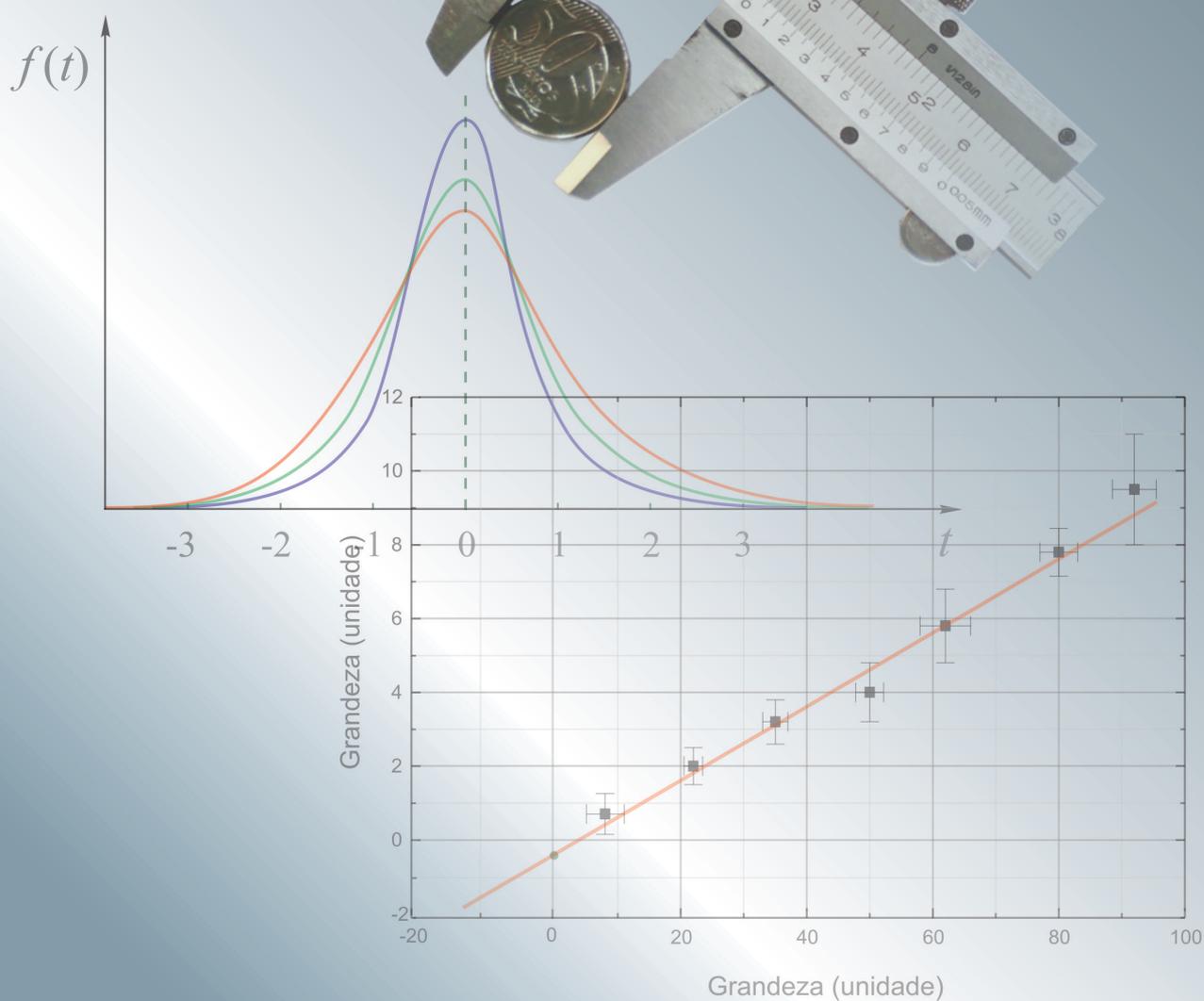
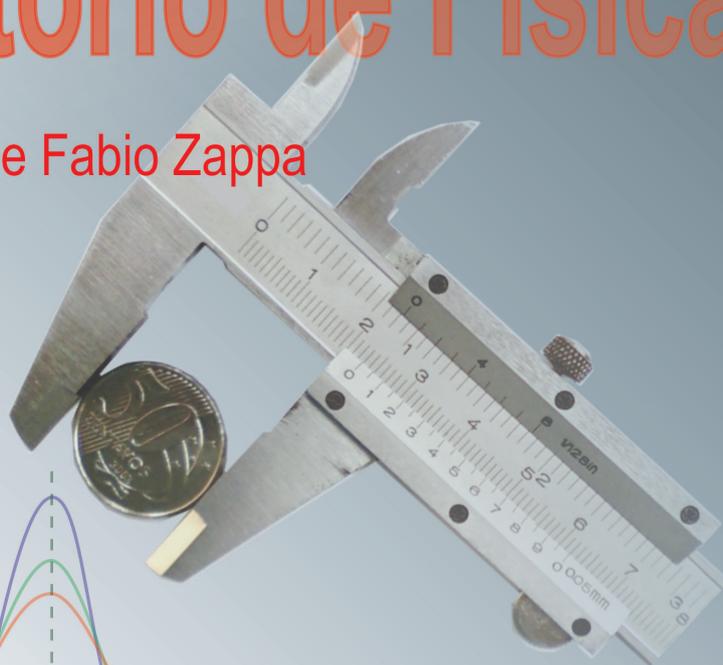


Análise de dados para Laboratório de Física

Carlos R. A. Lima e Fabio Zappa



Análise de dados para Laboratório de Física

Carlos R A Lima e Fábio Zappa

25 de Março de 2014

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Medidas físicas e apresentação de dados | 7 |
| 1.1 | Introdução | 7 |
| 1.2 | Grandezas físicas e padrões de medida | 7 |
| 1.3 | Medidas das grandezas físicas | 8 |
| 1.4 | Algarismos significativos | 9 |
| 1.5 | Regras de arredondamento | 10 |
| 1.6 | Operações com algarismos significativos | 10 |
| 1.6.1 | Soma e subtração | 10 |
| 1.6.2 | Multiplicação e divisão | 11 |
| 1.6.3 | Logaritmos | 11 |
| | Exercícios | 11 |
| 2 | Estimativas e erros | 13 |
| 2.1 | Erros | 13 |
| 2.2 | Incerteza | 14 |
| 2.3 | Precisão e exatidão | 14 |
| 2.4 | Amostra, população e distribuição estatística | 15 |
| 2.5 | Valor médio e desvio médio | 17 |
| 2.6 | Variância | 17 |
| 2.7 | Desvio padrão | 17 |
| 2.8 | Desvio padrão da média | 18 |
| 2.9 | Incerteza combinada - A propagação da incerteza | 20 |
| 2.10 | Influência dos aparelhos de medida na incerteza combinada | 23 |
| 2.11 | Incerteza expandida | 23 |
| | Exercícios | 24 |
| 3 | Distribuições estatísticas | 27 |
| 3.1 | Distribuição de Gauss | 27 |
| 3.2 | Distribuição t de Student | 28 |
| 3.3 | Distribuição triangular e retangular | 31 |
| | Exercícios | 33 |
| 4 | Gráficos de funções lineares | 35 |
| 4.1 | Introdução | 35 |
| 4.2 | Construção de gráficos | 35 |
| 4.3 | Relações lineares | 36 |
| 4.4 | Métodos de determinação dos coeficientes a e b | 37 |
| 4.4.1 | Método gráfico | 37 |
| 4.4.2 | Método dos mínimos quadrados | 38 |
| | Exercícios | 42 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Gráficos de funções não lineares | 45 |
| 5.1 | Funções polinomiais | 45 |
| 5.2 | Escala logarítmica | 47 |
| 5.3 | Papel loglog | 48 |
| 5.4 | Uso de papéis loglog na linearização de funções polinomiais | 49 |
| 5.5 | Funções exponenciais | 50 |
| 5.6 | O papel monolog e o seu uso na linearização de funções exponenciais | 51 |
| | Exercícios | 53 |

Apresentação

Este texto constitui uma introdução geral ao tratamento de dados científicos, baseado em métodos estatísticos, redigido com a intenção de ser usado por estudantes do ciclo básico e profissional em atividades de laboratório de Física e Engenharia. O objetivo é proporcionar aos estudantes a organização e descrição de conjunto genérico de dados, a habilidade de fazer estimativas de incertezas e erros nas medidas físicas diretas e indiretas, e a capacidade na determinação de parâmetros físicos a partir de ajustes lineares de gráficos elaborados. Em outras palavras, a pretensão do texto é tornar o estudante capaz de realizar, de modo elementar, a síntese e análise exploratória dos dados coletados nos laboratórios.

Sem a abordagem dos detalhes que o tema exige, a organização geral desse trabalho procura harmonizar os conhecimentos elementares de análise de dados a alguns conhecimentos mais avançados da teoria estatística. Espera-se com isso que o estudante, que decida usar esse trabalho no início do ciclo básico, possa modelar a sua formação numa base mais sólida que lhe possa garantir uma boa atuação no ciclo profissional do seu curso de graduação.

No Cap.1, os conceitos de medidas físicas e apresentação de dados serão abordados para que o estudante possa se familiarizar com os conceitos fundamentais de medidas físicas, grandezas físicas, padrões de medida, Algarismos significativos e regras de arredondamento. No Cap.2, o objetivo é fazer uma breve análise sobre os métodos estatísticos e não estatísticos usados para a apresentação das estimativas e erros inerentes ao processo de medida. As diferenças entre precisão e exatidão e erros e incertezas são particularmente discutidas. As definições dos diferentes tipos de incerteza de Tipo A e de Tipo B, assim como os conceitos de incerteza combinada e incerteza expandida, também são abordadas neste capítulo. No Cap. 3, é feito uma breve revisão sobre as distribuições estatísticas teóricas frequentemente utilizadas em análise de dados para laboratório de física e engenharia. Finalmente, os Caps.4 e 5, tratam da metodologia usada na elaboração de gráficos lineares e não lineares, assim como a utilização dos mesmos para a determinação de parâmetros físicos de interesse.

Capítulo 1

Medidas físicas e apresentação de dados

1.1 Introdução

A Física é uma ciência cujo objeto de estudo é a Natureza. Assim, ocupa-se das ações fundamentais entre os constituintes elementares da matéria, ou seja, entre os átomos e seus componentes. Particularmente na Mecânica, estuda-se o movimento e suas possíveis causas e origens. Ao estudar um dado fenômeno físico procura-se entender como certas propriedades ou grandezas associadas aos corpos participam desse fenômeno. O procedimento adotado nesse estudo é chamado de *método científico*, e é basicamente composto de 3 etapas: observação, raciocínio (abstração) e experimentação. A primeira etapa é a observação do fenômeno a ser compreendido. Realizam-se experiências para poder repetir a observação e isolar, se necessário, o fenômeno de interesse. Na etapa de abstração, propõe-se um modelo, ou hipótese, com o propósito de explicar e descrever o fenômeno. Finalmente, esta hipótese sugere novas experiências cujos resultados irão, ou não, confirmar a hipótese feita. Se ela se mostra adequada para explicar um grande número de fatos, constitui-se no que se chama de uma *lei física*. Estas leis são quantitativas, ou seja, devem ser expressas por funções matemáticas. Assim, para se estabelecer uma lei física está implícito que se deve avaliar quantitativamente uma ou mais grandezas físicas, e portanto realizar medidas. É importante observar que praticamente todas as teorias físicas conhecidas representam aproximações aplicáveis num certo domínio da experiência. Assim, em particular, as leis da mecânica clássica são aplicáveis aos movimentos usuais de objetos macroscópicos, mas deixam de valer em determinadas situações. Por exemplo, quando as velocidades são comparáveis com a da luz, deve-se levar em conta efeitos relativísticos. Já para objetos em escala atômica, é necessário empregar a mecânica quântica. Entretanto, o surgimento de uma nova teoria não inutiliza as teorias precedentes. Desde que se esteja em seu domínio de validade, pode-se continuar utilizando a mecânica newtoniana.

1.2 Grandezas físicas e padrões de medida

Todas as grandezas físicas podem ser expressas em termos de algumas unidades fundamentais. Fazer uma medida significa comparar uma quantidade de uma dada grandeza, com outra quantidade da mesma grandeza, definida como unidade ou padrão da mesma. Para facilitar o comércio internacional, diversos países criaram padrões comuns para medir grandezas físicas através de um acordo internacional. A 14^a Conferência Geral sobre Pesos e Medidas, ocorrida em 1971, elegeu as sete grandezas físicas fundamentais, mostradas na Tab.1.1, que constituem a base do Sistema Internacional de Unidades (SI). Particularmente, no estudo da mecânica trata-se somente com as três primeiras grandezas físicas fundamentais: comprimento, massa e tempo. Esse sistema também é denominado de sistema MKS (**m** de metro, **k** de quilograma e **s** de segundo).

Quando se diz, por exemplo, que um dado comprimento vale 10 *m*, isso quer dizer que o comprimento em questão corresponde a dez vezes o comprimento da unidade padrão, o metro. As unidades de outras grandezas, como velocidade, energia, força, torque, são derivadas destas três unidades. Na Tab.1.2 estão

| Grandeza | unidade | Definição da unidade |
|-----------------------|--------------------|--|
| comprimento | metro (m) | É o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299.792.458$ de segundo. |
| tempo | segundo (s) | É a duração de $9.192.631.770$ períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de cézio-133. |
| massa | kilograma (kg) | É a massa do protótipo internacional do quilograma existente no Instituto Internacional de Pesos e Medidas em Sévres, na França. |
| corrente elétrica | ampère (A) | É a intensidade de uma corrente elétrica constante que, mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível e situados à distância de um metro entre si, no vácuo, produz entre esses dois condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento. |
| quantidade de matéria | mol (mol) | É a quantidade de matéria de um sistema que contém tantos elementos quânticos átomos existentes em $0,012$ quilogramas de carbono-12. |
| temperatura | kelvin (K) | É a fração $1/273,16$ da temperatura termodinâmica do ponto tríplice da água. |
| intensidade luminosa | candela (cd) | É a intensidade luminosa, numa dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência 540×10^{12} hertz ($1 \text{ hertz} = 1 / \text{segundo}$) e cuja intensidade energética nessa direção é de $1/683$ watts ($1 \text{ Watt} = 1 \text{ Joule} / \text{segundo}$) por esferoradiano. |

Tab. 1.1: Padrões do sistema internacional de medidas (SI).

| grandeza | dimensão | unidade |
|------------|--------------------|---|
| Força | $M \times L/T^2$ | $1 \text{ kg} \times \text{m}/\text{s}^2 = \text{Newton} (N)$ |
| Trabalho | $M \times L^2/T^2$ | $1 \text{ N} \times \text{m} = \text{Joule} (J)$ |
| Potência | $M \times L^2/T^3$ | $1 \text{ J}/\text{s} = \text{watt} (W)$ |
| Velocidade | L/T | m/s |
| Aceleração | L/T^2 | m/s^2 |
| densidade | M/L^3 | kg/m^3 |

Tab. 1.2: Dimensões e unidades de algumas grandezas físicas

listadas algumas destas grandezas.

Na Tab.1.3 estão listados os prefixos dos múltiplos e submúltiplos mais comuns das grandezas fundamentais, todos na base de potências de 10. Os prefixos podem ser aplicados a qualquer unidade. Assim, 10^{-3} s é 1 milissegundo , ou 1 ms ; 10^6 W é 1 megawatt ou 1 MW .

1.3 Medidas das grandezas físicas

A medida de uma grandeza física, ou *mensurando*, pode ser classificada em duas categorias: *medida física direta e medida física indireta*. A medida direta x de uma grandeza física X é o resultado da leitura da sua magnitude mediante o uso de um aparelho de medida. Como exemplos pode-se citar: a medida de comprimento com uma régua graduada, a medida de corrente elétrica com um amperímetro, a medida de massa com uma balança e a medida de intervalo de tempo com um cronômetro. Uma medida indireta é a que resulta da aplicação de uma relação matemática que vincula a grandeza a ser medida com outras diretamente mensuráveis. Como exemplo pode-se citar a medida da velocidade média $\langle v \rangle$ de um carro pode ser obtida através da medida da distância percorrida Δx e o intervalo de tempo Δt , sendo $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t$.

| Múltiplo | prefixo | Símbolo |
|------------|---------|---------|
| 10^{-18} | ato | a |
| 10^{-15} | fento | f |
| 10^{-12} | pico | p |
| 10^{-9} | nano | n |
| 10^{-6} | micro | μ |
| 10^{-3} | mili | m |
| 10^{-2} | centi | c |
| 10^{-1} | deci | d |
| 10^1 | deca | da |
| 10^2 | hecto | h |
| 10^3 | kilo | k |
| 10^6 | mega | M |
| 10^9 | giga | G |
| 10^{12} | tera | T |
| 10^{15} | peta | P |
| 10^{18} | exa | E |

Tab. 1.3: Prefixos múltiplos e submúltiplos da potência de 10

Um dos princípios fundamentais da Física afirma que: "***Não se pode medir uma grandeza física com precisão absoluta***", isto é, "qualquer medição, por mais bem feita que seja e por mais preciso que seja o aparelho, é sempre aproximada". Na linguagem estatística, o valor medido nunca representa o ***valor verdadeiro*** da grandeza física, pois existe sempre uma incerteza ao se comparar uma quantidade de uma dada grandeza física com a de sua unidade. O ***valor verdadeiro*** é o valor que seria obtido por uma medição perfeita com um aparelho perfeito, ou seja, é, por natureza, indeterminado. Na prática se usa o valor corrigido no lugar do valor verdadeiro. O valor corrigido de uma grandeza física é a melhor estimativa do valor verdadeiro. "Verdadeiro" no sentido de que ele é o valor que se acredita que satisfaça completamente a definição da grandeza. Quando o resultado da medida (valor e unidade) for registrado é necessário informar com que ***nível de confiança*** se pode dizer que ele representa a grandeza física. Por causa disso, é necessário associar um ***erro*** ou ***desvio*** ao valor de qualquer medida.

1.4 Algarismos significativos

Como já mencionado, a medida de uma grandeza física é sempre aproximada, por mais capaz que seja o operador e por mais preciso que seja o aparelho utilizado. Esta limitação reflete no número de algarismos que se usa para representar as medidas. Na maioria dos casos, deve-se admitir somente os algarismos que se tem certeza de estarem corretos mais um algarismo duvidoso. Esses algarismos são denominados de ***algarismos significativos*** e sua quantidade depende do processo de medição e do aparelho usado na medida. Claramente o número de algarismos significativos está diretamente ligado à precisão da medida, de forma que quanto mais precisa a medida, maior o número de algarismos significativos. Por exemplo, é possível que se diga que o comprimento do lápis na Fig.1.1 é $64,5 \text{ mm}$, sendo que os algarismos 6 e 4 são exatos e o 5 é o algarismo duvidoso ou estimado. A incerteza estimada de uma medida deve conter somente o seu algarismo mais significativo. Os algarismos menos significativos devem ser simplesmente desprezados ou no máximo utilizados para efetuar arredondamentos.

Os algarismos significativos de uma medida devem ser determinados de acordo com as seguintes regras gerais:

1. Não é algarismo significativo os zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero, assim como também não é qualquer potência de dez. Alguns exemplos são: $l = 32,5 \text{ cm}$ e $l = 0,325 \text{ m}$ representam a mesma medida e tem 3 algarismos significativos, $5 = 0,5 \times 10 = 0,05 \times 10^2 =$

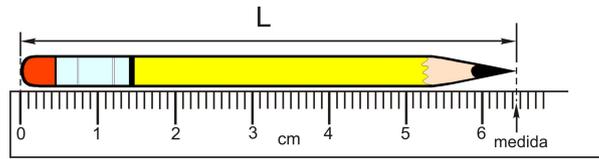


Fig. 1.1: Exemplo de medida usando uma régua milimetrada.

