NOTAS DE AULAS DE ESTRUTURA DA MATÉRIA

Prof. Carlos R. A. Lima

CAPÍTULO 14

SUPERFLUIDEZ E SUPERCONDUTIVIDADE

Edição de Janeiro de 2013

CAPÍTULO 14 - SUPERFLUIDEZ E SUPERCONDUTIVIDADE

ÍNDICE

Nessa apostila aparecem seções, sub-seções e exemplos resolvidos intitulados como ***facultativos***. Os assuntos que se referem esses casos, podem ser dispensados pelo professor durante a exposição de aula sem prejuízo da continuidade do curso de Estrutura da Matéria. Entretanto, é desejável que os alunos leiam tais assuntos e discutam dúvidas com o professor fora do horário de aula. Fica a cargo do professor a cobrança ou não dos tópicos facultativos.

Excluindo os tópicos facultativos, esse capítulo deve ser abordado no máximo em ***4 aulas de quatro créditos***.

Capítulo 14

Superfluidez e Supercondutividade.

14.1 - Introdução.

Supercondutividade e superfluidez fazem parte de uma galeria de fenômenos mais notáveis que são observados na matéria. Substâncias com essas propriedades são capazes de transportar eletricidade ou matéria com, praticamente, nenhuma resistência. Tais fenômenos estão tão distantes de observações cotidianas que, quando foram descobertos, causaram profundo espanto a ponto de se pensar que poderiam ser oriundos de falhas experimentais.

Em 1908, o Físico holandês H. Kamerling Onnes, pela primeira vez, conseguiu liquefazer o Hélio, condensando assim o último elemento que persistia em ficar no estado gasoso. Kamerling utilizou hidrogênio líquido para resfriar uma amostra de Hélio e um termômetro de Hélio gasoso a volume constante para medir a temperatura. A condensação da amostra ocorrerá a uma temperatura de 4,2K. Nessa temperatura, o Hélio líquido apresentava uma forte ebulição.

Dias mais tarde, Karmeling conseguiu resfriar o Hélio ainda mais, chegando a 2,17 K, ponto em que a ebulição cessou abruptamente. É nessa temperatura que o Hélio apresenta característica de superfluído, mas Karmeling não relatou nada a respeito em nenhum de seus artigos. Na verdade, somente um quarto de século depois é que o fenômeno foi citado na literatura.

A uma temperatura de 2,17 K, ocorre uma transição de fase na qual o Hélio se transfora em um superfluído, ou seja, torna-se uma substância de viscosidade nula, capaz de escoar sem nenhuma resistência. Tanto o ^4He quanto seu isótopo ^3He podem apresental tal propriedade. Enquanto a transição de fase superfluída do ^4He ocorre a 2,17 K, no ^3He esse efeito acontece a 2mK.

Três anos depois de conseguir liquefazer o Hélio, Karmeling descobriu que, para alguns materiais, existe uma temperatura crítica T_c, abaixo da qual a resistividade elétrica é nula, tornando-se um supercondutor. A experiência de Karmeling foi realizada com mercúrio, cuja temperatura crítica mostrava-se da ordem de 4,2 K. A temperatura crítica varia de material para material, mas abaixo dessa temperatura a resistência elétrica é tão pequena que não pode ser medida.

As temperaturas críticas de outros elementos supercondutores variam de menos de 0,1 K para o háfnio e o irídio até 9,2K para o nióbio.

Existem varias compostos metálicos supercondutores, com temperaturas críticas relativamente altas. Por exemplo, a liga supercondutora de Nb_3Ge, descoberta em 1973, tem uma temperatura crítica de 23,2 K, a mais alta conhecida até 1986. Apesar do alto custo e dificuldade na refrigeração com hélio líquido, esses materiais tem sido usadas em diversas aplicações, tais como construção de imãs capazes de produzir campos magnéticos intensos para uso na medicina (ressonância magnética) e na física (aceleradores de partículas).

Em 1986, os físicos alemão e Suíço, Johannes Georg Bednorz e Karl Alex Müller, descobriram que os óxidos de lantânio, bário e cobre se tornavam supercondutores a 30 K. Um ano depois, verificou-se que o composto de $YBa_2Cu_3O_7$ apresentava uma temperatura crítica de 97 K. Desde então, vários outros óxidos de cobre com temperaturas críticas elevadas foram descobertos.

Por fim, a descoberta de supercondutores cerâmicos revolucionou o estudo da supercondutividade uma vez que vários desses permanecem super-condutores acima de 77K, que é a temperatura de ebulição do nitrogênio líquido. Isso permite usar esse líquido como refrigerante no lugar do hélio líquido, que é mais caro e difícil de manipular. Entretanto, os supercondutores cerâmicos são extremamente quebradiços, o que dificulta seu uso em aplicações práticas.

Como a resistividade dos supercondutores é nula, pode existir uma corrente elétrica no material mesmo na ausência de campos elétricos. Correntes como essa são denominadas de supercorrentes. Pesquisadores tem mantido supercorrentes por muitos anos em anéis supercondutores sem que nenhum sinal de dissipação tenha sido observado.

Supercondutividade e superfluidez são fenômenos que apresentam várias similaridades. Ambas envolvem o surgimento de transições de fase para um estado especial de melhor ordenação espacial que permite o escoamento de partículas sem dispersão. Em nenhum dos casos a ordenação espacial ocorre como nos cristais, uma vez que as substâncias são fluidas. Ambas as transições são manifestações macroscópicas de leis da mecânica quântica e, em cada caso, a estatística de Fermi ou de Bose, determina as regras de comportamento.

14.2 - Aspectos Experimentais de Superfluídos.

O ^4He se liquefaz a uma temperatura abaixo de 4,2 K em condições normais de pressão. Numa temperatura entre 4,2K e 2,2K, o ^4He se comporta como muitos outros líquidos embora tenha uma tensão superficial excepcionalmente baixa e seja extremamente transparente.

Em 1924 Kamerling Onnes e J. Boks descobriram que a curva da densidade do Hélio líquido em função da temperatura apresentava uma anomalia a uma temperatura $T_c = 2,17K$, como mostra a Fig. 14.1(a). Em 1932, Keesom e Clusius obtiveram o comportamento do calor específico do ^4He como função da temperatura e a anomalia a uma temperatura $T_c = 2,17K$ continuava sendo observada, como mostra a Fig. 14.1(b).

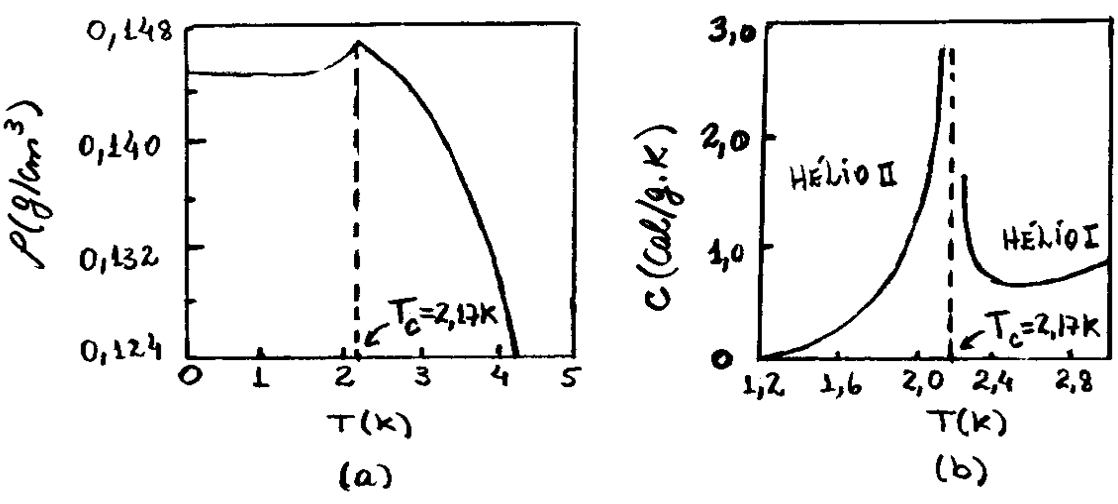

Fig. 14.1 - Comportamento da (a) densidade e, (b) calor específico do ^4He em função da temperatura.

Por causa da semelhança do gráfico com a letra grega λ, a temperatura crítica T_c foi denominada de ponto lambda.

Abaixo da temperatura $T_c = 2{,}17\,K$, o ^4He comporta-se de forma diferente, pois torna-se um superfluido.

Acima do ponto lambda, o ^4He tem forte ebulição e, abaixo deste, cessa esse processo, embora continue a evaporar. Isso se deve ao aumento da condutividade térmica do ^4He quando ultrapassa o ponto lambda. As medidas de condutividade térmica revelam que a condutividade térmica do ^4He é mais de 10^6 vezes maior que a do ^3He. Na verdade, o ^4He conduz o calor melhor do que qualquer metal. Sua condutividade térmica é cerca de 2000 vezes maior do que a do cobre à temperatura ambiente.

Em 1928 W. H. Keesom e M. Wolfke propuseram que a descontinuidade nas curvas mostradas na Fig. 14.1, era causada por uma transição de fase. Eles usaram os termos "Hélio I" para o líquido a uma temperatura $T > T_c$ e "Hélio II" para o caso em que $T < T_c$. De acordo com essa idéia, quando a temperatura do hélio atinge $T = T_c$, a partir de $T = 0$, ele muda de uma fase superfluida (Hélio II) para uma fase normal (Hélio I).

O pico nos gráficos da Fig. 14.1 tem sido estudado extensamente, e nota-se que este fica infinitamente maior se o número de átomos no sistema é infinito. À temperatura $T < T_c$, o calor específico tem uma dependência com T^3, que é uma característica de sistemas de fônons. Sabe-se do capítulo 12 que o calor específico dos sólidos tem essa dependência com a temperatura.

A temperatura $T > T_c$, observa-se um comportamento exponencial do tipo

$$e^{-\varepsilon_g / k_B T}$$

que caracteriza um espectro com um "gap" de energia ε_g.

A Fig. 14.2 mostra um recipiente que foi mergulhado, e depois retirado, de um banho com Hélio líquido a uma temperatura abaixo do ponto lambda. Um filme de superfluido sobe pelas paredes internas do recipiente, desce pelas paredes externas e pinga no reservatório abaixo, até o nível de líquido no interior se tornar igual ao nível de líquido no exterior, ou o recipiente se esvaziar. Esse fenômeno é uma característica de superfluidos e, é denominado de efeito do filme migrante.

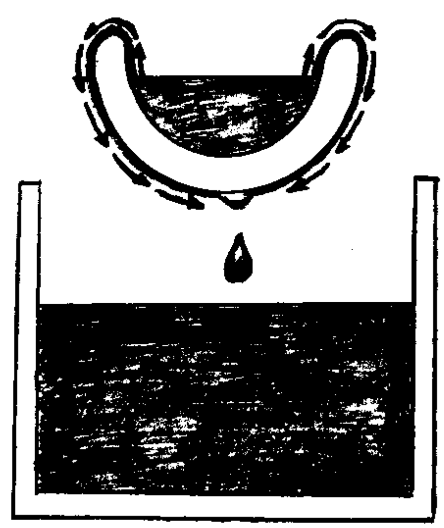

Fig. 14.2 - Efeito do filme migrande com Hélio líquido a uma temperatura da ordem de T = 1,6 K.

