relógios dos dois referenciais estão superpostos no presente, isto é, $t=t'=0$ em $x=x'=0$ e todos os relógios de cada referencial estão sincronizados entre si.

O eixo x' do referencial S' pode ser determinado no referencial S , sabendo que este é o lugar geométrico dos pontos para os quais $ct'=0$. Neste caso, a transformação de Lorentz para os tempos fornece

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{c^2} x$$

ou

$$ct = \frac{v}{c} x = \beta x, \text{ para o eixo } x', \quad (1.51)$$

isto é, a linha do universo, identificada pelo eixo x' , é descrita pela equação da reta (1.51), num gráfico $ct \times x$, cujo coeficiente angular é β .

Similarmente, o eixo ct' é o lugar geométrico dos pontos para os quais $x' = 0$, isto é,

$$x' = \gamma(x - vt) = 0$$

ou

$$x = vt = v/c \, ct = \beta \, ct$$

ou ainda

$$ct = 1/\beta \, x, \text{ para o eixo } ct', \quad (1.52)$$

ou seja, a linha do universo, identificada pelo eixo ct' , é descrita pela equação da reta (1.52), num gráfico $ct \times x$, cujo coeficiente angular é $1/\beta$.

A Fig. 1.18 mostra o diagrama espaço-tempo para o referencial S e para o referencial S' , onde o segundo move-se no sentido positivo do eixo x com velocidade $v = 1/2 \, c$. Nesse caso particular $\beta = v/c = 1/2$ (coeficiente angular de x') e $1/\beta = 2$ (coeficiente angular de ct').

A reta tracejada representa a linha do universo de um pulso luminoso, movendo também no sentido positivo do eixo x e que passou pelo ponto $x = 0$ em $t = 0$. Evidentemente, seu coeficiente angular é igual a 1 tanto em S como em S' .

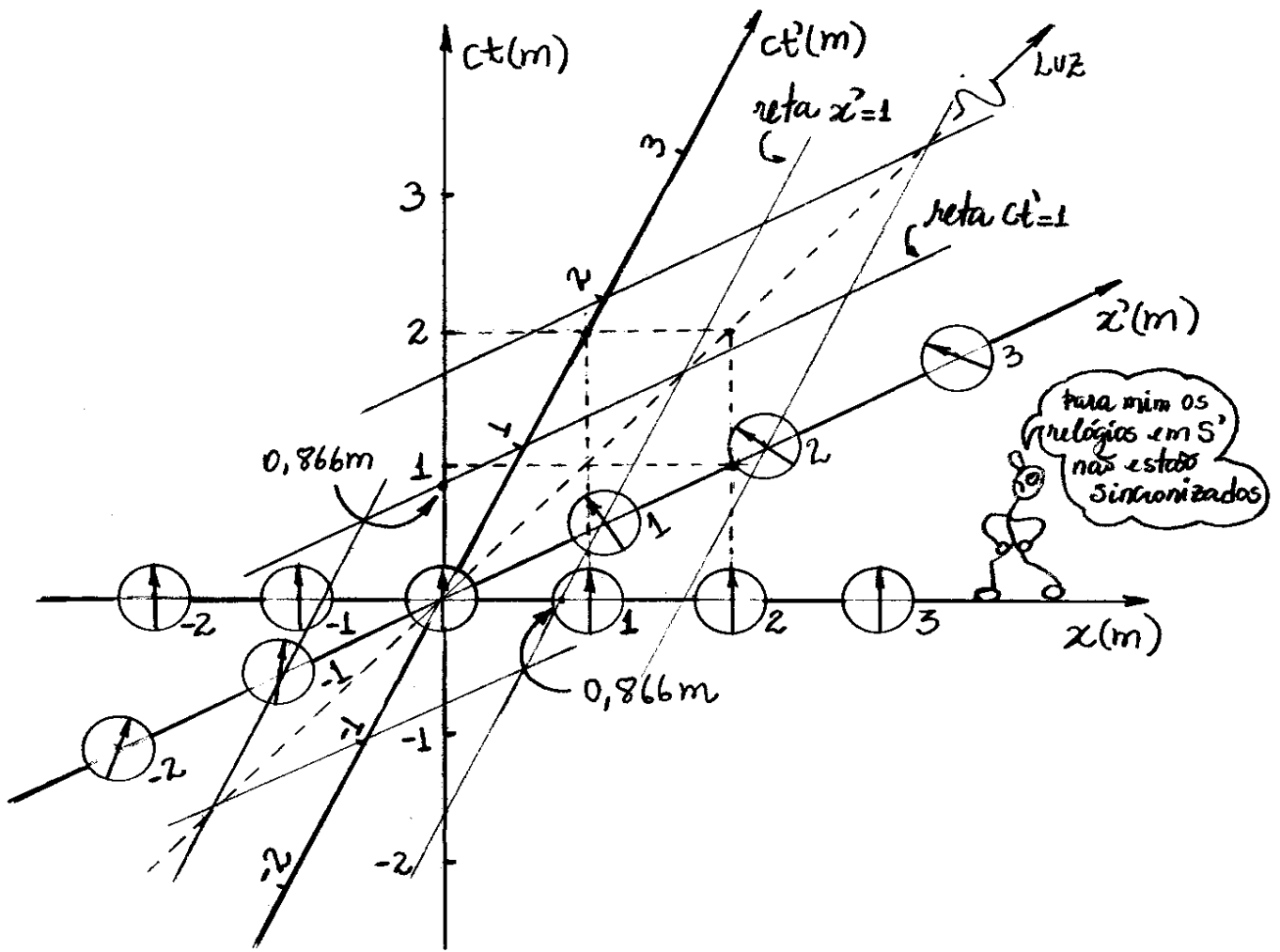


Fig.1.18 - Diagramas espaço-tempo das referenciais inerciais S e S' do ponto de vista de S .

Não se deve ficar surpreso com o fato de que os eixos x e x' não são paralelos. Eles são paralelos no espaço mas não no espaço-tempo, uma vez que este mostra o movimento tanto no espaço como no tempo.

As relações entre as escalas dos diagramas espaço-tempo das referenciais S e S' , também podem ser encontradas com a ajuda das transformações de Lorentz.

Os pontos de interseção das retas x' paralelas ao eixo ct' em S' com o eixo x em S , são calculados assumindo $ct=0$ na transformação de Lorentz para x , isto é,

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct) = \gamma x$$

ou

$$x = \frac{1}{\gamma} x' = x' \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (1.53)$$

Por exemplo, na Fig. 1.18, onde $\beta = 1/2$, a reta $x' = 1$ intercepta o eixo x em $x = 1\sqrt{1 - 1/4} \approx 0,866m$.

Similarmente, os pontos de interseção das retas ct' paralelas ao eixo x' em S' com o eixo ct em S , são calculados assumindo $x=0$ na transformação de Lorentz para t , isto é,

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \Rightarrow ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct$$

ou

$$ct = \frac{1}{\gamma} ct' = ct' \sqrt{1 - \beta^2} . \quad (1.54)$$

As eqs. (1.53) e (1.54) mostram que, do ponto de vista de um observador em S , a escala do referencial S' está contraída de um fator $1/\gamma$.

Falta ainda encontrar as leituras dos relógios colocados ao longo do eixo x' do referencial S' , do ponto de vista do observador do referencial S . Para isso, é suficiente adotar $ct=0$ na transformação de Lorentz $ct' = \gamma(ct - \beta x)$, isto é,

$$ct' = -\gamma\beta x. \quad (L.55)$$

Quando $x = -1$ tem-se $ct' = \gamma\beta$, isto é, o resultado é um intervalo de tempo positivo, tal que, este encontra-se adiantado em relação a $ct'=0$. Por outro lado, quando $x = +1$ tem-se $ct' = -\gamma\beta$, isto é, o resultado é um intervalo de tempo negativo, tal que, este encontra-se atrasado em relação a $ct'=0$.

Assim, de acordo com o observador em S , os relógios colocados em S' não estão sincronizados. Mais precisamente, como mostrado na Fig. 1.18 os relógios situados no semi-eixo negativo de x' estão adiantados em relação ao relógio da origem e os relógios situados no semi-eixo positivo de x' estão atrasados em relação ao mesmo relógio de origem.

1.8.5 - Dilatação dos Tempos e Contração dos Comprimentos.

Os intervalos de tempo e espaço entre eventos, não devem depender do tipo de instrumento usado para medi-los ou de qual seja o evento analisado.

Sejam (x_A, t_A) , (x_B, t_B) e (x'_A, t'_A) , (x'_B, t'_B) as coordenadas espaço-tempo de dois eventos A e B do ponto de vista dos referenciais S e S', respectivamente, com S' movendo-se com velocidade v em relação a S. Nesse caso, de acordo com a transformação inversa da eq. (1.46), o intervalo de tempo entre os eventos no referencial S será

$$\Delta t = \gamma (\Delta t' + \Delta x' v / c^2), \quad (1.56)$$

onde $\Delta t = t_B - t_A$, $\Delta t' = t'_B - t'_A$ e $\Delta x' = x'_B - x'_A$. Se os eventos ocorrem no mesmo local em S', $\Delta x' = x'_B - x'_A = 0$ na eq. (1.56) e, nesse caso

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma T_p, \quad (1.57)$$

onde T_p é um intervalo de tempo que pode ser medido por um único relógio no mesmo local e é denominado de tempo próprio.

Se $\Delta x' \neq 0$, os tempos t'_A e t'_B devem ser medidos por relógios diferentes e o intervalo de tempo $\Delta t' = t'_B - t'_A$, embora não deixa de ser uma medida válida, não é um tempo próprio. Somente um relógio, situado no local do evento, onde este ocorre, é capaz de registrar o tempo próprio.

A eq. (1.57) expressa um fenômeno relativístico denominado de dilatação dos tempos que, como se verá na próxima seção, pode ser comprovado experimentalmente utilizando relógios de alta precisão.

A Fig. 1.19 mostra um exemplo da dilatação dos tempos num diagrama espaço-tempo, onde o movimento relativo entre os referenciais S e S' é $\beta = v/c = 1/2$.

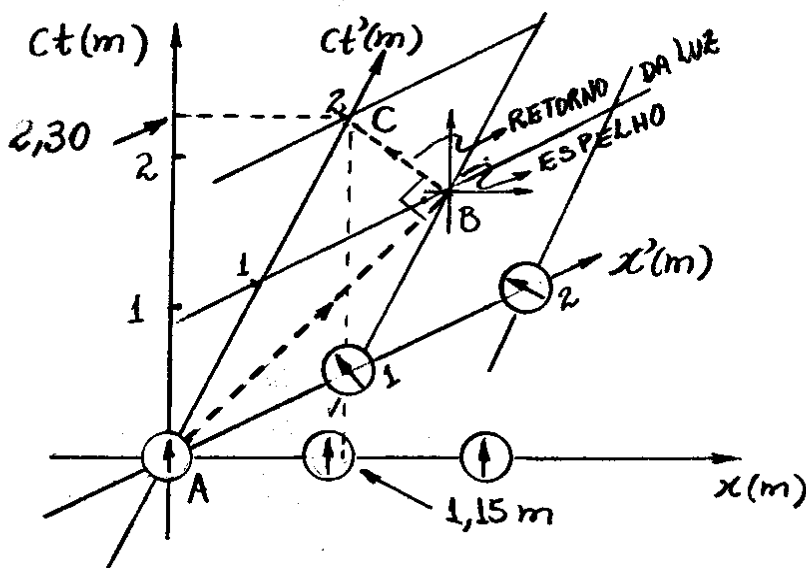


Fig. 1.19 - Diagrama espaço-tempo dos referenciais S e S' para $\beta = v/c = 1/2$, ilustrando o fenômeno da dilatação dos tempos.

Nesse exemplo, um pulso luminoso sai da origem $x'_A = 0$ de S' , se propaga até $x'_B = 1\text{m}$, onde é refletido em um espelho e retorna a mesma origem $x'_C = 0$ de S' , após um intervalo de tempo identificado por $c\Delta t' = 2\text{m}$.

A saída do pulso luminoso é representada como um evento A e o retorno do mesmo como um evento C. É evidente que os eventos A e C ocorrem no mesmo local, na origem do referencial S' . A dilatação dos tempos pode ser observada diretamente, comparando as escalas temporais dos diagramas espaço-tempo na Fig. 1.19.

No referencial S , o pulso luminoso retorna a origem $x'_C = 0$ do referencial S' , após um intervalo de tempo identificado por

$$c\Delta t = \gamma c\Delta t' = \gamma(2\text{m}) = \frac{2\text{m}}{\sqrt{1-(1/2)^2}} = 1,15(2\text{m}) = 2,30\text{m}.$$

Assim, do ponto de vista do referencial S , o relógio em S' está atrasando, isto é, o tempo está ficando mais lento. Como os eventos ocorrem no mesmo local na origem de S' , isto é, $x'_C - x'_A = 0$, então, de acordo com as transformações de Lorentz, a distância Δx entre os eventos no referencial S é

$$\Delta x = x_C - x_A = \gamma(x'_C + vt'_C) - \gamma(x'_A + vt'_A) = \gamma v(t'_C - t'_A) = \gamma v \Delta t'$$

ou

$$\Delta x = \gamma \frac{v}{c} (c\Delta t') = 1,15(1/2)(2\text{m}) = 1,15\text{m}.$$

Um outro fenômeno relativístico importante, associado à dilatação dos tempos, é a contração dos comprimentos.

Seja, por exemplo, a medida do comprimento de uma barra, mantida em repouso num referencial S' . O comprimento da barra no referencial em que está em repouso é denominado de comprimento próprio L_p .

Se x'_A e x'_B são as posições das extremidades da barra no referencial S' , medidas simultaneamente no instante de tempo $t'_A = t'_B$, e x_A e x_B são as posições das mesmas extremidades no referencial S , medidas nos instantes de tempo t_A e t_B . Então, das transformações de Lorentz

$$L_p = \Delta x' = x'_B - x'_A = \gamma(x_B - vt_B) - \gamma(x_A - vt_A) = \gamma(x_B - x_A) - \gamma v(t_B - t_A)$$

ou

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} L_p + v \Delta t, \quad (1.58)$$

onde $\Delta x = x_B - x_A$ e $\Delta t = t_B - t_A$.

Na Fig. 1.20, uma barra de comprimento próprio $L_p = 1\text{m}$, é observada do ponto de vista de referenciais inerciais S e S' numa representação de diagrama espaço-tempo. Nessa figura, o referencial S' move-se com uma velocidade $v = \frac{1}{2}c$ em relação a S , tal que $\beta = \frac{1}{2}$, e a barra encontra-se em repouso no referencial S' .

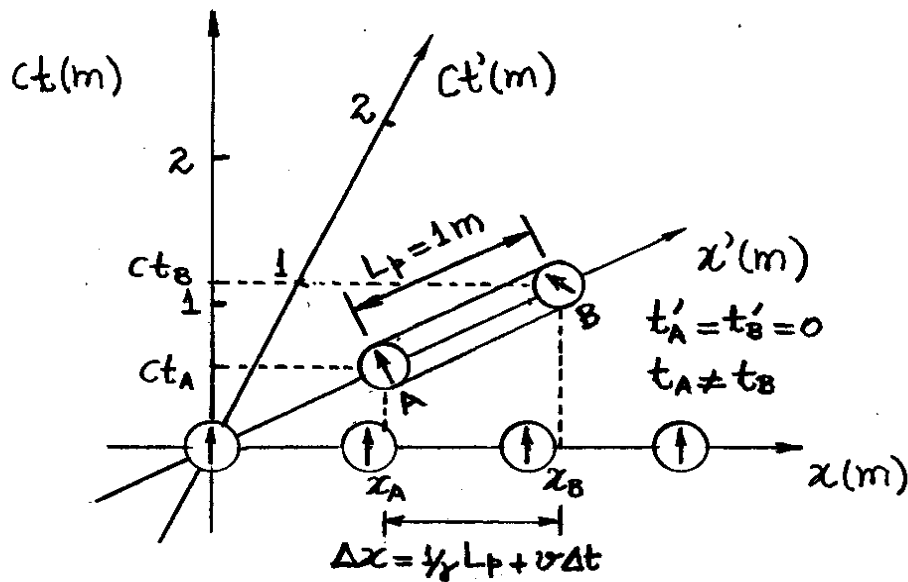


Fig. 1.20 - Diagrama espaço-tempo para $\beta = 1/2$, mostrando eventos A e B, representados pelas extremidades de uma barra, simultâneos em S' e não simultâneos em S , tal que $\Delta x = \frac{1}{2} L_p + v \Delta t$.

Evidentemente, a barra está colocada sobre o eixo x' no referencial S' , tal que a medida de suas extremidades x'_A e x'_B são feitas simultaneamente em $t'_A = t'_B = 0$. Por outro lado, como para o observador em S a barra está em movimento, ele não pode, diretamente do seu referencial, medir, simultaneamente, as posições de suas extremidades x_A e x_B , tal que, $t_A \neq t_B$. Obviamente, o valor de Δx , dado na eq. (1.58), é uma medida válida, fornece a distância entre os eventos A e B, não simultâneos em S , mas nada tem a ver com o comprimento L da barra observada nesse referencial. Assim, a Fig. 1.20 não serve para ilustrar, corretamente, o comprimento L da barra do ponto de vista do observador em S .