$0,005 \times 10^3$ possuem 1 algarismo significativo, $26 = 2,6 \times 10 = 0,26 \times 10^2 = 0,026 \times 10^3$ possuem 2 algarismos significativos e $0,00034606 = 0,34606 \times 10^{-3} = 3,4606 \times 10^{-4}$ possuem 5 algarismos significativos.

2. Zero à direita de algarismo significativo também é algarismo significativo. Portanto, $l = 32,5 \text{ cm}$ e $l = 32,50 \text{ cm}$ são diferentes, ou seja, a primeira medida tem 3 algarismos significativos, enquanto que a segunda é mais precisa e tem 4 algarismos significativos.
3. É significativo o zero situado entre algarismos significativos. Por exemplo, $l = 3,25 \text{ m}$ tem 3 algarismos significativos, enquanto que $l = 3,025 \text{ m}$ tem 4 algarismos significativos.
4. Quando se trata apenas com matemática, pode-se dizer por exemplo, que $5 = 5,0 = 5,00 = 5,000$. Entretanto, quando se lida com resultados de medidas deve-se sempre lembrar que $5 \text{ cm} \neq 5,0 \text{ cm} \neq 5,00 \text{ cm} \neq 5,000 \text{ cm}$, já que estas medidas tem 1, 2, 3 e 4 algarismos significativos, respectivamente. Em outras palavras, a precisão de cada uma delas é diferente.

1.5 Regras de arredondamento

O arredondamento pode ser feito de diversas formas, porém há uma norma nacional (*ABNT NBR 5891:1977*) [1] e uma internacional (*ISO 31-0:1992, Anexo B*) [2] que normalmente devem ser seguidas. De acordo com essas normas, as regras de arredondamento são:

- ◇ O último algarismo de um número deve sempre **ser mantido** caso o algarismo a ser descartado seja **inferior a cinco** (Exemplo: $423,0012 = 423,001$).
- ◇ O último algarismo de um número deve sempre **ser acrescido de uma unidade** caso o algarismo a ser descartado seja **superior a cinco** (Exemplo: $245,6 = 246$).
- ◇ No caso do algarismo descartado **ser igual a cinco**, se após o cinco descartado existirem quaisquer **outros algarismos diferentes de zero**, o último algarismo mantido **será acrescido de uma unidade** (Exemplo: $2,0502 = 2,1$).
- ◇ No caso do algarismo descartado **ser igual a cinco**, se após o cinco descartado **só existirem zeros ou não existir outro algarismo**, o último algarismo mantido **será acrescido de uma unidade somente se for ímpar** (Exemplos: $4,3500 = 4,4$; $1,25 = 1,2$).

O arredondamento deve ser feito somente uma vez, isto é, não se deve fazer o arredondamento do arredondamento. Evite olhar o último algarismo para arredondar o penúltimo, em seguida o antepenúltimo e assim por diante até chegar onde se quer. Faça o arredondamento numa única observação de um algarismo.

1.6 Operações com algarismos significativos

1.6.1 Soma e subtração

Quando se somam ou subtraem dois números, levando em consideração os algarismos significativos, **o resultado deve manter a precisão do operando de menor precisão**. Por exemplo, na seguinte operação de soma:

$$12,56 + 0,1234 = 12,6834 = 12,68$$

O número 12,56 tem quatro algarismos significativos e o último algarismo significativo é o 6 que ocupa a casa dos *centésimos*. O número 0,1234 apresenta também quatro algarismos significativos mas o último algarismo significativo, o 4, ocupa a casa dos *décimos de milésimos*. O último algarismo significativo do resultado deve estar na mesma casa decimal do operando de menor precisão, nesse exemplo é o 12,56. Portanto o último algarismo significativo do resultado deve estar na casa dos *centésimos*.

1.6.2 Multiplicação e divisão

Em uma multiplicação, levando em consideração os algarismos significativos, o resultado deve ter o *mesmo número de algarismos significativos do operando com a menor quantidade de algarismos significativos*. Por exemplo, na seguinte operação de multiplicação:

$$3,1415 \times 180 = 5,65 \times 10^2$$

O número 180 apresenta três algarismos significativos. Mas o número 3,1415 apresenta cinco algarismos significativos. O resultado deve ter apenas três algarismos significativos.

1.6.3 Logaritmos

O número de casas decimais do resultado de um logaritmo é igual ao número de algarismos significativos do seu argumento. Por exemplo, na operação $\ln(5,0 \times 10^3) = 8,52$, existem 2 algarismos significativos no argumento e portanto 2 casas decimais no logaritmo. Do mesmo modo, na operação $\ln(45,0) = 3,807$, existem 3 algarismos significativos no argumento e portanto 3 casas decimais no logaritmo.

Para todos os casos, é importante que as operações sejam feitas usando todos os algarismos significativos e que o arredondamento seja feito somente ao final do resultado.

Exercícios

- Quantos algarismos significativos existem em cada um dos valores abaixo enumerados?
 - 12,5 cm
 - 0,00020 kg
 - 3×10^8 m/s
 - $6,02 \times 10^{23}$
 - $1,03 \times 10^{-6}$ s
 - 30008,00 cm/s
- Faça o arredondamento de cada um dos valores abaixo para dois algarismos significativos.
 - 25,38 cm
 - 2,361 m/s
 - $9,563 \times 10^3$ s
 - 3,45 g
 - $7,96 \times 10^{-6}$ m
 - 0,0335 J
 - 3857 N
- Faça as operações matemáticas abaixo levando em consideração os algarismos significativos.

(a) $235\text{ m} + 32,2\text{ m} - 2,052\text{ m}$

(b) $\frac{2,02 \times 10^5\text{ g}}{2,1\text{ cm}^3}$

(c) $\ln(351,0)$

Capítulo 2

Estimativas e erros

2.1 Erros

Em geral, uma medição tem imperfeições que dão origem a um erro ϵ no resultado da medição. Na prática, o erro ϵ é o **resultado da medição** menos o **valor verdadeiro** da grandeza física, ou mensurando. Uma vez que o valor verdadeiro não pode ser determinado, na prática utiliza-se um valor convencional ou valor corrigido do valor verdadeiro. O erro ϵ pode ser **absoluto** ou **relativo**. O erro absoluto ϵ_{abs} é obtido da diferença algébrica entre o valor medido x_{med} e o valor verdadeiro x_{verd} , isto é,

$$\epsilon_{abs} = x_{med} - x_{verd} \quad (2.1)$$

Por outro lado, o erro relativo ϵ_{rel} é obtido da razão entre o erro absoluto ϵ_{abs} e o valor verdadeiro x_{verd} , isto é,

$$\epsilon_{rel} = \frac{\epsilon_{abs}}{x_{verd}} \quad (2.2)$$

O erro relativo também pode ser apresentado em termos percentuais multiplicando a Eq.2.2 por 100%. O simétrico algébrico do erro (-erro), relativo ou absoluto, é denominado de **correção**.

Segundo a sua natureza, as fontes de erros podem ser classificadas em três seguintes categorias:

1. **Erros Grosseiros**: Ocorrem devido à falta de prática (imperícia) ou distração do operador. Como exemplos pode-se citar a escolha errada de escalas, erros de cálculo, etc.. Devem ser evitados pela repetição cuidadosa das medições.
2. **Erros Sistemáticos**: Os erros sistemáticos são causados por fontes identificáveis e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Estes fazem com que as medidas feitas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real, prejudicando a exatidão da medida. As fontes de erros sistemáticos são:
 - Aparelho utilizado. Ex: intervalos de tempo medidos com um relógio que atrasa.
 - Método de observação utilizado. Ex: medir o instante de tempo da ocorrência de um relâmpago pelo ruído do trovão associado.
 - Efeitos ambientais. Ex: a medida do comprimento de uma barra de metal, que pode depender da temperatura ambiente.
 - Simplificações do modelo teórico utilizado. Ex: não incluir o efeito da resistência do ar numa medida da aceleração da gravidade baseada na medida do tempo de queda de um objeto a partir de uma dada altura.
3. **Erros Aleatórios**: São devidos a causas diversas e incoerentes, bem como a causas temporais que variam durante observações sucessivas e que escapam a uma análise em função de sua imprevisibilidade. Podem ter várias origens, entre elas: Os instrumentos de medida, pequenas variações das

condições ambientais (pressão, temperatura, umidade, fontes de ruídos, etc) e fatores relacionados ao próprio observador que estão sujeitos a flutuações, em particular a visão e a audição.

2.2 Incerteza

A incerteza da medição u é um parâmetro associado à dispersão de valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. A incerteza define a dúvida acerca da validade do resultado de uma medição e reflete a falta de conhecimento exato do *valor verdadeiro* da grandeza física. De acordo com a recomendação da norma ISO GUN ("*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*") de 1993 [3] os componentes da incerteza devem ser agrupados em duas categorias em função do tipo de avaliação: *incertezas de Tipo A* e *incertezas de Tipo B*. As incertezas de Tipo A u_A são aquelas estimadas por métodos estatísticos ou aleatórios. Uma forma apropriada de representar incertezas que envolvem parâmetros estatísticos é através do conceito de desvio padrão, ou um dado múltiplo dele, cuja definição será considerada posteriormente. As incertezas de Tipo B u_B são avaliadas por um julgamento científico, baseado em todas as informações disponíveis sobre as variabilidades do mensurando, que não são obtidas por parâmetros estatísticos ou aleatórios. As informações podem incluir medidas prévias, experiência ou conhecimento do comportamento geral das propriedades de materiais e aparelhos, especificações do fabricante, dados fornecidos por certificados de calibração e flutuações de dados de referência extraídos de manuais. A experiência, a responsabilidade e a habilidade do operador são condições necessárias para o conjunto de informações disponíveis para uma avaliação de incerteza de Tipo B. O desvio experimental da média de uma série de observações *não* é o erro aleatório da média embora ele assim seja designado em algumas publicações. Ele é, na verdade, uma medida da incerteza da média devido a efeitos aleatórios. O valor exato do erro na média, que se origina desses efeitos, não pode ser conhecido. Portanto, a incerteza do resultado de uma medição não deve ser confundido com o erro desconhecido remanescente.

Um trecho importante do ISO GUN de 1993, válido como boa recomendação para o experimentador, é: "*Embora este Guia forneça um esquema de trabalho para obter incerteza, ele não pode substituir pensamento crítico, honestidade intelectual e habilidade profissional. A avaliação de incerteza não é uma tarefa de rotina, nem um trabalho puramente matemático. Ela depende do conhecimento detalhado da natureza do mensurando e da medição. Assim, a qualidade e a utilidade da incerteza apresentada para o resultado de uma medição dependem, em última instância, da compreensão, análise crítica e integridade daqueles que contribuíram para atribuir o valor à mesma.*"

2.3 Precisão e exatidão

A **precisão** está associada com a capacidade de um instrumento, ou aparelho, de medida avaliar uma grandeza com a menor dispersão estatística e com maior número de algarismos significativos. A precisão descreve a repetibilidade do resultado, isto é, a concordância de valores numéricos para várias medições. A precisão pode ser descrita por variáveis aleatórias, tais como: desvio padrão e variância.

Por outro lado, **exatidão**, também denominada **acurácia**, é a capacidade que um aparelho de medida tem de se aproximar, o máximo possível, do valor verdadeiro. Obviamente, para se chegar a um valor próximo do valor verdadeiro, deve-se utilizar um aparelho de precisão, porém o uso de um aparelho preciso não leva, necessariamente, a um valor exato. Se, por exemplo, o instrumento estiver descalibrado, o valor medido, embora preciso, não é o valor verdadeiro. A exatidão pode ser descrita em termos do erro absoluto ou do erro relativo.

Uma maneira fácil de entender a diferença entre precisão e exatidão, é fazer uma analogia com disparos de projéteis sobre um alvo. O objetivo "atingir o centro alvo" é equivalente a encontrar o valor verdadeiro. A exatidão seria atingir, o mais próximo possível, o centro do alvo. Por outro lado, a precisão seria atingir, o mais próximo possível, um certo ponto do alvo. A Fig.2.1 mostra as diferentes possibilidades de disparos

de projéteis sobre o alvo.

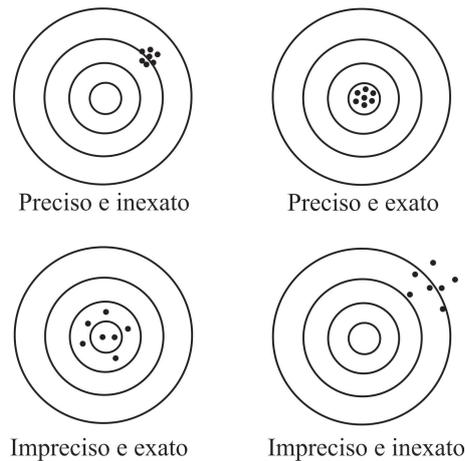


Fig. 2.1: Possíveis pontos atingidos num alvo ilustrando a diferença entre precisão e exatidão.

O conceito de precisão e exatidão ajuda a entender a diferença entre *erro* ϵ e *incerteza* u . Uma medida com pequeno erro, isto é, próxima do valor verdadeiro, é uma medida exata. Por outro lado, uma medida com pequena incerteza, isto é, próxima de um mesmo valor, não necessariamente o valor verdadeiro, é uma medida precisa.

2.4 Amostra, população e distribuição estatística

Amostra, na linguagem estatística, é um conjunto de indivíduos retirados de uma população com a finalidade de fornecer informações sobre a população. Embora a amostra seja uma pequena parcela representativa da população, ela é na prática, mais utilizada por motivos de custo, tempo, logística e outros, A *inferência estatística* é um importante ramo da estatística que tem por objetivo fazer afirmações a partir de uma amostra representativa e confiável.

Dados podem ser organizados e agrupados de acordo com o número de ocorrências, ou *frequências*, de um determinado valor contido em certos intervalos de valores, denominado de *intervalo de classe*. Uma distribuição de frequências em intervalos de classe pode ser apresentada numa forma gráfica denominada de *histograma*. Seja, por exemplo, uma amostra contendo um conjunto de dados, representados pelas notas das provas de Física de 32 alunos, de uma determinada turma da Universidade Federal de Juiz de Fora, organizadas em ordem crescente como mostra a Fig.2.2(a). Observa-se que alguns alunos tem a mesma nota e que portanto é possível construir uma distribuição de frequências, separando-os em sete diferentes intervalos de classe. As frequências de dados em cada intervalo de classe podem ser distribuídas como mostra a Fig.2.2(b). A vantagem da distribuição de frequências sobre a tabela de dados é a clara exposição de uma tendência a um determinado valor central. O histograma representativo do conjunto de dados assim distribuídos é mostrado na Fig.2.2(c).

Na Fig.2.3, observa-se que o número de intervalos de classe de um histograma cresce quando o número de dados da amostra aumenta proporcionalmente. Como nesse processo os limites inferior e superior dos dados não devem ser alterados significativamente, os intervalos de classe devem se estreitar progressivamente, tendendo a zero quando o número de dados tende ao infinito. Nessas condições, o histograma transforma-se numa curva suave de uma função de distribuição teórica, como mostrado na última sequência da Fig.2.3, que tem a vantagem de poder ser tratada analiticamente. Essa distribuição de frequência limite, quando normalizada, é considerada como uma distribuição de probabilidade para as possíveis medidas diretas de uma determinada grandeza física. A função teórica identifica a população de todos

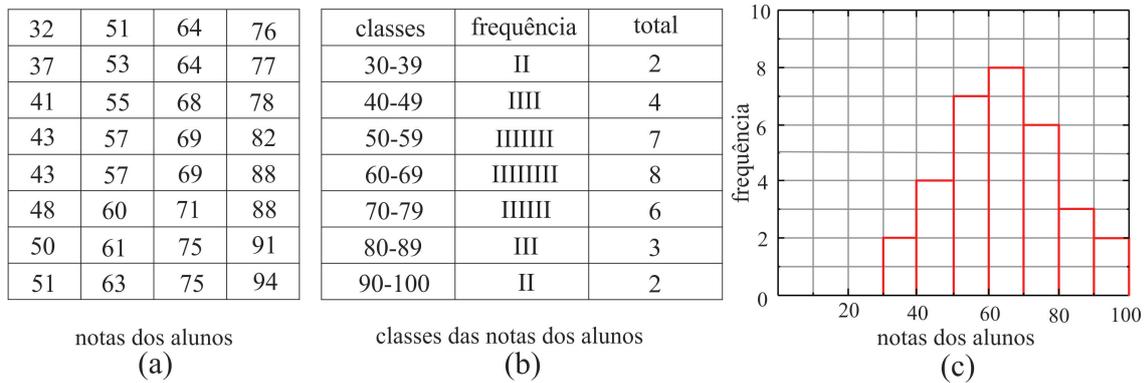


Fig. 2.2: (a) Tabela das notas dos alunos, (b) distribuição de frequências das notas em sete intervalos de classes e (c) histograma resultante dessa distribuição.

os dados possíveis (mas não os valores verdadeiros) e, a partir do conhecimento de suas propriedades, obtêm-se informações sobre o nível de confiança de todo o processo de medição. Na verdade, uma amostra finita, associada a uma determinada população é, em geral, suficiente para se chegar às propriedades da função de distribuição correspondente. Não existem muitas funções matemáticas que se comportam morfológicamente como a função de distribuição mostrada na última sequência da Fig.2.3[4][5]. Dentre as poucas funções consideráveis, pode-se destacar as seguintes distribuições:

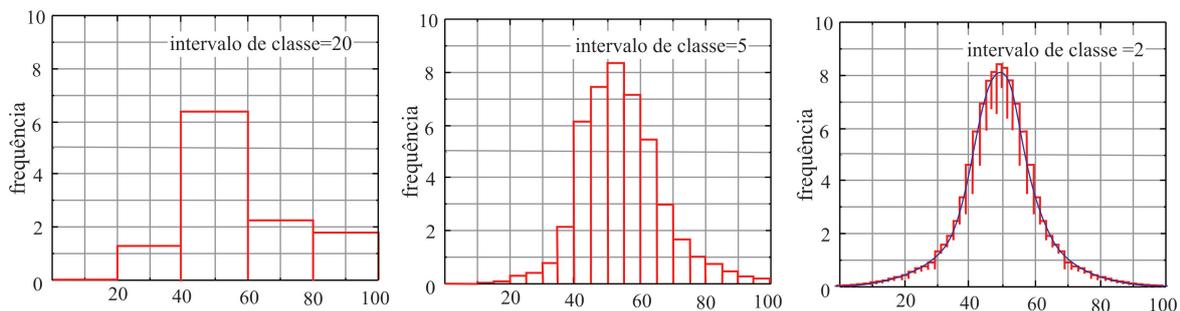


Fig. 2.3: Efeito do aumento do número de dados da amostra na forma do histograma correspondente.

A **distribuição Binomial**, é utilizada em situações em que se disponha somente de eventos binários. Por exemplo, determinação do número de moedas que dão cara ou coroa, quando algumas delas são jogadas para cima um certo número de vezes.

A **distribuição de Poisson**, é utilizada em situações em que os eventos são independentes e que cada um deles não influencia os outros. Por exemplo, determinação do número de automóveis que passam por um determinado ponto de uma avenida por unidade de tempo em diferentes momentos do dia.