Outros efeitos importantes característicos de superfluídos são o efeito termomecânico e o efeito fonte, mostrados nas Figs. 14.3(a) e 14.3(b), respectivamente.

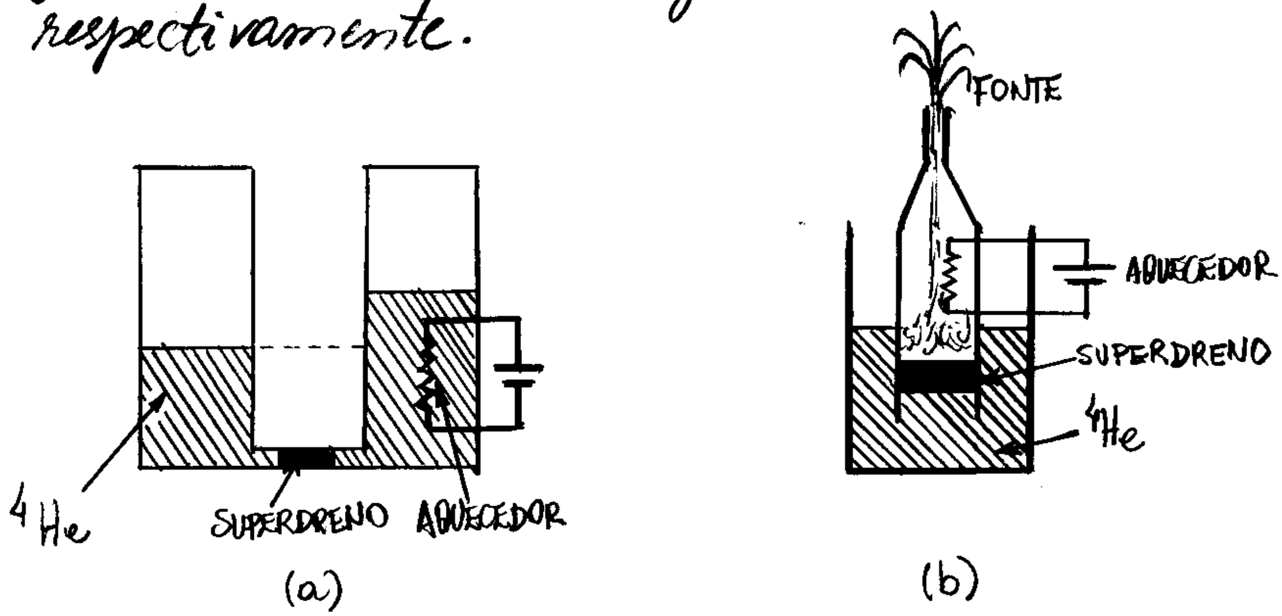

Fig. 14.3 - Diagramas esquemáticos do, (a) Efeito termomecânico e, (b) Efeito fonte.

O efeito termomecânico, pode ser observado utilizando-se dois recipientes com superfluído, conectados por um superdreno. Quando um dos recipientes é aquecido, o superfluído migra do lado mais frio para o lado mais quente, o que faz com que os níveis de superfluído sejam diferentes nos dois recipientes.

Esse mesmo comportamento faz com que o superfluído seja ejetado através de um capilar, no efeito fonte.

Durante muito tempo, acreditava-se que o ^3He não poderia tornar-se um superfluido, uma vez que se trata de um férmion (substância de spin semi-inteiro). O princípio de Pauli não permitiria que essas partículas ocupem o mesmo estado. No entanto, no início da década de 1970, Lee, Osheroff e Richardson demonstraram que, a uma temperatura de 2,7mK, os spins de pares de átomos de ^3He alinham-se paralelamente, criando bósons de spin 1, permitindo que o líquido passe para o estado de superfluido.

Posteriormente, foram descobertos mais dois estados superfluidos do ^3He: um, com spin 0 (pares de átomos com spins antiparalelos), e outro com spin 1 (obtido quando um campo magnético alinha os spins dos pares de átomos), ambos a uma temperatura de 1,8 mK.

Em 1996, Lee, Osheroff e Richardson, receberam o prêmio Nobel por suas descobertas.

14.3 - Condensação de Bose-Einstein.

Viu-se no capítulo 12 que, para qualquer estatística, a densidade de estados de energia ε para um sistema de partículas de massa m, é

$$D_m(\varepsilon) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3} V\varepsilon^{1/2} = AV\varepsilon^{1/2} \qquad (14.1)$$

onde V é o volume do sistema e $A = m^{3/2}/\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3$.

Para um gás em condições normais, geralmente a diferença entre as distribuições de Maxwell-Boltzmann e Bose-Einstein é pequena. Isso ocorre porque nesses casos, a densidade de partículas ρ é pequena ou, o volume $V = N/\rho$ é grande e, portanto, apresentam um número elevado de estado quânticos por partícula, ou alta densidade de estados $D_m(\varepsilon)$.

No caso do hélio líquido, entretanto, a temperatura T é baixa e o comprimento de onda térmico de de Broglie, $\lambda_{th} \propto (1/T)^{1/2}$, dada na eq.(12.75) do Capítulo 12, não é pequeno o suficiente para que a estatística clássica seja usada.

A idéia um tanto ousada de que o hélio líquido pode ser tratado como um gás ideal que obedece a distribuição de Bose-Einstein foi proposta em 1938 por F. London na tentativa de compreender o comportamento do hélio a baixas temperaturas.

Na teoria de London, conhecida como modelo dos dois fluidos, considera-se o hélio II (hélio com $T<T_c$) formado por dois componentes: um fluido normal, com propriedades semelhante a do hélio I (hélio com $T>T_c$), e um superfluido (com viscosidade nula) de propriedades muito diferentes. A densidade ρ_{II} do hélio II seria, então

$$\rho_{II} = \rho_s + \rho_n \qquad (14.2)$$

onde ρ_s é a densidade do superfluido e ρ_n é a densidade do fluido normal. Quando a temperatura é reduzida a partir do ponto λ, a fração da fase superfluida na mistura aumenta e a fração da fase normal diminui, até restar somente a fase superfluida no zero absoluto ($T=0K$).

Na fase superfluida, todos os átomos de hélio se encontram no estado de menor energia, o estado fundamental.

Não é óbvio que o hélio líquido comporta-se como um gás ideal, já que é de se esperar que exista interação entre átomos. No entanto, os átomos de hélio interagem somente por forças de van der Walls que são de pouca intensidade. Além disso, a baixa densidade do hélio líquido (0,145 g/cm³ nas vizinhanças do ponto lâmbda) sugere que a distância entre átomos seja relativamente grande. Assim, o modelo do gás ideal para o hélio líquido deve constituir-se de uma aproximação razoável.

No capítulo 12 concluiu-se ainda que, para uma distribuição de Bose-Einstein, o número de partículas com energia ε é dado, por

$$N = \sum_{\varepsilon} n_{BE}(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon+\alpha}-1} \qquad (14.3)$$

Como se fez com férmions, poderia-se em princípio, substituir a distribuição discreta por uma distribuição contínua, uma vez que, em geral, os níveis de energia são numerosos e estão muito próximos. Ocorre, porém, que quando substitui-se a distribuição discreta por uma distribuição contínua, o estado fundamental desaparece. Isso pode ser visto, por exemplo, na eq.(14.1), onde $D_m(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1/2}$ e portanto $D_m(\varepsilon) = 0$ para $\varepsilon = 0$.

Este fato não é importante no caso de um gás constituído por férmions, já que cada estado espacial não pode ser ocupado por mais de duas partículas e, portanto, não há problema em ignorar duas partículas em, por exemplo, 10^{22}. Quando o gás é constituído por bósons, porém, não existe nenhuma restrição quanto ao número de partículas que podem ocupar o mesmo estado.

Particularmente, no caso do hélio líquido, os estados de mais baixa energia, principalmente o estado fundamental, são importantes.

O número de ocupações N_0 do estado fundamental ε_0 pode ser calculado à partir da eq. (14.3), assumindo-se uma condição de contorno de ondas progressivas para partículas no interior de uma caixa grande de comprimento L, onde $\varepsilon_0 = 0$, isto é

$$N_0 = (e^{\alpha} - 1)^{-1} \tag{14.4}$$

Evidentemente, deve-se assumir $\alpha > 0$ tal que N_0 é finito e positivo para bósons. É bom lembrar que, no caso de férmions a baixas temperaturas, $\alpha < 0$, pois este é proporcional ao negativo da energia de Férmi ($\alpha = -\beta\varepsilon_F$).
Entretanto, nesses casos, $N_0 = (e^{\alpha}+1)^{-1} > 0$.
Se α é muito pequeno, em particular $\alpha = 1/N$, e da expansão em série $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots \simeq 1 + 1/N$, a eq. (14.4), torna-se

$$N_0 \simeq \left(1 + \frac{1}{N} - 1\right)^{-1} = N \tag{14.5}$$

O número de partículas N para qualquer valor de α, dado na eq. (14.3), pode ser reescrito, como

$$N = N_0 + \sum_{\varepsilon \neq 0} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon + \alpha} - 1} \tag{14.6}$$

Como a ocupação do estado fundamental está preservada na eq. (14.6), a distribuição discreta pode agora ser substituída por uma distribuição contínua, obtida a partir da função densidade de estados, dada na eq. (14.1), como

$$N = N_0 + \int_0^{\infty} n_{BE}(\varepsilon) D_m(\varepsilon) d\varepsilon = N_0 + AV \int_0^{\infty} d\varepsilon\, \varepsilon^{1/2} (e^{\beta\varepsilon+\alpha} - 1)^{-1}$$

ou, adotando-se a troca de variável $z = \beta\varepsilon$

$$N = N_0 + AV (k_B T)^{3/2} G(\alpha) \qquad (14.7)$$

onde

$$G(\alpha) = \int_0^{\infty} dz\, z^{1/2} (e^{z+\alpha} - 1)^{-1} \qquad (14.8)$$

Para valores muito grandes de α, pode-se adotar somente os dois primeiros termos da expansão da função $(e^{z+\alpha} - 1)^{-1}$ e mostrar, que

$$G(\alpha) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha} \qquad (14.9)$$

Para $\alpha = 0$, pode-se calcular a integral na eq. (14.8) e mostrar, que

$$G(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2{,}612 \qquad (14.10)$$

Quando α é da ordem de $1/N$, isto é, pequeno o suficiente para que $G(\alpha) \simeq G(0) = \sqrt{\pi}/2\, 2{,}612$, a eq. (14.7) resulta, em

$$N_0 = N - AV(k_B T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2{,}612 \qquad (14.11)$$

ou

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \qquad (14.12)$$

onde

$$T_c = \frac{1}{k_B} \left(\frac{2N}{VA\sqrt{\pi}\, 2{,}612}\right)^{2/3} = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{\rho}{2{,}612}\right)^{2/3} \qquad (14.13)$$

Com $A = m^{3/2}/\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3$ e $\rho = N/V$ sendo a densidade de partículas. A Fig. 14.4 mostra a fração N_0/N de superfluídos N_0 na mistura N em função da temperatura T para $T \leq T_c$, de acordo com a eq. (14.12).