Entretanto, é possível calcular o comprimento L da barra, como de fato é observado em S , assumindo, simplesmente, $\Delta t = t_B - t_A = 0$ na eq. (1.58), isto é,

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p \quad (1.59)$$

Essa equação formaliza o fenômeno da contração dos comprimentos e mostra que o comprimento L da barra é menor quando medida no referencial S , onde ela está em movimento.

A Fig. 1.21 mostra a forma correta de ilustrar a contração dos comprimentos num diagrama espaço-tempo para o caso $\Delta x' = x'_B - x'_A = L_p = 1\text{m}$ e $\beta = v/c = 1/2$. Observa-se que a simultaneidade das medidas das extremidades A e B da barra no referencial S , é alcançada quando se busca correspondências entre pontos do referencial S' e pontos do referencial S .

Nessa Figura, a reta paralela ao eixo x' que passa pelas extremidades A e B da barra, correspondem a $t'_A = t'_B = 0$ em S' e $t_A = t_B = 0$ em S . Assim, as retas paralelas ao eixo ct' e que passam pelas extremidades A e B da barra, interceptam o eixo x em pontos que definem corretamente o comprimento da barra em movimento no referencial S , como $L = \frac{1}{\gamma} L_p$.

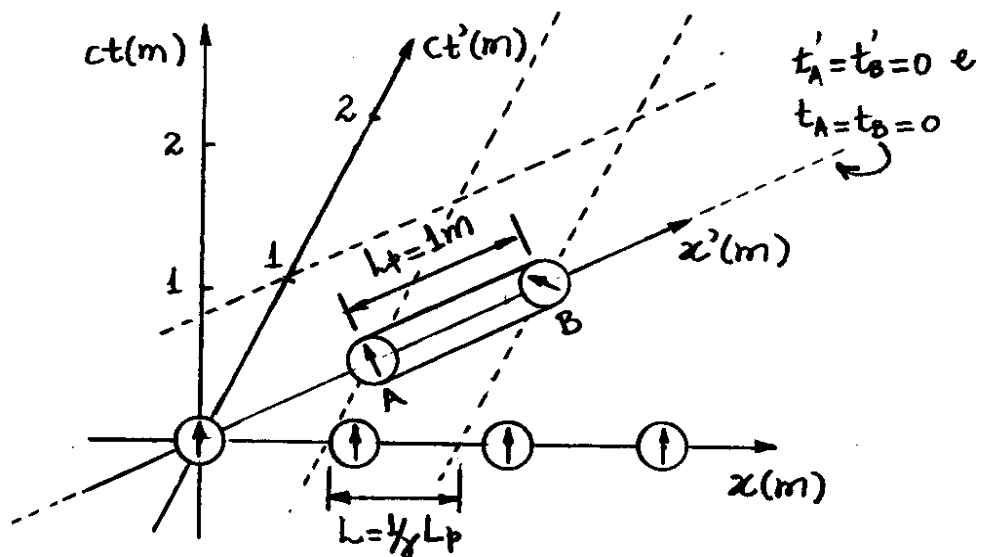


Fig. 1.21 - Diagrama espaço-tempo para $\beta = 1/2$, mostrando eventos A e B, representados pela extremidades de uma barra numa forma apropriada para ilustrar a contração dos Comprimentos.

No exemplo da Fig. 1.21, como o movimento relativo entre os referenciais S e S' é identificado por $\beta = v/c = 1/2$, então o comprimento da barra no referencial S é contraído para

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{1\text{m}}{1/\sqrt{1-1/4}} \approx 0,87\text{ m.}$$

Como se viu na seção 1.6.1, mesmo antes de Einstein ter proposto a teoria da relatividade, Lorentz e Fitzgeral, já havia sugerido que o resultado nulo do experimento de Michelson-Morley poderia ser explicado admitindo que as distâncias na direção do movimento fossem contraídas, como na eq. (1.59). Por causa disso, a contração dos comprimentos também é conhecida como contração de Lorentz-Fitzgerald.

Exemplo 1.4.

Se um avião voa a $2000 \text{ km/h} \approx 555 \text{ m/s}$, quanto tempo deve voar para que o relógio de bordo se atrase $1 \mu\text{s}$, em virtude da dilatação dos tempos?

Os relógios no avião e na terra estarão dessincronizados por

$$\Delta T = \Delta t - \Delta t' = 1 \mu\text{s}.$$

Como o tempo analisado é o tempo de um relógio em movimento no avião, então este deve ser o tempo próprio $\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t$. Assim,

$$\Delta t - \frac{1}{\gamma} \Delta t = 1 \mu\text{s} \Rightarrow \Delta t = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^{-1} \mu\text{s}.$$

Da expansão binomial, $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$; tem-se

$$\frac{1}{\gamma} = (1 - \beta^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2,$$

uma vez que $\beta = v/c \ll 1$. Logo,

$$\Delta t = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2\right)\right]^{-1} \mu\text{s} = \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \mu\text{s} = 2 \frac{c^2}{v^2} \mu\text{s}$$

ou

$$\Delta t = 5,83 \times 10^{11} \mu\text{s} \approx 18456 \text{ anos}.$$

1.8.6. Técnicas Experimentais de Medidas de Espaço e Tempo em Relatividade - FACULTATIVO.

Nesta seção é feita uma breve discussão sobre duas técnicas de medida de intervalos de tempo e espaço na relatividade. Tais técnicas se baseiam no uso de dois relógios de alta precisão, denominados de relógio de luz e relógio atômico.

1.8.6.1. Relógio de Luz.

O relógio de luz baseia-se na medida dos tempos de deslocamentos da luz em dois diferentes percursos, como mostra a Fig. 1.22.

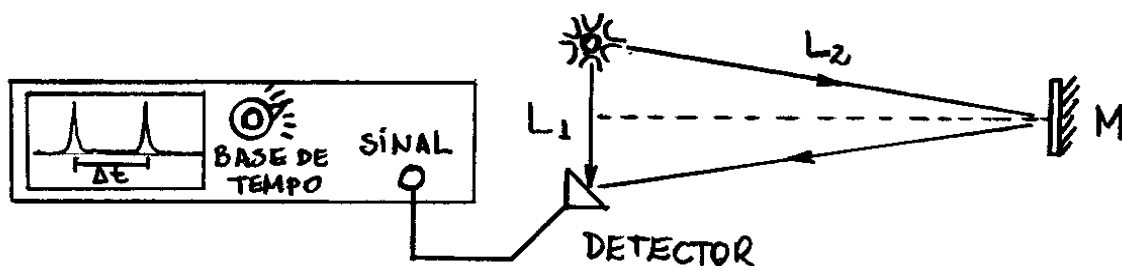


Fig. 1.22 - Relógio de luz para medida de intervalos de tempo com alta precisão.

Um detector capta dois pulsos de uma mesma fonte luminosa, que são enviados para um osciloscópio de alta taxa de varredura temporal.

O segundo pulso tem sua origem na luz refletida por um espelho M distante. O intervalo de tempo Δt entre os pulsos, pode ser medido a partir do deslocamento entre os mesmos na tela do osciloscópio e da taxa de varredura fixada no equipamento.

O intervalo de tempo Δt está relacionado com as distâncias L_1 e L_2 como

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L_2}{c} - \frac{L_1}{c}.$$

Relógios como esse, calibrados e comparados com outros relógios, são freqüentemente usados em experimentos de altas energias em física nuclear.

1.8.6.2 - Relógio Atômico.

O relógio atômico usa como base certas transições quânticas de átomos, detectadas por técnicas espectroscópicas de fluorescência. O famoso relógio atômico de Césio é esquematizado na Fig. 1.23.

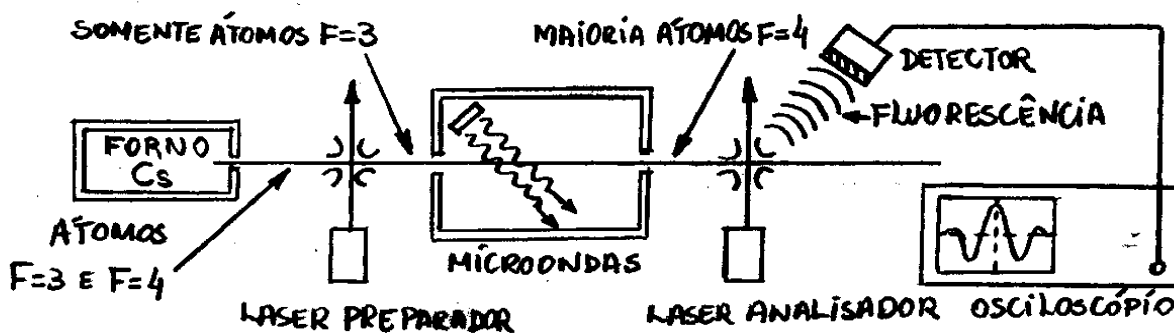


Fig. 1.23 - Diagrama esquemático de um relógio atômico de Cs^{133} .

Átomos de Césio (Cs^{133}), na forma metálica, são aquecidos num forno, produzindo um feixe atômico com velocidade média de 200 m/s. Ao emergir do forno, os átomos podem estar em um de seus estados energéticos de "spin" (propriedade quântica que será abordada posteriormente) que decorrem da interação entre o spin eletrônico e o spin nuclear. Tais estados, caracterizados por $F=3$ e $F=4$, são a essência da utilização de átomos como relógios de precisão, pois a frequência da radiação necessária para converter um no outro é extremamente bem determinada e, portanto, um excelente padrão de tempo.

O feixe de Césio interage com o primeiro laser após sair do forno e todos os átomos são convertidos, por efeito óptico, no estado $F=3$. Uma vez preparado, o feixe passa em uma cavidade onde existe radiação de microondas, convertendo os átomos para o estado $F=4$. Esses átomos são analisados por interação com um segundo laser, sintonizado com uma frequência adequada. Nessa interação, os átomos no estado $F=4$ absorvem e reemitem a luz do laser. Tal reemissão, denominada de fluorescência, é convertida, por um sistema de lentes e detectores, em um sinal elétrico que pode ser medido por um osciloscópio e processado por um microcomputador.

A cavidade de radiofrequência, onde é gerada as microondas, é blindada por um metal especial, denominado de micrometal, para evitar interferências com campos magnéticos externos. A cavidade de radiofrequência, o conjunto de lasers e o feixe atômico, ficam contidos em um ambiente construído com aço inoxidável a uma pressão entre 10 e 7 torr, onde o torr é uma unidade equivalente ao milímetro de mercúrio.

Quanto mais intensa a fluorescência, maior o número de átomos que mudam de estado. A intensidade da fluorescência reflete diretamente a interação dos átomos com a radiação eletromagnética. Variando a frequência dessa radiação, a máxima fluorescência ocorre quando ela é exatamente $\nu_{\max} = 9,192631770 \times 10^9 \text{ Hz}$, como mostrado no gráfico da Fig. 1.24.

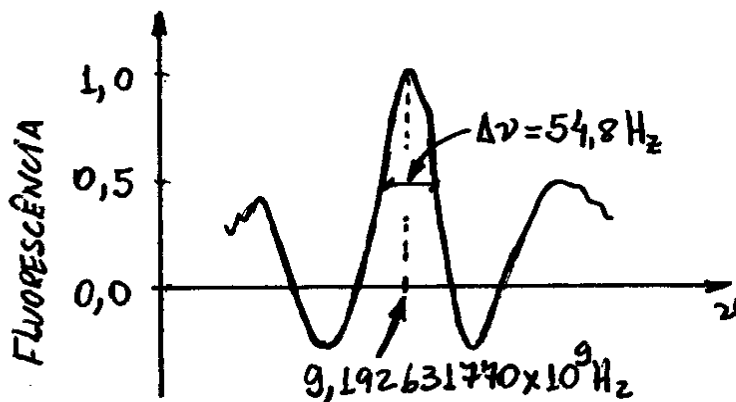


Fig. 1.24 - Sinal de Fluorescência em função da frequência do laser analisador.

O relógio atômico procura manter inalterada a radiação que produz o máximo de fluorescência, para garantir o fator de frequência como padrão temporal.

Como o relógio atômico de Césio define 1 segundo como $9,192\,631\,770 \times 10^9$ ciclos de transições atômicas, pode-se associar a ele uma precisão da ordem de 1 ns . Um relógio atômico convencional tem um erro de $\pm 1\text{ s}$ a cada 63400 anos.

É importante mencionar que a cavidade com as microondas, por onde os átomos passam, é dividida em duas zonas, não explicitadas na Fig. 1.23. Essa técnica de dividir a interação dos átomos em duas zonas é conhecida como método das franjas de Ramsey e foi proposta por Norman Ramsey para aumentar a precisão do relógio atômico. Os pontos de máximo e mínimos presentes na Fig. 1.24 definem as franjas de Ramsey. Esse cientista recebeu o prêmio Nobel de Física em 1989 por causa de seu trabalho com o relógio atômico.

Em 1975, Carroll O. Alley realizou um teste da relatividade usando um relógio atômico, colocado a bordo de um avião da Marinha norte-Americana. O avião repetiu várias vezes

O mesmo trajeto durante 15 horas, voando a uma altitude de 8 a 10 km na região da baía de Chesapeake. O relógio atômico do avião foi comparado com um conjunto de relógios idênticos e calibrados, constatando um atraso esperado pela dilatação relativística dos tempos.

1.8.7. Intervalo no Espaço-Tempo.

As transformações de Lorentz mostram que as coordenadas espaço-tempo de um determinado evento físico dependem do referencial inercial a partir do qual estão sendo observados.

Deve-se investigar agora a existência de alguma grandeza, associada as coordenadas espaço e tempo, que seja invariante em relação as transformações de Lorentz.

Tal grandeza de fato existe, é definida como

$$(\Delta S)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

e é denominada de intervalo no espaço-tempo.

ou, para o caso de uma dimensão espacial,

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2, \quad (1.60)$$

que se interpreta como

$$\left(\begin{array}{c} \text{INTERVALO} \\ \text{ENTRE EVENTOS} \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{c} \text{DISTÂNCIA NO TEMPO} \\ \text{ENTRE EVENTOS} \end{array} \right)^2 - \left(\begin{array}{c} \text{DISTÂNCIA NO ESPAÇO} \\ \text{ENTRE EVENTOS} \end{array} \right)^2.$$

O intervalo Δs é a única grandeza que descreve pares de eventos no espaço-tempo para os quais, em qualquer referencial inercial, obtém-se o mesmo valor numérico. Para se verificar isso, sejam o intervalo de tempo e a distância definidos pelas transformações de Lorentz:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right); \quad \Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t').$$

A substituição dessas equações na eq. (1.60) resulta

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= c^2 \gamma^2 \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x' + v \Delta t')^2 \quad \leftarrow \\ &= c^2 \gamma^2 \left(\Delta t'^2 + 2 \Delta t' \frac{v}{c^2} \Delta x' + \frac{v^2}{c^4} \Delta x'^2 \right) - \gamma^2 (\Delta x'^2 + 2 \Delta x' v \Delta t' + v^2 \Delta t'^2) \\ &= c^2 \gamma^2 \Delta t'^2 + 2 \gamma^2 \Delta t' v \Delta x' + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \Delta x'^2 - \gamma^2 \Delta x'^2 - 2 \gamma^2 \Delta x' v \Delta t' - \gamma^2 v^2 \Delta t'^2 \\ &= \gamma^2 \Delta t'^2 c^2 (1 - v^2/c^2) - \gamma^2 \Delta x'^2 (1 - v^2/c^2) \end{aligned}$$

ou, como $1/\gamma^2 = 1 - v^2/c^2$,

$$(\Delta s)^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s')^2, \quad (1.61) \quad \leftarrow$$

o que mostra que essa grandeza é, de fato, invariante do ponto de vista de diferentes referências inerciais.

A eq. (1.60) mostra que o quadrado do intervalo no espaço-tempo $(\Delta s)^2$ pode assumir valores positivos, negativos ou nulos, dependendo das relações entre $c\Delta t$ e Δx . Essas relações fornecem informações sobre a natureza causal das pares de eventos e, como mostra a Fig. 1.25, associadas a elas define-se os seguintes tipos de intervalos no espaço-tempo:

se $c\Delta t > \Delta x$, o intervalo é do tipo temporal.

se $c\Delta t < \Delta x$, o intervalo é do tipo espacial.

se $c\Delta t = \Delta x$, o intervalo é do tipo luminoso.

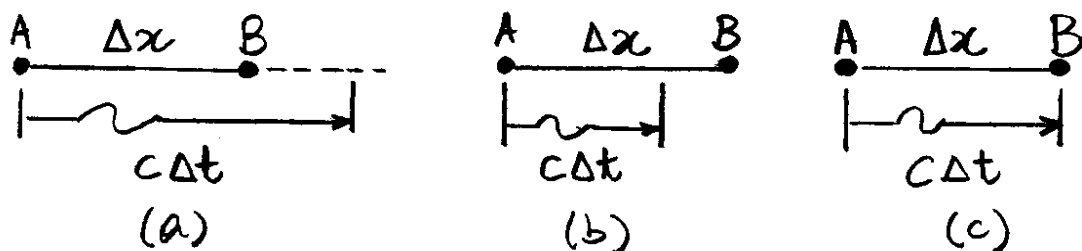


Fig. 1.25 - Dupla de eventos A e B com intervalos do tipo: (a) temporal ($c\Delta t > \Delta x$), (b) espacial ($\Delta x > c\Delta t$) e (c) luminoso ($c\Delta t = \Delta x$).