A **distribuição de Gauss ou Normal**, é utilizada para amostras genéricas de grande número de dados ($n > 30$) de uma única população. Por causa dessa característica particular, a distribuição estatística de Gauss é o modelo teórico mais utilizado no estudo dos processos de medidas e erros associados a determinação experimental da maioria das grandezas físicas.

A **distribuição t de Student**, é semelhante à distribuição de Gauss porém que se aplica aos casos de amostras genéricas de qualquer número de dados de uma única população.

2.5 Valor médio e desvio médio

Na maioria das vezes, o valor médio, ou média aritmética, de várias medidas diretas independentes de uma mesma grandeza física, que varia aleatoriamente, fornece a melhor estimativa do valor esperado dessa grandeza. Se n é o número total das determinações independentes x_i da mesma grandeza X , então o valor médio será calculado por

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (2.3)$$

O desvio médio, ou desvio absoluto, é definido como sendo a média aritmética das flutuações dos dados individuais em torno do valor médio, num conjunto aleatório de determinações independentes. Seu valor fornece, somente, uma estimativa razoável da dispersão dos dados individuais em torno do valor médio. Se n é o número total das determinações independentes x_i da mesma grandeza X , então o desvio médio será calculado por

$$d_m = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \langle x \rangle|}{n} \quad (2.4)$$

O desvio médio é utilizado frequentemente para aferir a precisão de alguns aparelhos de medida. Aparelhos de grande precisão, conduzirão a valores baixos de desvio médio.

2.6 Variância

Na estatística, o conceito de variância é usado, frequentemente, para descrever um conjunto de observações obtida de uma população ou de uma amostra. A variância é denominada de variância da população no primeiro caso e é denominada de variância da amostra no segundo caso. A variância da população x_i , obtida por n determinações independentes da mesma grandeza X , é definida por

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \quad (2.5)$$

onde $\langle x \rangle$ é o valor médio obtido das n determinações independentes, definido na Eq.2.3. Quando se lida com grandes populações é muito difícil encontrar o valor exato da variância da população. Nesses casos, escolhe-se uma amostra da população e adota-se o conceito de variância da amostra, definida por

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \quad (2.6)$$

onde $\langle x \rangle$ é o valor médio da amostra que também pode ser definido como na Eq.2.3, desde que agora n seja o número total de determinações independentes da amostra. Combinando a Eq.2.5 com a Eq.2.6, obtém-se

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2 \quad (2.7)$$

Intuitivamente, o cálculo de σ^2 pela divisão por n em vez de $n-1$ dá uma subestimativa da variância da população. Foi usado $n-1$ em vez de n no cálculo de S^2 porque a média da amostra é uma estimativa da média da população que não se conhece. Na prática, porém, para grandes valores de n , esta distinção é dispensável.

2.7 Desvio padrão

O desvio padrão, ou desvio padrão experimental, ou ainda desvio médio quadrático, caracteriza a dispersão dos dados individuais em torno do valor médio, num conjunto aleatório de n determinações independentes.

O desvio padrão dá uma estimativa da incerteza padrão de uma dada medida. Quanto maior o desvio padrão, menor o nível de confiança no valor médio obtido. Por definição, o desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância. Assim, de acordo com a Eq.2.5, pode-se definir o **desvio padrão da população** como

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}} \quad (2.8)$$

e, **desvio padrão da amostra** como

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}} \quad (2.9)$$

A Eq.2.8 pode ser, convenientemente, escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\langle x \rangle^2 - 2 \langle x \rangle x_i + x_i^2)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x \rangle^2 - 2 \langle x \rangle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \sqrt{\frac{n \langle x \rangle^2}{n} - 2 \langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - 2 \langle x \rangle^2 + \langle x^2 \rangle} \end{aligned}$$

ou

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (2.10)$$

Uma equação bastante útil pode ser obtida combinando a Eq.2.8 com a Eq.2.10 e, na sequência, adotando

$$\langle x \rangle^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \text{ e } \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \text{ isto é,}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 = n (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (2.11)$$

2.8 Desvio padrão da média

O desvio padrão da média, ou desvio padrão experimental da média, é definido como sendo a razão entre o desvio padrão da amostra S , dada na Eq.2.9, e a raiz quadrada do número total n das determinações independentes, isto é,

$$\sigma_m = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (2.12)$$

Esta expressão dá uma estimativa da maior ou menor incerteza da média $\langle x \rangle$ em relação a uma média mais geral, que seria a média de diversas médias. Ao contrário do desvio padrão da amostra S , que praticamente não muda com o aumento do número total n de determinações independentes da grandeza física, o desvio padrão da média σ_m torna-se menor por um fator $1/\sqrt{n}$. Por ser mais utilizada como uma expressão da dispersão na maioria dos trabalhos de laboratórios, o desvio padrão da média será adotado para aferir as incertezas aleatórias de Tipo A nos experimentos realizados nos laboratórios de Física. Uma formulação prática do desvio padrão da média σ_m pode ser obtida quando se combina a Eq.2.11 com a Eq.2.12, isto é,

2.8 Desvio padrão da média

| Tabela de Cálculo para σ_m | | |
|-----------------------------------|--------------|----------------|
| i | x_i | x_i^2 |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| Totais | $\sum x_i =$ | $\sum x_i^2 =$ |

Tab. 2.1: Tabela de cálculo para o desvio padrão da média.

| Tabela de Cálculo para σ_m | | |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------------|
| i | m_i (g) | m_i^2 (g ²) |
| 1 | 3,002 | 9,012 |
| 2 | 3,015 | 9,090 |
| 3 | 2,915 | 8,497 |
| 4 | 2,998 | 8,988 |
| Totais | $\sum m_i = 11,930$ | $\sum m_i^2 = 35,587$ |

Tab. 2.2: Tabela de cálculo do desvio padrão da média para a massa do objeto.

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]} \quad (2.13)$$

Para efeitos práticos, pode-se recorrer a uma tabela, como a exemplificada na Tab.2.1 onde $n = 5$, para calcular o valor do desvio padrão da média σ_m a partir da Eq.2.13. As duas somatórias, calculadas na última linha da Tab.2.1, podem ser substituídas diretamente na Eq.2.13 para calcular o valor do desvio aleatório σ_m .

Exemplo 1. Uma balança tri-escala foi usada para fazer quatro medidas de massa de um objeto. Os resultados encontrados foram: 3,002 g; 3,015 g; 2,915 g e 2,998 g. (a) Calcule o valor médio $\langle m \rangle$ e a incerteza de Tipo A $u(m)$ associada as medidas aleatórias da massa m . Admita, como uma aproximação inicial, que a incerteza de Tipo A $u(m)$ seja igual ao **desvio padrão da média** σ_m (b) Como se expressa corretamente o valor da massa do objeto?

Solução:

(a) O valor médio $\langle m \rangle$ da massa m é

$$\langle m \rangle = \sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{4} = \frac{3,002 \text{ g} + 3,015 \text{ g} + 2,915 \text{ g} + 2,998 \text{ g}}{4} = 2,982 \text{ g}$$

A incerteza de Tipo A $u(m)$ será igual ao desvio padrão da média σ_m . Na Tab.2.2 são mostrados os dados do experimento, bem como os somatórios necessários para o cálculo do desvio padrão da média σ_m . Assim, de acordo com a Tab.2.2 e a Eq.2.13, o valor da incerteza $u(m)$ será

$$\begin{aligned}
 u(m) = \sigma_m &= \frac{1}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{1}{(4-1)} \left[\sum_{i=1}^4 m_i^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^4 m_i \right)^2 \right]} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} \left(35,587 \text{ g}^2 - \frac{1}{4} 11,930^2 \text{ g}^2 \right)} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} (35,587 \text{ g}^2 - 35,581 \text{ g}^2)} = 0,022 \text{ g}
 \end{aligned}$$

(b) Cabe aqui uma observação importante: É muito comum expressar a incerteza com apenas 1 algarismo significativo. Portanto, deve-se arredondar a incerteza para $0,02 \text{ g}$. Tem-se até o momento um valor médio $\langle m \rangle = 2,982 \text{ g}$ e uma incerteza $u(m) = 0,02 \text{ g}$ para o valor da massa do objeto. Contudo, esta não é ainda a resposta final. Deve-se observar que a incerteza aleatória está na segunda casa decimal, indicando que a incerteza da medida encontra-se nessa casa. Como a incerteza possui duas casas decimais e o valor médio da massa apresenta três casas decimais, isso significa que o valor médio da massa deve ser arredondado também para duas casas decimais. Em resumo,

$$\langle m \rangle = 2,982 \text{ g} \quad \text{e} \quad u(m) = 0,022 \text{ g} \quad \text{resulta em} \quad m = \langle m \rangle \pm u(m) = (2,98 \pm 0,02) \text{ g}$$

2.9 Incerteza combinada - A propagação da incerteza

Além do efeito individual de cada fonte de incerteza, *de Tipo A* ou *de Tipo B*, sobre o processo de medição, é importante definir uma estimativa geral que incorpore todas as fontes de incerteza do mensurando. Essa estimativa se refere a uma **incerteza combinada** u_c e sua representação depende da correlação entre as fontes individuais de incerteza do mensurando. Se essas fontes de incerteza são não correlacionadas elas são ditas **estatisticamente independentes**, em caso contrário, elas são ditas **estatisticamente dependentes**. Na prática, observa-se que a maioria dos mensurandos possuem fontes de incertezas estatisticamente independentes e, por causa disso, somente esse caso será tratado aqui. O conceito de incerteza combinada pode ser avaliado analisando os casos onde a medida de uma grandeza física de interesse é feita de maneira **indireta**, onde a medida dessa grandeza é obtida a partir da medida de uma ou mais grandezas físicas diretas. Nesses casos, as incertezas individuais de cada grandezas física direta, também denominadas de **grandezas físicas de entrada**, se propagam para a incerteza da grandeza física indireta, também denominadas de **grandezas físicas de saída**. É comum se referir a esse processo como uma **propagação de incerteza**. Um exemplo em que isso ocorre é o cálculo da densidade de um objeto, no qual se mede a massa e o volume do mesmo. A massa e o volume são as grandezas física de entrada enquanto a densidade é a grandeza física de saída. Seja, inicialmente, o caso em que a estimativa f , de uma grandeza física de saída F , é função somente da estimativa x , de uma grandeza física de entrada X , isto é,

$$f = f(x) \quad (2.14)$$

A Fig.2.4 mostra o comportamento geral da estimativa f como função da estimativa x e como a incerteza $\delta x = u(x)$ na medida da grandeza física X se propaga para a incerteza combinada $\delta f = u_c(f)$ na medida da grandeza física F .

Supondo que x seja obtida de um grande número n de medidas da grandeza física X , pode-se admitir que o valor médio $\langle x \rangle$ seja a melhor estimativa para o valor verdadeiro de X . Nesse caso, os valores médios $\langle f \rangle$ e $\langle x \rangle$ devem ser coordenadas de um ponto P na curva $f = f(x)$. Se $\delta x = u(x)$ for **suficientemente pequeno** nas vizinhanças de $\langle x \rangle$, pode-se aproximar $f(x)$ por uma reta tangente a $f(x)$ no ponto $x = \langle x \rangle$ e a razão $u_c(f)/u(x)$ será aproximadamente igual a inclinação da tangente à curva nesse ponto, ou a derivada de $f(x)$ nesse ponto, isto é,

$$u_c(f) \approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\langle x \rangle} u(x) \quad (2.15)$$

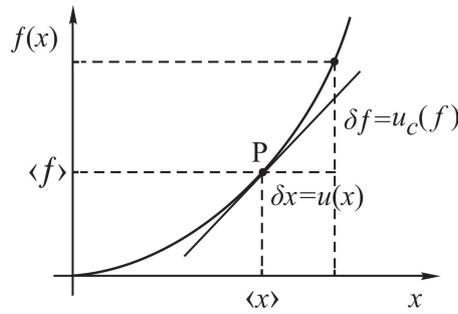


Fig. 2.4: Comportamento geral da grandeza indireta f em função da grandeza direta x .

A Eq.2.15 permite calcular a incerteza na medida da grandeza física de saída F quando esta é função somente de uma única grandeza física de entrada X . Entretanto, é frequente o caso onde o resultado de uma experiência é dada em função de duas ou mais medidas independentes. Seja, por exemplo, o caso em que a estimativa f , da grandeza física de saída F , seja função das estimativas x e y , das respectivas grandezas físicas de entrada X e Y , onde

$$f(x, y) = x \pm y \quad (2.16)$$

O que é essencial aqui, é que as medidas de X e Y sejam estatisticamente independentes, isto é, a medida de X não afeta a medida de Y . Assim, as contribuições para a incerteza $u_c(f)$, na medida de F , provem somente dos dois termos de incerteza $u(x)$ e $u(y)$, nas medidas de X e Y , respectivamente. Evidentemente, as contribuições de $u(x)$ e $u(y)$ para $u_c(f)$ devem ser aditivas. A hipótese de subtrair as contribuições não é apropriada, pois duas grandezas com incertezas não nulas poderiam fornecer uma grandeza composta das duas com incerteza nula. Por outro lado, a hipótese de somar simplesmente as duas contribuições também não é adequada, pois, nesse caso, a medida da incerteza propagada poderia extrapolar os limites do nível de confiança definido na teoria do desvio padrão da média. Para descobrir a forma correta de somar as duas contribuições de incertezas $u(x)$ e $u(y)$ na propagação da incerteza $u_c(f)$, no caso particular da Eq.2.16, pode-se recorrer ao conceito do desvio padrão como definido na Eq.2.8, isto é,

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} = \sqrt{\langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \rangle} \quad (2.17)$$

Como o desvio padrão expressa a dispersão das medidas em torno do valor médio, ele serve como uma primeira estimativa para o valor da incerteza combinada. Nesse caso, de acordo com as Eqs.2.16 e 2.17, a expressão para $u_c(f) = \sigma_f$ é

$$\begin{aligned} u_c^2(f) &= \langle (f_i - \langle f \rangle)^2 \rangle = \langle [(x_i - y_i) - (\langle x \rangle - \langle y \rangle)]^2 \rangle = \langle [(x_i - \langle x \rangle) - (y_i - \langle y \rangle)]^2 \rangle \\ &= \langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \rangle + \langle (y_i - \langle y \rangle)^2 \rangle - 2 \langle (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle) \rangle \end{aligned}$$

ou

$$u_c^2(f) = u^2(x) + u^2(y) - 2 \langle (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle) \rangle \quad (2.18)$$

onde $u(x) = \sigma_x = \sqrt{\langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \rangle}$ e $u(y) = \sigma_y = \sqrt{\langle (y_i - \langle y \rangle)^2 \rangle}$ são os desvios padrões de x e y , respectivamente. O terceiro termo do lado direito da Eq.2.18 é denominado de "**termo de covariância**". No caso em questão, onde as medidas x e y são independentes, é possível mostrar que o termo de covariância é nulo. A demonstração desse resultado não será discutida aqui por ir além dos objetivos dos cursos de laboratório de Física. Assim, a forma final da Eq.2.18 será

| Relação funcional | Valor médio | Incerteza combinada |
|---|---|---|
| $f(x) = ax ; a = \text{constante}$ | $\langle f \rangle = a \langle x \rangle$ | $u_c(f) = au(x)$ |
| $f(x) = x^a ; a = \text{constante}$ | $\langle f \rangle = \langle x \rangle^a$ | $u_c(f) = a \langle x \rangle^{a-1} u(x)$ |
| $f(x) = e^x$ | $\langle f \rangle = e^{\langle x \rangle}$ | $u_c(f) = e^{\langle x \rangle} u(x)$ |
| $f(x) = \ln x$ | $\langle f \rangle = \ln \langle x \rangle$ | $u_c(f) = \frac{1}{\langle x \rangle} u(x)$ |
| $f(x) = \text{sen } x$ | $\langle f \rangle = \text{sen } \langle x \rangle$ | $u_c(f) = \cos \langle x \rangle u(x)$ |
| $f(x, y) = ax \pm by ; a, b = \text{constante}$ | $\langle f \rangle = a \langle x \rangle \pm b \langle y \rangle$ | $u_c(f) = \sqrt{a^2 u^2(x) + b^2 u^2(y)}$ |
| $f(x, y) = xy$ | $\langle f \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$ | $u_c(f) = \sqrt{\langle y \rangle^2 u^2(x) + \langle x \rangle^2 u^2(y)}$ |
| $f(x, y) = \frac{x}{y}$ | $\langle f \rangle = \frac{\langle x \rangle}{\langle y \rangle}$ | $u_c(f) = \frac{1}{\langle y \rangle^2} \sqrt{\langle y \rangle^2 u^2(x) + \langle x \rangle^2 u^2(y)}$ |

Tab. 2.3: Expressões para os cálculos dos valores médios e incertezas combinadas de algumas grandezas físicas de saída f que possuem uma e duas grandezas físicas de entrada independentes.

$$u_c^2(f) = u^2(x) + u^2(y) \tag{2.19}$$

Uma extensão óbvia da Eq.2.15, válida para grandezas físicas de saída F que possuem duas grandezas físicas de entrada independentes X e Y , que é capaz de gerar a Eq.2.19 a partir da Eq.2.16, é

$$u_c^2(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\langle x \rangle} \right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=\langle y \rangle} \right)^2 u^2(y) \tag{2.20}$$

Nesta equação foi necessário introduzir o conceito de "**derivada parcial**", escrevendo o símbolo ∂ no lugar de d , para ressaltar o fato que as derivadas da função $f(x, y)$, em relação a uma das variáveis, devem ser executadas assumindo constante a outra variável. Isso só é possível porque as grandezas físicas X e Y podem ser medidas independentemente uma da outra. Usando os argumentos discutidos acima, é possível verificar as incertezas combinadas para todas as grandezas físicas de saída F que possuem uma e duas grandezas físicas de entrada independentes mostradas na Tab.2.3.

Nesse momento, fica evidente o caso geral onde a estimativa $f = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ da grandeza física de saída F seja função das estimativas x_1, x_2, \dots, x_N das N grandezas físicas de entrada X_1, X_2, \dots, X_N estatisticamente independentes. Nesse caso, a incerteza combinadas pode ser calculada através de uma extensão óbvia da Eq.2.20 dada por

$$u_c^2(f) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=\langle x_i \rangle} \right)^2 u^2(x_i) \tag{2.21}$$

onde x_i se refere a estimativa da i -ésima grandeza física de entrada X_i . Na Eq.2.21, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=\langle x_i \rangle}$ são denominados de **coeficientes de sensibilidade** para as variáveis independentes x_i .