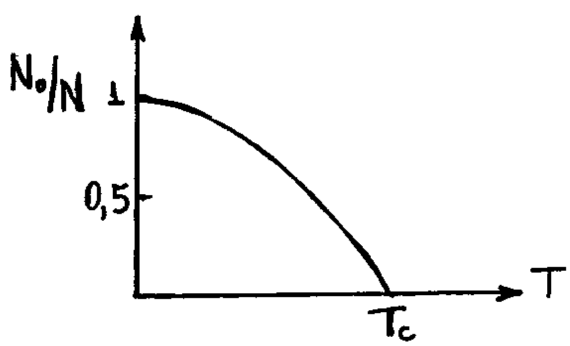

Fig. 14.4 - Comportamento da fração N_0/N em função da temperatura T.

No modelo de dois fluídos de London, os N_0 átomos que foi acrescentado na eq. (14.6), se condensaram no estado fundamental. São esses átomos que constituem o superfluído. Os $N - N_0$ átomos restantes constituem o fluido normal.

A concordância do valor teórico da temperatura crítica $T_c = 3{,}1K$, com o valor experimental da temperatura do ponto lâmbda $T_c = 2{,}17K$, pode ser considerada razoável, particularmente se for levado em consideração que os cálculos teóricos baseiam-se na hipótese de que o hélio líquido se comporta como um gás ideal.

O processo de acumulação de átomos no estado fundamental a uma temperatura $T=0$ é denominado de Condensação de Bose-Einstein. O fenômeno foi previsto por Einstein em 1924, mas levou mais de 70 anos para ser observado em átomos de rubídeo, como se verá na próxima seção.

14.4 - Formação de Condensados de Bose-Einstein por Resfriamento de Átomos a Laser.

Como qualquer átomo o ^4He é formado por férmions (prótons, nêutrons e elétrons). Entretanto, no caso do ^4He, essas partículas estão associadas de tal forma que o spin total do estado fundamental é um número inteiro e, portanto, o ^4He é um bóson. Na verdade, examinando-se a tabela periódica, nota-se que a maioria dos átomos no estado fundamental são bósons.

O excesso de átomos que formam o gás no interior de uma caixa cúbica de comprimento L não traz dificuldade na análise de suas propriedades térmicas à baixa temperatura, uma vez que o espaçamento entre níveis de energia, $E_n = (\hbar^2\pi^2/2mL^2)n^2$, é muito pequeno e portanto a probabilidade de ocupação de um desses níveis, também é muito pequena.

Por exemplo, o espaçamento entre os níveis de energia em uma caixa cúbica de volume $1 cm^3$, contendo vapor de sódio, é da ordem de

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n \simeq 10^{-20} eV$$

de modo que, mesmo em temperaturas baixas, os átomos de uma amostra com 1 bilhão (10^9) de átomos ocupam uma pequena fração dos estados disponíveis, como mostra a Fig. 14.5. Além disso, se ϑ é o volume ocupado por cada átomo, a distância média ℓ entre os átomos no interior da caixa, é

$$\ell = \vartheta^{1/3} = \left(\frac{1\,cm^3}{10^9\,\text{átomos}}\right)^{1/3} = \left(\frac{10^{-6}\,m^3}{10^9\,\text{átomos}}\right)^{1/3} = 10^{-5}\,m = 10\,\mu m$$

ou seja, milhares de vezes maior que um diâmetro atômico. Isso significa que praticamente não há interação entre os átomos.

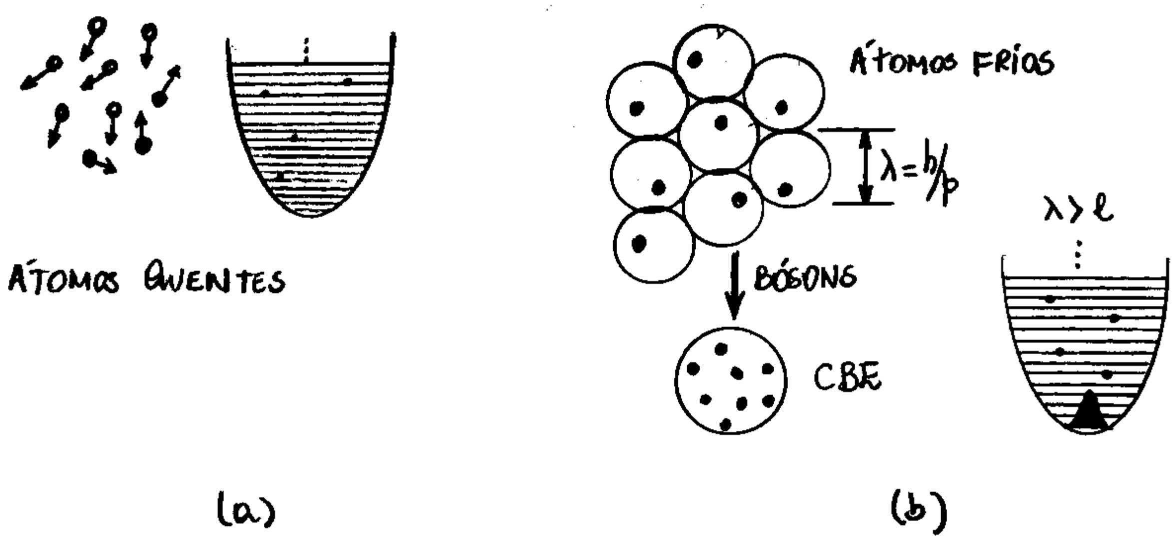

Fig. 14.5 _ (a) Átomos quente de uma amostra numa caixa cúbica, onde a probabilidade de ocupação de um estado é muito pequena. (b) Quando os átomos são resfriados até que o comprimento de onda de de Broglie λ seja maior que a distância interatômica ℓ, os átomos tendem a se concentrar no estado fundamental.

O método mais evidente para formar condensados de Bose-Einstein (CBE) a partir de bósons contidos em uma caixa macroscópica, seria reduzir a temperatura e aumentar a pressão, como se costuma fazer para liquefazer um gás. Entretanto, esse processo simples envolve uma dificuldade para a maioria dos átomos:

Quando o gás se liquefaz, a distância entre os átomos fica tão pequena que os átomos passam a interagir por meio dos elétrons da última camada, fazendo com que se comportem como férmions.

É exatamente isso que acontece com o hélio II líquido (hélio com $T \lesssim T_c$), onde, mesmo em temperaturas muito baixas, a fração de átomos no estado fundamental (fase superfluida) constitui-se somente de 10%.

Essa dificuldade foi resolvida em 1995, por C.E. Wieman e E. Cornell, mais de 70 anos depois da previsão de Einstein, usando uma técnica de resfriamento a laser e uma armadilha magnética. Esses pesquisadores formaram um CBE diretamente a partir de um vapor supersaturado de átomos de rubídio, resfriando a amostra sem permitir que o equilíbrio térmico seja atingido. No equilíbrio térmico a amostra deixaria de ser um vapor supersaturado para ser um sólido metálico.

A amostra de vapor de rubídio à temperatura ambiente foi iluminada por seis lasers semicondutores de um comprimento de onda apropriado, como mostra a Fig. 14.6. As colisões dos fótons dos lasers com os átomos fazem com que, após um ou dois segundos, uma coleção de aproximadamente 10^7 átomos se concentrem numa região com aproximadamente 1,5 cm de diâmetro, definida pela intersecção dos feixes dos lasers. Por causa do aprisionamento promovido pelos lasers, a energia cinética dos átomos cai a tal ponto, que a "nuvem" atômica é resfriada a uma temperatura da ordem de 1mK.

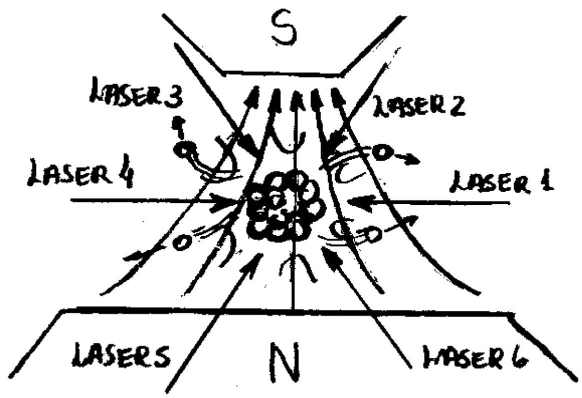

Fig. 14.6 - Técnica de formação de um condensado de Bose-Einstein a partir de uma amostra de vapor de rubídio.

Em seguida, uma armadilha magnética especial com um campo magnético não-uniforme, foi usada para "comprimir" os átomos da nuvem, tal que spins atômicos $(j=2)$ polarizam todos no estado $m_j=+2$.

No vapor de átomos polarizados, o equilíbrio é atingido rapidamente, muito antes que o verdadeiro estado de equilíbrio, o sólido, possa se formar, o que mantém a nuvem num estado de vapor supersaturado.

A armadilha magnética contém um "dreno" que permite a passagem dos átomos mais "quentes", levando com eles boa parte da energia cinética, resfriando os átomos restantes a uma temperatura menor que 100 nK, da mesma forma como as moléculas de água que evaporam da superfície de uma xícara de café refriam o líquido que permanecem na xícara.

Os átomos restantes passam a ocupar o estado fundamental da armadilha magnética e sua temperatura cai a zero. São esses átomos que formam o condensado de Bose-Einstein.

O condensado se matém estável durante 15 ou 20 segundos antes de ser destruído por colisões com átomos de impurezas que também estão colidindo com as paredes quente da caixa.

Após a descoberta de Wieman e Cornell, diversos outros cientistas produziram condensados de Bose-Einstein. Em 1996, Ketterle e colaboradores produziu um condensado de átomos de sódio com 9×10^7 átomos de um milímetro de diâmetro e com um tempo de vida de meio minuto.

Provavelmente a maioria das aplicações práticas de um condensado de Bose-Einstein ainda está por ser descobertas. Entretanto, existe uma aplicação que vale apena mencionar. O CBE pode ser usado como base para a fabricação de um futuro laser atômico. Este fato foi demonstrado, também por Ketterle e colaboradores, no final de 1996. O condensado é um conjunto coerente de átomos, assim como a luz produzida por um laser é um conjunto coerente de fotons.

Assim, um laser atômico seria capaz de depositar átomos em substratos com uma enorme precisão, provavelmente substituindo a microlitografia na produção de circuitos integrados.

14.5 - Aspectos Experimentais de Supercondutores.

Kamerling descobriu a supercondutividade em 1911 medindo a resistência elétrica R do mercúrio em função da temperatura T, cujo resultado é mostrado na Fig. 14.7.

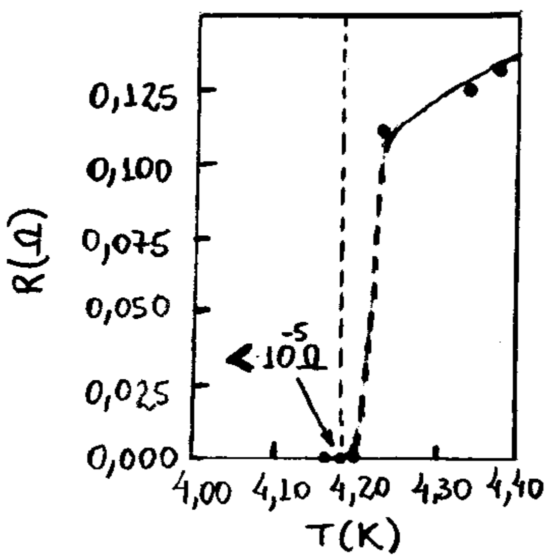

Fig. 14.7 - Gráfico obtido por Kamerling Onnes para a resistência elétrica do mercúrio em função da temperatura.