O intervalo do tipo temporal ($c\Delta t > \Delta x$), está associado a pares de eventos que podem ocorrer no mesmo local ($\Delta x = 0$) mas não podem ser simultâneos ($\Delta t \neq 0$), como se evidencia na

Fig. 1.25 (a). Este é o caso em que se pode definir um tempo próprio T_p entre dois eventos.

Da eq. (1.60) e da definição de tempo próprio, $\Delta t = T_p$ para $\Delta x = 0$, tem-se

$$\Delta S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \sqrt{c^2 T_p^2 - 0} = c T_p. \quad (1.62)$$

Assim, para intervalos ΔS do tipo temporal, o tempo próprio T_p de qualquer par de eventos, pode ser determinado usando medidas de ΔS executadas em qualquer referencial inercial, pois para tais referenciais ΔS é invariante.

O intervalo do tipo espacial ($\Delta x > c\Delta t$), está associado a pares de eventos que não podem ocorrer no mesmo local ($\Delta x \neq 0$) mas podem ser simultâneos ($\Delta t = 0$), como se vê na Fig. 1.25(b). Nesse caso, a eq. (1.60) é convenientemente escrita como

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2. \quad (1.63)$$

Esse é o caso em que se pode definir o comprimento próprio L_p , onde os eventos são simultâneos ($\Delta t = 0$) para o observador em S tal que

$$\Delta S = \Delta x = L_p. \quad (1.64)$$

Assim, para intervalos ΔS do tipo espacial, o comprimento próprio L_p pode ser determinado usando medidas de ΔS executadas em qualquer referencial inercial, pois para tais referenciais ΔS é invariante.

O intervalo do tipo luminoso ($c\Delta t = \Delta x$), está associado a pulsos luminosos que, ao deixar o local do primeiro evento, chega ao local do segundo evento no mesmo instante em que este ocorre, como se vê na Fig. 1.25(c).

Deve-se observar que, sendo o intervalo do tipo luminoso um caso limite entre os intervalos dos tipos temporal e espacial, as eqs. (1.62) e (1.64) se aplicam também a esse intervalo. Entretanto, se o intervalo é do tipo luminoso, das eqs. (1.62) e (1.64), o tempo próprio T_p e o comprimento próprio L_p são ambos nulos uma vez que $\Delta S = 0$. Como se sabe, a linha do universo de um pulso luminoso é a bissetriz entre os eixos ct e x no diagrama espaço-tempo. Relativamente à origem comum dos diagramas espaço-tempo dos referenciais S e S' , mostrados na Fig. 1.26, qualquer evento que ocorre na região hachurada, apresenta um intervalo do tipo temporal, e tem em comum o fato de suas ordens no tempo serem as mesmas para ambos os referenciais.

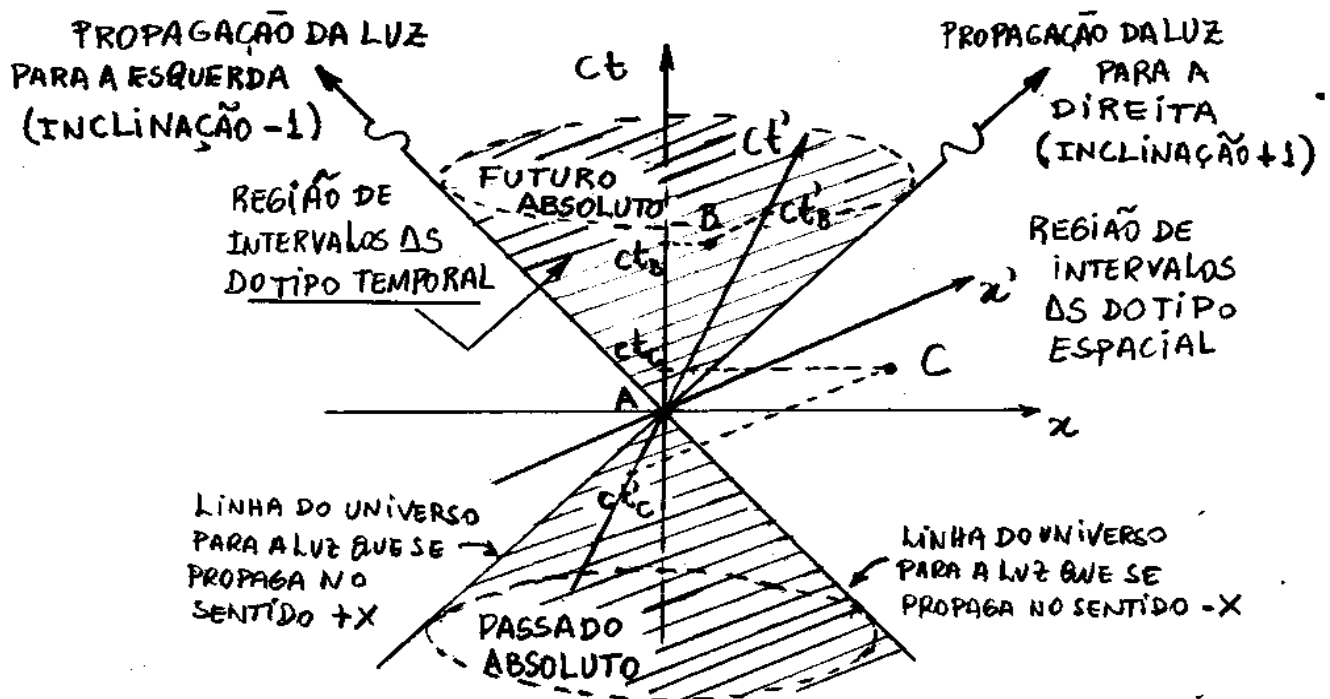


Fig. 1.26 - Diagramas espaço-tempo dos referenciais S e S' mostrando as ocorrências dos eventos A, B e C.

Por exemplo, os observadores em S e S' concordam que o evento A ocorre antes de B, embora obtenham diferentes valores para as medidas de espaço e tempo. Por outro lado, a ordem no tempo de eventos separados por um intervalo do tipo espacial depende do referencial considerado. Por exemplo, o evento A ocorre antes de C em S , mas ocorre depois de C em S' .

1.8.8 - Efeito Doppler na Relatividade.

O efeito Doppler é um desvio na frequência observado nas ondas quando emitidas por uma fonte, que está em movimento em relação ao observador. Foi-lhe atribuído esse nome em homenagem a Johann Christian Andreas Doppler, que o descreveu teoricamente pela primeira vez em 1842. A primeira comprovação da teoria do efeito Doppler foi feita por Christoph Hendrik Diederik' Buys Ballot em 1845, em um experimento com ondas sonoras. Com ondas eletromagnéticas, o fenômeno foi descoberto, independentemente, em 1848, por Armand Hyppolyte Louis Fizeau. Nesse caso, o fenômeno é conhecido também como efeito Doppler - Fizeau.

Em 1905, Albert Einstein mostrou que o efeito Doppler - Fizeau pode ser obtido diretamente da Teoria da relatividade especial.

A Fig. 1.27 mostra a emissão de uma onda eletromagnética de uma fonte luminosa colocada na origem de um referencial inercial S' , que se move para a direita com uma

velocidade v em relação ao referencial inercial S . A fonte luminosa é acionada quando a origem O' de S' coincide com a origem O de S . Na figura destacam-se dois raios luminosos, que representam o comportamento da onda eletromagnética até um ponto P de observação, de acordo com observadores colocados em ambos os referenciais S e S' . Os raios luminosos são esboçados de modo a pertencerem ao plano xy no referencial S e ao plano $x'y'$ no referencial S' . Os raios luminosos fazem um ângulo θ em relação ao eixo x e um ângulo θ' em relação ao eixo x' .

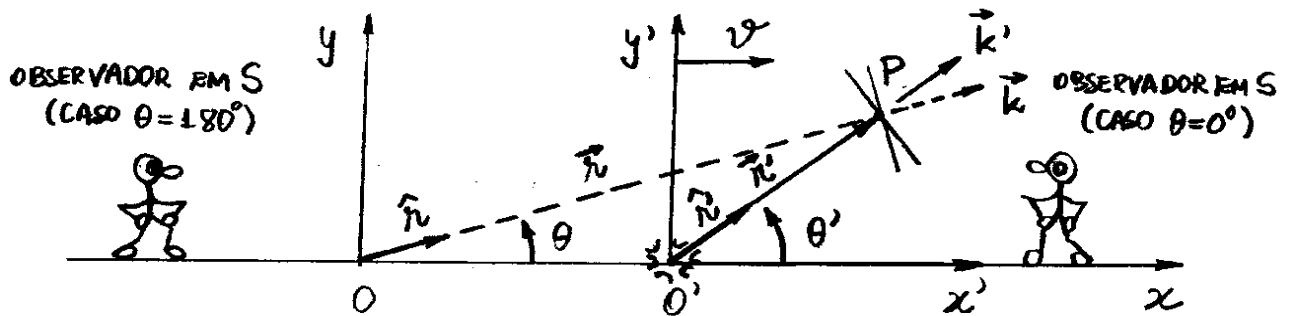


Fig. 1.27- Emissão de uma onda eletromagnética de uma fonte luminosa colocada na origem do referencial inercial S' , que se move com uma velocidade v em relação ao referencial inercial S .

Os casos particulares $\theta=0^\circ$ e $\theta=180^\circ$ do ponto de vista do referencial S , tem um destaque especial na análise do efeito Doppler. Seja o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ da onda eletromagnética emitida pela fonte luminosa do ponto de vista do referencial inercial S , descrito na forma de uma onda plana monocromática, isto é,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.65)$$

onde E_0 é a amplitude do campo elétrico, $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ é o ângulo de fase da onda plana, $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular escrita em termos da frequência ν

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n}$$

é o vetor de onda, escrito em termos do comprimento de onda λ , perpendicular ao plano de propagação da onda.

O vetor de onda \vec{k} tem a mesma direção e sentido do vetor \vec{n} porque a onda luminosa é descrita em termos de um raio luminoso e, nesse caso, o plano de propagação contém somente um ponto.

Como o espaço é homogêneo e isotrópico, do ponto de vista de qualquer um dos referenciais, S ou S' , uma onda plana continua sendo plana na troca de referenciais. Além disso, como a velocidade da luz é a mesma para ambos os referenciais S e S' , então, os pontos das ondas que chegam em P são os mesmos pontos que partem das origens dos referenciais S e S' em $t = t' = 0$. Assim, como sugerido na Fig. 1.28, também são os mesmos os ângulos de fase associados aos campos elétricos das ondas eletromagnéticas do ponto de vista de ambos os referenciais, isto é,

$$\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t' = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad (1.66)$$

É oportuno mencionar aqui a importância do resultado expresso na eq. (1.66). Trata-se de mais

um elemento invariante presente na relatividade especial. Assim como ocorre com o intervalo ΔS no espaço-tempo, a fase de uma onda eletromagnética permanece a mesma do ponto de vista de qualquer referencial inercial. Na verdade, o intervalo no espaço-tempo e a fase de uma onda eletromagnética, não são os únicos elementos invariantes na relatividade especial. Em particular, como se verá mais adiante, a grandeza dinâmica energia de uma partícula em repouso, também apresenta essa propriedade.

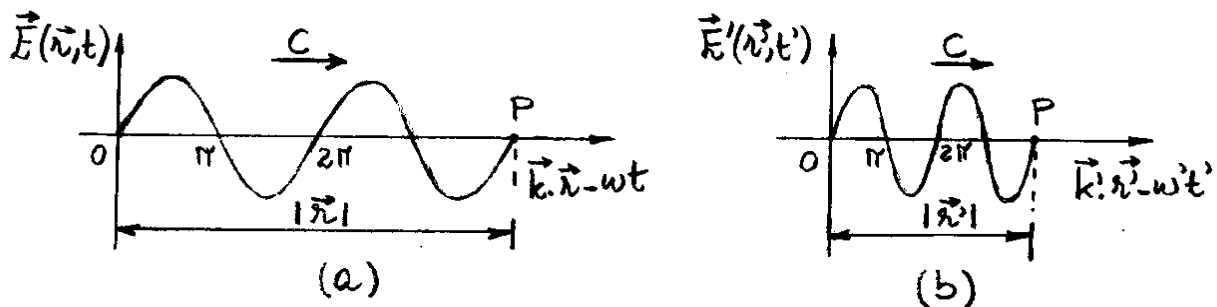


Fig. 1.28 - Comportamento dos campos elétricos das ondas emitidas, desde as origens O e O' em $t = t' = 0$ até o ponto P , (a) para o caso da fonte em repouso e (b) para o caso da fonte em movimento para a direita, ambos observados do ponto de vista do referencial S .

De acordo com a Fig. 1.27 deve-se concluir que

$$\hat{n} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} \quad \text{e} \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (1.67)$$

Assim, a fase da onda plana no referencial S pode ser expressa como

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t = \left(\frac{\cos\theta x}{c/\nu} + \frac{\sin\theta y}{c/\nu} - \nu t \right) 2\pi$$

ou

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \left(\frac{v}{c} \cos \theta x + \frac{v}{c} \sin \theta y - v t \right) 2\pi, \quad (1.68)$$

onde usam-se a definição $\lambda = c/v$, para eliminar o comprimento de onda λ . Similarmente, obtém-se

$$\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t' = \left(\frac{v'}{c} \cos \theta' x' + \frac{v'}{c} \sin \theta' y' - v' t' \right) 2\pi. \quad (1.69)$$

Substituindo as transformações de Lorentz

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y = y' ; t = \gamma(t' + v/c^2 x')$$

na eq. (1.68), obtém-se

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \left[\frac{v}{c} \cos \theta \gamma(x' + vt') + \frac{v}{c} \sin \theta y' - v \gamma(t' + \frac{v}{c^2} x') \right] 2\pi$$

ou

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \left[\frac{\gamma v}{c} (\cos \theta - \beta) x' + \frac{v}{c} \sin \theta y' - \gamma v (1 - \beta \cos \theta) t' \right] 2\pi \leftarrow (1.70)$$

pois $\beta = v/c$. Como a fase da onda eletromagnética é invariante em relação aos referenciais inerciais S e S' , a comparação da eq. (1.69) com a eq. (1.70) resulta:

$$\begin{aligned} \gamma v \cos \theta' &= \gamma v (\cos \theta - \beta) \\ \gamma v \sin \theta' &= \gamma v \sin \theta \\ \gamma v &= \gamma v (1 - \beta \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.71)$$

ou, dividindo a segunda equação pela primeira,

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)} \quad (1.72)$$

$$\nu' = \gamma \nu (1 - \beta \cos \theta) \quad (1.73)$$

A eq. (1.73) fornece a transformação das frequências ν' e ν , da fonte fixa e móvel, respectivamente, para diferentes ângulos θ de observação, o que formaliza o efeito Doppler relativístico. Como ν é a frequência da luz no referencial onde a fonte está em repouso, ela é denominada de frequência própria. Por outro lado, a eq. (1.72) formaliza o efeito relativístico denominado de aberração luminosa. Essa equação mostra como as direções de propagação da onda luminosa θ' e θ se transformam entre dois diferentes referenciais inerciais. Transformações inversas às eqs. (1.72) e (1.73), podem ser obtidas trocando-se β por $-\beta$.

Experiências em Física de altas energias confirmam as expressões relativísticas do efeito Doppler e da aberração luminosa.

Exemplo 1.6 - FACULTATIVO.

Usar a expressão relativística da aberração luminosa para justificar a aberração das estrelas mencionada na seção 1.6.2.

Considere o caso de uma estrela no zênite no referencial S , cuja direção de propagação está ao longo da direção y , isto é, $\theta = 270^\circ = 3\pi/2$ rd. No referencial S' , que no caso é a terra em movimento com velocidade v , de acordo com a eq. (1.72), a direção θ' de propagação é

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\operatorname{sen} 3\pi/2}{\gamma (\cos 3\pi/2 - \beta)} = \frac{-\sqrt{1-\beta^2}}{-\beta}$$

Como nesse caso, $v \ll c$, $\beta^2 = v^2/c^2 \sim 0$. Assim, pode-se escrever $\operatorname{tg} \theta' \approx 1/\beta$, ou $\theta' = \operatorname{tg}^{-1}(1/\beta)$. A Fig. 1.29 mostra que a direção de propagação da luz da estrela

$\theta = 3\pi/2$ em S e $\theta' = \operatorname{tg}^{-1}(1/\beta)$ em S' , relacionam-se com a direção α do telescópio por

$\alpha = \theta - \theta' = 3\pi/2 - \operatorname{tg}^{-1} 1/\beta$. Por outro lado, sabe-se que $\operatorname{tg}^{-1} \beta \approx 3\pi/2 - \operatorname{tg}^{-1} 1/\beta$, para $\beta = v/c$ pequeno que é o caso aqui. Assim,

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \beta = \operatorname{tg}^{-1}(v/c), \quad (1.74) \quad \text{devido ao movimento da terra } S'$$

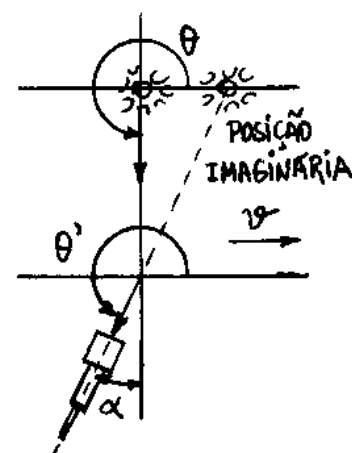


Fig. 1.29 - Aberração da luz de uma estrela

devido ao movimento da terra S' que concorda com o efeito da aberração de primeira ordem discutida na seção 1.6.2. É importante mencionar que, nenhuma outra teoria pode explicar, satisfatoriamente, a aberração das estrelas.