Embora a Eq.2.21 é a expressão geral para a estimativa da incerteza combinada associada às grandezas físicas de entrada estatisticamente independentes, existem dois casos particulares, frequentemente presentes na prática, onde as equações são significativamente simplificadas. O primeiro caso se refere a **soma ou subtração** de N grandezas físicas de entrada estatisticamente independentes que, embora possa ser obtida diretamente da Eq.2.21, é uma generalização da Eq.2.19, isto é,

$$u_c^2(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_N) = \sum_{i=1}^N u^2(x_i) \tag{2.22}$$

2.10 Influência dos aparelhos de medida na incerteza combinada

O segundo caso se refere a **multiplicação ou divisão** de N grandezas físicas de entrada estatisticamente independentes que também pode ser obtida diretamente da Eq.2.21. Em particular, a operação de divisão resulta na expressão da **incerteza combinada relativa**, escrita em termos das incertezas relativas das fontes individuais, como

$$\frac{u_c^2(f)}{f^2} = \sum_{i=1}^N \frac{u^2(x_i)}{x_i^2} \quad (2.23)$$

2.10 Influência dos aparelhos de medida na incerteza combinada

Em muitos casos práticos, a avaliação das incertezas de Tipo B, associadas as características intrínsecas dos aparelhos de medida, é um procedimento necessário para a composição da incerteza combinada do processo de medição. Informações sobre a **precisão** e **calibração**, são exemplos dessas características que podem ser disponibilizadas. Para essa avaliação é suficiente considerar o procedimento em que a estimativa x seja obtida diretamente de n determinações de uma mesma grandeza física de entrada X usando um mesmo aparelho de medida, onde a melhor estimativa dessa grandeza é dada pelo valor médio $\langle x \rangle$. Nesse procedimento, a incerteza combinada $u_c(f)$ deve incluir somente uma incerteza $u(x)$ de **Tipo A** associada à grandeza de interesse e uma incerteza $u_{ap}(x)$ de **Tipo B** associada as características intrínseca do aparelho. Nesse caso, a estimativa f da grandeza física de saída F , pode ser definida como

$$f = f(x, x_{ap}) = x + x_{ap} \quad (2.24)$$

onde x_{ap} é a estimativa de uma correção devido as características intrínsecas do aparelho de medida. O valor médio $\langle f \rangle = \langle x \rangle + \langle x_{ap} \rangle$ da grandeza física de saída F , representa a melhor estimativa dessa grandeza. Aplicando a Eq.2.21 na Eq.2.24, obtém-se

$$u_c^2(x + x_{ap}) = u^2(x) + u_{ap}^2(x) \quad (2.25)$$

onde $u_{ap}(x)$ é a incerteza associada as características intrínsecas do aparelho de medida. Quando se faz a medida da estimativa x da grandeza física de entrada X somente uma vez, não se terá a disposição uma incerteza aleatória no processo de medição. Nesse caso, $u(x) = 0$ na Eq.2.25 e a incerteza na medida da grandeza física combinada $u_c(x + x_{ap})$ será aproximadamente igual a incerteza intrínseca do aparelho $u_{ap}(x)$, isto é, $u_c(x + x_{ap}) \approx u_{ap}(x)$. Por outro lado, quando a grandeza física de entrada X é medida mais de uma vez, não é incomum ocorrer flutuações de medidas muito maiores do que a precisão ou calibração disponível no aparelho de medida. Nesses casos, $u(x) \gg u_{ap}(x)$ na Eq.2.25 e será suficiente apresentar a incerteza $u_c(x + x_{ap})$ somente em termos da incerteza aleatória $u(x)$, isto é, $u_c(x + x_{ap}) \approx u(x)$.

No caso geral onde a estimativa f da grandeza física de saída F é uma função das estimativas x_i das grandezas físicas de entrada X_i com $i = 1, 2, \dots, N$, que seguem a Eq.2.24 no processo de medição por aparelhos, as incertezas $u_c^2(x_i + x_{ap}) = u^2(x_i) + u_{ap}^2(x_i)$, como na Eq.2.25, deve substituir a incerteza $u^2(x_i)$ na Eq.2.21, isto é,

$$u_c^2(f) = \sum_{i=1}^N \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i=\langle x_i \rangle} \right)^2 \left[u^2(x_i) + u_{ap}^2(x_i) \right] \quad (2.26)$$

2.11 Incerteza expandida

Embora a incerteza combinada u_c seja universalmente utilizada para expressar a incerteza do resultado de uma medição, por causa da necessidade de algumas indústrias e aplicações comerciais em áreas de saúde e segurança, muitas vezes é necessário definir uma incerteza que compreende um intervalo mais abrangente denominada de **incerteza expandida** u_e . Nesse caso, o novo intervalo de validade é pré-definido de uma

determinada *distribuição estatística* de valores que pode ser razoavelmente atribuída ao mensurando. A incerteza expandida é definida como

$$u_e = ku_c \quad (2.27)$$

onde u_c é a incerteza combinada e k é um *fator de abrangência* associado a uma *distribuição estatística* apropriada. A NIS (*Network Information Service*) 3003 [6] recomenda que o valor de k seja pelo menos igual a 2 para o cálculo da incerteza expandida. Como ficará claro mais adiante, no caso de uma distribuição estatística de única população, este valor corresponde a um *nível de confiança* da ordem de 95% para a *distribuição de Gauss* e um nível de confiança menor do que este para a *distribuição t de Student*. Em geral, para a maioria das aplicações, o fator de abrangência k pode variar entre os valores 2 e 3 dependendo do nível de confiança requerido para o intervalo de incerteza do mensurando.

Exercícios

- Classifique cada um dos erros citados abaixo, conforme sua natureza mais provável, isto é, se é grosseiro, sistemático ou aleatório.
 - Medida do tempo de ocorrência entre dois eventos com um relógio que está "adiantando".
 - Confundir uma escala graduada em polegada com uma escala graduada em centímetros.
 - Erro na balança na quitanda de um feirante.
 - Medida de um comprimento com uma régua de 1 m calibrada.
 - Medida de uma corrente elétrica a uma temperatura ambiente de $35^{\circ} C$ com um amperímetro calibrado a uma temperatura de $20^{\circ} C$.
- Uma determinada escola possui aproximadamente 2000 estudantes. Para determinar a altura média dos estudantes, a diretora escolheu aleatoriamente cem ($n = 100$) integrantes no pátio da escola e mediu a altura de cada um. O resultado encontrado é mostrado na Tab.2.4.

| | | | | | | | |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| altura em metros | 1,60 | 1,65 | 1,70 | 1,75 | 1,80 | 1,85 | 1,90 |
| número de estudantes | 4 | 16 | 22 | 30 | 18 | 8 | 2 |

Tab. 2.4: Altura dos estudantes da Escola.

- Faça a estimativa da altura média dos estudantes da Escola.
 - Calcule o desvio padrão da distribuição de alturas na escola.
- Com o objetivo de fazer uma experiência de queda livre, um estudante mediu 35 vezes os intervalos de tempo de queda de uma pequena esfera metálica ao ser abandonada de uma mesma altura $h_0 = 2,0 m$. Os intervalos de tempo foram medidos com um cronômetro de mão de precisão igual a $0,01 s$. Para estudar a curva de distribuição de frequências, o estudante traçou o histograma mostrado na Fig.2.5.
 - Qual é o intervalo de classe usado para traçar o histograma?
 - Calcule a média $\langle t \rangle$ dos intervalos de tempo de queda e o desvio padrão σ correspondente. Qual a provável origem da dispersão das medidas?
 - Verifique no histograma, a porcentagem do número de medidas que se encontram no intervalo de $\langle t \rangle - \sigma$ a $\langle t \rangle + \sigma$

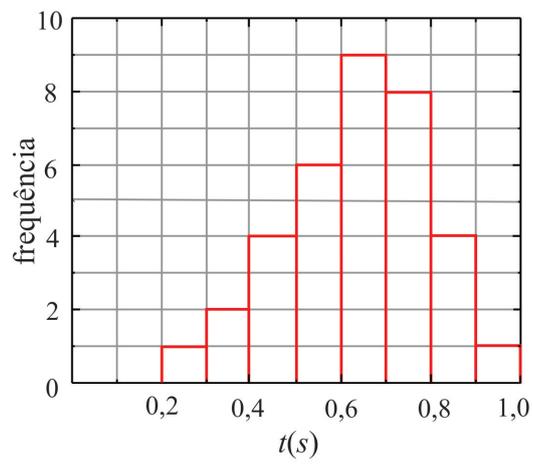


Fig. 2.5: Histograma resultante das 35 medidas de intervalos de tempo de queda da esfera metálica.

Capítulo 3

Distribuições estatísticas

3.1 Distribuição de Gauss

Todos os resultados estatísticos de medidas e erros discutidos anteriormente, são compatíveis com a teoria da distribuição de Gauss desde que amostra retirada da população tenha um grande número de dados ($n > 30$). [4][5]. Essa hipótese, conhecida como **lei dos erros**, foi idealizada pelo astrônomo e matemático francês Jules Henri Poincaré (1845-1912)[7]. De acordo com essa teoria, a estimativa de erro, obtida a partir da amostra de medidas diretas da estimativa x da grandeza física de entrada X , baseia-se na hipótese de que, quando o número de medidas cresce indefinidamente, a distribuição de frequências das medidas satisfaz a seguinte expressão algébrica:

$$y = y_{max} e^{-z^2/2} \quad (3.1)$$

onde $y_{max} = \frac{1}{u\sqrt{2\pi}}$ é o valor máximo da distribuição, $z = \frac{x - \mu}{\varepsilon}$ é uma variável estatística reduzida, x são os dados obtidos da população, μ é o valor médio e ε é o desvio padrão teórico da distribuição. A Fig.3.1(a) mostra o histograma da população de medidas diretas x_i de uma grandeza física X . Deve-se observar que a média $\langle x \rangle$ e o desvio padrão σ são obtidos, respectivamente, a partir do ponto de máximo y_{max} e da largura 2σ a meia altura $1/2y_{max}$ no histograma. Obviamente, o que está por traz da largura a meia altura é o fato do desvio padrão ser uma estimativa da média da dispersão em torno do valor médio dos dados individuais da população. A Fig.3.1(b) mostra o comportamento gráfico da distribuição de Gauss bem como as indicações dos respectivos parâmetros estatísticos teóricos. A experiência mostra que, no limite em que o número n de dados tende ao infinito, as versões discretas do valor médio e do desvio padrão tendem as suas respectivas versões contínuas.

Evidentemente não se pode conhecer os valores dos parâmetros μ e ε . Na verdade o que se faz é uma estimativa das magnitudes desses parâmetros a partir de uma amostra de dados extraída da população. A teoria da distribuição de Gauss mostra que a incerteza de Tipo A, o desvio padrão σ , ou seus múltiplos, tem somente um nível de confiança da ordem de 68,27%, tal que o **nível de confiança** de 68,27% seria obtida exatamente quando se utiliza um conjunto infinito de dados. Isso continua valendo mesmo para o caso geral de uma **incerteza combinada** u_c envolvendo incertezas de Tipo A e de Tipo B. O nível de confiança de 68,27% é obtido do cálculo da área abaixo da curva no intervalo entre $z = -1$ e $z = +1$. A Fig.3.1(b) mostra que, desde que se tenha um grande número de dados na amostra e dependendo de quanto se deseja aumentar o nível de confiança da incerteza estimada, a distribuição de Gauss pode ser usada como um método estatístico para calcular uma **incerteza expandida** u_e , definida na Eq.2.27, identificando o **fator de abrangência** k como a variável estatística z . De um modo geral, a incerteza expandida u_e pode ser calculada multiplicando a **incerteza combinada** u_c por um valor da variável reduzida z , escolhida de acordo com o do nível de confiança desejado, isto é,

$$u_e = zu_c \quad (3.2)$$

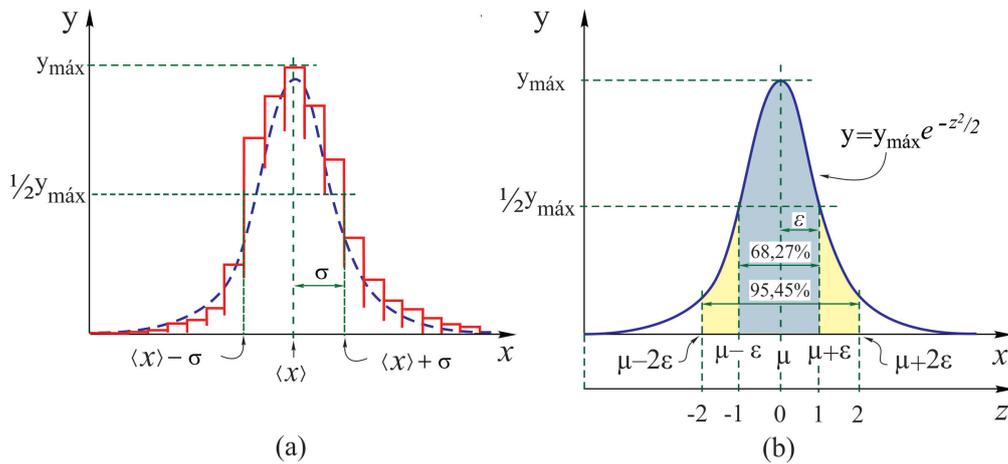


Fig. 3.1: (a) Histograma da população de medidas diretas x_i de uma grandeza física X e (b) respectiva distribuição teórica de Gauss.

Por exemplo, quando se multiplica a incerteza combinada u_c pelo valor $z = 2$, obtém-se uma incerteza expandida $u_e = 2u_c$ com um nível de confiança da ordem de 95,45%. Nos processos de medidas mais simples, envolvendo uma única medida direta com incertezas de Tipo B dispensáveis, pode-se admitir a incerteza combinada como sendo somente a incerteza aleatória dada pelo conceito de **desvio padrão da média** $u_c \approx \sigma_m$, tal que $u_e \approx z\sigma_m$. A variável reduzida z pode assumir uma grande faixa de valores de interesse. A Tab.3.1 mostra alguns valores típicos dessa variável juntamente com os respectivos níveis de confiança.

| z | nível de confiança |
|------|--------------------|
| 0,67 | 50% |
| 1,00 | 68% |
| 1,28 | 80% |
| 1,64 | 90% |
| 1,96 | 95% |
| 2,00 | 95,4% |
| 2,58 | 99% |
| 3,00 | 99,7% |
| 3,29 | 99,9% |

Tab. 3.1: Valores típicos de z , juntamente com os respectivos **níveis de confiança**, que podem ser usados como **fator de abrangência** k nos casos de amostras com grande número de dados.

É importante ressaltar que o método de cálculo da incerteza expandida por meio da distribuição de Gauss é somente um caso particular, válido para um grande número de dados na amostra. Um método geral, válido para qualquer número de dados, denominada de distribuição t de Student é discutido na seção 3.2.

3.2 Distribuição t de Student

Quando se dispõe de uma amostra com um pequeno número de dados ($n < 30$), a distribuição de Gauss deixa de ser um método seguro para a estimativa da incerteza expandida do resultado de uma medição. O problema de pequenas amostras foi tratado, no início do século XX, por um químico irlandês que assinava com o nome de "**Student**", pseudônimo de William Sealy Gosset, que não podia usar seu nome verdadeiro para publicar artigos científicos enquanto trabalhasse para a **cervejaria Guinness** [8]. De

3.2 Distribuição *t* de Student

acordo com Student a distribuição estatística que melhor reproduz os resultados associados a um processo de medição é dada por[4]

$$f(t) = y_0 \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} = y_0 \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \quad (3.3)$$

onde y_0 é uma constante que tem uma dependência com o número de dados n do processo de medição, de modo que a área abaixo da curva $f(t) \times t$ seja unitária, t é uma variável estatística e

$$\nu = n - 1 \quad (3.4)$$

é um parâmetro estatístico denominado de **número de graus de liberdade**, definida para o caso em que o processo de medição contém somente uma única fonte de incerteza de Tipo A.

A **distribuição *t* de Student**, como é denominada, é simétrica e semelhante à curva da distribuição de Gauss, porém com caudas mais largas, tal que pode gerar valores t mais extremos para a incerteza expandida do processo de medição. A Fig.3.2 mostra que a forma da distribuição t de Student é caracterizada única e exclusivamente pelo número de graus de liberdade ν . Quanto maior for este parâmetro estatístico, mais próxima da distribuição de Gauss ela estará.

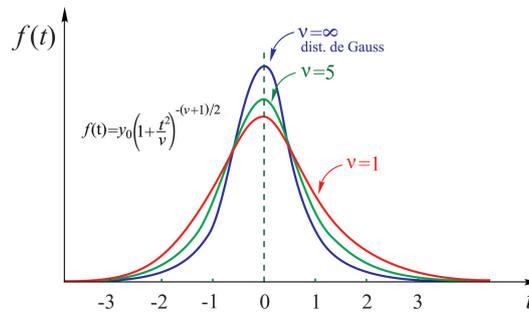


Fig. 3.2: Formas da distribuição t de Student para diferentes graus de liberdade ν .

A Fig.3.2 mostra também que, diferentemente da distribuição de Gauss, o valor do **fator de abrangência** k , usado no cálculo da incerteza expandida u_e , identificado agora como a variável estatística t , depende do número de graus de liberdade ν atribuído ao processo de medição. Como no caso da Eq.3.2 para a distribuição de Gauss, a **incerteza expandida** u_e pode ser calculada, multiplicando a **incerteza combinada** u_c por um valor da variável estatística t , escolhido de acordo com o do nível de confiança desejado, isto é,

$$u_e = t u_c \quad (3.5)$$

Do mesmo modo, nos processos de medidas mais simples, envolvendo uma única medida direta com incertezas de Tipo B dispensáveis, pode-se admitir a incerteza combinada como sendo somente a incerteza aleatória dada pelo conceito de **desvio padrão da média** $u_c \approx \sigma_m$, tal que $u_e \approx t \sigma_m$.

No caso de um processo de medição com mais de uma fonte de incerteza de Tipo A ou de Tipo B, o cálculo do **número de graus de liberdade efetivo** ν_{eff} , segue a recomendação da norma ISO GUN [3] com o uso da equação de **Welch-Satterwaite** dada por [9]

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{\nu_i}} \quad (3.6)$$

onde N é o número total de fontes de incertezas analisadas, u_i é a incerteza associada a i -ésima fonte, de Tipo A ou de Tipo B, ν_i é o número de graus de liberdade associada a i -ésima fonte de incerteza e u_c é a incerteza combinada. Para a incerteza de Tipo A o número de graus de liberdade é definido como na Eq.3.4, isto é, $\nu_{Ai} = n_i - 1$ e para uma incerteza de Tipo B, o número de graus de liberdade é definido como *infinito*, isto é, $\nu_{Bi} \rightarrow \infty$. Se o valor calculado de ν_{eff} não for inteiro, deve-se trunca-lo para o inteiro imediatamente inferior. Quando a *incerteza de Tipo A for menor do que a metade da incerteza combinada* a *distribuição de Gauss* pode ser adotada, em caso contrário a *distribuição t de Student* será mais apropriada.