O gráfico obtido por Kamerling mostra que a temperatura crítica do mercúrio é $T_c = 4,2\ K$.

A temperatura crítica dos materiais deve diminuir com a presença de campos magnéticos $\vec{B}$ externos. A Fig. 14.8 mostra o comportamento da temperatura crítica do chumbo para diferentes valores de campo magnético aplicado. Quando o campo magnético ultrapassar um certo valor crítico B_c, a supercondutividade deixa de existir para qualquer temperatura.

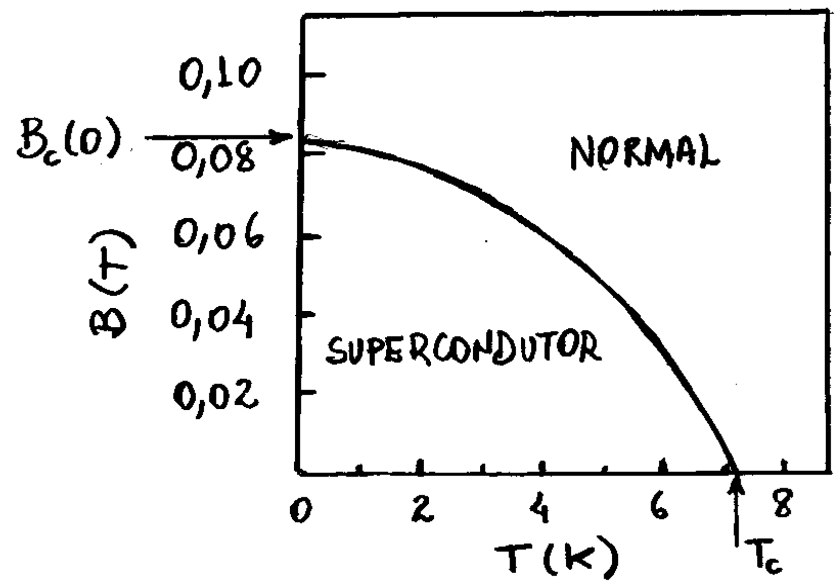

Fig. 14.8 - Comportamento da temperatura crítica do chumbo com o campo magnético aplicado.

As temperaturas críticas T_c e os campos magnéticos críticos $B_c(0)$, de diversos materiais supercondutores, é mostrado na Tab. 14.1. Nessa tabela separa-se supercondutores de duas diferentes categorias: Os supercondutores do Tipo I, que são materiais monoatômicos simples e "macios" e, os supercondutores do Tipo II, que são materiais da forma de ligas ou cerâmicas, essencialmente "duros".

	TIPO I	$T_c(K)$	$B_c(0K;T)$	TIPO II	$T_c(K)$	$B_c(0K;T)$	
*	Al	1,175	0,0105	Nb_3Sn	18,1	24,5	
	Cd	0,517	0,0028	Nb_3Ge	23,2	34,0	*
*	Hg	4,154	0,0411	NbN	16,0	45,3	
	In	3,408	0,0282	V_3Ga	16,5	35,0	
	Nb	9,25	0,2060	V_3Si	17,1	15,6	
	Os	0,66	0,0070	PbMoS	14,4	6,0	*
*	Pb	7,196	0,0803	CNb	8,0	1,7	
	Sn	3,722	0,0305	Al_2CMo_3	9,8	15,6	
	Tl	2,38	0,0178	Rb_3C_{60}	29,0	?	
	Zn	0,85	0,0054	Cs_2RbC_{60}	33,0	?	*
	MONOATÔMICOS E MACIOS			LIGAS/CERÂMICAS E DUROS			

Tab.14.1 - Valores de T_c e B_c para alguns supercondutores Tipo I e Tipo II.

Seja um material supercondutor, inicialmente a uma temperatura $T > T_c$, na presença de um pequeno campo magnético $B < B_c$. Considere-se que o material seja resfriado até se tornar supercondutor. Como a resistência R do material anula-se, então não pode existir uma f.e.m no supercondutor ($\mathcal{E} = Ri = 0$). Assim, de acordo com a lei de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$$

ou, $\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \equiv$ constante, o campo magnético $\vec{B}$ no supercondutor não pode variar no tempo. Então, do ponto de vista da Física Clássica, um campo magnético pode ser mantido no interior de um supercondutor, desde que este seja constante no tempo.

Entretanto, os resultados experimentais mostram que, quando um supercondutor é resfriado até atingir uma temperatura $T \leq T_c$, na presença de um campo magnético externo, as linhas de campo são expelidas do material, isto é, o campo anula-se no interior do material, como mostra a Fig. 14.9. Esse efeito, descoberto por H.W. Meissner e R. Ochsenfeld em 1933, é conhecido como efeito Meissner.

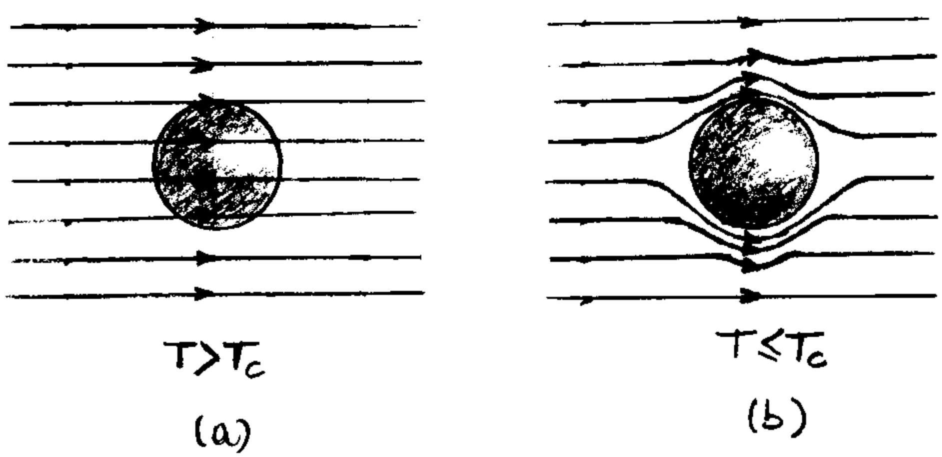

Fig. 14.9 - Efeito Meissner em uma esfera supercondutora resfriada na presença de um campo magnético constante.

O efeito Meissner é justificado pela indução de uma supercorrente, denominada corrente de blindagem, na superfície da peça supercondutora. Esta supercorrente tem a direção e a intensidade suficientes para anular exatamente o campo externo no interior do material.

O campo magnético $B_{ind} \equiv B$ induzido no supercondutor custa ao supercondutor um gasto de energia magnética por unidade de volume, dado por

$$u_B = \frac{B_{ind}^2}{2\mu_0} \equiv \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (14.14)$$

onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$ é a permeabilidade magnética do vácuo.

A famosa levitação magnética, observada com um imã permanente e um supercondutor resulta da repulsão entre o campo magnético externo gerado pelo imã e o campo magnético gerado pelas supercorrentes no supercondutor.

Somente os supercondutores do tipo I exibem o efeito Meissner completo. A Fig. 14.10(a) mostra um gráfico da magnetização M multiplicada por μ_0 em função do campo magnético $\vec{B}$ aplicado para um supercondutor do tipo I.

Para $B < B_c$, o campo magnético $\mu_0 M$ induzido no supercondutor é igual e oposto ao campo magnético externo $\vec{B}$. Em outras palavras, o supercondutor exibe um diamagnetismo perfeito.

Por outro lado, o gráfico da Fig. 14.10 (b), resultado experimental para o supercondutor tipo II tântalo, mostra a presença de dois campos magnéticos críticos B_{c1} e B_{c2}.

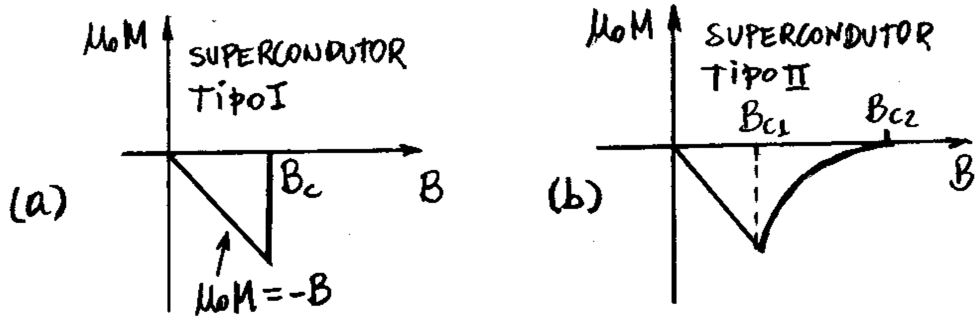

Fig. 14.10_ Gráficos do campo magnético induzido $\mu_0 M$ em função do campo magnético B aplicado para supercondutores, (a) tipo I e, (b) tipo II.

No caso em que $B < B_{c1}$, o cancelamento do campo magnético no interior do material é total, permanecendo o estado supercondutor. Entretanto, se $B > B_{c2}$, o campo magnético penetra no material que volta ao estado normal. Para campos magnéticos entre B_{c1} e B_{c2} ocorre uma penetração parcial do campo magnético no interior do material.

As vibrações da rede cristalina na supercondutividade, são responsáveis por um outro aspecto experimental importante nesses materiais, denominado de efeito isótopo, descoberto em 1950. Segundo esta observação experimental, a temperatura crítica T_c depende da massa isotópica M do cristal de acordo com a seguinte equação:

$$M^{\alpha} T_c = \text{Constante} \qquad (14.15)$$

onde α é um parâmetro que varia de material para material. A Tab. 14.2 mostra valores experimentais de α para alguns supercondutores.

MATERIAL	α	MATERIAL	α
Cd	0,32	* Nb_3Sn	0,08
* Hg	0,50	Os	0,15
* Pb	0,49	Zn	0,45

Tab. 14.2 - Valores de α para alguns supercondutores

A descoberta do efeito isótopo é relevante porque demonstra que as vibrações da rede cristalina, e portanto interações elétron-fônon, não podem ser ignoradas no estudo da supercondutividade. A hipótese de que os íons da rede não se movem é equivalente a supor que $M \to \infty$ nas interações elétron-íon da rede. De acordo com a eq. (14.15), isso significa que, nesse caso, $T_c \to 0$.