Para investigar o comportamento do efeito Doppler-Fizeau em função da direção θ de observação, seja a eq. (1.73) escrita na seguinte forma:

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (1.75)$$

ou

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma} (1 - \beta \cos \theta)^{-1} = \frac{\nu'}{\gamma} (1 + \beta \cos \theta - \beta^2 \cos^2 \theta + \dots)$$

Na aproximação clássica, $\beta \ll 1$, ou $\gamma \approx 1$, obtém-se

$$\nu \approx \nu' (1 + \beta \cos \theta), \quad (1.76)$$

Essa equação mostra que o efeito Doppler-Fizeau pode ocorrer mesmo para $v \ll c$. A dependência da frequência com $\beta = v/c$ fica mais evidente considerando casos familiares. Por exemplo, para $\theta = 0^\circ$, que representa o observador em S vendo a fonte se aproximar, ou ele se aproximando da fonte, tem-se

$$\nu \approx \nu' (1 + \beta) = \nu' (1 + v/c), \quad \theta = 0^\circ, \quad (1.77)$$

que mostra que a frequência ν é ligeiramente maior do que a frequência própria ν' . Diz-se, nesse caso, que a frequência é desviada para o azul ("blue shift"). Por outro lado, para $\theta = 180^\circ$, que representa o observador em S vendo a fonte se afastar, ou ele se afastando da fonte, tem-se

$$\nu \approx \nu' (1 - \beta) = \nu' (1 - v/c), \quad \theta = 180^\circ, \quad (1.78)$$

o que mostra que a frequência ν é ligeiramente menor do que a frequência própria ν' . Diz-se, nesse caso, que a frequência é desviada para o vermelho ("red shift").

Do ponto de vista relativístico, isto é, quando v não for pequeno quando comparado a c , a eq. (1.75), para o caso $\theta = 0^\circ$, resulta

$$v = \frac{v'}{\gamma(1 - \beta \cos 0^\circ)} = v' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = v' \frac{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}{\sqrt{(1 - \beta)^2}}$$

ou

$$v = v' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = v' \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \quad (1.79)$$

Por outro lado, para o caso $\theta = 180^\circ$, tem-se

$$v = v' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = v' \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \quad (1.80)$$

Em relatividade, os casos $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$, são conhecidos como Efeito Doppler Longitudinal. Estes resultados foram primeiramente verificados, em 1938, por Herbert Eugene Ives e G.R. Stilwell usando um feixe de átomos excitados de hidrogênio produzido em um forno aquecido em alta temperatura. A experiência foi repetida em 1961 por Hirsch I. Mandelberg e Louis Witten com mais precisão, confirmando definitivamente o efeito Doppler relativístico.

O caso $\theta = 90^\circ$ é conhecido como Efeito Doppler Transversal. Observa-se, na eq. (1.76), que o efeito Doppler transversal não está presente na Física Clássica. Esse é um efeito puramente relativístico e pode ser obtido da eq. (1.75) como

$$v = \frac{v'}{\gamma(1 - \beta \cos 90^\circ)} = \frac{v'}{\gamma} \quad (1.81)$$

Assim, se a observação fosse na direção $\theta = 90^\circ$, em relação ao movimento relativo, a frequência seria sempre menor que a frequência própria ν' da fonte, provocando um desvio para o vermelho. Esse efeito foi também confirmado experimentalmente por Ives e Stilwell em 1938. Uma observação direta foi feita por W. Kundig em 1963, usando raios γ de uma fonte radioativa colocada numa centrífuga em alta rotação.

Quando se compara o espectro da luz oriunda de uma galáxia distante, onde se identifica linhas de absorção características, com as mesmas linhas num espectro terrestre, observa-se que as frequências da luz oriunda da galáxia são desviadas para o vermelho ($\nu < \nu'$). Em 1929, o astrônomo Edwin Powell Hubble sugeriu que esse desvio seja devido ao efeito Doppler, com a galáxia observada se afastando da terra, com um certo valor de β , determinado da eq. (1.80) a partir de ν/ν' . A aplicação da sugestão de Hubble a várias galáxias mostrou que a velocidade v é proporcional à distância r entre galáxias, isto é,

$$v = H_0 r, \quad (1.82)$$

onde H_0 é denominado de constante de Hubble. Os valores de r foram obtidos por medidas de ângulos p de paralaxe das estrelas, observadas relativamente as estrelas distantes, em diferentes posições da órbita da terra, como mostra a Fig. 1.30. O valor de H_0 é difícil de ser determinado com precisão, por causa da incerteza na escala das distâncias astronômicas.

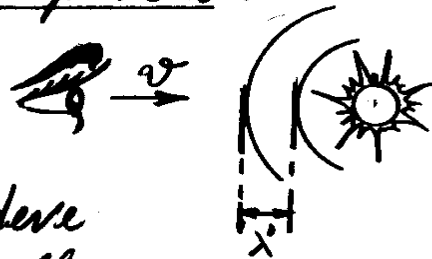
O valor da Constante de Hubble está entre 50 km/s e 100 km/s para cada Mpc (Mega parsec), onde 1 pc é a distância correspondente ao ângulo de paralaxe $p=1''$, equivalente a 3,6 anos-luz. O ano-luz é uma unidade astronômica de distância e corresponde a distância percorrida pela luz durante 1 ano, isto é,

$$1 \text{ ano-luz} = 1 \text{ c. ano} = 9,461 \times 10^{15} \text{ m.} \quad (1.93)$$

O resultado de Hubble foi a primeira evidência de que o universo encontra-se em expansão.

Exemplo 1.7

A que velocidade um observador deve se aproximar de uma luz vermelha ($\lambda' = 650 \text{ nm}$) para que ela pareça verde ($\lambda = 525 \text{ nm}$)?



Da frequência de aproximação, $v = v' \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow \lambda = \lambda' \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$, pois $v = c/\lambda$ e $v' = c/\lambda'$. Assim,

$$(c+v)\lambda^2 = (c-v)\lambda'^2 \Rightarrow v\lambda^2 + v\lambda'^2 = c\lambda'^2 - c\lambda^2 \quad \text{ou}$$

$$v = \frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda'^2 + \lambda^2} c = \frac{650^2 - 525^2}{650^2 + 525^2} c = 0,21c.$$

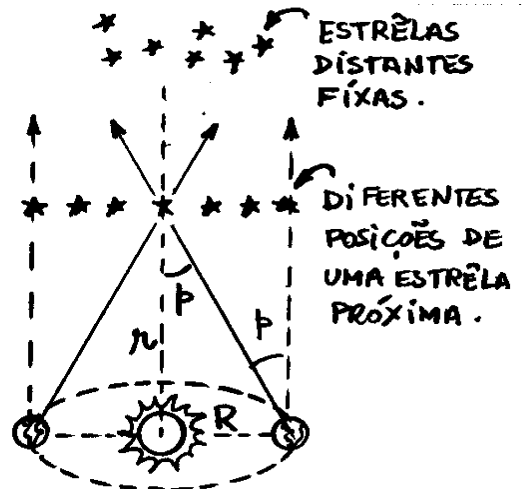


Fig. 1.30 - Medida da distância n das galáxias por paralaxe estelar.

1.8.9 - Paradoxo dos Gêmeos.

O paradoxo dos gêmeos, ou paradoxo do relógio, refere-se a uma discordância temporal aparente de dois observadores gêmeos, quando um deles faz uma viagem e retorna ao ponto de partida.

Sejam Pedro e Paulo irmãos gêmeos idênticos. Suponha que Paulo viaje em alta velocidade para um planeta distante e, logo em seguida, retorne a terra. Se Pedro fica na Terra durante toda a viagem de Paulo, qual seria o intervalo de tempo dessa viagem do ponto de vista dos dois irmãos? A Fig.1.31 mostra a ilustração do problema.

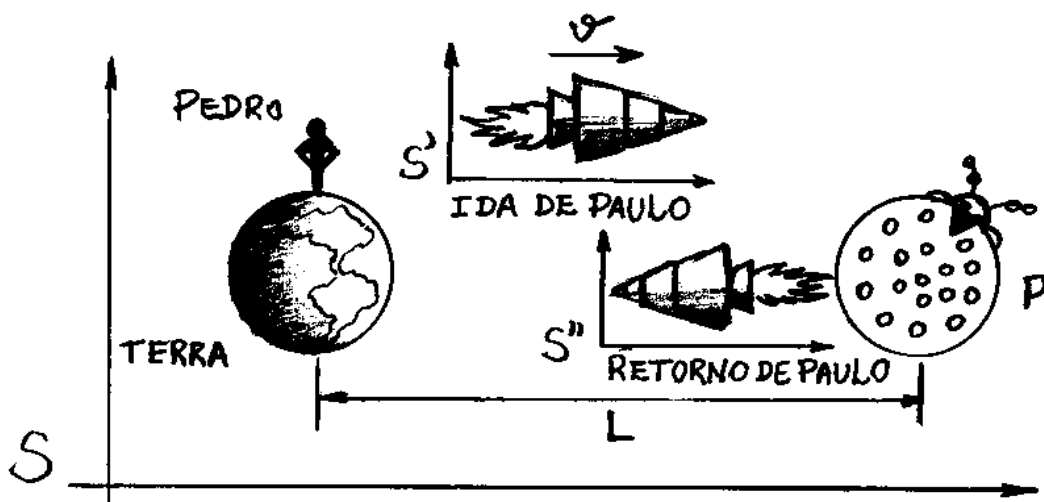


Fig. 1.31 - Viagem de Paulo da Terra, onde ficou seu irmão gêmeo Pedro, com destino a um planeta P distante.

O planeta P, a Terra e Pedro são mantidos num referencial inercial S. Por outro lado, a nave de Paulo é mantida no referencial inercial S' na ida e no referencial inercial S'' no retorno.

Paulo rapidamente adquire a velocidade v e viaja em S' até chegar ao planeta P. Nesse momento, pára momentaneamente no referencial S. Em seguida, readquire a velocidade v , viaja em S'' até chegar a Terra, onde novamente fica em repouso.

Seja, por exemplo, a distância $L = 4$ anos-luz entre o planeta P e a terra e $v = 0,8c$. Nesse caso, tem-se

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5/3 \quad (1.84)$$

Do ponto de vista de Pedro, a viagem de Paulo até o planeta P durou

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{4 \text{ c anos}}{0,8c} = 5 \text{ anos} \quad (1.85)$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Assim, Pedro ficou 10 anos mais velho, quando Paulo retorna de viagem. Em virtude da dilatação dos tempos, a viagem de Paulo até o planeta P, durou somente

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{5 \text{ anos}}{5/3} = 3 \text{ anos} \quad (1.86)$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Assim, Pedro concluirá que Paulo terá envelhecido somente 6 anos durante toda a sua viagem.

O problema ocorre quando as cálculos para Pedro, são feitos do ponto de vista de Paulo. Do ponto de vista de Paulo, é a Terra e o planeta P que se movem em relação a ele com velocidade de $v = -0,8c$. Como para Paulo, a viagem até o planeta P durou $\Delta t' = 3$ anos, o intervalo de tempo $\Delta t''$ na terra deveria ser reduzido para

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{3}{5/3} = 1,8 \text{ anos}$$

e o mesmo intervalo de tempo no retorno. Então, por que Pedro não envelheceu somente 3,6 anos durante toda a viagem de Paulo? Evidentemente, este é o paradoxo.

A discordância dos resultados deve-se ao fato que as situações dos gêmeos não são simétricas. A Fig. 1.32 mostra os diagramas espaço-tempo das referenciais S, S' e S'' do ponto de vista do referencial S . Como se pode observar nessa figura, Pedro permanece o tempo todo no mesmo referencial inercial, enquanto Paulo muda de referencial. Mesmo que seja pequeno o tempo de mudança de referencial, quando comparado ao tempo total de viagem, esse fato é essencial para comparar as idades dos irmãos no final da viagem.

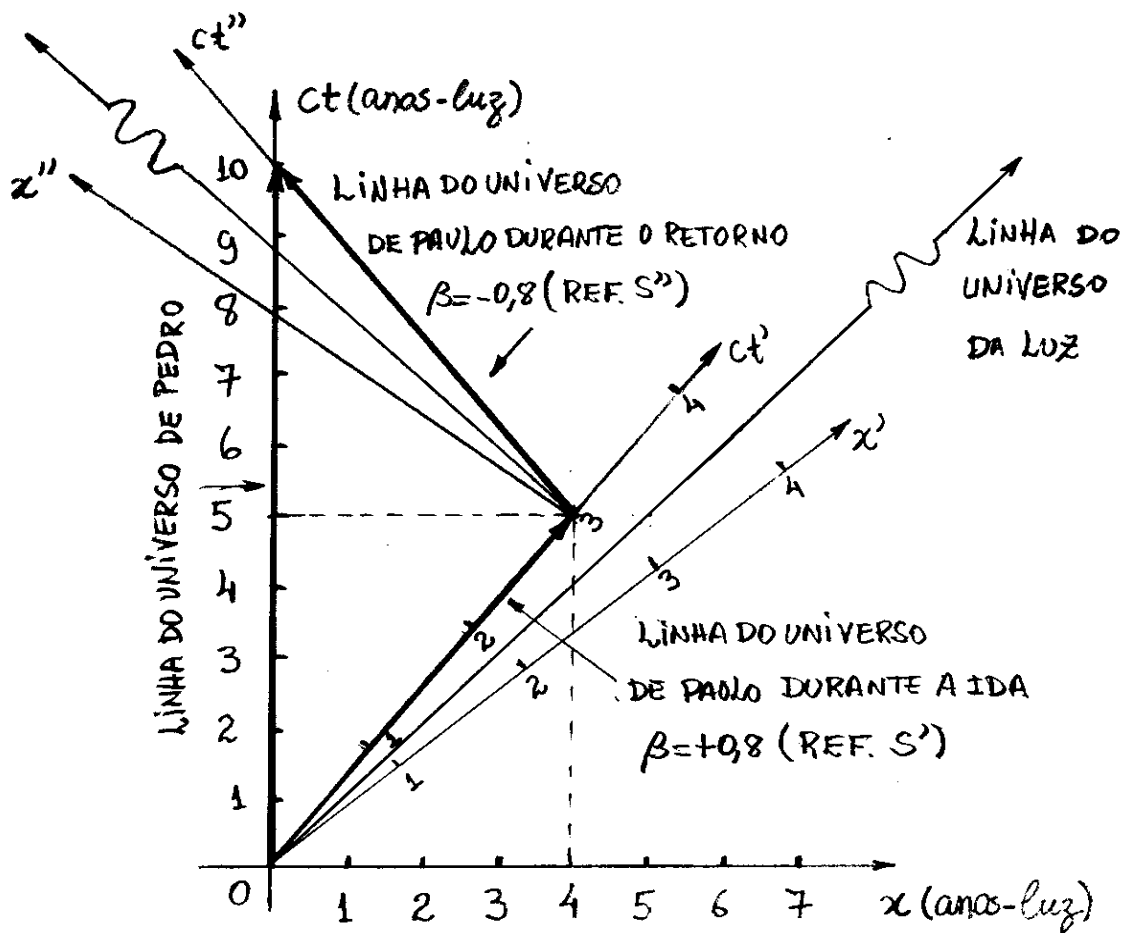


Fig. 1.32 - Diagramas espaço-tempo da viagem de Paulo ao planeta P no referencial S em que Pedro, o planeta e a Terra estão em repouso.

A Fig. 1.32 mostra as duas mudanças de referenciais mais importantes durante a viagem de Paulo. Na verdade espera-se que haja uma mudança contínua de referenciais sempre que a velocidade da nave varia na mesma proporção. Qualquer uma dessas mudanças de referenciais deve quebrar a simetria do problema. Se Paulo se deslocasse sempre com a mesma velocidade constante em linha reta, ele nunca voltaria para casa. Nesse caso, cada gêmeo insistiria de fato que o tempo do outro se atrasaria em relação ao seu próprio referencial.

O problema ocorre quando se compara as leituras de um relógio em repouso com outro que com certeza estava em movimento. Para retornar de viagem, Paulo teria que variar a sua velocidade e portanto estaria sujeito a uma aceleração.

Se cada gêmeo transportasse consigo um "acelerômetro", eles poderiam saber quem de fato mudou de velocidade. A mudança da velocidade, ou direção, seria facilmente detectada pelo "acelerômetro". Não se pode sentir o movimento de um automóvel se este estiver com velocidade constante em linha reta. Mas, faça-o descrever uma curva, subir ou descer, acelerar ou desacelerar, que você será o próprio "acelerômetro". Assim, é possível distinguir os gêmeos do fato que, aquele que executou a viagem de ida e volta experimentou e registrou acelerações, enquanto que aquele que permaneceu em casa, não.

Deve-se concluir que a dilatação dos tempos na forma $T = \gamma T_p$, pode ser adotada do ponto de vista de Pedro mas não do ponto de vista de Paulo, pois ele não permanece o tempo todo mesmo referencial inercial. Assim, a relatividade especial simplesmente não se aplica do ponto de vista de Paulo e o paradoxo deixa de ocorrer. O cálculo correto, do ponto de vista de Paulo, deve levar em conta efeitos de aceleração na mudança dos referenciais, assunto que é tratado na Teoria da relatividade geral.