A variável estatística t pode assumir uma grande faixa de valores de interesse dependendo do número de graus de liberdade ν ou ν_{eff} . A Tab.3.2 mostra alguns valores típicos de t juntamente com os respectivos *níveis de confiança*, para diferentes valores de número de graus de liberdade. Observa-se que, comparando a última linha da Tab.3.2 com alguns dados da Tab.3.1, os valores de t para a distribuição t de Student, equivale aos valores de z para a distribuição de Gauss quando o número de graus de liberdade tende ao infinito.

| número de graus de liberdade ν ou ν_{eff} | $t_{68,27\%}$ | $t_{90\%}$ | $t_{95\%}$ | $t_{95,4\%}$ | $t_{99\%}$ | $t_{99,7\%}$ |
|---|---------------|------------|------------|--------------|------------|--------------|
| 1 | 1,837 | 6,314 | 12,71 | 13,97 | 63,66 | 235,8 |
| 2 | 1,321 | 2,920 | 4,303 | 4,527 | 9,925 | 19,21 |
| 3 | 1,197 | 2,353 | 3,181 | 3,307 | 5,841 | 9,219 |
| 4 | 1,142 | 2,132 | 2,776 | 2,869 | 4,604 | 6,620 |
| 5 | 1,111 | 2,015 | 2,571 | 2,649 | 4,032 | 5,507 |
| 6 | 1,091 | 1,943 | 2,447 | 2,517 | 3,707 | 4,904 |
| 7 | 1,077 | 1,895 | 2,365 | 2,429 | 3,499 | 4,530 |
| 8 | 1,067 | 1,860 | 2,306 | 2,366 | 3,355 | 4,277 |
| 9 | 1,059 | 1,833 | 2,262 | 2,320 | 3,250 | 4,094 |
| 10 | 1,053 | 1,812 | 2,228 | 2,284 | 3,169 | 3,957 |
| 11 | 1,048 | 1,796 | 2,201 | 2,255 | 3,106 | 3,850 |
| 12 | 1,043 | 1,782 | 2,179 | 2,231 | 3,055 | 3,764 |
| 13 | 1,040 | 1,771 | 2,160 | 2,212 | 3,012 | 3,694 |
| 14 | 1,037 | 1,761 | 2,145 | 2,195 | 2,977 | 3,636 |
| 15 | 1,034 | 1,753 | 2,131 | 2,181 | 2,947 | 3,586 |
| 16 | 1,032 | 1,746 | 2,120 | 2,169 | 2,921 | 3,544 |
| 17 | 1,030 | 1,740 | 2,110 | 2,158 | 2,898 | 3,507 |
| 18 | 1,029 | 1,734 | 2,101 | 2,149 | 2,878 | 3,475 |
| 19 | 1,027 | 1,729 | 2,093 | 2,140 | 2,861 | 3,447 |
| 20 | 1,026 | 1,725 | 2,086 | 2,133 | 2,845 | 3,422 |
| 25 | 1,020 | 1,708 | 2,060 | 2,105 | 2,787 | 3,330 |
| 30 | 1,017 | 1,697 | 2,042 | 2,087 | 2,750 | 3,270 |
| 35 | 1,015 | 1,690 | 2,030 | 2,074 | 2,724 | 3,229 |
| 40 | 1,013 | 1,684 | 2,021 | 2,064 | 2,704 | 3,199 |
| 45 | 1,011 | 1,679 | 2,014 | 2,057 | 2,690 | 3,176 |
| 50 | 1,010 | 1,676 | 2,009 | 2,051 | 2,678 | 3,157 |
| 100 | 1,005 | 1,660 | 1,984 | 2,025 | 2,626 | 3,077 |
| ∞ | 1,000 | 1,645 | 1,960 | 2,000 | 2,576 | 3,000 |

Tab. 3.2: Valores típicos de t , juntamente com os respectivos *níveis de confiança*, para diferentes números de graus de liberdade, ν ou ν_{eff} , que podem ser usados como *fator de abrangência k* nos casos de amostras com qualquer número de dados.

3.3 Distribuição triangular e retangular

As distribuições triangular e retangular ou uniforme são outras distribuições estatísticas contínuas citadas no "**Joint Committee for Guides in Metrology**"(JCGM-serie GUN) de 2008 [10]. Essas distribuições são utilizadas para avaliações de incertezas de Tipo B quando o aparelho de medida, as condições ambientais e os fatores ligados ao processo de medição seguem um certo comportamento específico. Por estarem associadas às incertezas de Tipo B, o número de graus de liberdade para o processo de medição que segue a distribuição triangular ou retangular, deve ser definido como *infinito*. Em muitos casos, não se tem nenhuma informação sobre o mensurando, mas é possível assegurar que ele tem *igual probabilidade* de estar em qualquer ponto de um intervalo de valores pré-determinados entre a_- e a_+ . Como exemplos pode-se citar: efeito de arredondamento de uma escala digital, resolução de um paquímetro ou micrômetro não digital e resolução de aparelhos analógicos. Nesses casos, a incerteza associada ao processo de medição segue a **distribuição retangular** mostrada na Fig.3.3 (a). Deve-se observar que o valor máximo $y_{max} = \frac{1}{a_+ - a_-}$ foi definido pela condição de que a área abaixo da curva $y(x) \times x$ deve ser unitária. O valor médio $\mu = \frac{a_- + a_+}{2}$ é a melhor estimativa teórica para o mensurando. De acordo com a teoria estatística, a incerteza padrão teórica ε associada à distribuição retangular é

$$\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (3.7)$$

onde

$$a = \frac{a_+ - a_-}{2} \quad (3.8)$$

é um parâmetro que define a metade do intervalo entre a_- e a_+ . Em termos de a , o valor máximo de $y(x)$ e o valor médio do mensurando são dados, respectivamente, como $y_{max} = \frac{1}{2a}$ e $\mu = a_- + a$.

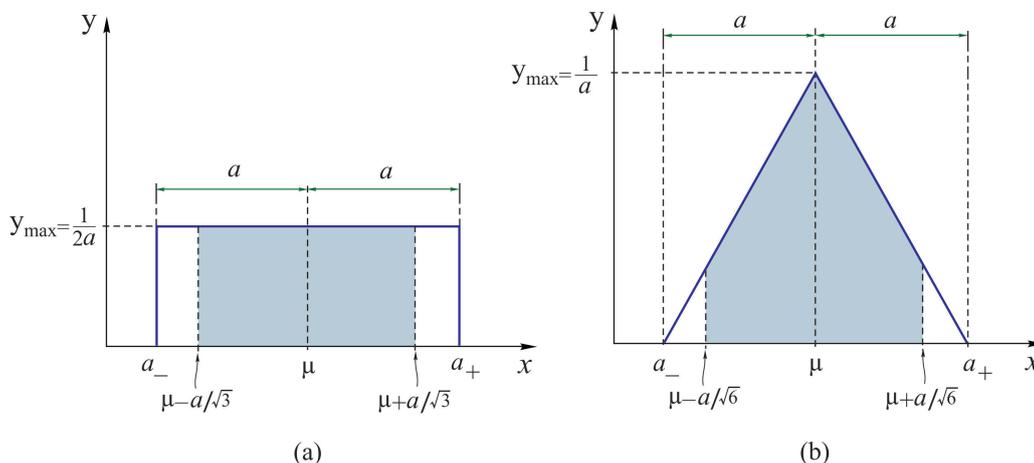


Fig. 3.3: Distribuições teóricas (a) retangular ou uniforme e (b) triangular.

Em alguns casos, onde também não se tem informação sobre o mensurando, é possível assegurar que ele tem a probabilidade de estar mais próximo do centro da estimativa do intervalo de valores entre a_- e a_+ . Como exemplos pode-se citar: efeito de arredondamento na diferença entre as indicações de duas escalas digitais, desvios das faces mecânicas de medição de um paquímetro ou micrômetro e incerteza devida à resolução de aparelhos analógicos, uma vez que a sua probabilidade de ocorrência é maior nas imediações de uma região central, indicada pelo ponteiro, entre duas marcas consecutivas da escala do dispositivo mostrador. Nesses casos, a incerteza associada ao processo de medição segue a **distribuição triangular** mostrada na Fig.3.3 (b). Como indicado nessa figura, o valor máximo para a distribuição triangular é

$y_{max} = \frac{2}{a_+ - a_-} = \frac{1}{a}$ e o valor médio μ é o mesmo que o definidos para a distribuição retangular. De acordo com a teoria estatística, a incerteza padrão teórica ε associada à distribuição triangular é

$$\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (3.9)$$

onde a é o mesmo parâmetro dado na Eq.3.8.

Exemplo 2. Uma amperímetro analógico de precisão de $0,1 A$, foi usado para medir a corrente i em um circuito elétrico. O ponteiro na escala do dispositivo mostrador do amperímetro na Fig.3.4 indica o resultado da medida. (a) Calcule a incerteza de Tipo B $u_{ap}(i)$ associada às características intrínsecas do amperímetro. (b) Supondo que a medida tenha sido realizada somente uma vez, como se expressa corretamente o valor da corrente no circuito elétrico?

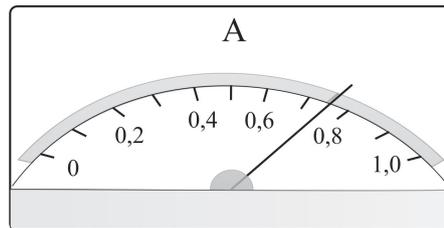


Fig. 3.4: Leitura da corrente elétrica no amperímetro.

Solução:

(a) O amperímetro deve seguir uma distribuição triangular de largura correspondente a duas vezes a sua resolução, isto é, $2a = 2 \times 0,1 A$ ou $a = 0,1 A$. Assim, de acordo com a Eq.3.9

$$\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{0,1 A}{\sqrt{6}} = 0,04 A$$

(b) O ponteiro na escala do dispositivo mostrador do amperímetro na Fig. indica que o valor da corrente elétrica é $i = 0,75 A$. Logo, o valor da corrente no circuito elétrico deve ser expresso corretamente como

$$i = (0,75 \pm 0,04) A$$

Exemplo 3. Uma paquímetro de precisão de $0,02 mm$, foi usado para medir o diâmetro d de um disco metálico. Os resultados encontrados foram: $8,40 mm$; $8,42 mm$; $8,40 mm$; $8,44 mm$; $8,42 mm$. (a) Calcule o valor médio $\langle d \rangle$ e a incerteza de Tipo A $u(d)$ associada as medidas aleatórias do diâmetro d do disco metálico. (b) A partir da fórmula $S = \frac{1}{4}\pi d^2$, calcule o valor médio $\langle S \rangle$ da área do disco metálico. Calcule a incerteza combinada no cálculo da área $u_c(S)$ incluindo a incerteza de Tipo A $u(d)$ e a incerteza de Tipo B $u_{ap}(d)$ associada às características intrínsecas do paquímetro. (c) Calcule a incerteza expandida $u_e(S)$ para que a medida tenha um nível de confiança de 95%. (d) Como se expressa corretamente o valor da área do disco metálico?

Solução:

(a) O valor médio $\langle d \rangle$ do diâmetro d é

$$\langle d \rangle = \sum_{i=1}^5 \frac{d_i}{5} = \frac{8,40 mm + 8,42 mm + 8,40 mm + 8,44 mm + 8,42 mm}{5} = 8,4160 mm$$

| Tabela de Cálculo para σ_d | | |
|-----------------------------------|---------------------|----------------------------|
| i | d_i (mm) | d_i^2 (mm ²) |
| 1 | 8,40 | 70,560 |
| 2 | 8,42 | 70,896 |
| 3 | 8,40 | 70,560 |
| 4 | 8,44 | 71,234 |
| 5 | 8,42 | 70,896 |
| Totais | $\sum d_i = 42,080$ | $\sum d_i^2 = 354,146$ |

Tab. 3.3: Tabela de cálculo do desvio padrão da média para o diâmetro d do disco metálico.

A incerteza aleatória de Tipo A pode ser calculada usando o conceito de **desvio padrão da média** σ_d , definido na Eq.2.13. Na Tab.3.3 são mostrados os dados do experimento, bem como os somatórios necessários para o cálculo do desvio padrão da média σ_d . Assim, de acordo com a Tab.3.3, o valor do desvio padrão da média será

$$\begin{aligned} u(d) &= \frac{1}{\sqrt{5(5-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^5 d_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 d_i \right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{5} \left(354,1464 \text{ mm}^2 - \frac{1}{5} 42,080^2 \text{ mm}^2 \right)} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{5} (354,1464 \text{ mm}^2 - 354,1453 \text{ mm}^2)} = 0,00297 \text{ mm} \end{aligned}$$

(b) O valor médio $\langle S \rangle$ da área do disco metálico será

$$\langle S \rangle = \frac{1}{4} \langle d \rangle^2 = \frac{1}{4} (8,4160 \text{ mm})^2 = 55,629 \text{ mm}^2$$

O paquímetro deve seguir uma distribuição retangular de largura correspondente a sua resolução, isto é, $2a = 0,02 \text{ mm}$. Assim, de acordo com a Eq.3.7, a incerteza intrínseca do paquímetro será

$$u_{ap}(d) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,02 \text{ g}}{2\sqrt{3}} = 0,00577 \text{ mm}$$

Logo, a incerteza combinada no cálculo da área $u_c(S)$, de acordo com Eq.2.26, será

$$\begin{aligned} u(S) &= \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial d} \Big|_{d=\langle d \rangle} \right)^2 [u^2(d) + u_{ap}^2(d)]} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pi \langle d \rangle \right)^2 [u^2(d) + u_{ap}^2(d)]} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pi 8,4160 \text{ mm} \right)^2 [(0,00297 \text{ mm})^2 + (0,00577 \text{ mm})^2]} = 0,08579 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

(c) Como a amostra possui um pequeno número de dados ($n = 5$), então a incerteza expandida $u_e(S)$ deve seguir a distribuição t de Student. A Tab.3.2 mostra que $t = 2,776$ para um nível de confiança de 95% e grau de liberdade $\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4$. Nesse caso, a incerteza expandida será

$$u_e(S) = t u_c(S) = 2,776 \times 0,08579 \text{ mm} = 0,2381 \text{ mm}^2$$

(d) Como é comum expressar a incerteza com apenas 1 algarismo significativo, então deve-se arredondar a incerteza expandida para $u_e(S) = 0,2 \text{ mm}^2$. Deve-se observar que a incerteza expandida está na primeira casa decimal, indicando que a incerteza da medida encontra-se nessa casa. Como a incerteza possui uma casa decimal e o valor médio da área $\langle S \rangle = 55,629 \text{ mm}^2$ apresenta três casas decimais, isso significa que o valor médio da massa deve ser arredondado também para uma casa decimal. Portanto, a resposta final será

$$S = \langle S \rangle \pm u_e(S) = (55,6 \pm 0,2) \text{ mm}^2$$

Exercícios

- Diga se a incerteza de Tipo B associada aos aparelhos enumerados abaixo seguem a distribuição retangular ou triangular.
 - Voltímetro com escala analógica.
 - Régua milimetrada.
 - Paquímetro não analógico.
 - Paquímetro digital.
 - Balança tri-escala.
 - Cronômetro analógico.
- Uma régua graduada de precisão de 1 mm , foi usado para medir a largura x e o comprimento y de um cartão de crédito. O resultado das medidas encontra-se na Tab.3.4.

| | | | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x\text{ (mm)}$ | 5,4 | 5,3 | 5,5 | 5,4 | 5,3 |
| $y\text{ (mm)}$ | 8,5 | 8,3 | 8,4 | 8,5 | 8,6 |

Tab. 3.4: Medidas da largura x e comprimento y do cartão de crédito

- Calcule os valores médios $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ e as incertezas $u(x)$, $u(y)$ associadas as medidas aleatórias da largura x e comprimento y do cartão de crédito. (b) A partir da fórmula $S = xy$, calcule o valor médio $\langle S \rangle$ da área do cartão de crédito. Calcule a incerteza combinada no cálculo da área $u_c(S)$ incluindo as incertezas de Tipo A $u(x)$ e $u(y)$ e as incertezas de Tipo B $u_{ap}(x)$ e $u_{ap}(y)$ associada às características intrínsecas da régua graduada. (c) Calcule a incerteza expandida $u_e(S)$ para que a medida tenha um nível de confiança de 95%. (d) Como se expressa corretamente o valor da área do cartão de crédito?

Capítulo 4

Gráficos de funções lineares

4.1 Introdução

Um gráfico é uma curva que mostra a relação entre duas variáveis medidas. Quando, em um fenômeno físico, duas grandezas estão relacionadas entre si o gráfico dá uma idéia clara de como a variação de uma das quantidades afeta a outra. Assim, um gráfico bem feito pode ser a melhor forma de apresentar os dados experimentais. Pode-se dizer que um gráfico é um instrumento inventado pelo homem para enxergar coisas que os olhos às vezes não podem alcançar. Ao se realizar uma medida sugere-se colocar num gráfico todos os pontos experimentais e traçar uma curva que melhor se ajuste, o mais aproximadamente possível, a esses pontos. A forma dessa curva pode auxiliar o experimentador a verificar a existência de leis físicas ou levá-lo a sugerir outras leis não previamente conhecidas. É comum buscar uma função que descreva apropriadamente a dependência entre duas grandezas medidas no laboratório. Algumas das curvas mais comuns são: linha reta, funções polinomiais, raiz quadrada, função exponencial, senos, cossenos, etc.

4.2 Construção de gráficos

As regras básicas que devem ser seguidas na construção de gráficos são:

1. Colocar um título, especificando o fenômeno físico em estudo, que relaciona as grandezas medidas.
2. Escrever nos eixos coordenados as grandezas representadas, com suas respectivas unidades. No eixo horizontal (abscissa) é lançada a *variável independente*, isto é, a variável cujos valores são escolhidos pelo experimentador. No eixo vertical (ordenada) é lançada a *variável dependente*, ou seja, aquela obtida em função da primeira.
3. A escala deve ser simples e, de acordo com a norma de desenho técnico ABNT/NBR 10126 [11], sugere-se adotar valores múltiplos ou submúltiplos dos números 1, 2, 4 ou 5.
4. A escala adotada num eixo não precisa ser igual a do outro.
5. Escolher escalas tais que a precisão dos pontos sobre o gráfico seja aproximadamente igual à precisão dos pontos que representam os dados experimentais. Se por exemplo, o gráfico é feito muito mais precisamente do que o justificado pela precisão dos dados, os pontos serão indevidamente espalhados e torna-se difícil opinar sobre a forma da curva.
6. Escolher escalas tais que resultem num gráfico que tenha o melhor aproveitamento do espaço disponível no papel.
7. Nunca se deve assinalar os dados, correspondentes aos pontos experimentais, sobre os eixos coordenados.

Quando todos os pontos experimentais já estiverem marcados no gráfico, resta traçar a curva. Esta não precisa passar sobre todos os pontos. De fato, é possível que a curva não passe por nenhum ponto do gráfico. Sendo assim, não é necessário que a curva tenha início no primeiro e termine no último ponto experimental.

A Fig.5.7 mostra um exemplo de construção de um bom gráfico, cujo comportamento é caracterizado por uma função linear. As pequenas barras, horizontal e vertical, marcadas sobre cada ponto experimental, são denominadas de "*barras de erro*". Apesar do nome, essas barras fornecem uma estimativa das *incertezas* de Tipo A e de Tipo B, associadas a cada ponto experimental, resultante do processo de medição de cada uma das grandezas. Pode-se adotar os resultados discutidos na seção 2.9 para essas avaliações de incerteza. As incertezas aleatórias de cada ponto experimental são estimadas, através de amostras estatísticas, com determinado número n de medidas, para cada grandeza envolvida na experiência. A coordenada de cada ponto experimental, será obtida calculando-se os valores médios de cada grandeza envolvida na experiência.

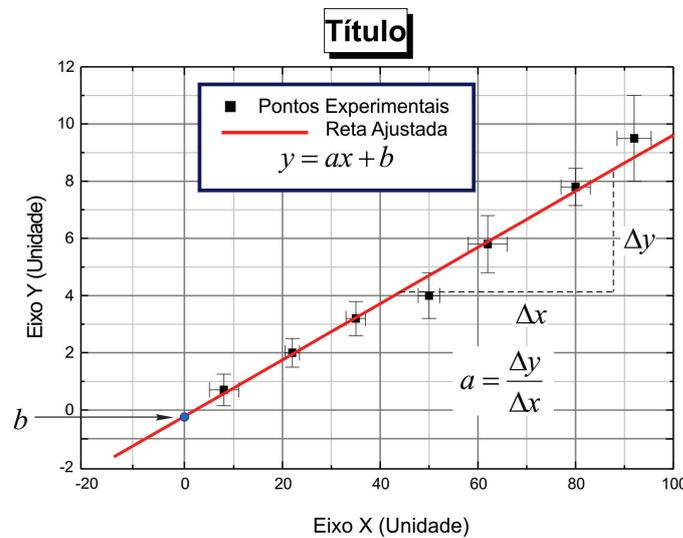


Fig. 4.1: Apresentação geral de um bom gráfico. Gráfico de uma reta $y = ax + b$, indicando os coeficientes linear b e o angular a .