14.6 – Equação de London

Baseado no modelo de dois fluidos, usado para explicar as propriedades de superfluidez do ^4He, em 1935 os irmãos E. London e H. London formularam um modelo para explicar o efeito Meissner da supercondutividade. De acordo com esse modelo, somente uma fração dos elétrons de condução se encontra no estado supercondutor. Se ρ é a densidade total de elétrons, ρ_n é a densidade de elétrons normais e ρ_s é a densidade de elétrons no estado supercondutor, então $\rho = \rho_n + \rho_s$. Obviamente, essas densidades dependem da temperatura. Em particular, na temperatura crítica $\rho_s(T_c) = 0$ e $\rho_s(0) = \rho$. Por definição, a densidade de corrente supercondutora é

$$\vec{J}_s = -\rho_s e \vec{v}_s \qquad (14.16)$$

onde $\vec{v}_s$ é a velocidade dos elétrons supercondutores. Da Segunda Lei de Newton

$$m \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = -e\vec{E}$$

ou, de acordo com a eq.(14.16),

$$\vec{E} = \frac{m}{\rho_s e^2} \frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} \qquad (14.17)$$

Substituindo essa equação na expressão da Lei de Faraday, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B} + \frac{m}{\rho_s e^2} \vec{\nabla} \times \vec{J}_s\right) = 0 \qquad (14.18)$$

Os irmãos London observaram que o efeito Meissner poderia ser explicado quando se assume a solução particular da eq.(14.18) como

$$\vec{B} + \frac{m}{\rho_s e^2}\vec{\nabla}\times\vec{J}_s = 0 \qquad (14.19)$$

Essa equação é denominada de <u>equação de London</u> e é válida somente para supercondutores. De fato, a eq.(14.19) embute o efeito Meissner, pois quando se aplica um campo $\vec{B}$ no supercondutor, a variação do fluxo magnético faz surgir uma corrente supercondutora $\vec{J}_s$, que por sua vez produz um campo $m/\rho_s e^2 \, \vec{\nabla}\times\vec{J}_s$, que acaba cancelando exatamente o campo $\vec{B}$.

De acordo com uma das equações de Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_s$$

ou

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} \qquad (14.20)$$

O comportamento do campo $\vec{B}$ no interior do supercondutor pode ser verificado com mais detalhe quando se substitui a eq.(14.20) na eq.(14.19). Com esse procedimento, obtém-se

$$\vec{B} + \frac{m}{\mu_0\rho_s e^2}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$$

Como $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B}$, pois de acordo com uma das equações de Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, então

$$\vec{B} + \frac{m}{\mu_0\rho e^2}\left(-\nabla^2\vec{B}\right) = 0$$

ou

$$\vec{B} = \lambda_L^2 \nabla^2 \vec{B} \qquad (14.21)$$

onde

$$\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 \rho e^2} \qquad (14.22)$$

é um parâmetro denominado de comprimento de penetração London.

Para um campo magnético $\vec{B}$ aplicado na direção do eixo z em um supercondutor que está alinhado ao longo do eixo x, a eq. (14.21) torna-se

$$B(x) = \lambda_L^2 \frac{d^2}{dx^2} B(x)$$

cuja solução é

$$B(x) = B(0)\, e^{-x/\lambda_L} \qquad (14.23)$$

De acordo com essa equação, deve-se observar ausência do campo $\vec{B}$ somente a partir de $x = \lambda_L$. A Fig. 14.11 mostra o comportamento experimental do comprimento de penetração London λ_L em função da temperatura T para o caso do chumbo Pb.

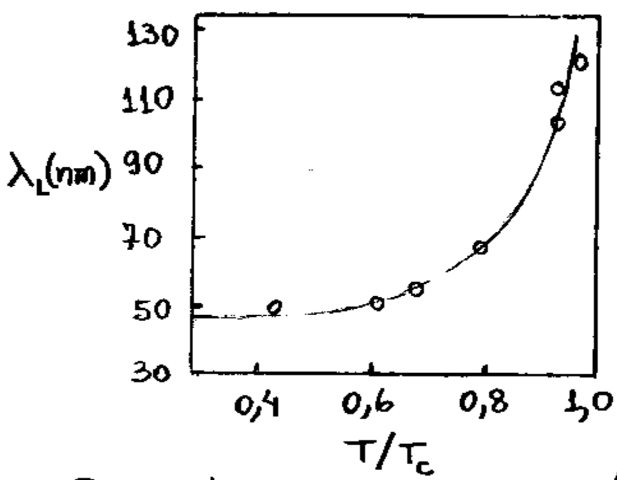

Fig. 14.11 - Dependência do comprimento de penetração London λ_L com a temperatura T para o chumbo Pb.

14.7- A Teoria BCS da supercondutividade.

Em 1957, J. Bardeen, L. Cooper e J.R. Schrieffer formularam uma teoria quântica para os supercondutores. A concordância com as propriedades microscópicas observadas nesses materiais foi tão bem sucedida que esses autores receberam o prêmio nobel de Física em 1972 pelo que ficou conhecido como a teoria BCS da supercondutividade.

No capítulo 13 observou-se que, para um condutor normal, o estado fundamental do gás de elétrons a uma temperatura $T=0$, é representado por uma esfera de Fermi no espaço do vetor de onda $\vec{k}$. Os elétrons devem preencher todos os estados disponíveis até um valor máximo de energia ε_F e todos os estados acima deste permanecem vazios. Nesse caso, um estado excitado pode ser formado elevando-se um elétron imediatamente acima da superfície da esfera de Fermi. A teoria BCS mostra que, a partir de uma interação atrativa apropriada entre elétrons, o novo estado fundamental, a uma temperatura $T=0$, é supercondutor. Os orbitais próximos da energia de Fermi ε_F devem ser preenchidos de modo semelhante ao fornecido pela distribuição de Fermi-Dirac. Entretanto, a característica principal da teoria BCS é que estes orbitais sejam ocupados aos pares. Se um orbital com vetor de onda $\vec{k}$ e spin para cima for ocupado, então o orbital com vetor de onda $-\vec{k}$ e spin para baixo também será ocupado.

De acordo com a teoria BCS, esses pares de elétrons podem ser formados em determinadas condições, definem um sistema de partículas denominadas de pares de Cooper que possuem spins nulos e muitas outras propriedades atribuídas aos bósons. Os pares de Cooper são formados a baixas temperaturas devido a uma interação entre os elétrons e os íons positivos da rede cristalina. Essa interação cria uma deformação local que se propaga no cristal, junto com o elétron, como uma pertubação mecânica, na forma de um fônon como mostrado na Fig. 14.12.

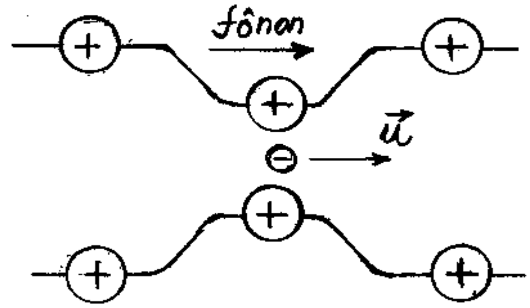

Fig. 14.12 - Deformação local de uma rede cristalina devido ao movimento de um elétron.

A deformação da rede cristalina aumenta a concentração local de cargas positivas, que acaba por atrair outro elétron. Dessa forma, os dois elétrons acabam sendo atraídos mutuamente, por intermédio do fônon associado à deformação local. A partícula composta pelos dois elétrons e o fônon é o que se denomina par de Cooper. A energia máxima que pode ser transferida de um elétron para o outro elétron num par de Cooper por intermédio do fônon é da ordem da energia característica do fônon dada por

$$\varepsilon_D = k_B \Theta_D \tag{14.24}$$

onde Θ_D é a temperatura de Debye e k_B é a constante de Boltzman. Tipicamente, $\Theta_D \simeq 10^2 K$ enquanto que a temperatura de Férmi é $T_F \simeq 10^5 K$. Assim, a energia do fônon $\varepsilon_D = k_B \Theta_D$ é muito menor do que a energia de Férmi $\varepsilon_F = k_B T_F$.

O valor esperado $\langle V_{ep} \rangle = -F$ do potencial atrativo entre os elétrons e e p em um par de Cooper é uma quantidade importante na interpretação quântica da supercondutividade. De acordo com a teoria BCS, a existência de estados de pares ligados será possível somente para pequenos valores da quantidade positiva F. Nesse caso e para $T=0$, a teoria BCS prevê que a energia de ligação entre os elétrons num par de Cooper é

$$E_b = 2\varepsilon_D e^{-2/R_0 F} \tag{14.25}$$

onde R_0 é a densidade numérica de partículas ρ por unidade de energia, $R(\varepsilon) = 3/2\, \rho\, \varepsilon^{1/2}/\varepsilon_F^{3/2}$, definida no Capítulo 13, calculada para $\varepsilon = \varepsilon_F$, isto é,

$$R_0 = R(\varepsilon_F) = \frac{3\rho}{2\varepsilon_F} \tag{14.26}$$

A eq. (14.25) mostra que a energia de ligação E_b pode ser muito menor do que a energia ε_D característica do fônon. Este fato é fundamental na supercondutividade pois, como se sabe, a temperatura crítica de transição T_c, que é da ordem de $T_b = E_b/k_B$, é usualmente 100 vezes menor do que a temperatura de Debye $\Theta_D = \mathcal{E}_D / k_B$.

A teoria BCS prevê que, no estado fundamental a uma temperatura $T=0$, existem vários pares de Cooper ocupando estados numa camada em torno da superfície da esfera de Fermi. Um único elétron do par tem uma energia E_p, medida relativamente ao estado fundamental, dada por

$$E_p = \sqrt{\mathcal{E}_p^2 + \Delta^2} \quad , \tag{14.27}$$

onde $\mathcal{E}_p = p^2/2m$ e

$$\Delta = 2\mathcal{E}_D e^{-1/R_0 F} \quad . \tag{14.28}$$

Quando um par de Cooper se rompe, dois elétrons são excitados e a menor energia envolvida na excitação é um "gap" de energia dado por

$$\mathcal{E}_g = 2\Delta = 4\mathcal{E}_D e^{-1/R_0 F} \quad . \tag{14.29}$$

Diferentemente do caso de um condutor normal, mostrado na Fig. 14.13(a), no supercondutor não existe nenhum estado de energia disponível na região do "gap" de energia como mostra a Fig. 14.13(b).

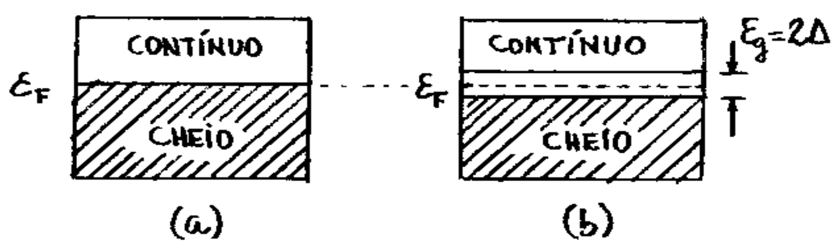

Fig. 14.13 Estado fundamental a uma temperatura $T=0$, (a) para um condutor normal e (b) para um supercondutor.

Entretanto, assim como no condutor normal, existe um contínuo de estados acima do "gap" de energia. Tipicamente, observa-se que $\mathcal{E}_g \simeq 10^{-4}\mathcal{E}_F$. O "gap" de energia é responsável pelas características incomuns dos supercondutores, como a supercorrente e o efeito Meissner.

Dentre os atributos da teoria BCS, ela leva em conta também a natureza cooperativa do emparelhamento dos pares de Cooper. Quando $T>0$, um único elétron é termicamente excitado para além da superfície da esfera de Fermi. Por causa do princípio de Pauli, esses estados ficam indisponíveis para a formação dos estados de pares. Quando a temperatura sobe, aparece um bloqueio cooperativo para a formação dos estados ligados, tornando a energia de ligação E_b e o "gap" de energia $\mathcal{E}_g$ dependentes da temperatura. Em alguma temperatura crítica T_c, a energia de ligação E_b e o "gap" de energia $\mathcal{E}_g$, vão ambos a zero. Por exemplo, de acordo com a teoria BCS, a dependência de $\mathcal{E}_g$ com a temperatura T é

$$\frac{\mathcal{E}_g(T)}{\mathcal{E}_g(0)} = \operatorname{tgh}\left[\frac{\mathcal{E}_g(T)\,T_c}{\mathcal{E}_g(0)\,T}\right] \qquad (14.30)$$

Esta é uma equação transcendental, ou igualdade de duas funções cuja incógnita $\mathcal{E}_g(T)$ é um argumento das funções, que deve ser resolvida graficamente ou numericamente. A Fig. 14.14 mostra o resultado experimental do comportamento do "gap" de energia $\mathcal{E}_g$ normalizado em função da temperatura T normalizada para alguns elementos supercondutores.