Não é fácil aceitar que Paulo realmente ficará mais jovem do que Pedro quando retornar de viagem. O relógio comum poderia ser substituído por um relógio biológico tal como o batida do coração ou a pulsação. Poderia-se dizer que Paulo viveu numa razão mais lenta do que Pedro durante a sua viagem. Os relógios biológicos comportam-se do mesmo modo que os relógios comuns. É interessante mencionar a aceitação pública de que a vida humana pode ser retardada por resfriamento, tal que um envelhecimento diferente para os gêmeos pode ser conseguido também por diferenças de temperatura. Do mesmo modo que as diferenças de temperatura são mensuráveis e combináveis pelos gêmeos, as diferenças de movimento também são. Assim, é razoável admitir que o movimento relativístico poderia ser uma outra forma de retardar o envelhecimento.

As discussões sobre o paradoxo dos gêmeos permite fazer um comentário importante sobre o fenômeno da dilatação dos tempos. Não se deve esperar que as mudanças dos tempos dependa simplesmente do movimento relativo entre diferentes referenciais inerciais. Na verdade, o que está por trás das mudanças no tempo na relatividade é a aceleração. Se existe um movimento entre diferentes referenciais inerciais é porque houve em algum momento uma aceleração relativa entre esses referenciais e é exatamente nesse momento que as mudanças no tempo ocorrem. Assim, em certos aspectos, pode-se dizer que a teoria da relatividade especial está incompleta, pois apesar de fazer previsões corretas sobre a dilatação dos tempos, não é capaz de explicar porque o fenômeno ocorre. O fenômeno é explicado corretamente no contexto da teoria da relatividade geral.

Exemplo 1.8 - FACULTATIVO

Uma solução apropriada para o problema do paradoxo dos gêmeos se baseia na dedução lógica de que a única forma aceitável para o movimento dos gêmeos deve ser representada pelos diagramas espaço-tempo mostrado na Fig. 1.32. Use essa figura e a invariância do intervalo no espaço-tempo para mostrar que o tempo Δt ocorrido no referencial de Pedro durante toda a viagem de Paulo foi de fato 10 anos.

Deve-se observar que o intervalo espaço-tempo $\Delta S'$ no referencial S' de Paulo é do tipo temporal, pois é sempre possível definir um par de eventos que ocorrem no mesmo local em S' tal que $c\Delta t' > \Delta x'$. Nesse caso, Paulo deve registrar um tempo próprio em S' dado por $T_p = \Delta S'/c$, de acordo com a eq. (1.62). Usando a eq. (1.60) e o fato de que o intervalo no espaço-tempo é invariante, deve-se concluir que

$$(\Delta S/c)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2 = (\Delta S'/c)^2 = T_p^2$$

ou

$$(\Delta t)^2 = T_p^2 + (\Delta x/c)^2 \quad (1.87)$$

Como $(\Delta x/c)^2 > 0$, então Pedro deve registrar um tempo $\Delta t > T_p$. O tempo $T_p = 3$ anos é registrado por Paulo para a viagem de ida. Neste exemplo, no referencial de Pedro, a razão entre Δx e Δt é $\Delta x/\Delta t = 0,8c$ ou $\Delta x/c = 0,8\Delta t$ e então

$$(\Delta t)^2 = (3\text{anos})^2 + (0,8\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{9/0,36} = 5\text{anos}$$

ou ainda 10 anos para a viagem completa, como concluído anteriormente.

Exemplo 1.9 - FACULTATIVO

O paradoxo dos gêmeos pode ser resolvido, sem recorrer a teoria da relatividade geral, por um procedimento proposto por Charles Galton Darwin, neto do lendário naturalista Charles Robert Darwin, que utiliza o efeito Doppler relativístico. Discuta esse procedimento utilizando o exemplo dos gêmeos Pedro e Paulo.

Suponha que Pedro e Paulo combinem, a cada ano, enviar um sinal luminoso para o outro. Cada irmão poderá saber a idade do outro simplesmente contando os sinais recebidos. Evidentemente, a frequência de sinais recebidos não será de 1 por ano, por causa do efeito Doppler. Quando os dois irmãos estão se afastando, a frequência ν_{af} será

$$\nu_{af} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu' = \sqrt{\frac{c-0,8c}{c+0,8c}} \nu' = \sqrt{\frac{0,2}{1,8}} \nu' = \sqrt{\frac{2}{18}} \nu' = \frac{1}{3} \nu' \quad (1.88)$$

e quando os dois irmãos estão se aproximando, $\nu_{ap} = 3\nu'$, onde ν' é a frequência dos sinais nos seus referenciais de repouso. A Tab. 1.1 mostra o número total de sinais recebidos por Pedro e Paulo a partir da duração da viagem registrada por Paulo. Por essa tabela, Pedro deve concluir que Paulo envelheceu 6 anos e Paulo deve concluir que Pedro envelheceu 10 anos, como de fato teria ocorrido.

	SINAIS RECEBIDOS POR PAULO	SINAIS RECEBIDOS POR PEDRO
VIAGEM DE IDA $\nu_{af} = \frac{1}{3}\nu'$	1 SINAL NOS SEUS 3 PRIMEIROS ANOS	3 SINAIS NOS SEUS 9 PRIMEIROS ANOS
VIAGEM DE VOLTA $\nu_{ap} = 3\nu'$	9 SINAIS NOS SEUS 3 ÚLTIMOS ANOS	3 SINAIS NO SEU ÚLTIMO ANO
TOTAL	10 SINAIS	6 SINAIS

Tab. 1.1. Sinais recebidos pelos gêmeos contados a partir do tempo de Paulo.

1.9. Dinâmica Relativística.

As leis de conservação do momento e da energia estão entre os princípios mais importantes da física. A simplicidade e a universalidade dessas leis de conservação sugerem a busca de equações análogas às usadas na mecânica clássica, que sejam compatíveis com a conservação do momento e da energia também na mecânica relativística.

1.9.1. Momento Relativístico.

É fácil mostrar que o momento linear da mecânica clássica não é conservado na mecânica relativística. Para mostrar isso, é suficiente examinar um processo isolado de colisão entre dois corpos idênticos, onde a resultante das forças externas seja nula. Nessas condições, o momento linear total

$$\vec{P} = m\vec{u} \quad (1.89)$$

é conservado na mecânica clássica. O objetivo é mostrar que a conservação do momento linear, a partir da eq. (1.89), é somente uma aproximação válida para baixas velocidades.

A Fig. 1.33 mostra um processo de colisão, perfeitamente elástico, entre dois corpos A e B de massas m idênticas, observado em três situações diferentes.

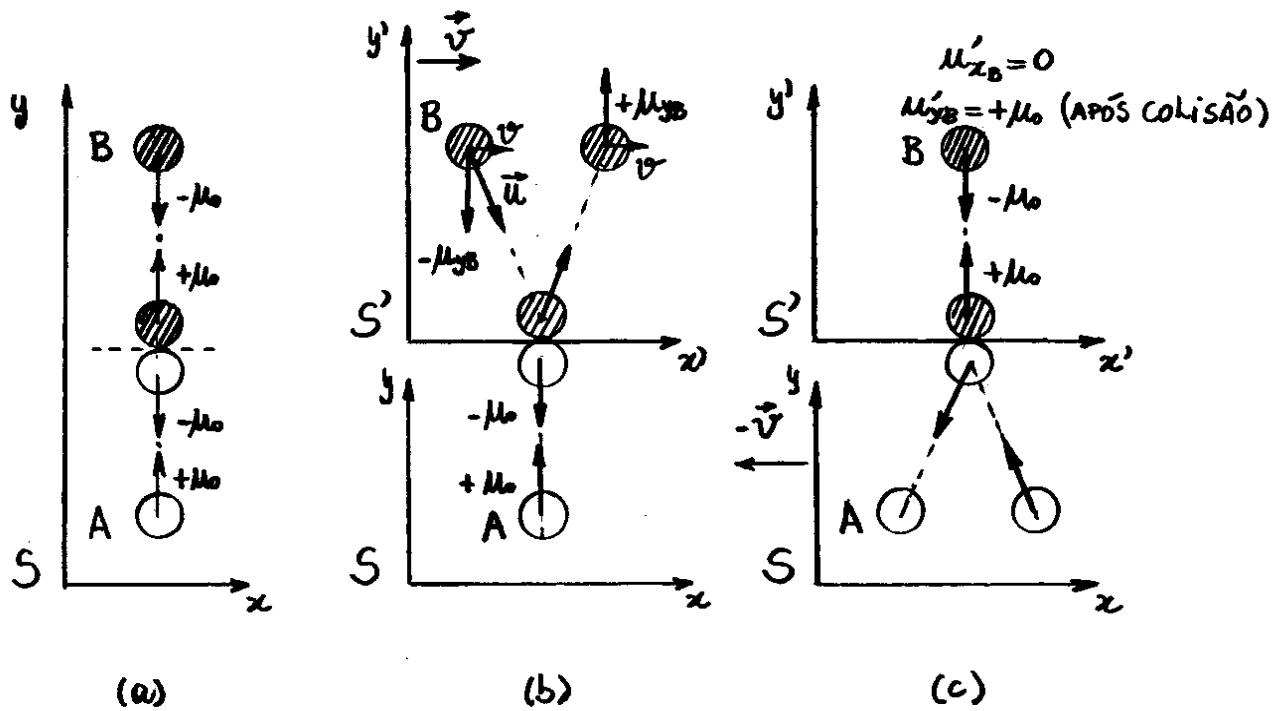


Fig. 1.33 - Colisões perfeitamente elásticas entre dois corpos A e B idênticas, (a) num mesmo referencial S, (b) do ponto de vista de um observador em S e (c) do ponto de vista de um observador em S'.

Na Fig. 1.33(a), ambas os corpos estão no mesmo referencial S e são arremessadas na direção y, em sentidos opostos, com a mesma velocidade u_0 em módulo. Após a colisão, as componentes μ_{yA} e μ_{yB} das velocidades dos corpos A e B também são iguais a u_0 em módulo. Portanto, após a colisão, a componente $p_y = m\mu_y$ do momento linear é conservada, como se espera na mecânica clássica.

Nas Figs. 1.33(b) e (c), entretanto, os corpos A e B estão em diferentes referenciais inerciais S e S', que se movem com uma velocidade relativística de módulo v , um em relação ao outro.

A Fig. 1.33(b), mostra o processo de colisão do ponto de vista do referencial S e a Fig. 1.33(c), mostra o processo de colisão do ponto de vista do referencial S' . Obviamente, cada observador nota que o corpo arremessado por ele, adquire a velocidade de módulo u_0 após a colisão, tal que o momento $p_y = m u_y = m u_0$ é conservado em seu próprio referencial. Deseja-se verificar se a conservação do momento $p_y = m u_y$ continua valendo quando as dois referenciais são consideradas durante a colisão entre os corpos A e B.

Do ponto de vista do referencial S , ilustrado na Fig. 1.33(b), após a colisão, o corpo A tem uma componente y de velocidade dada por

$$u_{yA} = -u_0 \quad . \quad (1.90)$$

Por outro lado, após a colisão, o corpo B tem uma componente x de velocidade $u_{xB} = v$ e, de acordo com a transformação de velocidades, uma componente y

$$u_{yB} = \frac{u'_{yB}}{\gamma(1 + u'_{xB}v/c^2)} = + \frac{u_0}{\gamma} \quad (1.91)$$

pois, do ponto de vista do observador em S' , ilustrado na Fig. 1.33(c), após a colisão, $u'_{yB} = +u_0$ e $u'_{xB} = 0$.

Assim, após a colisão, em módulo, tem-se

$$p_{yA} = m u_{yA} = m u_0 \neq p_{yB} = m u_{yB} = m u_0 / \gamma \quad .$$

Conclui-se, então, que não há conservação do momento clássico $\vec{p} = m\vec{v}$ no processo de colisão entre os corpos A e B do ponto de vista do observador em S.

A análise do problema do ponto de vista de um observador em S', leva exatamente à mesma conclusão, já que os papéis de A e B são simétricos e intercambiáveis. No limite clássico ($v \ll c$) obviamente o momento é conservado pois, nesse limite, $\gamma \approx 1$ e $\mu_{yB} \approx +\mu_0$ de acordo com a eq. (1.91).

O motivo para a definição do momento na forma da eq. (1.89) na mecânica clássica é que esta grandeza é conservada na ausência de forças externas, como no exemplo acima. Sabe-se agora que esta grandeza é conservada somente na aproximação $v \ll c$. É possível, entretanto, definir um momento relativístico \vec{p} para uma partícula que apresente as seguintes propriedades:

1. \vec{p} se conserva nas colisões.
2. $\vec{p} \rightarrow m\vec{v}$, quando $v/c \rightarrow 0$.

Propõe-se aplicar a primeira dessas condições à colisão entre dois corpos discutida acima, observando o seguinte fato:

" A velocidade do corpo em módulo é μ_0 no seu próprio referencial e $\mu = (\mu_0^2 + v^2)^{1/2}$ no outro referencial".

- A falta de conservação do momento não pode ser atribuída às velocidades, pois estas são corrigidas pela transformação de Lorentz. Nesse caso, o problema deve estar associado à massa do corpo.

Seja escrever a lei de conservação da componente y do momento, do ponto de vista do observador em S na Fig. 1.33(b), chamando a massa do corpo arremessado pelo observador em S de $m(\mu_0)$ e a massa do corpo arremessado pelo observador em S' de $m(\mu)$, como

$$\sum_i p_{y(\text{antes colisão})} = \sum_i p_{y(\text{depois colisão})}$$

$$\underbrace{m(\mu_0)\mu_0}_A - \underbrace{m(\mu)\mu_{yB}}_B = -\underbrace{m(\mu_0)\mu_0}_A + \underbrace{m(\mu)\mu_{yB}}_B$$

$$\Rightarrow 2m(\mu_0)\mu_0 = 2m(\mu)\mu_{yB}$$

ou

$$\frac{m(\mu)}{m(\mu_0)} = \frac{\mu_0}{\mu_{yB}} = \frac{\gamma\mu_0}{\mu_0} = \gamma \quad (1.92)$$

pois, da eq. (1.91), $\mu_{yB} = \mu_0/\gamma$.

Deve-se tentar descobrir agora o comportamento de $m(\mu)$ como função da variável μ . Sabe-se que o caso limite $\mu_0 \rightarrow 0$ deve estar previsto no caso geral. Nesse caso, como ilustrado na Fig. 1.34, a colisão é de "raspão", com o corpo B passando pelo corpo A com velocidade $\mu = v$, tal que a eq. (1.92) torna-se

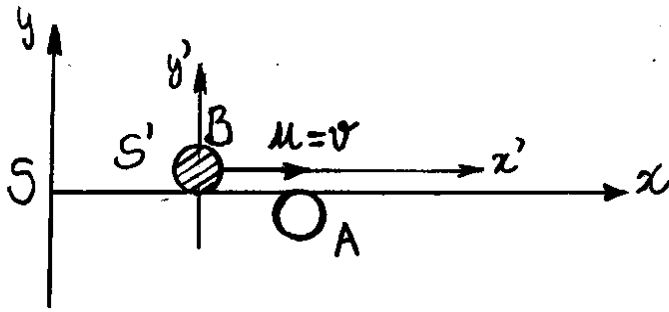


Fig. 1.34 - Colisão de raspão entre os corpos A e B do ponto de vista do referencial S.

$$\frac{m(u=v)}{m(u_0=0)} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

ou

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad (1.93)$$

Deve-se observar na Fig. 1.34, que o referencial S' é o próprio referencial do corpo B que se move com uma velocidade u em relação ao referencial S.

Como o corpo A está em repouso no referencial S, sua massa $m(u_0=0)$ será a massa Newtoniana comum, que é denominada de massa de repouso m_0 . Como os dois corpos são idênticas, m_0 é também a massa do corpo B, quando ela está em repouso.

Por outro lado, o corpo B está se movendo com uma velocidade u no referencial S e sua massa $m(u)$, denominada de massa relativística, deve aumentar com o valor de u , de acordo com a eq. (1.93).

Observa-se, imediatamente, que quando $u \ll c$, obtém-se $m = m_0$, como se deve esperar para uma partícula clássica.

Para preservar então a lei clássica da conservação do momento, é necessário escrever a massa de uma partícula em movimento na forma da eq. (1.93), e definir a componente y do momento relativístico como

$$p_y = m u_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (1.94)$$

onde $u^2 = u_x^2 + u_y^2$. Na dedução do momento relativístico, adotou-se um caso particular de conservação do momento na direção do eixo y. O que se fez, na verdade, é evitar deduções gerais, um tanto quanto complicadas, que levam exatamente aos mesmos resultados. No caso geral, o momento relativístico da partícula, assume a seguinte forma vetorial:

$$\vec{p} = m \vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (1.95)$$

onde

$$p_x = m_0 u_x / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad p_y = m_0 u_y / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad p_z = m_0 u_z / \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

$$e \quad u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

É importante observar que u é a velocidade da partícula em relação ao referencial S e não tem, necessariamente, nenhuma conexão com a velocidade relativa v entre os referenciais S e S' . A massa de repouso m_0 é, frequentemente, denominada de massa própria, pois é medida no referencial da própria partícula.

Exemplo 1.9

Calcular os valores de u/c para os quais a massa relativística de uma partícula exceda sua massa de repouso por uma fração relativa $f = (m - m_0)/m_0$.

$$f = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1$$

ou, resolvendo para u/c , obtém-se

$$u/c = \frac{\sqrt{f(2+f)}}{1+f} \quad (1.96)$$

Pode-se escolher alguns valores particulares de f . Por exemplo; para $f = 0,001 = 0,1\%$, obtém-se $u/c = 0,014$; para $f = 1 = 100\%$, obtém-se $u/c = 0,87$; para $f = 100$, obtém-se $u/c = 0,999$.