A Fig.5.7 mostra um exemplo de dados experimentais cuja dependência é caracterizada por uma reta. Os pontos quadrados representam os dados experimentais e sua dispersão é devida às incertezas avaliadas durante a experiência. A linha reta contínua representa a curva que melhor descreve a dependência linear da grandeza x com a grandeza y .

4.3 Relações lineares

Relações lineares são aquelas nas quais as grandezas envolvidas estão relacionadas por uma dependência do tipo:

$$y = ax + b \quad (4.1)$$

onde a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear. O coeficiente angular corresponde à inclinação da reta, ou seja, $a = \Delta y / \Delta x$, enquanto que o coeficiente linear b é obtido pela intersecção da reta com o eixo y para $x = 0$, como indica a Fig.5.7. A seguir descreve-se dois métodos que permitem determinar estes coeficientes a partir dos dados experimentais.

4.4 Métodos de determinação dos coeficientes a e b

Conforme mencionado, é comum buscar uma função que descreva apropriadamente a dependência entre duas grandezas medidas no laboratório. Normalmente, depara-se com medidas de grandezas correlacionadas com as quais não temos uma relação estabelecida. Nestes casos quase sempre a primeira atitude é buscar através de gráficos uma lei simples ligando uma grandeza à outra. Na sequência, é apresentado dois métodos para determinar esta relação a partir de dados experimentais que possuem comportamento linear. É importante notar que estes não são os únicos métodos encontrados na literatura, sendo apenas os mais comuns.

4.4.1 Método gráfico

Esse método é apropriado quando se tem um número razoável de pontos experimentais ($n > 10$), e sua utilização requer uma boa dose de bom senso. O método se baseia na estimativa dos parâmetros de uma reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais, a partir do **centro de gravidade** $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ desses pontos distribuídos sobre o gráfico, onde

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.2)$$

são os valores médios das variáveis x e y , respectivamente.

Uma reta horizontal e uma vertical que passa por este ponto no gráfico, definem quatro quadrantes como se vê no exemplo da Fig.4.2. Neste exemplo, aproximadamente, metade dos pontos experimentais está no terceiro quadrante e metade no segundo. Para se estimar a reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais, coloca-se a ponta de um lápis sobre o ponto $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ e apóia-se aí uma régua transparente. Gira-se a régua em torno do ponto $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ até que, aproximadamente, 84% dos pontos fiquem acima da régua no terceiro quadrante e a mesma quantidade abaixo no segundo quadrante.

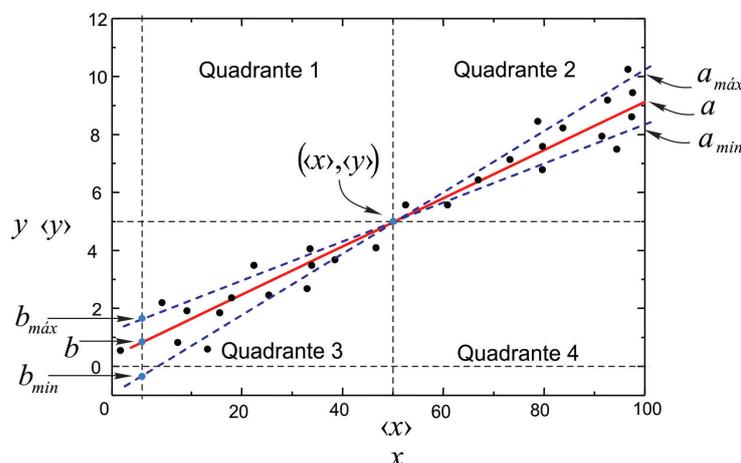


Fig. 4.2: Determinação dos coeficientes a e b pelo método gráfico.

A reta traçada nessas condições tem uma **inclinação máxima** a_{max} com certo desvio padrão e o prolongamento dessa reta intercepta o eixo y para $x = 0$, determinando o coeficiente linear b_{min} . Mantendo o lápis, no ponto $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ gire a régua até que, aproximadamente, 84% dos pontos fiquem abaixo da régua no terceiro quadrante e a mesma quantidade acima no segundo quadrante. A reta traçada nessas condições tem uma **inclinação mínima** a_{min} com certo desvio padrão e o prolongamento dessa reta intercepta o eixo y para $x = 0$, determinando o coeficiente linear b_{max} . Observa-se que, na região delimitada pelas retas de inclinação máxima e mínima, tem-se, aproximadamente, 68% dos pontos experimentais, o que é consistente com o conceito de **desvio padrão**, discutido na seção 2.7. Com essas considerações, a

reta que melhor se ajusta sobre os pontos experimentais, é a **reta média** que fica na região intermediária entre as retas de inclinação mínima e máxima, como indicado na Fig.4.2. Os coeficientes angular a e linear b da reta média, bem como suas incertezas $u(a)$ e $u(b)$, são obtidos por:

$$a = \frac{1}{2} (a_{max} + a_{min}) \quad ; \quad b = \frac{1}{2} (b_{max} + b_{min}) \quad (4.3)$$

$$u(a) = \frac{1}{2\sqrt{n}} (a_{max} - a_{min}) \quad ; \quad u(b) = \frac{1}{2\sqrt{n}} (b_{max} - b_{min}) \quad (4.4)$$

Caso os pontos experimentais tenham diferentes ponderações de incertezas, pode-se seguir o mesmo procedimento, porém, deve-se levar em conta o peso relativo de cada ponto. Esses pesos são aproximadamente iguais à inversa da medida da barra de erro de cada ponto.

4.4.2 Método dos mínimos quadrados

O ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados é importante, pois ao contrário do método gráfico, é independente da avaliação do experimentador. Esse método é baseado na minimização da seguinte função[12]:

$$R(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^{calculado})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (4.5)$$

Nesse caso, procura-se ajustar os dados (x_i, y_i) da amostra com a Eq. 4.1, tal que os coeficientes a e b minimizem a diferença entre os valores y_i medidos e os valores $y_i^{calculado}(x_i)$ calculados por essa equação. Em outras palavras, deve-se procurar os valores de a e b que satisfaçam as condições $\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 0$ ou

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial a} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right] = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial b} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right] = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0$$

ou ainda

$$-\sum_{i=1}^n y_i x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \text{e} \quad -\sum_{i=1}^n y_i + a \sum_{i=1}^n x_i + nb = 0$$

onde usou-se o fato que $\sum_{i=1}^n b = nb$. Resolvendo o sistema de equações para a e b , obtém-se

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad ; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (4.6)$$

As Eqs.4.6 podem ainda ser manipuladas algebricamente para fornecerem expressões mais apropriadas. Usando as definições dos valores médios das grandezas x e y , dadas nas Eqs.4.2, a primeira Eq.4.6, torna-se

4.4 Métodos de determinação dos coeficientes a e b

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - n^2 \langle x \rangle \langle y \rangle}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - n^2 \langle x \rangle^2} = \frac{n \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \langle x \rangle \langle y \rangle \right]}{n \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \langle x \rangle^2 \right]}$$

ou

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (4.7)$$

onde

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (4.8)$$

e

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \langle x \rangle^2 \quad (4.9)$$

Em analogia à Eq.4.9, define-se

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \langle y \rangle^2 \quad (4.10)$$

Por outro lado, as definições dos valores médios das grandezas x e y aplicadas na segunda Eq.4.6, resulta

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 \langle y \rangle - n \sum_{i=1}^n x_i y_i \langle x \rangle}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - n^2 \langle x \rangle^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \langle y \rangle - \sum_{i=1}^n x_i y_i \langle x \rangle}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \langle x \rangle^2} \quad (4.11)$$

Somando e subtraindo o termo $n \langle y \rangle \langle x \rangle^2$ ao numerador da Eq.4.11 e, em seguida, usando a Eq.4.9, obtém-se

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{S_{xx}} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \langle y \rangle - \sum_{i=1}^n x_i y_i \langle x \rangle + n \langle y \rangle \langle x \rangle^2 - n \langle y \rangle \langle x \rangle^2 \right] \\ &= \frac{1}{S_{xx}} \left[\langle y \rangle \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + n \langle x \rangle^2 \right) - \langle x \rangle \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i + n \langle x \rangle \langle y \rangle \right) \right] \\ &= \frac{1}{S_{xx}} \left[\langle y \rangle S_{xx} - \langle x \rangle S_{xy} \right] = \langle y \rangle - \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \langle x \rangle \end{aligned}$$

ou

$$b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle \quad (4.12)$$

As variâncias σ_x^2 e σ_y^2 das coordenadas x e y dos pontos experimentais e a covariância $cov(x, y)$ entre as mesmas coordenadas, são elementos estatísticos importantes que podem ser definidas em termos de S_{xx} , S_{yy} e S_{xy} , como

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} S_{xx} \quad ; \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} S_{yy} \quad ; \quad cov(x, y) = \frac{1}{n} S_{xy} \quad (4.13)$$

Outro elemento estatístico importantes frequentemente utilizado no método dos mínimos quadrado é o *coeficiente de correlação* r , definido em termos de S_{xx} , S_{yy} e S_{xy} , como

$$r = a \sqrt{\frac{S_{xx}}{S_{yy}}} \quad (4.14)$$

O coeficiente de correlação r é apresentado normalmente como um dos resultados do ajuste das calculadoras científicas e programas de computador. O valor de r é um número real entre ± 1 , sendo positivo se a reta for crescente e negativo se a reta for decrescente. Quanto mais próximo da unidade (positiva ou negativa), melhor será o ajuste. O *erro* ϵ_i no ajuste pode ser representado por meio do cálculo das variações na posição vertical de cada ponto experimental em relação à reta ajustada, isto é,

$$\epsilon_i = y_i - y_i^{\text{calculado}} \quad (4.15)$$

A variância dos *erros* S_ϵ , pode ser calculada como

$$S_\epsilon^2 = \frac{S_{yy} - aS_{xy}}{n - 2} = S_{xx} \left(\frac{1 - r^2}{n - 2} \right) \quad (4.16)$$

A variância dos *erros* deve ser calculada com $n - 2$ ao invés de $n - 1$ porque no ajuste linear determina-se as duas incógnitas a e b , enquanto no cálculo de uma média de uma amostra obtém-se somente o valor médio. Observa-se na Eq.4.16 que se $r^2 = 1$, então a variância dos erros vai a zero, isto é, todos os pontos experimentais coincidem exatamente com a reta ajustada. Além disso, A variância dos *erros* S_ϵ tem uma interpretação importante para análise de um experimento. Ela deve ser da ordem das incertezas da grandeza y , do contrário pode-se dizer que essas incertezas não estão sendo bem estimadas, ou que algum outro fator está introduzindo erros na medida de y que não estão sendo levados em conta.

Finalmente, as incertezas $u(a)$ e $u(b)$ dos coeficientes do ajuste linear, podem ser calculados a partir da Eq.4.16 como

$$u(a) = \sqrt{\frac{S_\epsilon^2}{S_{xx}}} = \frac{|a|}{r} \sqrt{\frac{S_\epsilon^2}{S_{yy}}} = |a| \sqrt{\frac{1 - r^2}{(n - 2)r^2}} \quad ; \quad u(b) = u(a) \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (4.17)$$

Para efeitos práticos, pode-se recorrer a uma tabela de cálculo, como a exemplificada na Tab.4.1 para $n = 5$, para calcular os valores dos coeficientes angular a e linear b , bem como as incertezas associadas, a partir das Eqs.4.7, 4.12 e 4.17. Os valores totais calculados no final da tabela podem ser substituídos diretamente nas expressões dos valores médios $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ e nas definições de S_{xx} , S_{yy} e S_{xy} .

| Tabela de cálculo para a e b | | | | | |
|----------------------------------|--------------|--------------|----------------|----------------|------------------|
| i | x_i | y_i | x_i^2 | y_i^2 | $x_i y_i$ |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| Totais | $\sum x_i =$ | $\sum y_i =$ | $\sum x_i^2 =$ | $\sum y_i^2 =$ | $\sum x_i y_i =$ |

Tab. 4.1: Tabela de cálculo para os coeficientes angular a e linear b

Exemplo 4. Uma bicicleta se desloca em uma pista com uma velocidade constante. Para evitar a colisão com um obstáculo, o ciclista aciona os freios da bicicleta. A Tab.4.2 mostra as distâncias x da bicicleta ao obstáculo em função do tempo t de frenagem. (a) Faça um gráfico $x \times t$, marcando os pontos experimentais

4.4 Métodos de determinação dos coeficientes a e b

numa escala linear. (b) Usando o método dos mínimos quadrados determine os coeficientes angular a e linear b da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais. Trace a reta correspondente no gráfico $x \times t$. Calcule o coeficiente de correlação r , as incertezas $u(a)$ e $u(b)$ associadas aos coeficientes angular a e linear b e a variância dos erros S_e .

| | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|
| x (m) | 5,90 | 5,10 | 3,90 | 3,10 | 1,90 |
| t (s) | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 |

Tab. 4.2: Valores das distâncias x da bicicleta ao obstáculo em função do tempo t de frenagem.

Solução:

(a) A Fig.4.3 (a) mostra o gráfico $x \times t$ de acordo com os dados da Tab. 4.2.

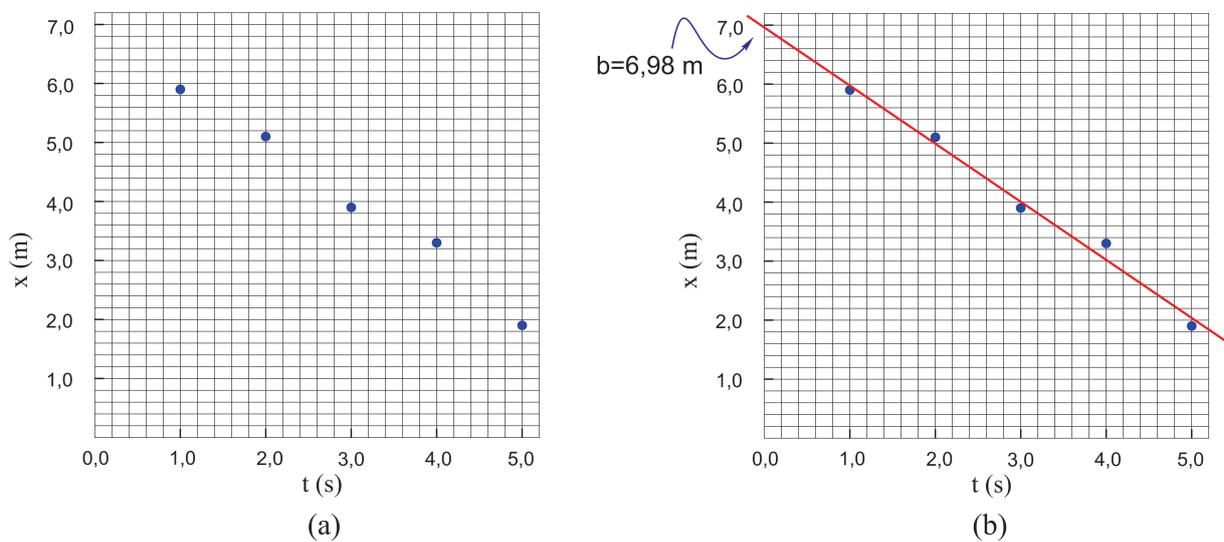


Fig. 4.3: (a) gráfico $x \times x$ com os pontos experimentais marcados numa escala linear. (b) Reta que melhor se ajusta aos pontos marcados de acordo com o método dos mínimos quadrados.

(b) Os cálculos pertinentes ao problema estão mostrados na Tab.4.3.

| Tabela de cálculo para a e b | | | | | |
|----------------------------------|-----------------|-------------------|-------------------|----------------------|----------------------------|
| i | t_i (s) | x_i (m) | t_i^2 (s^2) | x_i^2 (m^2) | $t_i x_i$ ($m \times s$) |
| 1 | 1,0 | 5,90 | 1,0 | 34,81 | 5,9 |
| 2 | 2,0 | 5,10 | 4,0 | 26,01 | 10,2 |
| 3 | 3,0 | 3,90 | 9,0 | 15,21 | 11,7 |
| 4 | 4,0 | 3,10 | 16,0 | 9,61 | 12,4 |
| 5 | 5,0 | 1,90 | 25,0 | 3,61 | 9,5 |
| Totais | $\sum t_i = 15$ | $\sum x_i = 19,9$ | $\sum t_i^2 = 55$ | $\sum x_i^2 = 89,25$ | $\sum t_i x_i = 49,7$ |

Tab. 4.3: Tabela de cálculo para os coeficientes angular a e linear b

A partir da Tab.4.3 pode-se realizar os seguintes cálculos:

$$\langle t \rangle = \frac{15,0}{5} = 3,0 \text{ s} \quad ; \quad \langle x \rangle = \frac{19,9}{5} = 3,98 \text{ m}$$

$$S_{tt} = \sum_{i=1}^n t_i^2 - n \langle t \rangle^2 = 55,0 - 5 \times 3,0^2 = 10,0 \text{ s}^2$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \langle x \rangle^2 = 89,25 - 5 \times 3,98^2 = 10,048 \text{ m}^2$$

$$S_{tx} = \sum_{i=1}^n t_i x_i - n \langle t \rangle \langle x \rangle = 49,7 - 5 \times 3,0 \times 3,98 = -10,0 \text{ m} \times \text{s}$$

$$a = \frac{S_{tx}}{S_{tt}} = \frac{-10,0}{10,0} = -1,0 \text{ m/s} \quad ; \quad b = \langle x \rangle - a \langle t \rangle = 3,98 - (-1,0) \times 3,0 = 6,98 \text{ m}$$

$$r = a \sqrt{\frac{S_{tt}}{S_{xx}}} = -1,0 \times \sqrt{\frac{10,0}{10,048}} = -0,99761$$

Os valores de a , b e r poderiam também ser obtidos diretamente utilizando uma calculadora científica. A Fig.4.3 (b) mostra a reta traçada no gráfico $x \times t$ que melhor se ajusta pontos experimentais. As incertezas $u(a)$ e $u(b)$ associadas as medidas dos coeficientes angular a e linear b respectivamente, podem ser determinadas a partir das Eqs.4.17, isto é,

$$u(a) = |a| \sqrt{\frac{1-r^2}{(n-2)r^2}} = |-1| \times \sqrt{\frac{1-0,99761^2}{3-0,99761^2}} = 0,04 \text{ m/s}$$

$$u(b) = u(a) \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2} = 0,04 \times \sqrt{\frac{55}{5}} = 0,132665 \text{ m}$$

De acordo com a Eq.4.16, a variância dos erros será

$$S_\epsilon = \sqrt{S_{xx} \left(\frac{1-r^2}{n-2} \right)} = \sqrt{10,048 \times \left[\frac{1-(-0,99761)^2}{5-2} \right]} = 0,1264 \text{ m}$$

Após efetuar os arredondamentos necessários deve-se concluir que

$$a = (-1,00 \pm 0,04) \text{ m/s} \quad \text{e} \quad b = (7,0 \pm 0,1) \text{ m}$$

Exercícios

1. O movimento executado por um corpo de massa M preso a uma mola, na ausência de forças de atrito, é um dos exemplos clássicos de movimento harmônico simples (MHS). De acordo com a lei de Hook, quando a mola é deformada de um comprimento x , por uma força externa \vec{F} , surge uma força restauradora $-\vec{F}$ proporcional ao comprimento de deformação x , isto é, $\vec{F} = -k\vec{x}$, onde k é uma constante característica da mola conhecida como a constante elástica da mola. Para testar a validade da lei de Hook, de posse de um dinamômetro, um professor mediu o módulo a força restauradora \vec{F} de uma mola para onze valores diferentes do comprimento de deformação x . A Tab. 4.4 mostra o resultado obtido na experiência.

| | | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| x (cm) | 1,00 | 2,00 | 3,00 | 4,00 | 5,00 | 6,00 | 7,00 | 8,00 | 9,00 | 10,00 | 11,00 |
| F (N) | 8,11 | 21,8 | 29,1 | 40,5 | 49,8 | 60,1 | 69,7 | 80,6 | 88,8 | 102,0 | 108,1 |

Tab. 4.4: Valores dos comprimentos de deformação x da mola e módulo das forças restauradoras $-\vec{F}$ correspondentes.