A curva contínua mostra o mesmo comportamento previsto pela teoria BCS.

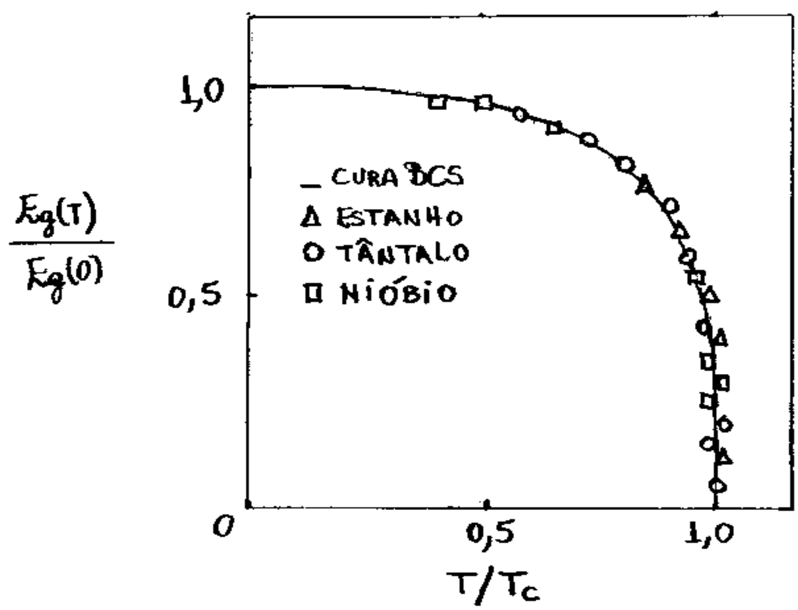

Fig. 14.14 - Comportamento teórico e experimental do "gap" de energia normalizado em função da temperatura normalizada.

A temperatura crítica T_c é uma temperatura de transição para o estado supercondutor e, de acordo com a teoria BCS, tem-se

$$k_B T_c = 1{,}14\, \mathcal{E}_D e^{-1/R_o F} \qquad (14.31)$$

Viu-se que o efeito isótopo, $M^{\alpha} T_c =$ Costante, é proporcional às vibrações da rede cristalina. Uma relação simples entre a quantidade experimental T_c e o "gap" de energia $\mathcal{E}_g$ é obtida combinando as eqs. (14.24) e (14.31), isto é,

$$\frac{\mathcal{E}_g}{k_B T_c} = \frac{4}{1{,}14} = 3{,}51$$

ou

$$\mathcal{E}_g = 3{,}51\, k_B T_c \qquad (14.32)$$

Resultados experimentais mostram que a razão $\varepsilon_g / k_B T_c$ varia num intervalo entre 2,8 e 4,6.

A experiência mostra que um campo magnético $B \geq B_c$ é capaz de transformar um estado supercondutor em um estado normal. A teoria BCS pode ser usada para prevê a energia mínima $W_0 = B_c^2/2\mu_0$ necessária para transformação. Se um par de Cooper é formado por dois elétrons, onde cada elétron tem uma energia Δ em torno da superfície da esfera de Fermi, então

$$\text{densidade de pares} = \frac{1}{2} R_0 \Delta$$

Na passagem do estado supercondutor para o estado normal, cada elétron do par de Cooper é rebaixado $-\Delta$ em energia. Assim, a redução total na densidade de energia é

$$W_0 = \frac{1}{2} R_0 \Delta(-\Delta) = -\frac{1}{2} R_0 \Delta^2 = -2 R_0 E_D^2 e^{-2/R_0 F} \qquad (14.33)$$

onde usou-se a eq. (14.22) na substituição do valor de Δ. O valor de B_c obtido de $W_0 = B_c^2/2\mu_0$ como substituição da eq. (14.26), tem uma boa concordância com os resultados experimentais.

No sistema supercondutor os pares de Cooper possuem estados fortemente coerentes tal que a formação de alguns estimula a formação de muitos em um modo cooperativo. Essa tendência é análoga ao que ocorre na condensação de Bose-Einstein.

Como existe um número par de férmions num par de Cooper, assim como ocorre com o ^4He, tais partículas tem spin inteiro (zero em particular), se comportam como bósons e podem ocupar um mesmo estado quântico. Entretanto, a teoria BCS prevê que o raio médio de ação da função de onda de um par de Cooper é muito grande ($\sim 1\,\mu m$). Isso significa que milhões de funções de onda de pares de Cooper podem ser superpostas. Como esse fato não ocorre com o ^4He, então não se pode pensar na transição de um supercondutor simplesmente como uma condensação de Bose-Einstein. No estado supercondutor, os pares de Cooper estão todos correlacionados e se comportam como uma entidade única.

Exemplo 14.1

Para o alumínio ($[Ne]3s^2 3p$), que tem um elétron na subcamada mais externa, $\mathcal{E}_F/k_B = 1{,}4 \times 10^5 K$, $\Delta/k_B = 2{,}1 K$, a temperatura de Debye é $\Theta_D = 420 K$, a temperatura crítica é $T_c = 1{,}2 K$ e a densidade de átomos é $\rho = 6{,}0 \times 10^{28}$ átomos$/m^3$. (a) Calcule a constante de interação adimensional $R_0 F$ de pares de Cooper nesse material. (b) Calcule o campo magnético crítico B_c, previsto pela teoria BCS. (c) Calcule o comprimento de penetração London λ_L do campo magnético no alumínio.

(a) Das eqs. (14.24) e (14.31), obtém-se

$$k_B T_c = 1{,}14\,\varepsilon_D e^{-1/R_0 F} = 1{,}14\,k_B \Theta_D e^{-1/R_0 F}$$

ou

$$R_0 = -\frac{1}{\ln(1{,}2\,K/1{,}14 \times 420\,K)} = 0{,}17$$

(b) Da eq. (14.33), do fato que $W_0 = B_c^2/2\mu_0$ e $R_0 = 3\rho/2\varepsilon_F$, obtém-se

$$B_c = \Delta\sqrt{R_0 \mu_0} = \Delta\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\mu_0 \rho}{\varepsilon_F}} = (2{,}1\,K)\,k_B\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\mu_0 \rho}{(1{,}4 \times 10^5\,K)\,k_B}}$$

$$= (2{,}1\,K)(1{,}38 \times 10^{-23}\,J/K)\sqrt{\frac{3}{2}\frac{(4\pi \times 10^{-7}\,N/A^2)(6{,}0 \times 10^{28}\,m^{-3})}{(1{,}4 \times 10^5\,K)(1{,}38 \times 10^{-23}\,J/K)}} \simeq 7\,mT$$

(c) $$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 \rho e^2}} = \sqrt{\frac{9{,}1 \times 10^{-31}\,kg}{(4\pi \times 10^{-7}\,N/A^2)(6{,}0 \times 10^{28}\,m^{-3})(1{,}6 \times 10^{-19}\,C)^2}}$$

$$\Rightarrow \lambda_L \simeq 15\,nm$$

Esse valor tem somente uma concordância qualitativa com os resultados experimentais que fornecem $\lambda_L \sim 50\,nm$.

14.8 - Efeito Josephson e Teoria de Ginzburg-Landau.

O tunelamento de elétrons pode ser observado através de uma junção composta por dois condutores separados por uma fina camada de óxido isolante de poucos nanômetros de espessura. Quando os dois condutores são normais a corrente de tunelamento obedece a lei de Ohm para baixas tensões aplicadas. Por outro lado, quando supercondutores são utilizados, a corrente é nula para uma temperatura $T=0$ a não ser que a tensão aplicada seja maior que uma tensão crítica V_c. Ambos os casos são mostrados nos gráficos da Fig. 14.15.

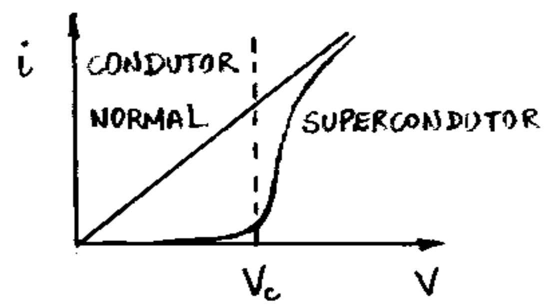

Fig.14.15- Correntes de tunelamento para os casos de condutores normais e supercondutores separados por uma fina camada de óxido isolante.

Para o caso de supercondutores, a corrente aumenta abruptamente quando $V=V_c$ porque essa tensão é suficiente para romper alguns pares de Cooper e criar elétrons desemparelhados. Para temperaturas $T>0$ uma corrente baixa pode ser observada mesmo para $V<V_c$ pois, nesse caso, a agitação térmica deve romper alguns pares de Cooper e criar elétrons desemparelhados.

Em 1962, Brian Josephson propôs que a corrente tunelada de um supercondutor para outro é uma supercorrente. Essa supercorrente se mantém mesmo na ausência de campos elétricos aplicados. Esse efeito é conhecido como <u>efeito Josephson</u> e a junção composta por dois supercondutores e um óxido isolante, como mostrado na Fig. 14.16, é conhecida como <u>junção Josephson</u>. As junções Josephson tem sido usadas em inúmeras aplicações tais como nos processos de detecção de tensões e campos magnéticos sensíveis.

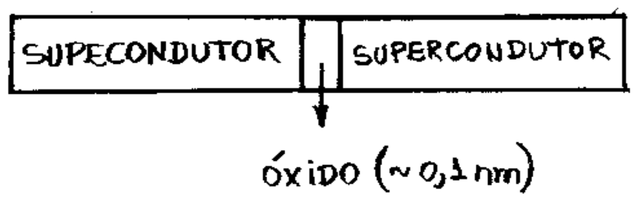

Fig. 14.16 - Junção Josephson composta por dois supercondutores e um óxido isolante.

Por causa da natureza organizacional dos pares de Cooper, em 1950 V. L. Ginzburg e L.D. Landau propuseram um modelo apropriado para representar a função de onda $\Psi(x,t)$ que descreve o comportamento quântico dessas partículas. De acordo com esse modelo, a função de onda define um <u>parâmetro de ordem</u> que se anula para $T > T_c$. Com essa interpretação, a densidade de probabilidade $|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$ deve fornecer a densidade ρ_s de pares de Cooper, isto é,

$$|\psi(x)|^2 = \rho_s \qquad (14.34)$$

Nesse caso, a autofunção $\psi(x)$ é dada por

$$\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\varphi_0} = \rho_s^{1/2} e^{i\varphi_0} \qquad (14.35)$$

onde φ_0 é a fase da parcela independente do tempo do parâmetro de ordem $\Psi(x,t)$. Incluindo a parcela temporal, obtém-se

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{i\omega t} = \rho_s^{1/2} e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = \rho_s^{1/2} e^{i\varphi t} \qquad (14.36)$$

onde

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \qquad (14.37)$$

é a fase dependente do tempo.