1.9.2 - Energia Relativística

De acordo com a eq. (1.95), do ponto de vista relativístico, a 2ª lei de Newton fornece

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{u}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (1.97)$$

Escrita nessa forma, a 2ª lei de Newton exhibe a lei da conservação do momento relativístico diretamente. Quando \vec{F} é nula, $\vec{p} = m_0 \vec{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ deve ser uma constante. Isto é, na ausência de forças externas, o momento relativístico é conservado.

De acordo com o teorema Trabalho-Energia, a energia cinética K de uma partícula é igual ao trabalho efetuado por uma força externa para acelerar a partícula desde o repouso até uma velocidade u , isto é,

$$K = \int_{u=0}^u F dx = \int \frac{d\vec{p}}{dt} dx = \int d(mu) \frac{dx}{dt} = \int (m du + u dm) u$$

ou

$$K = \int_{u=0}^u (m u du + u^2 dm). \quad (1.98)$$

As variáveis m e u são relacionadas por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Rightarrow m^2 - m^2 \frac{u^2}{c^2} = m_0^2 \Rightarrow m^2 c^2 = m^2 u^2 + m_0^2 c^2.$$

Diferenciando esta equação, obtém-se

$$2m c^2 dm = m^2 2u du + u^2 2m dm$$

ou, dividindo ambos os lados por $2m$, obtêm-se

$$c^2 dm = m u du + u^2 dm,$$

que é exatamente o integrando da eq. (1.98).

Assim, a expressão da energia cinética relativística da partícula, pode ser escrita como

$$K = \int_{u=0}^u c^2 dm = c^2 \int_{m=m_0}^m dm = mc^2 - m_0 c^2, \quad (1.99)$$

onde os limites de integração foram trocados por causa da mudança de variáveis. Para a partícula em repouso ($u=0$), sua massa é a massa de repouso m_0 , e para a partícula com velocidade u , sua massa é a massa relativística m .

A expressão da energia cinética tem, portanto, um termo que depende da velocidade u da partícula e outro, constante, que independe desta grandeza. O termo constante

$$E_0 = m_0 c^2, \quad (1.100)$$

é denominado de energia de repouso, ou energia própria da partícula. O primeiro termo do lado direito, na eq. (1.99), define a energia total relativística E para uma partícula livre tal que

$$E = K + m_0 c^2 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (1.101)$$

onde usa-se a definição da massa relativística m , dada na eq. (1.93). Comparando a eq. (1.100) com a eq. (1.101), obtém-se

$$E = E_0 + K = \frac{E_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.102)$$

Deve-se observar da eq. (1.102) que $K \rightarrow \infty$ quando $u \rightarrow c$. Isso significa que, como $K = \int_{u=0}^u F dx$, é necessário um trabalho infinito sobre a partícula para acelerá-la até a velocidade da luz. Novamente, observa-se que c desempenha o papel de um limite de velocidades para partículas e sinais eletromagnéticos.

Para mostrar que a energia relativística se reduz ao caso clássico à baixas velocidades, é suficiente escrever a eq. (1.101) como

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right].$$

Usando a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$ para $x \ll 1$, obtém-se

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2},$$

para o caso $u/c \ll 1$. Logo, nesse caso,

$$K \approx m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} m_0 u^2,$$

que é o resultado clássico esperado.

Uma expressão útil, que relaciona energia relativística e momento relativístico, pode ser obtida subtraindo os quadrados das energias total E e de repouso E_0 , isto é,

$$E^2 - E_0^2 = (mc^2)^2 - (m_0c^2)^2 = \left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)^2 - (m_0c^2)^2$$

$$= (m_0c^2)^2 \left(\frac{1}{1-u^2/c^2} - 1 \right) = m_0^2c^4 \left(\frac{u^2/c^2}{1-u^2/c^2} \right) = c^4 \frac{u^2}{c^2} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)^2$$

ou, como $m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ e $p = mu$, obtêm-se

$$E^2 - E_0^2 = c^2 m^2 u^2 = c^2 p^2$$

ou ainda

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \quad (1.103)$$

A eq. (1.103) é bastante útil na solução de problemas de relatividade que envolvem energia e momento de uma partícula. O triângulo retângulo da Fig. 1.35, é um artifício mnemônico útil para lembrar as eqs. (1.103) e (1.102).

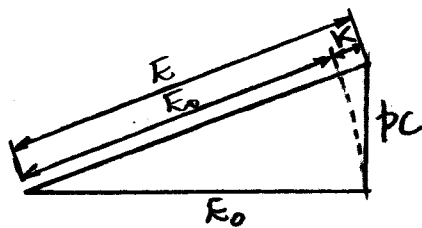


Fig. 1.35- Artifício mnemônico para lembrar a eq. (1.103).

A maioria das aplicações da relatividade ocorre com partículas subatômicas. Nesses casos, é conveniente usar o elétron-volt (eV) como uma unidade de energia relativística. O elétron-volt é a energia adquirida por um elétron de carga $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, quando submetido a um potencial de 1V, isto é,

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} . \quad (1.104)$$

Exemplo 1.10

A energia de repouso de um próton é de 938 MeV. Se a sua energia cinética também é 938 MeV, calcular (a) o momento e (b) a velocidade do próton.

(a) Como $E_0 = K = 938 \text{ MeV}$, então, a energia total E será $E = K + E_0 = E_0 + E_0 = 2E_0$. Assim,

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \Rightarrow (pc)^2 = 3E_0^2 \Rightarrow pc = \sqrt{3} \times 938 \approx 1625 \text{ MeV}$$

ou

$$p \approx 1625 \text{ MeV}/c .$$

(b) Como $E = E_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2} = 2E_0$, então

$$\frac{1}{1 - u^2/c^2} = 4 \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{u^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} c \Rightarrow u = 0,866c .$$

1.9.3 - Transformações das Grandezas Dinâmicas.

Nesta seção, apresenta-se as relações que transformam as grandezas dinâmicas, momento, energia, massa e força, de um referencial inercial S , para um referencial inercial S' , que se move com velocidade constante v em relação a S , ao longo do eixo comum x, x' .

Inicialmente, é necessário descobrir como o módulo da velocidade u' de uma partícula, num referencial S' , se transforma na velocidade u no referencial S . Para isso, é suficiente usar as transformações relativísticas das componentes x e y da velocidade da partícula, isto é,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} ; u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v / c^2} . \quad (1.105)$$

Dessas equações, pode-se obter o quadrado do módulo da velocidade da partícula em S' como

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 = \left[\frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \right]^2 + \left[\frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v / c^2} \right]^2 . \quad (1.106)$$

Os cálculos apresentados no exemplo 1.11 mostram que uma manipulação da eq. (1.106), fornece

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \gamma \frac{(1 - u_x v / c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} . \quad (1.107)$$

onde $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2$ é o quadrado do módulo da velocidade da partícula em S' .

onde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ é o fator de Lorentz.

Exemplo 1.11 - FACULTATIVO

Mostrar que a eq. (1.106) resulta na eq. (1.107).

Rearranjando a eq. (1.106), obtêm-se

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + u_y^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2} \right)}{\left(\frac{c^2 + u_x v}{c^2} \right)^2} = \frac{c^4 u_x^2 + c^4 v^2 - 2u_x v c^4 + c^2 u_y^2 (c^2 - v^2)}{(c^2 + u_x v)^2}$$

ou

$$u'^2 = \frac{c^4 u_x^2 + c^4 v^2 - 2u_x v c^4 + c^4 u_y^2 - c^2 u_y^2 v^2}{(c^2 - u_x v)^2}$$

Esta equação torna-se mais compacta quando é subtraída do quadrado da velocidade da luz, isto é,

$$c^2 - u'^2 = c^2 \left[1 - \frac{c^2 u_x^2 + c^2 v^2 - 2u_x v c^2 + c^2 u_y^2 - u_y^2 v^2}{(c^2 - u_x v)^2} \right]$$

$$= c^2 \left[\frac{(c^2 - u_x v)^2 - (c^2 u_x^2 + c^2 v^2 - 2u_x v c^2 + c^2 u_y^2 - u_y^2 v^2)}{(c^2 - u_x v)^2} \right]$$

$$= c^2 \left[\frac{c^4 + u_x^2 v^2 - 2c^2 u_x v - c^2 u_x^2 - c^2 v^2 + 2u_x v c^2 - c^2 u_y^2 + u_y^2 c^2}{(c^2 - u_x v)^2} \right]$$

$$= c^2 \left[\frac{c^2 (c^2 - u_x^2 - u_y^2) - v^2 (c^2 - u_x^2 - u_y^2)}{(c^2 - u_x v)^2} \right] = c^2 \left[\frac{c^2 (c^2 - u^2) - v^2 (c^2 - u^2)}{(c^2 - u_x v)^2} \right]$$

ou

$$c^2 - u^2 = c^2 \frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - u_x v)^2},$$

onde $u^2 = u_x^2 + u_y^2$. Dessa equação, pode-se calcular o fator $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ como

$$\frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - u_x v)^2} = \frac{c^2 - u^2}{c^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2}.$$

Invertendo e extraindo a raiz quadrada dessa equação, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} &= \frac{c^2 - u_x v}{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}} = \frac{c^2(1 - u_x v/c^2)}{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}} \\ &= \frac{(1 - u_x v/c^2)}{\sqrt{\frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{c^4}}} = \frac{(1 - u_x v/c^2)}{\sqrt{\frac{(c^2 - u^2)}{c^2} \frac{(c^2 - v^2)}{c^2}}} = \frac{(1 - u_x v/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

o que resulta na eq. (1.107) quando se usa o fator de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

As transformações das componentes x do momento linear e da energia da partícula entre diferentes referenciais inerciais S e S' , são:

$$\begin{aligned} p_x' &= m_0 u_x' / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad p_x = m_0 u_x / \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ e \\ E' &= m_0 c^2 / \sqrt{1 - u'^2/c^2}, \quad E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Substituindo a primeira eq. (1.105) e a eq. (1.107) na primeira eq. (1.108), obtêm-se

$$p_x' = m_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right] u_x' = m_0 \left[\gamma \frac{(1 - u_x v/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \frac{(u_x - v)}{(1 - u_x v/c^2)}$$

$$= \gamma \left(\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{m_0 v}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \gamma \left(p_x - \frac{m_0 c^2 v/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$

ou

$$p_x' = \gamma (p_x - E v/c^2). \quad (1.109)$$

Similarmente, mostra-se que $p_y' = p_y$ e $p_z' = p_z$.

Por outro lado, substituindo a eq. (1.107) na terceira eq. (1.108), obtém-se

$$\begin{aligned} E' &= m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right] = m_0 c^2 \left[\gamma \frac{(1-u_x v/c^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right] \\ &= \gamma \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} v \right) \end{aligned}$$

ou

$$E' = \gamma (E - v p_x). \quad (1.110)$$

As relações inversas, obtidas trocando v por $-v$ e permutando as quantidades em S e S' , são

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma (p_x' + E' v/c^2), \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z' \\ e \\ E &= \gamma (E' + v p_x'). \end{aligned} \quad (1.111)$$

Se os resultados obtidos acima são comparados com as transformações de Lorentz, encontra-se uma surpreendente analogia. As quantidades p_x', p_y', p_z' e E'/c^2 transformam-se exatamente como as coordenadas do espaço-tempo x', y', z' e t' de uma partícula. Por exemplo, dividindo ambos os lados da eq. (1.110) por c^2 , as componentes (x', t') e $(p_x', E'/c^2)$ transformam-se como

$$x' = \gamma(x - vt) \quad ; \quad t' = \gamma(t - xv/c^2) \quad (1.112)$$

$$p_x' = \gamma(p_x - vE/c^2) \quad ; \quad E'/c^2 = \gamma(E/c^2 - p_x v/c^2).$$

Essa analogia é um excelente artifício "mnemônico" para lembrar essas transformações.

A interdependência entre o momento e a energia, como se viu acima, é uma consequência natural das leis de conservação. Se a energia e o momento são conservados numa interação, do ponto de vista de um observador num referencial inercial, então para qualquer outro observador inercial eles também são conservados.

A transformação para a massa segue diretamente da transformação da energia.

Como $E' = m'c^2$, $E = mc^2$ e $p_x = m\mu_x$, a eq. (1.110), $E' = \gamma(E - v p_x)$, fornece

$$m'c^2 = \gamma(m c^2 - v m \mu_x)$$

ou

$$m' = \gamma m (1 - \mu_x v/c^2), \quad (1.113)$$

cuja relação inversa é

$$m = \gamma m' (1 + \mu_x v/c^2). \quad (1.114)$$

Finalmente, para obter a transformação para a força, deve-se partir de suas componentes em S e S', isto é,

$$F_x' = \frac{dp_x'}{dt'}, \quad F_y' = \frac{dp_y'}{dt'}, \quad F_z' = \frac{dp_z'}{dt'}.$$

A dedução completa para a transformação da força é, algebricamente, um tanto quanto complicado e vai além dos objetivos deste curso. Entretanto, em princípio deve ser imediato quando se usa as equações de transformação estabelecidas anteriormente. Ao proceder os cálculos é possível mostrar que as componentes da força seguem as transformações:

$$F_x' = \frac{F_x - (v/c^2)\vec{u} \cdot \vec{F}}{(1 - u_x v/c^2)}, \quad (1.115)$$

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \quad F_z' = \frac{F_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

cujas relações inversas são

$$F_x = \frac{F_x' + (v/c^2)\vec{u}' \cdot \vec{F}'}{(1 + u_x' v/c^2)}, \quad (1.116)$$

$$F_y = \frac{F_y'}{\gamma(1 + u_x' v/c^2)}, \quad F_z = \frac{F_z'}{\gamma(1 + u_x' v/c^2)}$$

onde $\vec{u}' = u_x' \vec{i} + u_y' \vec{j} + u_z' \vec{k}$, $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ e $\vec{F}' = F_x' \vec{i} + F_y' \vec{j} + F_z' \vec{k}$, $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$. Pode-se verificar que, no limite clássico $v/c \ll 1$, essas equações reduzem-se a $\vec{F}' = \vec{F}$, como é de se esperar.

Exemplo 1.12 - FACULTATIVO.

Considere um referencial inercial S' que se move com uma velocidade $\vec{v} = +0,6c \vec{i}$ em relação a um referencial inercial S . No referencial S' existem duas partículas idênticas e independentes, de massas de repouso $m_{o1}' = m_{o2}' = 4 \text{ kg}$ que se aproximam uma da outra, ao longo do eixo x' do referencial S' , com velocidades $u_{x1}' = +0,6c$ e $u_{x2}' = -0,6c$, respectivamente, como mostra a Fig. 1.36.

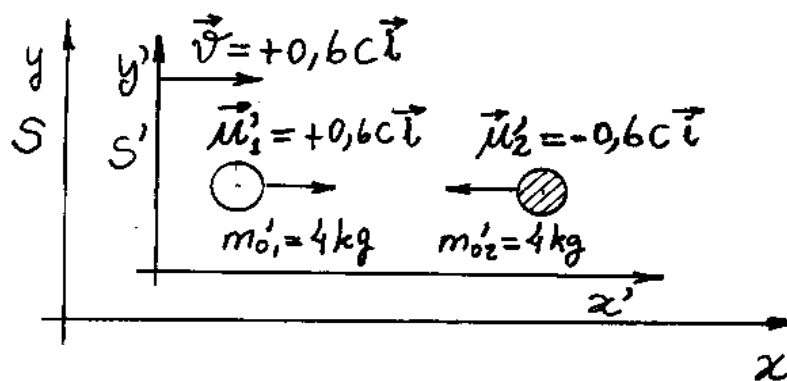


Fig. 1.36 - Partículas em movimento no referencial inercial S' .

- Calcular o momento total \vec{p}' , a energia total E' e a massa de repouso m_o' do sistema que compõe as duas partículas no referencial S' .
- Calcular a massa de repouso m_o , do ponto de vista do referencial S , e mostrar a invariância da massa de repouso na troca de referenciais inerciais.

(a) No referencial S' tem-se

$$p_{x1}' = p_{x2}' = m_1' u_{x1}' = \frac{m_{01}' u_{x1}'}{\sqrt{1 - u_1'^2/c^2}} = \frac{4 \times 0,6c}{\sqrt{1 - 0,36}} = 3c,$$

pois $u_1' = u_{x1}'$.

$$E_1' = E_2' = \sqrt{(p_{x1}'c)^2 + (m_{01}'c^2)^2} = c^2 \sqrt{(p_{x1}'/c)^2 + m_{01}'^2} = c^2 \sqrt{3^2 + 4^2} = 5c^2 \text{ kg}$$

$$E' = E_1' + E_2' = 10c^2 \text{ kg} \quad ; \quad p_x' = p_{x1}' + p_{x2}' = 3c - 3c = 0$$

$$m_0' = \sqrt{(E'/c^2)^2 - (p_x'/c)^2} = \sqrt{10^2 - 0^2} = 10 \text{ kg}.$$

Assim, a massa do sistema é maior do que a soma das massas das duas partículas. A diferença 2kg não pode ser considerada como energia de ligação, pois as partículas são independentes. Essa diferença também não está distribuída igualmente entre as partículas, mas constitui uma propriedade do sistema como um todo.