4.4 Métodos de determinação dos coeficientes a e b

(a) Faça um gráfico $F \times x$, marcando os pontos numa escala linear. (b) Usando o método gráfico determine os coeficientes angular a e linear b e respectivas incertezas, da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais. Escreva a equação na forma $F = ax + b$ e trace a reta correspondente no gráfico $F \times x$. Compare a equação da reta com a equação $F = kx$, prevista na lei de Hook, para encontrar o valor da constante elástica k da mola. (c) Baseado nas incertezas na determinação dos coeficientes angular a e linear b , é possível confirmar a lei de Hook?

2. O trilho de ar é um dispositivo desenvolvido para analisar o movimento de objetos na ausência de forças de atrito. Um estudante utiliza um dispositivo como este para fazer uma experiência sobre o movimento retilíneo uniforme. Ao medir o intervalo de tempo para diferentes deslocamentos de um carrinho sobre o trilho de ar, o estudante obtém a Tab.4.5.

| | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|
| x (cm) | 7,0 | 10,0 | 11,0 | 16,0 | 18,0 | 20,0 |
| t (s) | 0,61 | 0,87 | 0,96 | 1,40 | 1,57 | 1,75 |

Tab. 4.5: Valores dos deslocamentos x do carrinho sobre o trilho de ar e intervalos de tempo t correspondentes.

(a) Faça um gráfico $x \times t$, marcando os pontos numa escala linear. (b) Usando o método dos mínimos quadrados determine os coeficientes angular a e linear b e respectivas incertezas, da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais. Escreva a equação na forma $x = at + b$ e trace a reta correspondente no gráfico $x \times t$. Compare a equação da reta com a equação $x = x_0 + vt$, prevista na teoria do movimento retilíneo uniforme, para encontrar o valor da velocidade v e a posição inicial x_0 do carrinho no trilho de ar. (c) Baseado nas incertezas na determinação dos coeficientes angular a e linear b , é possível confirmar a teoria do movimento retilíneo uniforme?

3. A segunda lei de Newton é uma lei empírica que afirma que a aceleração \vec{A} é proporcional à força \vec{F} aplicada sobre um corpo, isto é,

$$\vec{A} = \frac{1}{M} \vec{F} \quad (4.18)$$

onde a constante de proporcionalidade $1/M$ depende somente da massa M do corpo. Para testar a validade da segunda lei de Newton, um estudante mediu o módulo da aceleração \vec{A} para cinco valores diferentes de módulo da força \vec{F} aplicadas em um corpo de massa M . Uma incerteza diferente para cada medida da aceleração, associada ao processo de medição, foi observada pelo estudante. A Tab. 4.6 mostra o resultado obtido na experiência. (a) Faça um gráfico $A \times F$, marcando os pontos e respectivas barras de erro numa escala linear. (b) Usando o método dos mínimos quadrados determine os coeficientes angular a e linear b e respectivas incertezas, da reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais. Escreva a equação na forma $A = aF + b$ e trace a reta correspondente no gráfico $A \times F$. Compare a equação da reta com a Eq.4.18 para encontrar o valor da massa M do corpo. (c) Baseado nas incertezas na determinação dos coeficientes angular a e linear b , é possível afirmar a validade da segunda lei de Newton?

| | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| F (N) | 0,150 | 0,260 | 0,350 | 0,450 | 0,550 |
| A (m/s^2) | $0,25 \pm 0,01$ | $0,45 \pm 0,02$ | $0,68 \pm 0,03$ | $0,90 \pm 0,04$ | $1,12 \pm 0,05$ |

Tab. 4.6: Valores da força \vec{F} que atuam no corpo de massa M e módulos das acelerações \vec{A} correspondentes.

Capítulo 5

Gráficos de funções não lineares

Quando se coleta uma amostra de medidas e se constrói um gráfico para representá-la, frequentemente depara-se com funções não lineares. Muitas vezes, essas funções são difíceis de serem identificadas com precisão ou, até mesmo, desconhecidas. Relações não lineares do tipo $1/x$ ou $1/\sqrt{x}$ podem ser facilmente confundidas num gráfico. Essas dificuldades desaparecem com as funções lineares, pois estas tem identificações confiáveis. A Fig.5.1 mostra um conjunto de funções, entre as quais a única que se identifica de imediato é a que corresponde a uma reta. Assim, é desejável lançar os dados de uma amostra num gráfico de tal forma que se obtenha uma dependência linear. Esse procedimento, denominado de *linearização de gráficos*, tem como base a técnica de mudança de variável. A linearização de funções não lineares pode ser efetuada tanto com escalas lineares ou com escalas logarítmicas. Grande parte dos fenômenos científicos investigados na natureza tem comportamento não linear do tipo *polinomial* ou *exponencial*.

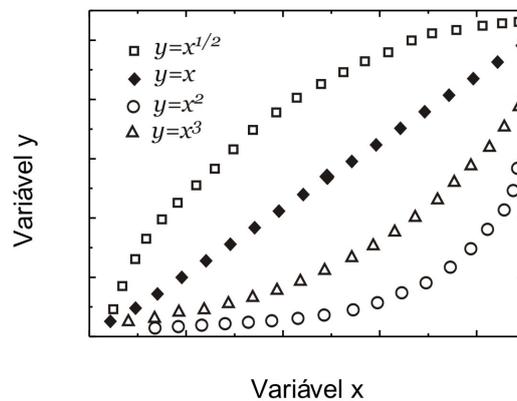


Fig. 5.1: Exemplos de funções do tipo $y = f(x)$.

5.1 Funções polinomiais

Essas funções tem a seguinte forma geral:

$$y = kx^m \quad (5.1)$$

onde k e m são constantes. Aplicando a função logaritmo decimal a ambos os lados da Eq.5.1, obtém-se

$$\log y = \log k + m \log x \quad (5.2)$$

ou

$$Y = B + AX \quad (5.3)$$

onde, $Y = \log y$, $B = \log k$, $A = m$ e $X = \log x$. Pode-se construir um gráfico da função, dada na Eq.5.1, numa escala linear em um papel milimetrado e obter os valores de A e B diretamente a partir do gráfico. Por exemplo, os pontos marcados no gráfico da Fig.5.2, são resultantes do cálculo do logaritmo dos dados x e y de uma determinada experiência cujo comportamento $y = f(x)$ é do tipo polinomial.

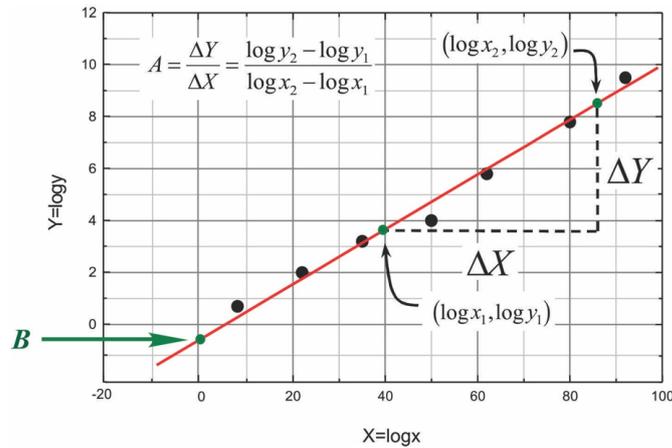


Fig. 5.2: Linearização de uma função polinomial na escala linear em um papel milimetrado.

A reta indicada na Fig.5.2 é a reta que melhor se ajusta aos pontos marcados no gráfico. Como mostrado nessa mesma figura, os valores dos coeficientes angular A e linear B , podem ser obtidos diretamente da reta ajustada, como

$$A = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

e

$$B = \text{intersecção da reta com o eixo } Y \text{ para } X = 0$$

Os coeficientes A e B poderiam ser obtidos também utilizando o método dos mínimos quadrados ou método gráfico, ambos discutidos na subseção 4.4. A partir dos valores obtidos de A e B , pode-se determinar a constante k , através da relação $k = 10^B$ e o expoente m do polinômio diretamente de $m = A$.

Exemplo 5. Sejam os dados mostrados na Tab.5.1 para alguns valores de x e y cujo comportamento numa escala linear é a função polinomial, mostrada na Fig.5.3 (a). (a) Faça a linearização desta função polinomial numa escala linear e trace a reta que melhor se ajusta aos pontos do gráfico. (b) Calcule os coeficientes angular A e linear B diretamente da reta traçada e também utilizando o método dos mínimos quadrados.

Solução:

(a) Para fazer a linearização da função polinomial calcula-se primeiramente o logaritmo de x e y . Os valores desses logaritmos estão mostrado também na Tab.5.1. Marcando os pontos correspondentes aos logaritmos de x e y numa escala linear, obtêm-se o gráfico linearizado, mostrado na Fig.5.3. A reta mostrada nesta figura é a reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais. (b) Os coeficientes angular A e linear B podem ser obtidos diretamente da reta, na forma indicada na própria figura. Por outro lado, quando se aplica o método dos mínimos quadrados para o cálculo desses mesmos coeficientes, obtêm-se $A = 2,5$ e $B = 0,65$. Assim, $k = 10^B = 4,5$, $m = A = 2,5$ e o polinômio procurado é $y = 4,5x^{2,5}$.

| x | y | X=log x | Y=log y |
|-------|--------|---------|---------|
| 0,100 | 0,014 | -1,000 | -1,85 |
| 0,300 | 0,222 | -0,523 | -0,654 |
| 0,500 | 0,795 | -0,301 | -0,099 |
| 0,700 | 1,845 | -0,155 | 0,2659 |
| 0,900 | 3,458 | -0,046 | 0,5388 |
| 1,100 | 5,711 | 0,0414 | 0,7567 |
| 1,300 | 8,671 | 0,1139 | 0,9381 |
| 1,500 | 12,400 | 0,1761 | 1,09342 |

Tab. 5.1: Tabela de dados para uma função polinomial

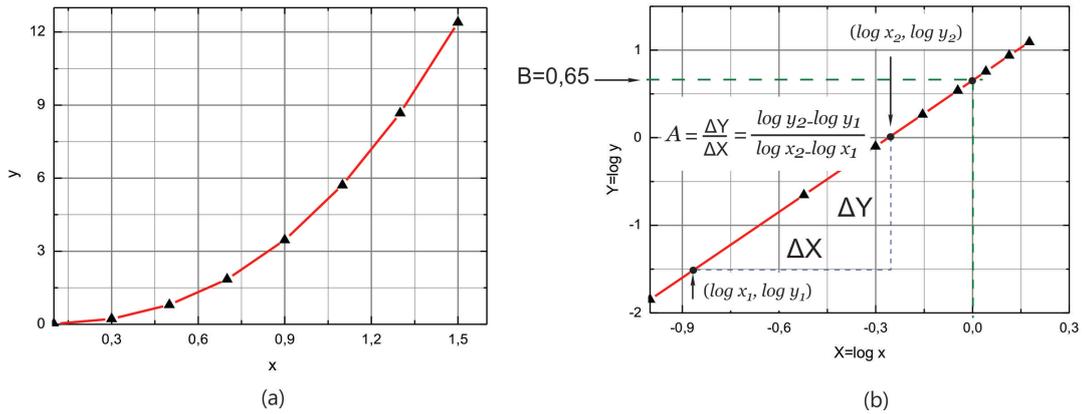


Fig. 5.3: Exemplo da Linearização de uma função polinomial numa escala linear.

Assim, é possível linearizar funções polinomiais aplicando a função logarítmico. Contudo, esse método pode se tornar excessivamente trabalhoso, uma vez que requer o cálculo do logaritmo de todos os pontos experimentais. Entretanto, esses cálculos podem ser dispensados quando se usa escalas especiais denominadas de escalas logarítmicas.

5.2 Escala logarítmica

A construção de uma escala logarítmica está relacionada à divisão de certo seguimento de reta em partes proporcionais aos valores dos logaritmos dos números numa determinada base a [13]. Se a base utilizada nessa escala for a base 10, adota-se a década logarítmica como sendo a variação entre potências de 10 consecutivas (10^n a 10^{n+1}), onde n é um número inteiro. A Fig.5.4 mostra como se constrói uma escala logarítmica na base 10. Nessa escala, um ponto $x \times 10^n$, é marcado numa década entre 10^n e 10^{n+1} .

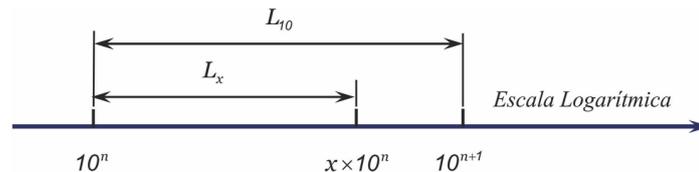


Fig. 5.4: Segmento de reta orientado utilizado para construir uma escala logarítmica na base 10.

Nessa figura, L_x é a distância do ponto $x \times 10^n$ em relação à referência 10^n e L_{10} é a distância entre 10^n

e 10^{n+1} da escala logarítmica. Na escala logarítmica a razão entre essas distâncias e as diferenças dos logaritmos dos pontos correspondentes é invariante, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{L_{10}}{\log 10^{n+1} - \log 10^n} &= \frac{L_x}{\log(x \times 10^n) - \log 10^n} \\ \Rightarrow \frac{L_{10}}{\log\left(\frac{10^{n+1}}{10^n}\right)} &= \frac{L_x}{\log x + \log 10^n - \log 10^n} \\ \Rightarrow \frac{L_{10}}{\log 10} &= \frac{L_x}{\log x} \end{aligned}$$

ou

$$\log x = \frac{L_x}{L_{10}} \quad (5.4)$$

A Eq.5.4 permite determinar o logaritmo de qualquer número x na base 10 a partir da escala construída. Similarmente, numa base natural $e = 2,781\dots$, ou mesmo, numa base a qualquer tem-se, respectivamente:

$$\ln x = \frac{L_x}{L_e} \qquad \log_a x = \frac{L_x}{L_a} \quad (5.5)$$

É importante mencionar que a origem de uma escala logarítmica não precisa iniciar em $10^0 = 1$ mas deve iniciar numa potência de 10 conveniente. Além disso, como não existe logaritmo de números negativos ou nulos, esses não podem ser utilizados para construir uma escala logarítmica.

5.3 Papel loglog

O papel loglog, ou dilog, mostrado na Figs.5.5, foi construído a partir da escala logarítmica e é utilizado para linearização de funções polinomiais. O papel loglog possui as escalas vertical e horizontal divididas de forma logarítmica. Portanto, é possível marcar os valores das variáveis dependente e independente da função polinomial, diretamente sobre as escalas do papel loglog, sem a necessidade de calcular o logaritmo desses valores. Uma ou mais décadas da escala logarítmica podem ser utilizadas para representar pontos experimentais associados às grandezas analisadas. Por exemplo, se as grandezas tiverem variações de 0,1 a 10, na primeira década coloca-se os valores entre 0,1 e 1, e na segunda os valores entre 1 e 10. Todas as décadas têm o mesmo comprimento e mesmas subdivisões. Como na primeira década o primeiro traço vale 0,1, então o segundo traço vale 0,2, na segunda década o primeiro traço vale 1, então o segundo traço vale 2, e assim por diante. Cada década apresenta 10 subdivisões, que podem também estar subdivididas em 2, 5 ou 10 partes. Alguns papeis logarítmicos comerciais apresentam suas décadas igualmente numeradas e, nesse caso, é o experimentador que deve definir as faixas de potência de 10 que melhor lhe convém.

Pode-se utilizar a Eq.5.1 e o papel loglog da Fig.5.5, para calcular, por exemplo, os logaritmos dos números 2 e 0,0148 nas bases 10 ou qualquer outro que se queira. Para isso, deve-se observar que qualquer década do eixo logarítmico tem comprimento $L_{10} \approx 30 \text{ mm}$. Sabendo disso e medindo os comprimentos L_2 e $L_{1,48}$, indicados na figura, obtém-se:

$$\log 2 = \frac{L_2}{L_{10}} \approx \frac{9,0 \text{ mm}}{30,0 \text{ mm}} \approx 0,30$$

$$\log 0,0148 = \log(1,48 \times 10^{-2}) = \log 1,48 - 2 = \frac{L_{1,48}}{L_{10}} - 2 \approx \frac{5,0 \text{ mm}}{30,0 \text{ mm}} - 2 \approx -1,83$$

Os papeis logarítmicos podem apresentar diferentes tamanhos, mas, como existe uma mesma correspondência entre logaritmos e comprimentos, encontram-se, em todos os casos, os mesmos resultados acima.

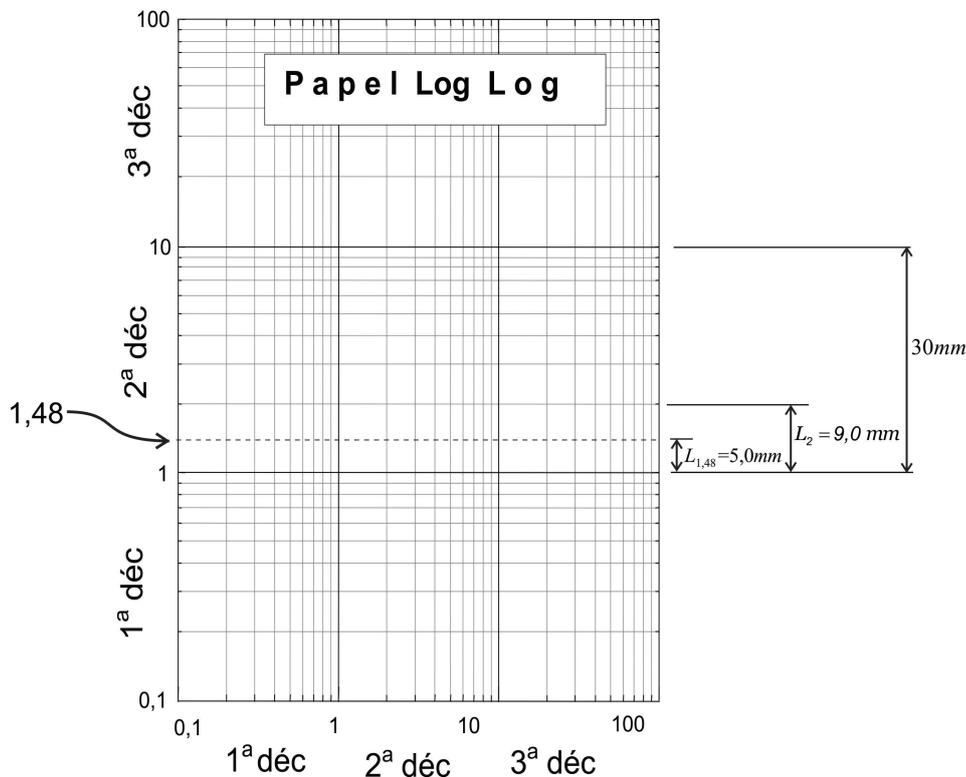


Fig. 5.5: Aspectos gerais dos papéis loglog.