Sabe-se que, na ausência de campos externos, o fluxo de corrente de probabilidade é

$$j = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \vec{\nabla} \Psi^* \Psi) \quad . \qquad (14.38)$$

Como um par de Cooper é formado por dois elétrons, então no caso supercondutor deve-se trocar m por $2m$, isto é,

$$j_s = \frac{\hbar}{2i(2m)} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \vec{\nabla} \Psi^* \Psi) = \frac{1}{2} j \quad . \qquad (14.39)$$

Multiplicando j_s pela carga $(-2e)$ de um par de Cooper, obtém-se a densidade de supercorrente $\vec{J}_s$ no supercondutor, isto é,

$$\vec{J}_s = -2e\vec{j}_s = -e\vec{j} = -\frac{e\hbar}{2im} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \vec{\nabla} \Psi^* \Psi) \quad . \qquad (14.40)$$

Quando um campo magnético externo $\vec{B}$ está presente, pode-se mostrar que a eq. (14.40) pode ser generalizada para

$$\vec{J}_s = -\frac{e\hbar}{2im}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \vec{\nabla}\Psi^*\Psi\right) - \frac{2e^2|\Psi|^2}{m}\vec{A} \qquad (14.41)$$

onde $\vec{A}$ é o potencial vetor magnético dado, em termos do campo magnético $\vec{B}$, por

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad . \qquad (14.42)$$

Pode-se verificar que a eq. (14.41) está de fato correta, mostrando que ela resulta na equação de London dada na eq. (14.19). Isso é feito em detalhes no exemplo 14.2. Nesse exemplo mostra-se também que a eq. (14.41) pode ser simplificada para

$$\vec{J}_s = -\left(\frac{e\hbar}{m}\vec{\nabla}\varphi + \frac{2e^2}{m}\vec{A}\right)|\Psi|^2 \qquad (14.43)$$

onde φ é a fase de Ψ dada na eq. (14.37). Essa equação fornece uma descrição quântica dos pares de Cooper em um supercondutor na presença de um campo magnético externo $\vec{B}$.

<u>Exemplo 14.2</u> - FACULTATIVO

Uma característica comum da maioria dos supercondutores é que os pares de Cooper se comportam como partículas livres. Usar este fato para mostrar que a eq. (14.41) resulta na equação de London dada na eq. (14.19).

Se os pares de Cooper se comportam como partículas livres então $|\Psi(x)|^2 = \rho_s$ é independente da posição x. Nesse caso, tem-se

$$\vec{\nabla}\Psi = \vec{\nabla}(|\Psi|e^{i\varphi}) = i|\Psi|e^{i\varphi}\vec{\nabla}\varphi = i\Psi\vec{\nabla}\varphi$$

e

$$\vec{\nabla}\Psi^* = \vec{\nabla}(|\Psi|e^{-i\varphi}) = -i|\Psi|e^{-i\varphi}\vec{\nabla}\varphi = -i\Psi^*\vec{\nabla}\varphi$$

Substituindo essas equações na eq. (14.41), obtém-se

$$\vec{J}_s = -\frac{e\hbar}{2im}\left[\Psi^*(i\Psi\vec{\nabla}\varphi) - (i\Psi^*\vec{\nabla}\varphi)\Psi\right] - \frac{2e^2|\Psi|^2}{m}\vec{A}$$

Como $\Psi^*\Psi = |\Psi|^2$, essa equação resulta diretamente na eq. (14.43). Aplicando o rotacional a ambos os lados da eq. (14.43), obtém-se

$$\vec{\nabla}\times\vec{J}_s = -\left(\frac{e\hbar}{m}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi + \frac{2e^2}{m}\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)|\Psi|^2$$

ou, como $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$ e $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$,

$$\vec{\nabla}\times\vec{J}_s = -\frac{2|\Psi|^2e^2}{m}\vec{B} = -\frac{2\rho_s e^2}{m}\vec{B}$$

pois $|\Psi|^2 = \rho_s$. Como a densidade de pares de Cooper ρ_s é a metade da densidade ρ de elétrons, então

$$\vec{B} + \frac{m}{\rho e^2}\vec{\nabla}\times\vec{J}_s = 0$$

que é a equação de London dada na eq. (14.19).

Um caso particular de interesse ocorre quando, na ausência de campos magnéticos externos, se aplica, respectivamente, diferenças de potenciais $-V/2$ e $+V/2$ nos lados esquerdo e direito de uma junção Josephson como mostra a Fig. 14.17.

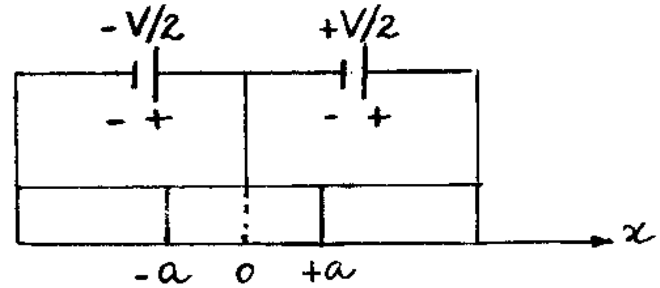

Fig. 14.17 - Aplicação de diferenças de potênciais a ambos os lados de uma junção Josephson.

Para o caso particular de campo magnético nulo ($\vec{B}=0$), a eq. (14.43) torna-se

$$\vec{J}_s = -\frac{e\hbar}{m}|\Psi|^2\vec{\nabla}\varphi \quad . \qquad (14.44)$$

O parâmetro de ordem no lado esquerdo da junção será

$$\Psi_1(x,t) = \rho_s^{1/2} e^{i\varphi_1} \qquad (14.45)$$

onde, nesse caso,

$$\varphi_1 = \varphi_0 + (\omega + E/\hbar)t = \varphi_0 + [\omega + (-2e)(-V/2\hbar)]t$$

ou

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \left(\omega - \frac{eV}{\hbar}\right)t \quad . \qquad (14.46)$$

Similarmente, no lado direito da junção, tem-se

$$\Psi_2(x,t) = \rho_s^{1/2} e^{i\varphi_2} \quad (14.47)$$

onde

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \left(\omega - \frac{eV}{\hbar}\right)t \quad (14.48)$$

Como φ_1 e φ_2 são dependentes do tempo, então a densidade de corrente $\vec{J}_s$ na eq.(14.37) é alternada (AC).

Para estabelecer um fluxo de corrente na junção da esquerda para a direita, deve-se admitir tunelamento quântico no interior da camada isolante. Assumindo uma queda exponencial na corrente de tunelamento, as eqs.(14.45) e (14.47) devem ser reescritas respectivamente como

$$\Psi_1(x,t) = \rho_s^{1/2} e^{i\varphi_1} e^{-\alpha(x+a)} \quad \text{para a direita}$$

e

$$\Psi_2(x,t) = \rho_s^{1/2} e^{i\varphi_2} e^{+\alpha(x+a)} \quad \text{para a esquerda}$$

onde α é uma constante de decaimento que depende da barreira de potencial. O comportamento dessas funções é mostrado na Fig. 14.18.

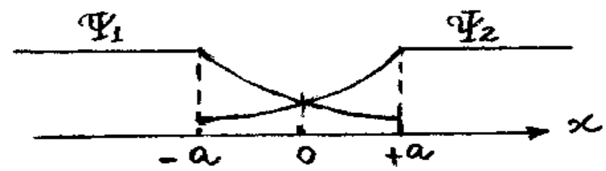

Fig. 14.18 - Decaimento exponencial de Ψ_1 e Ψ_2 na barreira de potencial de uma junção Josephson.

A solução geral apropriada do parâmetro de ordem na região $-a < x < +a$ é

$$\Psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 \pm \Psi_2)$$

ou

$$\Psi_{\pm} = \frac{\rho_s^{1/2}}{\sqrt{2}}\left[e^{i\varphi_1} e^{-\alpha(x+a)} \pm e^{i\varphi_2} e^{+\alpha(x-a)}\right] \quad . \qquad (14.49)$$

Qualquer uma das funções $\Psi_{\pm}$ deve gerar o mesmo resultado para a densidade de supercorrente. Por exemplo, a substituição de Ψ_+ na eq. (14.44) e após alguma manipulação algébrica, resulta em

$$J_s = J_{so} \operatorname{sen} \delta \qquad (14.50)$$

onde

$$\delta = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2eV}{\hbar} t = \omega_J t \qquad (14.51)$$

e

$$J_{so} = -\frac{\alpha \rho_s e \hbar}{m} e^{-2\alpha a} \quad . \qquad (14.52)$$

Da eq. (14.51), a frequência ν_J da densidade de supercorrente AC é

$$\nu_J = \frac{\omega_J}{2\pi} = \frac{2eV}{2\pi\hbar} = \frac{2eV}{h} \quad . \qquad (14.53)$$

Para $V = 1\,\mu V$, obtém-se $\nu_J = 484\ Hz$, que está na região das microondas. Radiações dessa natureza, originárias das oscilações de supercorrentes, tem sido detectadas experimentalmente. Esse fenômeno é conhecido como efeito Josephson AC.
A junção Josephson constitui-se como um dos métodos mais precisos para a determinação da razão e/h.

14.9 - Quantização do Fluxo Magnético.

Na teoria de Ginzburg-Landau, a função de onda de um par de Cooper num supercondutor, é dada por um parâmetro de ordem $\Psi(\vec{r},t)$. Como $\Psi(\vec{r},t)$ não faz referência às posições dos dois elétrons do par em relação ao centro de massa deles, o uso dessa interpretação restringe-se a fenômenos que não alteram significativamente as distâncias entre os elétrons e o centro de massa.

Nessa seção propõe-se analizar as consequências sobre o parâmetro de ordem $\Psi(\vec{r},t)$ dos pares de Cooper de uma amostra supercondutora, na presença de um campo magnético externo $\vec{B}$.

A presença de um campo magnético externo $\vec{B}$, dá origem a um dos efeitos quânticos mais importantes observados em amostras supercondutoras, que é a quantização do fluxo magnético Φ.

Para se compreender este importante aspecto da supercondutividade, considere-se um anel supercondutor, a uma temperatura $T<T_c$, na presença de um campo magnético externo $\vec{B}$, como mostra a Fig. 14.19.

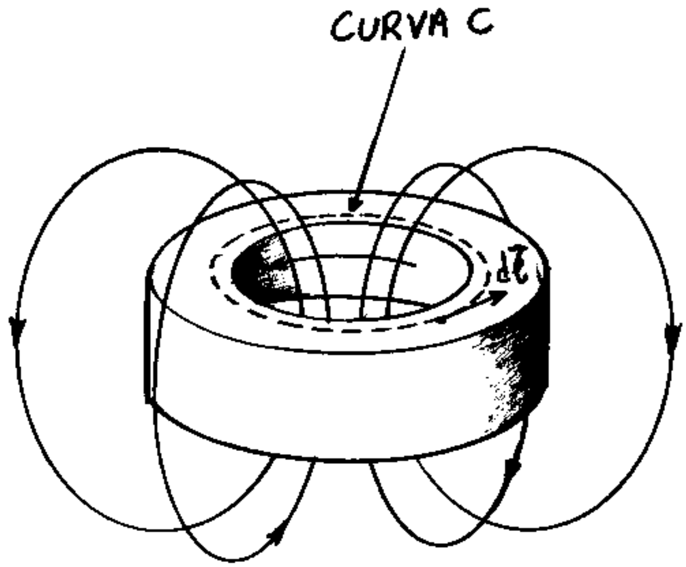

Fig. 14.19 - Anel de material supercondutor resfriado abaixo da temperatura crítica ($T<T_c$) que foi submetido a um campo magnético uniforme $\vec{B}$.