(b) No referencial S tem-se

$$E = \gamma(E' + v p_x') = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} (10c^2 \text{ kg} + 0,6c \times 0) = 1,25 \times 10c^2 \text{ kg} = 12,5c^2 \text{ kg}.$$

$$p_x = \gamma(p_x' + v E'/c^2) = 1,25 [0 + (0,6c)(10c^2 \text{ kg})/c^2] = +7,5c \text{ kg}.$$

$$m_0 = \sqrt{(E/c^2)^2 - (p/c)^2} = \sqrt{(12,5c^2/c^2)^2 - (7,5c \text{ kg})^2} = 10 \text{ kg} \equiv m_0'$$

o que mostra a invariância da massa de repouso do sistema de duas partículas.

1.9.4. Invariância da Energia de Repouso.

Viu-se que a teoria da relatividade especial prevê que os valores das coordenadas espacial e temporal de um evento físico dependendo do referencial inercial no qual são determinadas. Dessa forma, o tempo t passa a ser uma quarta coordenada com a mesma importância das coordenadas espaciais x, y, z , num "mundo" relativístico quadridimensional que se denomina espaço-tempo. O espaço tridimensional define uma geometria Euclidiana enquanto que o espaço-tempo quadridimensional define uma geometria Lorentziana. Essa diferença se torna mais evidente quando se compara a distância Δr entre dois pontos no espaço, com o intervalo Δs entre dois eventos no espaço-tempo. A primeira é um vetor cujo módulo

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (1.117)$$

é invariante a uma transformação de Galileu, pois $\Delta x' = x'_B - x'_A = (x_B - vt) - (x_A - vt) = x_B - x_A = \Delta x$, $\Delta y' = \Delta y$ e $\Delta z' = \Delta z$. Por outro lado, o módulo do segundo

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2 \quad (1.118)$$

é invariante a uma transformação de Lorentz. O intervalo Δs é o análogo quadridimensional do vetor Δr e, por causa disso, é denominado de quadrivetor espaço-tempo.

A energia e o momento são Componentes de outro quadrvetor na relatividade, denominado quadrvetor energia-momento.

Sabe-se agora, que é possível definir a energia e o momento, tal que satisfaçam as transformações relativísticas e, ao mesmo tempo, as leis de conservação. Da eq. (1.103), tem-se $E_0^2 = E^2 - (pc)^2$ ou, dividindo ambos os lados por c^2 ,
$$(E_0/c)^2 = (E/c)^2 - p^2. \quad (1.119)$$

Comparando a eq. (1.119) com a eq. (1.118), nota-se que, assim como o quadrvetor espaço-tempo ΔS é invariante para diferentes referenciais inerciais, o quadrvetor energia-momento E_0/c , também possui essa propriedade. As grandezas $(E/c)^2$ e p^2 são as análogas dinâmicas das grandezas cinemáticas $(c\Delta t)^2$ e Δr^2 , respectivamente.

1.9.5 - Partículas sem Massa.

Assim como o quadrado do intervalo no espaço-tempo $(\Delta S)^2$, na eq. (1.118), o quadrado da energia de repouso $(E_0/c)^2 = (m_0 c)^2$, na eq. (1.119), formalmente pode assumir valores positivos, negativos ou zeros. Até aqui, assumiu-se somente valores positivos para essa grandeza. O caso em que a expressão assume um valor negativo, aparece em física de partículas no estudo de partículas e anti-

partículas e será considerado num momento oportuno. Aqui, propõe-se investigar a terceira possibilidade, isto é, o caso $(E_0/c)^2 = (m_0 c)^2 = 0$ ou $m_0 = 0$. Deve-se observar que isso não faz sentido do ponto de vista clássico, uma vez que, a energia cinética $E = \frac{1}{2} m_0 u^2$ e o momento $p = m_0 u$ anulam-se para $m_0 = 0$. Assim, classicamente um objeto de massa nula não se distingue do vazio absoluto, pois não possui nem energia nem momento. Do ponto de vista relativístico, entretanto, ao se tomar $m_0 = 0$ na eq. (1.119), obtém-se

$$E = pc. \quad (1.120)$$

Por outro lado, das definições de Energia e momento relativísticos, $E = mc^2$ e $p = mu$, a eq. (1.120), fornece

$$mc^2 = muc$$

ou

$$u = c, \quad (1.121)$$

isto é, toda partícula de massa nula deve estar se movendo com a velocidade da luz. Reciprocamente, toda partícula que se move com a velocidade da luz deve ter necessariamente massa nula e energia $E = pc$.

A existência de partículas com $m_0 = 0$ é amplamente comprovada por observações experimentais. As teorias atuais sugerem a existência de pelo menos três dessas partículas. A mais famosa delas é o fóton, partícula associada à radiação eletromagnética.

O modelo dos fótons surgiu para explicar certas circunstâncias da interação da radiação com a matéria, em que o modelo ondulatório de Maxwell não era capaz de explicar. De acordo com esse modelo, a energia e o momento linear da onda eletromagnética se comporta como pequenas pacotes concentrados de radiação. Como se sabe, o intervalo espaço-tempo Δs para a luz também é nulo. Na verdade, o 2º postulado de Einstein impede a existência de uma transformação de Lorentz para o referencial de repouso da luz, já que esta se move com velocidade c em relação a todas as referências inerciais. Assim, o termo massa de repouso não faz sentido para a luz.

Uma segunda partícula de massa nula é o neutrino. Experimentos realizados na década de 1980 estabeleceram um limite superior para a massa do neutrino da ordem de $6 \text{ eV}/c^2$, o que não exclui a possibilidade de ser nula e portanto que poderia se mover com a velocidade da luz. O resultado mais recente, realizado em 1998 no Japão, usando um detector denominado Super-Kamiokande, sugere um limite inferior de $0,07 \text{ eV}/c^2$ que, se confirmado, significaria que os neutrinos se movem com velocidades ligeiramente inferior a da luz.

Uma terceira partícula de massa nula é o gráviton. Essas partículas são responsáveis pela "transmissão" das forças gravitacionais. Desempenha para a gravidade o mesmo papel que os fótons para o eletromagnetismo. Atualmente não existe nenhuma comprovação experimental da existência dos grávitons.

1.10 - Velocidades Superlumínicas e os Táquions.

Encerra-se este capítulo discutindo a possibilidade da existência de velocidades maiores do que a velocidade da luz c . As transformações de Lorentz não se aplicam quando a velocidade relativa de dois referenciais inerciais é maior do que a velocidade da luz, já que o fator $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ se tornaria imaginário. Interpreta-se este fato como uma indicação de que nenhum tipo de massa, energia ou informação pode viajar mais depressa do que a luz. Entretanto, é possível que certos processos ocorram com velocidades superlumínicas sem violar a teoria da relatividade. Um exemplo disso é o movimento do ponto em que as lâminas de uma tesoura gigante se interceptam quando a tesoura é fechada rapidamente. O fenômeno é conhecido como paradoxo da tesoura e é mostrado na Fig. 1.37.

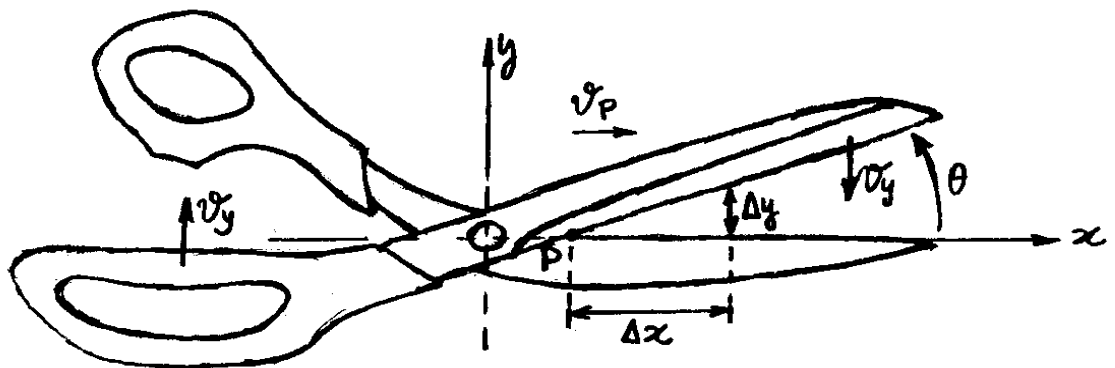


Fig. 1.37 - Paradoxo da tesoura.

Uma das lâminas faz um ângulo θ com a outra lâmina, que é mantida ao longo do eixo x , e se move no sentido negativo do eixo y com velocidade $v_y = \Delta y / \Delta t$.

Durante o intervalo de tempo Δt , o ponto P de interseção das lâminas, desloca-se de uma distância Δx para a direita com velocidade

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta y / v_y} = \frac{v_y}{\operatorname{tg} \theta} \quad (1.122)$$

pois, de acordo com a Fig. 1.37, $\Delta y / \Delta x = \operatorname{tg} \theta$. Como $\operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$ quando $\theta \rightarrow 0$, é sempre possível encontrar um valor de θ suficientemente próximo de zero para que $v_p > c$, seja qual for o valor de v_y .

Naturalmente, o ponto P do paradoxo da tesoura é um ponto geométrico e não um ponto energético. Portanto, nada impede que o ponto P possa se mover com uma velocidade maior do que a velocidade da luz.

Alguns cientistas levantaram a hipótese de existirem partículas cujas velocidades são sempre maiores do que a velocidade da luz. Uma das razões para esta hipótese é por uma questão de simetria: Como $v < c$ para as partículas comuns e $v = c$ para os fótons e outras partículas sem massa de repouso, a presença de partículas com $v > c$ tornaria simétrica a classificação das partículas elementares.

A existência de tais partículas, denominadas de táquions, traria algumas dificuldades, certamente superáveis, para a teoria da relatividade. O paradoxo da causalidade, que se refere a uma inversão do procedimento lógico entre causa e efeito, é um exemplo dessas dificuldades. Uma consequência desse paradoxo, discutido no exemplo 1.13, é uma possível interferência no passado para modificar o presente e o futuro.

Não existe nenhum argumento teórico que impeça a existência dos táquions, entretanto, até o presente momento todas as tentativas de observação dessas partículas fracassaram.

Exemplo 1.13 - FACULTATIVO.

Imaginando-se que os táquions existam, use um diagrama espaço-tempo para mostrar que tais partículas poderiam ser usadas para interferir no passado e mudar o presente.

A Fig. 1.38 fornece as condições necessárias para o cumprimento do problema.

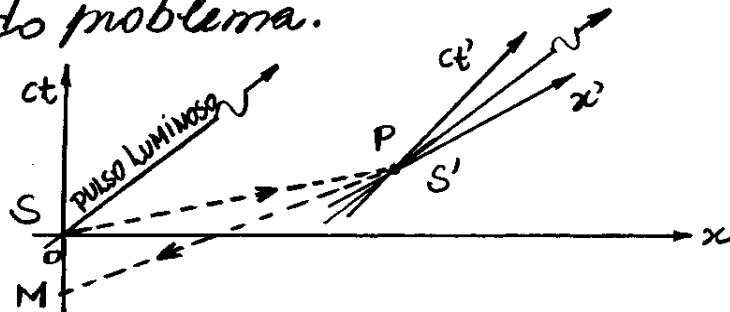


Fig. 1.38. Diagramas espaço-tempo de um referencial S fixo no laboratório e de um referencial S' fixo numa nave que se move a uma velocidade $v < c$ no sentido positivo do eixo x.

Na figura é mostrado o diagrama espaço-tempo do referencial S , fixo no laboratório, onde a linha do universo de um táquion, com velocidade $v > c$, criado na origem e viajando no sentido positivo do eixo x , faz um ângulo menor que 45° com o eixo x , isto é, está abaixo da linha do universo de um pulso luminoso.

Algum tempo depois, o táquion atinge um detector instalado num ponto P a bordo de uma nave que se move com uma velocidade $v < c$, também no sentido positivo do eixo x . O detector cria um novo táquion e o envia no sentido negativo do eixo x e, obviamente, no sentido do futuro de S' , isto é, no sentido positivo do eixo ct' .

O segundo táquion chega ao laboratório no ponto M em $x=0$, isto é, num instante anterior àquele no qual o primeiro táquion foi emitido do ponto O .

Ao enviar um táquion no passado do laboratório, poderia-se modificar os eventos ocorridos no intervalo de tempo entre M e O , o que levaria a contradições causais.

Por exemplo, um outro detector de táquions no laboratório poderia ser ligado ao equipamento usado para criar o primeiro táquion por meio

de um computador programado para cancelar a emissão do primeiro táquion caso o segundo táquion fosse detectado. Isso faz lembrar o famoso filme "O exterminador do futuro".

Foram contradições lógicas como essa, combinada com ausência de indícios experimentais, que induziram os cientistas à conclusão de que não deve existir partículas que se movem mais rapidamente do que a luz.

Lista de Exercícios

Questões conceituais

1- O que diz a relatividade de Newton e em que situação ela não é verificada? Quais são os pontos mais importantes postulados por Einstein para a elaboração da teoria da relatividade especial? Essa teoria desvalida ou inclui a relatividade Newton como um caso especial? Justifique!

2- O final do século XIX é a época em que a visão mecânica dominava e, por causa disso, não se aceitava que a luz se propagasse no vácuo, como se previa na teoria de Maxwell. Para os cientistas da época deveria existir um meio denominado “éter”, em repouso absoluto, por onde a luz se propagasse com velocidade c . Dessa forma, as transformações clássicas de Galileu e o eletromagnetismo de Maxwell seriam ambos preservados. Entretanto, o resultado nulo da experiência de Michelson – Morley estaria descaracterizando a idéia do “éter”. Isso era tão incrível que alguns cientistas da época, na tentativa de preservar o éter, propuseram as seguintes hipóteses: Contração de Lorentz – Fitzgerald e Arrastamento do Éter. Com poucas palavras, explique qualitativamente estas hipóteses e descreva as experiências que as descaracterizaram.

3- O relógio atômico é um dos relógios de precisão mais utilizado em testes experimentais de relatividade. Faça um desenho esquemático de um relógio atômico de Césio convencional e explique em poucas palavras o seu funcionamento.

4- Esboce diagramas espaço - tempo de referenciais S e S' para o caso $\beta = v/c = 1/2$ e faça uma ilustração da contração do comprimento de uma barra de comprimento próprio $L_p = 2\text{ m}$ colocada entre os pontos $x' = 1\text{ m}$ e $x' = 3\text{ m}$ do referencial próprio S' . Calcule o comprimento L da barra no referencial S .

5- O intervalo no espaço - tempo, no caso espacial unidimensional, é definido, como $\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ onde $c\Delta t$ é a distância no tempo entre dois eventos A e B , e Δx é a distância no espaço entre esses mesmos eventos. Defina os intervalos do tipo temporal, espacial e luminoso. Explique porque que o tempo próprio é $T_p = \Delta S/c$ somente para o caso de intervalo do tipo temporal e que o comprimento próprio é $L_p = \Delta S$ somente para o caso de intervalo do tipo espacial.

6- O que é o paradoxo dos gêmeos e como esse paradoxo pode ser justificado? Esboce diagramas espaço-tempo para fazer essa justificativa. Sem recorrer a relatividade geral, o que os irmãos gêmeos podem fazer para verificar qual deles tem razão no cálculo da idade do outro?

Problemas

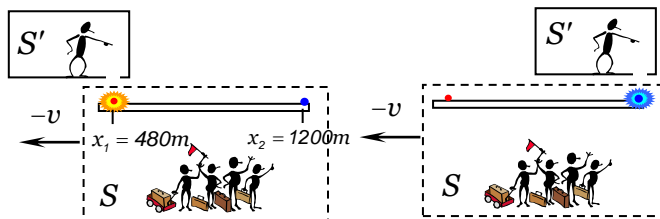
1- A vida média própria dos píons é $T_p = 2,6 \times 10^{-8}\text{ s}$. Se um feixe de píons tiver a velocidade de $v = 0,85c$, (a) qual seria o respectivo tempo de vida média T medido no laboratório? (b) Qual a distância L que os píons percorreriam, em média, antes de decaírem? (c) Qual seria a sua resposta à indagação da parte (b) se você não levasse em conta a dilatação dos tempos? Resp.: (a) $T = 4,94 \times 10^{-8}\text{ s}$, (b) $L = 12,6\text{ m}$, (c) $L = 6,63\text{ m}$.

2- Uma nave espacial parte da terra em direção à alfa do Centauro, que está a $4\text{ anos} - \text{luz}$ de distância. A nave espacial desloca-se com a velocidade $v = 0,75c$. Quanto tempo leva a nave para chegar ao seu destino (a) no referencial da Terra? (b) no referencial de um passageiro da nave? Resp. (a) $\Delta t = 5,33\text{ anos}$, (b) $\Delta t' = 3,53\text{ anos}$

3- Qual deve ser a velocidade v de um múon para que a sua vida média seja $T = 46\mu\text{ s}$, sabendo-se que a vida média em repouso é $T' = 2\mu\text{ s}$? Resp. $v = 0,9991c$

4- Qual deve ser a velocidade de uma vara de um metro, no referencial de um observador, para que o seu comprimento, medido pelo observador, seja 50cm , quando a vara se move na direção do próprio eixo? Resp.: $2,6 \times 10^8 \text{ m/s}$.