5.4 Uso de papéis loglog na linearização de funções polinomiais

Observa-se, na Eq.5.2, que as variáveis dependente $Y = \log y$ e independente $X = \log x$, são ambas logarítmicas. Isso significa que quando se constrói um gráfico dos pares ordenados (x, y) diretamente num papel loglog, tem-se como resultado uma reta. Deve-se concluir que o papel loglog é apropriado para linearizar funções do tipo polinomiais. Por exemplo, os pontos marcados no papel loglog da Fig.5.6, são resultantes dos dados x e y de uma determinada experiência cujo comportamento $y = f(x)$ acredita-se ser do tipo polinomial.

A reta indicada na Fig.5.6 é a reta que melhor se ajusta aos pontos marcados no gráfico. Como mostrado nessa mesma figura, o valor do coeficiente angular A pode ser obtido diretamente da reta ajustada, escolhendo-se nela dois pontos arbitrários (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , como:

$$A = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} \quad (5.6)$$

O valor do expoente m do polinômio é obtido diretamente de $m = A$.

Substituindo os pontos $(x_1, y_1) = (0,23; 0,030)$ e $(x_2, y_2) = (1,4; 7,0)$, escolhidos arbitrariamente sobre a reta ajustada no exemplo da Fig.5.6, na Eq.5.6, obtém-se

$$m = A = \frac{\log 7,0 - \log 0,030}{\log 1,4 - \log 0,23} \approx \frac{0,84 - (-1,52)}{0,15 - (-0,64)} \approx 3,0$$

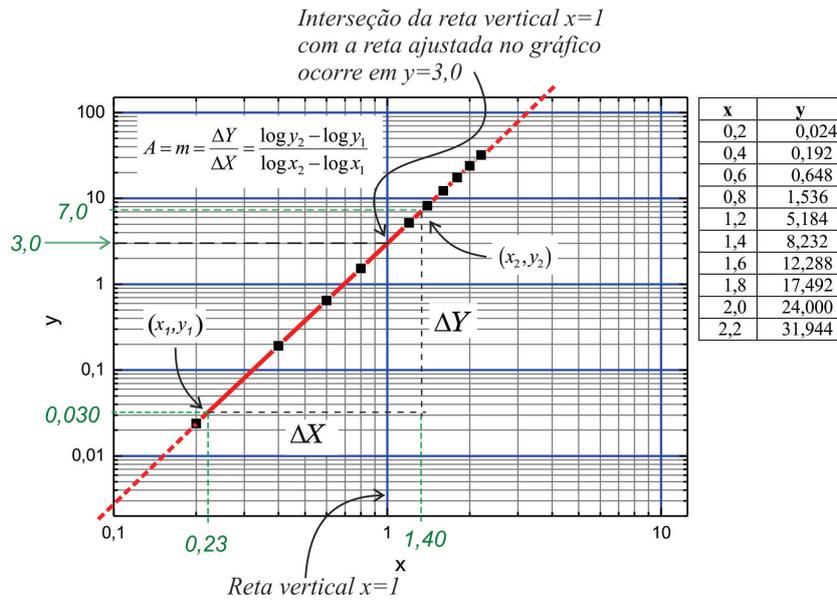


Fig. 5.6: Linearização de uma função polinomial em papel loglog.

O valor de k , do qual depende o coeficiente linear B , pode ser determinado diretamente da reta ajustada assumindo a seguinte condição na Eq.5.2

$$m \log x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Observa-se que esta condição resulta em

$$\log y = \log k + 0 \Rightarrow k = y$$

Assim, desde que a reta vertical $x = 1$ esteja presente na escala do gráfico, o valor de $k = y$ pode ser obtido através da interseção da reta $x = 1$ com a reta ajustada no gráfico. No exemplo da Fig.5.6 é fácil observar que essa condição ocorre para $y = k = 3,0$. Por outro lado, quando a reta vertical $x = 1$ não está presente na escala do gráfico, a alternativa será calcular o valor de k através da Eq.5.1 escolhendo um ponto arbitrário (x_1, y_1) na reta ajustada. Nesse caso, a Eq.5.1 fornece $y_1 = kx_1^m$, ou

$$k = \frac{y_1}{x_1^m} \quad (5.7)$$

Usando novamente um dos pontos escolhidos no exemplo da Fig.5.6, tal como, $(x_1, y_1) = (1, 7; 15)$, obtém-se $k = \frac{15}{1,73,0} \approx 3,0$, o que concorda com o valor calculado anteriormente. Portanto, a função polinomial que relaciona as variáveis x e y neste exemplo, é $y = 3,0x^{3,0}$

É importante mencionar que o método dos mínimos quadrados ou método gráfico não pode ser usado aqui para calcular qualquer um dos coeficientes A e B . Esses métodos só se aplicam aos pontos lineares marcados sobre escalas também lineares.

5.5 Funções exponenciais

Essas funções tem a seguinte forma geral:

$$y = ke^{mx} \quad (5.8)$$

onde k , m e $e = 2,781...$ são constantes. Aplicando a função logaritmo decimal a ambos os lados da Eq.5.8, obtém-se:

5.6 O papel monolog e o seu uso na linearização de funções exponenciais

$$\log y = \log k + m (\log e) x \quad (5.9)$$

ou

$$Y = B + AX \quad (5.10)$$

onde, $Y = \log y$, $B = \log k$, $A = m (\log e)$ e $X = x$. Do mesmo modo, pode-se construir um gráfico da função dada na Eq.5.8, numa escala linear em um papel milimetrado e obter os valores de A e B diretamente a partir do gráfico. Por exemplo, os pontos marcados no gráfico da Fig.5.7, são resultantes do cálculo do logaritmo dos dados y de uma determinada experiência cujo comportamento $y = f(x)$ é do tipo exponencial.

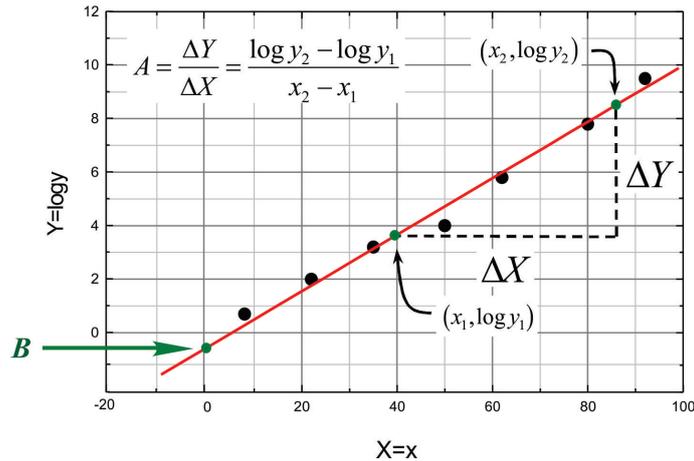


Fig. 5.7: Linearização de uma função exponencial numa escala linear em papel milimetrado.

Novamente, a reta indicada na Fig.5.7 é a reta que melhor se ajusta aos pontos marcados no gráfico. Como mostrado nessa mesma figura, os valores dos coeficientes angular A e linear B , podem ser obtidos diretamente da reta ajustada, como:

$$A = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1} \quad (5.11)$$

e

$$B = \text{intersecção da reta com o eixo } Y \text{ para } X = 0 \quad (5.12)$$

Como antes, os coeficientes A e B poderiam ser obtidos também utilizando o método dos mínimos quadrados ou método gráfico. A partir dos valores obtidos de A e B , pode-se determinar a constante k , por meio da relação $k = 10^B$ e o expoente m do polinômio diretamente de

$$m = \frac{A}{\log e} \quad (5.13)$$

5.6 O papel monolog e o seu uso na linearização de funções exponenciais

O papel monolog, ou semilog, mostrado na Fig.5.8(a), construído a partir da escala logarítmica, é utilizado para **linearização de funções exponenciais**. Uma ou mais décadas da escala logarítmica podem ser utilizadas para representar pontos experimentais associados às grandezas analisadas. O papel monolog possui a escala vertical dividida de forma logarítmica, enquanto que a escala horizontal está dividida linearmente, análoga à do papel milimetrado. Portanto, é possível marcar os valores de ambas as variáveis da função não linear, dependente e independente, diretamente sobre o papel monolog sem a necessidade

de efetuar operações matemáticas.

Observa-se, na Eq.5.10, que a variável dependente $Y = \log y$ é logarítmica enquanto que a variável independente $X = x$ é linear. Isso significa que quando se constrói um gráfico dos pares ordenados (x, y) diretamente num papel monolog, tem-se como resultado uma reta. Deve-se concluir que o papel monolog é apropriado para linearizar funções do tipo exponenciais. Por exemplo, os pontos marcados no papel monolog da Fig.5.8(b), são resultantes dos dados x e y de uma determinada experiência cujo comportamento $y = f(x)$ acredita-se ser do tipo exponencial.

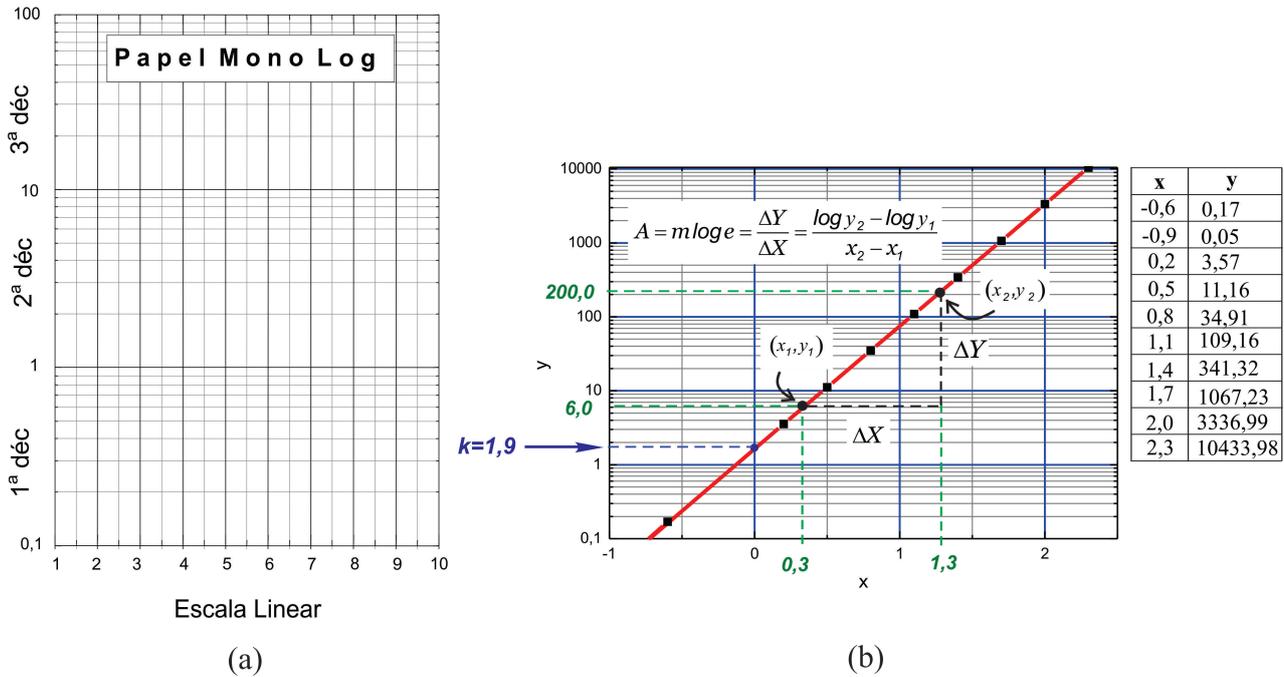


Fig. 5.8: (a) Aspectos gerais dos papeis monolog e (b) linearização de uma função exponencial em papel monolog.

A reta indicada na Fig.5.8(b) é a reta que melhor se ajusta aos pontos marcados no gráfico. Como mostrado nessa mesma figura, o valor do coeficiente angular A pode ser obtido diretamente da reta ajustada, escolhendo-se nela dois pontos arbitrários (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e substituindo-os na Eq.5.11.

Substituindo os pontos $(x_1, y_1) = (0,3; 6,0)$ e $(x_2, y_2) = (1,3; 200)$, escolhidos arbitrariamente sobre a reta ajustada no exemplo da Fig.5.8(b), na Eq.5.11, obtém-se

$$A = \frac{\log 200 - \log 6,0}{1,3 - 0,3} \approx \frac{2,300 - 0,77}{1,0} \approx 1,53$$

Assim, da Eq.5.12, o valor da constante m é dado por, $m = \frac{A}{\log e} \approx \frac{1,53}{0,43} \approx 3,6$.

O valor de k , do qual depende o coeficiente linear B , pode ser determinado diretamente da reta ajustada assumindo a seguinte condição na Eq.5.9

$$m (\log e)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Observa-se que esta condição resulta em

$$\log y = \log k + 0 \Rightarrow k = y$$

Assim, o valor de $k = y$ pode ser obtido através da intersecção da reta $x = 0$ com a reta ajustada no gráfico. No exemplo da Fig.5.8 é fácil observar que essa condição ocorre para $y = k = 1,9$. Por outro lado, quando a reta vertical $x = 0$ não está presente na escala do gráfico, a alternativa será calcular o valor de k através da Eq.5.8 escolhendo um ponto arbitrário (x_1, y_1) na reta ajustada. Nesse caso, obtém-se $y_1 = ke^{mx_1}$, ou

$$k = \frac{y_1}{e^{mx_1}} \quad (5.14)$$

Usando novamente um dos pontos escolhidos no exemplo da Fig.5.8, tal como, $(x_1, y_1) = (0,3; 6,0)$, obtém-se $k = \frac{6,0}{e^{3,6 \times 0,3}} \approx 2,0$, o que concorda razoavelmente com o valor calculado anteriormente. Portanto, a função polinomial que relaciona as variáveis x e y neste exemplo, é $y = 1,9e^{3,6x}$

Analogamente aos gráficos lineares em papel loglog, o método dos mínimos quadrados ou método gráfico não pode ser utilizado aqui para calcular os coeficientes angular A e linear B . Esses métodos só se aplicam aos pontos lineares marcados sobre escalas também lineares.

Exercícios

1. O movimento de queda livre é o exemplo mais notável de movimento retilíneo uniformemente acelerado. Como o movimento de queda livre ocorre na vertical ao longo de um eixo y , é comum escrever a equação desse movimento como

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.15)$$

onde g é a aceleração da gravidade local. Se um objeto é abandonado, com velocidade inicial $v_0 = 0$ de uma altura $y = h$, a partir de uma posição inicial $y_0 = 0$, a Eq.5.16 torna-se

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.16)$$

| h (m) | t (s) |
|---------|---------|
| 0,200 | 0,1593 |
| 0,250 | 0,1831 |
| 0,300 | 0,2046 |
| 0,350 | 0,2238 |
| 0,400 | 0,2432 |
| 0,450 | 0,2593 |
| 0,500 | 0,2750 |
| 0,550 | 0,2912 |
| 0,600 | 0,3056 |
| 0,650 | 0,3202 |
| 0,700 | 0,3336 |
| 0,750 | 0,3468 |
| 0,800 | 0,3599 |

Tab. 5.2: Tempos de queda de um objeto para diferentes deslocamentos em queda livre.

Um estudante, residente em uma cidade que fica a mais de mil de altura do nível do mar, resolve comprovar a equação teórica do movimento de queda livre. De posse de um cronômetro digital de precisão, o estudante mede os tempos de queda de um objeto, inicialmente em repouso, para diferentes deslocamentos em queda livre. A Tab.5.2 mostra o resultado experimental obtido na experiência. Marque esses pontos em um papel log - log, trace a reta que melhor se ajusta aos

pontos experimentais e calcule a aceleração da gravidade g na cidade onde reside o estudante. Com o resultado da experiência, é possível comprovar que o movimento de queda livre é de fato um movimento retilíneo uniformemente acelerado? Justifique.

2. A interação da radiação com a matéria faz-se através de diversos processos físicos. Estes processos são a difusão elástica de Rayleigh, o efeito fotoelétrico, a difusão de Compton e a criação de pares elétron-positron, sendo que a probabilidade de ocorrência de cada um destes processos depende essencialmente da energia do fóton e do tipo de material atravessado. A relação entre a taxa de contagem inicial R_0 e a taxa de contagem R de um feixe de fótons após atravessar um meio material de espessura t , segundo uma determinada direção, é

$$R = R_0 e^{-\mu t} \quad (5.17)$$

onde μ é o coeficiente linear de atenuação total, que inclui cada um dos processos de interação do fóton com o meio material.

| | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| t (mm) | 1,22 | 2,21 | 3,10 | 4,32 | 5,31 | 6,53 | 7,28 | 8,50 | 9,91 |
| R (CPS) | 9,32 | 8,83 | 8,46 | 8,27 | 8,38 | 8,15 | 7,90 | 7,63 | 7,46 |

Tab. 5.3: Taxas de contagens no Alumínio para diferentes espessuras.

Com o objetivo de estudar o poder de penetração da radiação γ originária de uma determinada fonte radioativa de $^{137}\text{Cs}_{55}$ em alumínio, mediu-se a taxa de contagem, em contagens por segundo (CPS), para diversas espessuras de lâminas desse material. A Tab.5.3 mostra o resultado experimental obtido nessa experiência. Marque esses pontos em um papel mono - log, trace a reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais e calcule o coeficiente de atenuação μ_{Al} da radiação no alumínio.

Bibliografia

- [1] Regras de arredondamento na numeração decimal, Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT/NB 87), 1977
- [2] Grandezas e unidades, Princípios gerais, Anexo B: "Guia para o arredondamento de números", 3ª Ed., 1992; esta norma está em revisão e será editada proximoamente sob o novo número: ISO 80000.
- [3] BIPM/IEC/IFCC/ISO/IUPAC/OIML, "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", (corrected and reprinted, 1995), International Organization for Standardization (ISO), 1993, Geneva.
- [4] Gordon M. Bragg, "*Principles of Experimentation and Measurement*", Prentice - Hall, inc., Englewood.
- [5] Vuolo J. H., "*Fundamentos da teoria de erros*", 2 ed., Egdard Blücher Ltda. 1996.
- [6] NIS 3003, The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement for Calibrations. NAMAS (Reino Unido), 8ª edição, 1995.
- [7] Cramér H., "*Mathematical methods of statistical*", Princeton University Press, 1999.
- [8] William Gosset, site da Ação Local Estatística Aplicada.
- [9] Revised March 27, 2010 and May 8, 2020 from Castrup, H., "A Welch-Satterthwaite Relation for Correlated Errors", Proc. 2010 Meas. Sci. Conf., Pasadena, March 26, 2010.
- [10] JCGM. Joint Committee for Guides in Metrology, Working Group 1. "Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement." 1st ed. Sèvres: BIPM. 2008.
- [11] Contagem em Desenho Técnico - Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT/NB 10126), 1987.
- [12] Adaptação do site <http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html>
- [13] Stempniak A., "Alguns Aspectos da Física da Luz", Escola de Inverno de 11 a 17 de julho de 1999, ITA, São José dos Campos -SP.