Quando o campo magnético externo $\vec{B}$ é desligado, a corrente superficial externa desaparece mas a corrente superficial interna permanece. Assim, o campo magnético original fica confinado na abertura do anel, como mostrado na Fig. 14.19.

Essa afirmativa pode ser verificada, lembrando-se que é nulo o campo elétrico $\vec{E}$ no interior de um material supercondutor. Assim, tomando-se uma curva C fechada no interior do supercondutor, como mostrado na Fig. 14.19, de uma das equações de Maxwell, conclue-se que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \qquad (14.54)$$

isto é, o fluxo magnético Φ é mantido constante ao longo do tempo no interior do anel supercondutor.

A integral de linha da densidade de supercorrente $\vec{J}_s = -(e\hbar/m\, \vec{\nabla}\varphi + 2e^2/m\, \vec{A})|\Psi|^2$, dada na eq.(14.43), em torno da curva C, é

$$\oint_C \vec{J}_s\cdot d\vec{\ell} = -\frac{e\hbar}{m}|\Psi|^2\oint_C \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell} - \frac{2e^2}{m}|\Psi|^2\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

Como $\vec{J}_s = 0$ sobre essa linha, então

$$-\frac{e\hbar}{m}\oint_C \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell} - \frac{2e^2}{m}\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

ou

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\hbar}{2e}\oint_C \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell} \qquad (14.55)$$

Na integral do segundo termo dessa equação, não se deve aplicar o teorema de Stokes $\oint_C \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi\cdot\hat{n}da = 0$, uma vez que $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi \equiv 0$, pois, por ser uma fase, φ não se repete após um ciclo completo de $\vec{J}$, mas sim assume valores inteiros de 2π. Utilizando-se, entretanto, a relação vetorial: $d\varphi = \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{\ell}$ e a definição de fluxo magnético $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}da \equiv \Phi$, obtém-se

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e}\oint_C d\varphi = -\frac{\hbar}{2e}\Delta\varphi \qquad (14.56)$$

Para que o parâmetro de ordem $\Psi(\vec{r},t)$ seja unívoco, é necessário que, para uma volta completa em torno da curva C, a fase φ seja um múltipo inteiro de 2π, isto é,

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e} 2n\pi = -n\Phi_0 \qquad (14.57)$$

onde

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e} = \frac{h}{2e} = 2{,}07 \times 10^{-15}\,\mathrm{Wb} \qquad (14.58)$$

é denominado de quantum de fluxo magnético, ou fluxóide.

Assim, a descrição de um supercondutor por meio de um parâmetro de ordem $\Psi(\vec{r},t)$ quântico, resulta na quantização do fluxo magnético em unidades do fluxóide Φ_0.

A quantização do fluxo magnético é de fato observada, e isso reforça a teoria de Ginzburg-Landau. Além disso, nos vórtices magnéticos dos supercondutores do tipo II, essa teoria prevê que cada vórtice contém exatamente um fluxóide, o que é comprovado experimentalmente.

Um dispositivo formado por um anel supercondutor e uma junção Josephson, como mostrado na Fig. 14.20, produz efeitos de interferência quântica, que faz com que a supercorrente dependa da intensidade do campo magnético uniforme $\vec{B}$ aplicado.

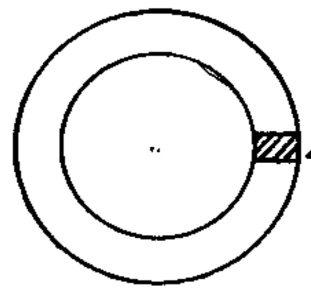

Fig. 14.20 - Dispositivo supercondutor de interferência quântica (SQUID), formado por um anel supercondutor interrompido por uma Junção de Josephson.

De acordo com a eq. (14.50), o módulo da densidade de supercorrente, é $J_s = J_{s0} \operatorname{sen}\theta$. Quando o fluxo magnético é Φ_0, correspondente a uma volta completa, a fase θ_0 correspondente vale 2π. Para um fluxo magnético Φ qualquer, a fase θ correspondente, será

$$\theta = 2\pi\left(\Phi/\Phi_0\right) \qquad (14.59)$$

Tais dispositivos, conhecidos como SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), ou dispositivo supercondutor de interferência quântica, permite medir campos magnéticos extremamente fracos, da ordem de $10^{-14}T$. O SQUID já foi usado, por exemplo, para medir os campos magnéticos produzidos pelo coração e pelo cérebro humano.

Lista de Exercícios

1- Pode-se identificar que um material está no estado de superfluidez por meio de três efeitos característicos: efeito do filme migrante, efeito termomecânico e efeito fonte. Em poucas palavras, explique cada um desses efeitos.

2- O que é a condensação de Bose-Einstein? Por que átomos de ^{3}He podem formar condensados de Bose-Einstein, apesar de terem spins semi – inteiros?

3- Calcule a fração de átomos que se condensam no estado fundamental superfluido $N_0/N = 1-\left(T/T_c\right)^{3/2}$ para, (a) $T = 3T_c/4$, (b) $T = T_c/2$, (c) $T = T_c/4$, e (d) $T = T_c/8$

4- Em que temperatura as quantidades de hélio superfluido e hélio normal são iguais? Justifique.
Resp.: $1{,}37K$

5- O hidrogênio spin polarizado tem sido condensado a uma densidade de $\rho = 5\times10^{24}\, atomos\,/\,m^3$. Calcule a temperatura crítica T_c para essa densidade assumindo-se que esse sistema comporta-se como um gás ideal.
Resp.: $47mK$

6- Pode-se identificar que um material está no estado supercondutor por meio de dois efeitos característicos: efeito Meissner e efeito isótopo. Em poucas palavras, explique cada um desses efeitos.

7- Sabendo-se que a temperatura crítica do mercúrio é $T_c = 4{,}2K$ calcule, (a) a energia de "*gap*" ε_g a $T=0$, (b) o comprimento de onda λ do fóton cuja energia é apenas suficiente para desfazer pares de Cooper no mercúrio à $T=0$. Em que região do espectro eletromagnético se encontra tais fótons? (c) O metal se comporta como um supercondutor quando exposto a uma radiação eletromagnética de comprimento de onda menor do que o determinado no item (b)? Justifique.

8- A função de onda de um par de Cooper é a soma de ondas que descrevem os dois elétrons que compõem o par, em que os números de onda $\vec{k}$ de cada elétron, diferem de um valor $\Delta\vec{k}$, centrado em $\vec{k}_F$, correspondente a um intervalo de energia $\Delta\varepsilon \sim \varepsilon_g$, centrado em ε_F. Para um dos elétrons, de massa efetiva m^*, $\varepsilon = \dfrac{p^2}{2m^*} = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m^*}$ e, $\Delta\varepsilon = \dfrac{\hbar^2 2k\Delta k}{2m^*}$, ou $\dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{\hbar^2 k\Delta k 2m^*}{m^*\hbar^2k^2} = \dfrac{2\Delta k}{k} \sim \dfrac{\Delta k}{k}$, ou ainda, para $\varepsilon = \varepsilon_F$, $k = k_F$ e $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F$, , $\dfrac{\Delta k}{k_F} \sim \dfrac{\varepsilon_g}{\varepsilon_F}$. Tipicamente, $\varepsilon_g/\varepsilon_F \sim 10^{-4}$ e portanto, $\Delta k \sim 10^{-4}k_F$. No topo da banda de energia, na primeira zona de Brillouin, $k = \pi/a$, isto é, nas regiões intermediárias $k \sim 1/a$, onde a é a separação interatômica cujo valor é da ordem de $a \sim 1A^o$. (a) Sabendo-se que, do princípio da incerteza, $\Delta x\Delta k \sim 1$, faça uma estimativa do tamanho de um par de Cooper de energia de ligação ε_g. (b) Sabendo-se que a densidade de elétrons livres num metal é $\rho \sim 10^{22}\,/\,cm^3$, e que a fração desses elétrons, que formará pares de Cooper num estado supercondutor, é da ordem de $\Delta k/k_F$, determine a densidade ρ_s de pares de Cooper num supercondutor. (c) Calcule o volume de um par de Cooper e mostre que, nesse volume, deve conter uma quantidade da ordem de $\sim 10^6$ pares de Cooper que superpõem.

9- Para o estado supercondutor do tungstênio a temperatura crítica é $T_c = 12mK$ e o campo magnético crítico é $B_c = 10^{-4}T$. Para o tungstênio a densidade de massa é $19,3g/cm^3$ e a temperatura de Debye é $\Theta_D = 310K$.

(a) Calcule a energia do "*gap*" $\varepsilon_g = 2\Delta$. (b) Calcule a densidade numérica de partículas $\rho = \frac{N}{V}$ e a densidade de partículas por unidade de energia $R_0 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_F}$. (c) Calcule a densidade de energia do estado supercondutor usando a equação $W_0 = -\frac{B_c^2}{2\mu_0}$. (d) Calcule a densidade de energia do estado supercondutor usando a equação $W_0 = -\frac{R_0\Delta^2}{2}$ e compare o resultado com o obtido no item (c). (e) Calcule a profundidade de penetração λ do campo magnético no tungstênio.

10- Para o alumínio a temperatura de transição supercondutora é $T_c = 1,2K$, a temperatura de Debye é $\Theta_D = 420K$, a densidade numérica de átomos é $\rho = 6\times10^{28} atomos/m^3$ e $\frac{\varepsilon_F}{k_B} = 1,4\times10^5 K$. (a) Calcule a constante de interação adimensional $R_0 F$ de um par de Cooper nesse material. (b) Calcule a razão $\frac{\varepsilon_g}{k_B} = \frac{2\Delta}{k_B}$ para o alumínio. (c) Das relações da densidade de energia do estado supercondutor $W_0 = -\frac{B_c^2}{2\mu_0} = -\frac{R_0\Delta^2}{2}$, e da densidade de partículas por unidade de energia $R_0 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_F}$, encontra-se o seguinte valor teórico para o campo magnético crítico $B_c = \Delta\sqrt{\frac{3\mu_0\rho}{2\varepsilon_F}}$. Usando essa equação, calcule o campo magnético crítico no alumínio. Sabendo-se que o valor experimental é $B_c = 10\times10^{-3}T$, o que se pode dizer sobre o modelo teórico. (d) Calcule a profundidade de penetração λ do campo magnético no alumínio.
Resp.: (a) $0,17$, (b) $4,2K$, (c) $7\times10^{-3}T$ (d) $11nm$

11- O que é uma junção Josephson? Explique como essas junções podem ser utilizadas para construir um ***Dispositivo Supercondutor de Interferência Quântica*** **(SQUID)**. Para que servem esses dispositivos? Cite um exemplo de sua utilidade.

12- O fluxo magnético através de um anel supercondutor é quantizado de valores $\Phi_0 = \frac{\pi\hbar}{e}$. A que valor de campo magnético médio $\bar{B}$ esse fluxo magnético corresponde, se o anel tem um diâmetro de $2mm$?
Resp.: $6,6\times10^{-10}T$