5- Observadores num referencial S vêem uma explosão localizada em $x_1 = 480\text{m}$. Uma segunda explosão ocorre $\Delta t = 5\mu\text{s}$ depois, em $x_2 = 1200\text{m}$. Num referencial S' , que se move sobre o eixo dos $+x$, com velocidade v para a direita, um observador nota que as explosões ocorrem num mesmo ponto do espaço. Evidentemente, para ele é o referencial S que se move para a esquerda com uma velocidade $-v$ como mostra a Figura ao lado. Qual a separação no tempo $\Delta t'$ entre as duas explosões no referencial S' ? Resp.: $\Delta t' = 4,39\mu\text{s}$.



6- Os aviões supersônicos a jato têm velocidades máximas $v = 3 \times 10^{-6} c$. (a) Qual a contração percentual $\eta = 100 \frac{(L_p - L)}{L_p}$ do comprimento de um jato que estiver com esta velocidade, visto num referencial ligado a Terra? (b) Durante um intervalo de tempo de $1\text{ano} = 3,15 \times 10^7 \text{ s}$, marcado num relógio na terra, quantos minutos perdem o relógio do piloto em cada ano do relógio da terra? (Sugestão: Como $v \ll c$, no item (b) adote a aproximação $\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$). Resp.: (a) $\eta = 4,5 \times 10^{-10} \%$, (b) $\Delta T = 2,37 \times 10^{-6} \text{ min}$

7- Um relógio está num satélite em órbita terrestre, com um período de $T = 90 \text{ min}$. Considerando o raio da Terra $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ e a velocidade do satélite $v = \frac{2\pi}{T} R_T$, qual é o intervalo de período ΔT que mede a diferença entre a leitura deste relógio e a de um outro, idêntico a ele, que ficou na Terra, depois de um intervalo de tempo $\Delta t = 1\text{ano} = 3,16 \times 10^7 \text{ s}$? (Sugestão: Observe que nesse caso $v \ll c$ e, portanto, $\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$). Resp.: $\Delta T \approx 9,64 \text{ ms}$.

8- Duas naves espaciais idênticas de comprimento de repouso de 100m , aproximam-se uma da outra, com velocidade de $0,8c$ em relação a Terra. (a) Qual o comprimento de cada nave no referencial da terra? (b) Qual a velocidade de uma nave no referencial de um observador na outra nave? (c) Qual o comprimento de uma das naves no referencial de um observador na outra nave? (d) Na terra, em $t = 0$, as proas das naves estão no mesmo ponto, pois neste instante uma começa a passar pela outra. Em que instante, na terra, as popas coincidem? (e) Fazer um desenho em escala, no referencial de uma das naves, da passagem da outra nave, desde a proa até a popa, para visualizar a contração dos comprimentos.

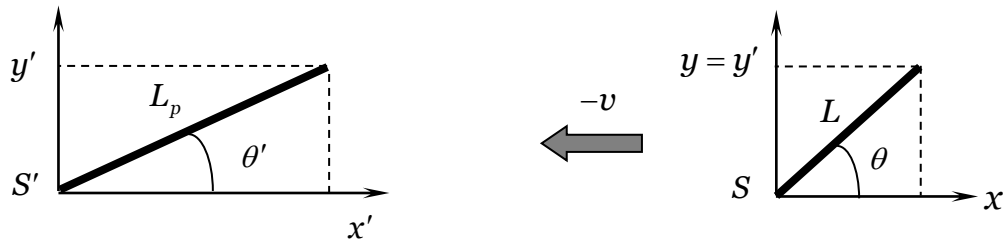
9- Uma nave espacial desloca-se da terra para um sistema estelar à distância de $L = 12c.\text{anos}$ (medida no referencial da Terra). A viagem leva um tempo $\Delta t' = 15\text{anos}$, no referencial da nave. (a) Qual a velocidade v da nave em relação a terra? (b) Quando a nave chega ao seu destino, envia um sinal para a terra. Quantos anos se passam até que a terra receba este sinal? (Sugestão: Considere a duração Δt da viagem da nave no referencial da Terra no cálculo do tempo total para o sinal chegar a terra). Resp.: (a) $v = 0,625c$, (b) $T = \Delta t + 12\text{anos} = 31,2\text{anos}$.

10- Duas naves espaciais estão se aproximando uma da outra. (a) Se a velocidade de cada uma delas for $0,6c$, em relação a Terra, qual é a velocidade de uma em relação à outra? (b) Se a velocidade de cada uma delas em

relação a Terra for 30000m/s (cerca de 100 vezes a velocidade do som), qual a velocidade de uma em relação à outra? Resp.: (a) $u_x = -0,882c$, (b) $u_x \approx -60000 + 6 \times 10^{-4}\text{m/s}$.

11- Mostrar que se uma partícula se move sob um ângulo θ com o eixo dos x , com a velocidade u num referencial S , então ela deve se mover com um ângulo θ' com o eixo dos x' em S' dado, por $\text{tg}\theta' = \frac{\text{sen}\theta}{\gamma(\text{cos}\theta - v/u)}$, onde S' é um referencial com velocidade v em S .

12- Uma vara de comprimento próprio L_p faz o ângulo θ' com o eixo dos x' num referencial S' . O referencial S' move para a direita com velocidade v , em relação a um referencial S . A Figura abaixo mostra o ponto de vista do referencial S' , onde é o referencial S move para a esquerda com velocidade $-v$.



Mostrar que o ângulo θ que a vara faz com o eixo x no referencial S é $\text{tg}\theta = \gamma \text{tg}\theta'$ e que o comprimento da vara em S é $L = L_p \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} \text{cos}^2 \theta' + \text{sen}^2 \theta'}$. (Sugestão: Note que $L \neq \frac{L_p}{\gamma}$ mas $x = \frac{x'}{\gamma}$, pois aqui somente a componente x do comprimento da vara está na direção do movimento).

13- A equação da frente de onda esférica de um pulso de luz que principia na origem, no instante $t=0$ é $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$. Usando a transformação de Lorentz, mostrar que $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$, ou seja, que o pulso de luz é uma frente de onda esférica também no referencial S' .

14- Dois eventos em S estão separados pela distância $D = x_2 - x_1$ e pelo intervalo de tempo $T = t_2 - t_1$. (a) Usar a transformação de Lorentz para mostrar que no referencial S' , que se move com a velocidade v em S , a separação no tempo é $T' = \gamma \left(T - \frac{vD}{c^2} \right)$, onde $T' = t'_2 - t'_1$ é o intervalo de tempo medido em S' . (b) Mostrar

que os eventos podem ser simultâneos e independentes no referencial S' somente se $D > cT$. (c) Se um dos eventos for a causa do outro (eventos dependentes), deve-se ter $D < cT$ pois D/c é o menor tempo que um sinal leva para percorrer a distância entre x_1 e x_2 no referencial S . Mostrar que se $D < cT$, então $t'_2 > t'_1$ em todos os referenciais. Isto mostra que se uma causa precede o seu efeito, num certo referencial, a mesma causa precederá o seu efeito em todos os outros referenciais. (Sugestão: Isole o termo cT na equação

$T' = \gamma \left(T - \frac{vD}{c^2} \right)$, imponha a condição que $D < cT$ e mostre que $T' = t'_2 - t'_1 > 0$, isto é, que $t'_1 < t'_2$ em S'). (d)

Suponha que um sinal pudesse ser enviado com velocidade $c' > c$, de modo que no referencial S a causa precedesse o efeito pelo tempo $T = D/c'$. Mostrar que há então um referencial que se move com a velocidade

$v < c$ no qual o efeito precede a causa. (Sugestão: Substitua $T = D/c'$ na equação $T' = \gamma \left(T - \frac{vD}{c^2} \right)$, isole o termo c' , imponha a condição $c' > c$ e mostre que $T' = t'_2 - t'_1 < 0$, isto é, que $t'_2 < t'_1$ em S').

15- Seja um referencial inercial S' movendo-se com velocidade v em relação a um referencial inercial S , ao longo da direção do eixo x . Mostre que as fórmulas da transformação relativística para as componentes y e z da aceleração de uma partícula, do ponto de vistas dos referenciais S e S' , são dadas por:

$$a'_y = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left[a_y + \frac{u_y v}{c^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} a_x \right] \quad ; \quad a'_z = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left[a_z + \frac{u_y v}{c^2 \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} a_x \right]$$

(Sugestão: Mostre primeiramente que $a'_y = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} \left[\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \frac{du_y}{dt'} + \frac{u_y v}{c^2} \frac{du_x}{dt'} \right]$. Em seguida, mostre que

$$\frac{du_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt} \frac{dt}{dt'} = a_x \gamma \left(\frac{1 - v^2/c^2}{1 - u_x v/c^2} \right) \text{ e } \frac{du_y}{dt'} = \frac{du_y}{dt} \frac{dt}{dt'} = a_y \gamma \left(\frac{1 - v^2/c^2}{1 - u_x v/c^2} \right).$$

Complete a demonstração combinando essas equações. Finalmente, note que a demonstração para a'_z é totalmente similar à demonstração para a'_y).

16- Um amigo da sua idade viaja para Alfa do Centauro, a $4\text{anos-luz} = 4c.\text{anos}$ de distância, e volta imediatamente. Ele afirma que a viagem durou apenas 6anos . (a) Com que velocidade seu amigo viajou? (b) Qual a diferença de idade entre vocês dois quando voltaram a se encontrar? (c) Desenhe um diagrama espaço - tempo para confirmar as respostas dos itens (a) e (b).

17- No referencial S , o evento B ocorre $2\mu\text{s}$ depois do evento A e a uma distância $D = 1,5\text{km}$ deste evento. (a) Qual deve ser a velocidade de um observador num referencial S' no sentido positivo do eixo x para que os dois eventos ocorram simultaneamente nesse referencial? (b) É possível que o evento B preceda o evento A para algum observador? (c) Desenhe um diagrama espaço - tempo que ilustre as respostas dos itens (a) e (b). (d) Determine o valor do intervalo no espaço - tempo e a distância própria entre os eventos.

18- Os referenciais S e S' estão se movendo com os eixos x e x' paralelos. Seus relógios são ajustados para $t = t' = 0$ no momento em que as origens dos dois referenciais coincidem. No referencial S , o evento A ocorre em $x_1 = 1\text{ano-luz} = 1c.\text{ano}$ e $t_1 = 1\text{ano}$ e o evento B ocorre em $x_2 = 2\text{anos-luz} = 2c.\text{anos}$ e $t_2 = 0,5\text{anos}$. Estes eventos ocorrem simultaneamente no referencial S' . (a) Mostre esses eventos num diagrama espaço - tempo (b) Determine o módulo e direção da velocidade de S' em relação à S . (c) Em que instantes estes eventos ocorrem no referencial S' ? (d) O intervalo no espaço - tempo Δs é do tipo espacial, temporal ou luminoso? Qual é o valor de Δs ? Qual é a distância própria L_p entre os eventos?

19- Uma estudante, na Terra, ouve num rádio uma gravação que parece estar sendo tocada num disco que gira muito depressa. A gravação é de um disco que está sendo tocado por uma emissora de uma nave espacial, que se aproxima da terra com a velocidade v . Tendo um disco de 33 rpm, da mesma gravação, a estudante observa que o som é o mesmo que o do seu disco tocado a 78 rpm, isto é, a razão entre a frequência de aproximação ν_{ap} e a frequência emitida ν é dada por $78/33$. Qual deve ser a velocidade da nave? Resp.: $v = 0,696c$.

20- Uma galáxia distante se afasta da Terra com a velocidade $v = 1,85 \times 10^7 \text{ m/s}$. Calcular o deslocamento relativo para o vermelho $\frac{(\lambda_{af} - \lambda)}{\lambda}$ na luz proveniente da galáxia. Resp.: $0,0637$.

21- A luz do sódio, de comprimento de onda $\lambda = 589\text{nm}$, está sendo emitida por uma fonte que se afasta da terra com a velocidade v . Qual deve ser o valor desta velocidade, se o comprimento de onda medido no referencial da terra é $\lambda_{af} = 620\text{nm}$. Resp.: $v = 0,0512c$.

22- Use a eq. (1.74) para mostrar que a aberrção luminosa não é observada na direção longitudinal ($\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$).

23- Um elétron, com energia de repouso $E_0 = 0,511\text{MeV}$, move-se com a velocidade $u = 0,2c$. (a) Achar a energia total, (b) a energia cinética e (c) o momento. Resp.: (a) $E = 0,522\text{MeV}$, (b) $K = 0,011\text{MeV}$, (c) $p = 0,106\text{MeV}/c$.

24- Um próton, com a energia de repouso de $E_0 = 938\text{MeV}$, tem a energia total $E = 1400\text{MeV}$. (a) Qual a sua velocidade? (b) Qual o seu momento? Resp.: (a) $u = 0,74c$, (b) $p = 1034\text{MeV}/c$.

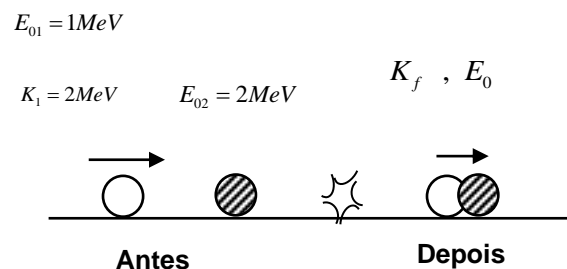
25- Qual a energia cinética K que seria necessária para acelerar uma partícula de massa de repouso m_0 desde o repouso até a velocidade de (a) $u = 0,5c$ (b) $u = 0,9c$ e (c) $u = 0,99c$? Expressar as respostas como múltiplos da energia de repouso E_0 . Resp.: (a) $K = 0,155E_0$, (b) $K = 1,294E_0$, (c) $K = 6,089E_0$.

26- Se a energia cinética K de uma partícula for igual à sua energia de repouso E_0 , qual o erro que se comete em usar $p = p_0 = m_0v$ como o seu momento? Resp.: *erro = 50%*.

27- Qual o erro percentual que se comete tomando-se $\frac{1}{2}m_0v^2$ como a energia cinética de uma partícula quando a sua velocidade for (a) $v = 0,1c$ e (b) $v = 0,9c$. Resp.: (a) *erro = 0,751%*, (b) *erro = 68,7%*.

28- O sol irradia energia à taxa de $P = 4,0 \times 10^{26}\text{W}$, aproximadamente. Vamos admitir que esta energia seja originada por uma reação nuclear cujo resultado é a fusão de 4 núcleos de H para formar um núcleo de He , com a libertação de $E_0 = 25\text{MeV} = 4 \times 10^{-12}\text{J}$ de energia por núcleo de He formado. Calcular o número $N = \Delta E/E_0 = P\Delta t/E_0$ de reações nucleares e a perda da massa em repouso $\Delta M_0 = Nm_0$, ocorridas no sol durante um dia ou $\Delta t = 8,64 \times 10^4\text{s}$.

29- Uma partícula, que tem energia de repouso de $E_{01} = 1\text{MeV}$ e energia cinética $K_1 = 2\text{MeV}$, colide com uma partícula estacionária de energia de repouso de $E_{02} = 2\text{MeV}$. Depois da colisão, as partículas ficam unidas, como mostra a Figura ao lado. Achar (a) a velocidade da primeira partícula antes da colisão, (b) a energia total da primeira partícula antes da colisão, (c) o momento total inicial do sistema, (d) a energia cinética total depois da colisão e (e) a massa em repouso do sistema depois da colisão. Resp.: (a) $u_1 = 0,943c$, (b) $E_1 = 3\text{MeV}$, (c) $p_1 = 2,83\text{MeV}/c$, (d) $M_0c^2 = 4,12\text{MeV}$, (e) $K_f = 0,88\text{MeV}$.



30- O raio da órbita de uma partícula carregada, num campo magnético B , está relacionado com o momento da partícula por $p = BqR$. Esta equação vale classicamente com $p = m_0u$ e relativisticamente com

$p = \frac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$. Um elétron com a energia cinética $K = 1,50\text{MeV}$, se desloca sobre uma órbita circular

perpendicular a um campo magnético uniforme $B = 5 \times 10^{-3}\text{T}$. (a) Achar o raio da órbita. (b) Qual o resultado que seria obtido se fosse usada a relações clássicas $p = m_0u$ e $K = p^2/2m_0$? Considere nos cálculos

$e = 1,6 \times 10^{-19} C$, para a carga do elétron, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} Kg$ para a massa do elétron e $E_0 = 0,511 MeV$ para a energia de repouso do elétron. Resp.: $R = 1,3m$, (b) $R = 0,826m$.

31- Numa simples experiência imaginária, Einstein mostrou que existe uma massa associada à radiação eletromagnética. Seja uma caixa de comprimento L e massa M sobre uma superfície sem atrito. Na parede esquerda da caixa está uma fonte luminosa que emite radiação de energia E que é absorvida pela parede direita da caixa. De acordo com a teoria eletromagnética clássica, esta radiação é portadora de um momento cujo módulo é $p = E/c$. (a) Achar a velocidade de recuo da caixa de modo que o momento seja conservado quando a luz for emitida. Como p é pequeno e M é grande, o cálculo pode ser feito usando a mecânica clássica. (b) Quando a luz for absorvida na parede da direita da caixa, a caixa pára tal que, o momento total permanece nulo. Se a velocidade, muito pequena da caixa, for desprezada, o tempo que a radiação leva para cobrir o comprimento da caixa é $\Delta t = L/c$. Achar a distância Δx que a caixa percorre neste intervalo de tempo. (c) Mostrar que, se o

centro de massa $x_{CM} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}$ do sistema permanece imóvel, como se espera, a radiação deve ter uma massa $m \approx E/c^2$